Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes.

Nota di GIOVANNI PRODI (a Trieste).

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si dà un teorema di unicità per il sistema di* NAVIER-STOKES *(problema misto), in una impostazione generalizzata.*

Le equazioni di NAVIER-STOKES (caso tridimensionale) si scrivono nel seguente modo (¹):

$$(1) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \mu \Delta_2 u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Qui il vettore u, di componenti u_j, rappresenta la velocità della particella fluida che si trova nel punto x (di coordinate x_i) all'istante t, p rappresenta la pressione, f la forza di massa e μ il coefficiente di viscosità.

Il problema che consideriamo è questo: dato un insieme aperto Ω di frontiera Γ, si cerca la soluzione u del sistema (1) (2), supponendo assegnata u in Ω per $t = 0$ e supponendo $u(x, t) = 0$ per $x \in \Gamma$, $t \geq 0$.

Non si sa ancora se, in una opportuna classe di funzioni e per una impostazione conveniente, questo problema ammetta soluzione unica « in grande », cioè per arbitrari valori di t. L'argomento è stato oggetto di studi profondi da parte di J. LERAY [4], ai quali si sono aggiunti, negli ultimi anni, notevoli contributi di E. HOPF [2], KISELEV e LADIZENSKAYA [3], J. L. LIONS [5]. Si conoscono, allo stato attuale, teoremi di esistenza « in grande » solo per impostazioni generalizzate (« soluzioni turbolente » secondo la denominazione di LERAY); di qui l'importanza di teoremi di unicità che valgano in ipotesi assai ampie.

Il presente lavoro intende portare un contributo in questo senso. Il teorema di unicità che esporremo comprende come casi particolari due teoremi di KISELEV e LADYZENSKAYA contenuti nel lavoro [3]. Come è implicito in

(¹) Abbiamo adottato la comoda convenzione di sottintendere il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti. Nel seguito scriveremo anche $u\,v$ per indicare il prodotto scalare dei due vettori u e v, cioè l'espressione $u_i v_i$. Abbiamo seguito il più possibile le notazioni di J. L. LIONS (come nel lavoro [5] e in manoscritti gentilmente fattici conoscere dall'A.).

quanto detto sopra, le ipotesi che introdurremo per assicurare l'unicità, malgrado la loro generalità, non individuano ancora una classe per cui si conosca un teorema di esistenza «in grande».

I risultati qui contenuti sono stati esposti (nell'ipotesi ulteriore della limitatezza dell'insieme Ω) durante un Seminario tenutosi nella primavera scorsa presso la Scuola Normale Superiore di Pisa ([2]).

Indichiamo con Ω un insieme aperto qualunque di R^3 (spazio euclideo tridimensionale), con Γ la frontiera di Ω.

Sia $L^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali, definite in Ω, misurabili, a p-sima potenza sommabile, con la norma consueta. Indichiamo con $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni vettorali, con componenti appartenenti a $L^p(\Omega)$; in $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ introduciamo la norma

$$|u|_{L^p} = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

essendo $|u(x)|$ il modulo del vettore $u(x)$.

Per $p = 2$ questo spazio ha struttura hilbertiana individuata dal prodotto scalare $(u, v) = \int_\Omega u_j v_j dx$. Scriveremo $|u| = |u|_{L^2} = (u, u)^{1/2}$. Indicheremo lo spazio $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ anche col simbolo H.

Indichiamo con $\mathfrak{N}(\Omega)$ la varietà dei vettori definiti in Ω, dotati di derivate prime continue, nulli fuori di un compatto contenuto in Ω, e solenoidali.

Sia $N(\Omega)$ la chiusura di $\mathfrak{N}(\Omega)$ in H. Se indichiamo con $M(\Omega)$ la varietà dei vettori di H che sono gradiente di un potenziale, si riconosce facilmente che $M(\Omega)$ e $N(\Omega)$ sono ortogonali e sono varietà complementari in H.

Notiamo che la condizione $u \in N(\Omega)$ non implica che u debba annullarsi sulla frontiera. Nell'ipotesi che u abbia derivate continue in $\Omega \cup \Gamma$ e che Γ sia di classe 1, si vede facilmente che al vettore u viene semplicemente imposto di essere, su Γ, tangente a Γ.

Indichiamo con $H^1(\Omega)$ lo spazio dei vettori appartenenti ad $H(\Omega)$ assieme alle loro derivate parziali rispetto alle x_j $(j = 1, 2, 3)$; in $H^1(\Omega)$ introdurremo una norma definita dalla relazione

$$|u|^2_{H^1(\Omega)} = |u|^2 + \sum_1^3{}_j \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2$$

Anche $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert reale. Per ogni coppia $u, v, \in H^1(\Omega)$,

---

([2]) Il testo delle relazioni è stato raccolto in *Rassegna di ricerche intorno alle equazioni di Navier-Stokes* (Istituto di Matematica dell'Università di Trieste - Quaderno n. 2).

scriveremo:

$$((u, v)) = \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \qquad \text{Scriveremo anche } \| u \|^2 = ((u, u)).$$

Indichiamo con $N^1(\Omega)$ la chiusura di $\mathfrak{N}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. La condizione $u \in N^1(\Omega)$ implica anche, in un certo senso, l'annullarsi di u sulla frontiera Γ.

Per le considerazioni che seguiranno sarà comodo fare uso della teoria delle funzioni di variabile reale con valori in uno spazio di BANACH. Per questa rimandiamo al Cap. III del trattato: HILLE - «Functional Analysis and Semi-Groups». Se B è uno spazio di BANACH, scriveremo $u \in L^p(0, \tau; B)$ per dire che u è funzione di t, con valori in B, a p-sima potenza sommabile nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \tau$. Lo spazio $L^p(0, \tau; L^p(\Omega))$ si potrà identificare con $L^p(\Omega \times (0 \vdash\!\dashv \tau))$.

Se $u, v, w \in N^1(\Omega)$, poniamo [3]:

$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx$$

b è una forma lineare rispetto a ciascuno degli argomenti. Si avrà poi $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$; da cui $b(u, v, v) = 0$. Varrà anche la limitazione

$$(3) \qquad |b(u, v, w)| \leq |u|_{L^4} \| v \| \, |w|_{L^4}$$

Ciò posto, il problema di cui ci occuperemo (che rappresenta una traduzione in termini generalizzati del problema enunciato sopra [4]) si può esprimere così:

Cercare una funzione $u(t)$ con $u \in L^2(0, \tau; N^1(\Omega))$, $u \in L^4(0, \tau, L^4(\Omega))$, tale che si abbia

$$(4) \qquad \int_0^\tau \left\{ -\left(u(t), \frac{dv}{dt}\right) + \mu((u(t), v(t))) + b(u(t), u(t), v(t)) \right\} dt =$$
$$= \int_0^\tau (f(t), v(t))dt + (a, v(0))$$

per ogni funzione $v(t)$ che goda di queste proprietà:

a) *$v(t)$ sia continua come funzione con valori in $N^1(\Omega)$* [5]

---

[3] Osserviamo che $v \in N^1(\Omega)$ implica $v \in H$, $v \in L^6(\Omega)$ (cfr. la 10)). Perciò è $v \in L^p(\Omega)$ per ogni p, con $2 \leq p \leq 6$ (cfr. lemma 4).

[4] Tralasciamo, per brevità, di esaminare le relazioni che intercorrono tra la formulazione data all'inizio e quella, generalizzata, qui esposta. Queste relazioni si trovano esaminate nella *Rassegna* citata in [2].

[5] Cfr. nota [3].

b) $v(t)$ *abbia derivata prima rispetto a t tale che* $\frac{dv}{dt} \in L^2(0, \tau; N(\Omega))$.

c) $v(t)$ *si annulli nell'intorno del valore* τ.

Nella (4) si suppone che $f \in L^2(0, \tau; H(\Omega))$ e che la funzione $a(x)$, esprimente i valori iniziali, appartenga a $N(\Omega)$.

Per giungere al teorema di unicità ci occorrono alcuni lemmi.

Lemma 1. - *Ad ogni funzione $u(t)$, soluzione del problema posto nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \tau$, si può associare un insieme T_u di misura uguale a τ tale che, per ogni $\eta \in T_u$ e per ogni funzione v soddisfacente alle condizioni* a) e b), *si abbia:*

$$(u(\eta), v(\eta)) + \int_0^\eta \left\{ -\left(u(t), \frac{dv}{dt}\right) + \mu((u(t), v(t))) + b(u(t), u(t), v(t)) \right\} dt = \tag{5}$$

$$= \int_0^\eta (f(t), v(t))dt + (a, v(0)).$$

Sia infatti T_u l'insieme dei valori di t, con $0<t<\tau$, per cui sussistono simultaneamente queste proprietà:

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^{-1} \int_t^{t+\delta} u(\eta)d\eta = u(t) \quad (\text{in } N(\Omega)), \qquad u(t) \in N^1(\Omega)).$$

L'insieme T_u ha misura uguale a τ. Preso un $\eta \in T_u$ e presa una funzione $v(t)$, associamo ad essa una funzione v_δ (essendo $\delta > 0$ e tale che $\eta + \delta < \tau$) così definita

$$v_\delta(t) = \begin{cases} v(t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq \eta \\ \delta^{-1}(\eta + \delta - t)v(\eta) \quad \text{per} \quad \eta \leq t \leq \eta + \delta \\ 0 \quad \text{per} \quad \eta + \delta \leq t. \end{cases}$$

Evidentemente, v_δ soddisfa ancora alle condizioni a) e b) imposte alle test-functions. In più soddisfa alla c). Sostituiamo v_δ e v nella (4) e facciamo tendere δ a zero. Consideriamo separatamente il comportamento dei vari termini. Avremo:

$$\int_0^\tau \left(u(t), \frac{dv_\delta}{dt}\right) dt = \int_0^\eta \left(u(t), \frac{dv}{dt}\right) dt - \delta^{-1} \int_\eta^{\eta+\delta} (u(t), v(\eta))dt =$$

$$= \int_0^\eta \left(u(t), \frac{dv}{dt}\right) dt - \left(\delta^{-1} \int_\eta^{\eta+\delta} u(t)dt,\ v(\eta)\right).$$

Perciò

$$\lim_{\delta\to 0} -\int_0^\tau \left(u(t), \frac{dv_\delta}{dt}\right) dt = -\int_0^\eta \left(u(t), \frac{dv}{dt}\right) d\eta + (u(\eta), v(\eta))$$

Si ha poi

$$\int_0^\tau ((u(t), v_\delta(t)))dt = \int_0^\eta ((u(t), v(t)))dt + \delta^{-1}\int_\eta^{\eta+\delta} ((u(t), v(\eta)))(\eta+\delta-t)dt$$

$$\int_0^\tau b(u(t), u(t), v_\delta(t))dt = \int_0^\eta b(u(t), u(t), v(t))dt + \delta^{-1}\int_\eta^{\eta+\delta} b(u(t), u(t), v(\eta))(\eta+\delta-t)dt.$$

Si vede facilmente che, in ciascuna di queste espressioni, l'ultimo termine è infinitesimo per $\delta\to 0$. Si deduce immediatamente la validità della (5).

LEMMA 2. - *Siano u, u' due soluzioni del problema, relative ai medesimi dati. Allora, posto $w = u' - u$, si ha, per quasi tutti i valori di η in $0 \vdash\!\dashv \tau$:*

$$\frac{1}{2}|w(\eta)|^2 + \mu\int_0^\eta \|w(t)\|^2 dt - \int_0^\eta b(w, w, u)dt = 0. \tag{6}$$

Infatti, preso $\eta \in T_u \cap T_{u'}$, scritta la (5) per u e per u', facendo la differenza membro a membro, si ottiene;

$$(w(\eta), v(\eta)) + \int_0^\eta \left\{ -\left(w(t), \frac{dv}{dt}\right) + \mu((w(t), v(t))) + b(w, u, v) + b(u, w, v) + \right.$$
$$\left. + b(w, w, v) \right\} dt = 0. \tag{7}$$

Definiamo ora una funzione $w^*(t)$ su tutto l'asse reale ponendo

$$w^*(t) = \begin{cases} w(t) - w(\eta)\eta^{-1}t & \text{per } \ 0 \leq t \leq \eta \\ 0 \ \ \text{altrove.} \end{cases}$$

Indichiamo poi con J_ε un operatore di regolarizzazione così definito:

$$J_\varepsilon g(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t-\xi}{\varepsilon}\right) g(\xi) d\xi$$

essendo K una funzione non negativa, pari, indefinitamente derivabile, nulla fuori di un intervallo limitato e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)d\xi = 1$. Se una funzione $g(t)$ definita in un intervallo $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ contenente nel suo interno l'intervallo $0 \vdash\!\dashv \tau$, con valori in uno spazio di BANACH B, è tale che $g \in L^p(\alpha, \beta; B)$, allora la funzione $J_\varepsilon g$, al tendere di ε a zero, converge verso g in $L^r(0, \tau; B)$. L'operatore J_ε^2 ha, come è facile constatare, una analoga rappresentazione e, quindi, come operatore di approssimazione, ha analoghe proprietà.

Poniamo ora nella (7) $v(t) = v_\varepsilon(t) = w(\eta)\eta^{-1}t + J_\varepsilon^2 w^*(t)$. Si constata facilmente che v_ε soddisfa alle condizioni a) e b) imposte alle « test functions ». Facciamo tendere ε a zero. Studiamo dapprima il comportamento dell'espressione $(w(\eta), v_\varepsilon(\eta)) - \int_0^\eta \left(w(t), \frac{dv_\varepsilon}{dt}\right) dt$. Questa si può scrivere

$$(w(\eta), w(\eta) + J_\varepsilon^2 w^*(\eta)) - \int_0^\eta \left(w(\eta)\eta^{-1}t + w^*(t), w(\eta)\eta^{-1} + \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt =$$

$$= |w(\eta)|^2 + (w(\eta), J_\varepsilon^2 w^*(\eta)) - |w(\eta)|^2 \eta^{-2} \int_0^\eta t dt - \int_0^\eta \left(w(\eta)\eta^{-1}t, \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt -$$

$$- \int_0^\eta (w^*(t), w(\eta)\eta^{-1}) dt - \int_0^\eta \left(w^*(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} |w(\eta)|^2 + (w(\eta), J_\varepsilon^2 w^*(\eta)) - \left[(w(\eta)\eta^{-1}t, J_\varepsilon^2 w^*(t))\right]_{t=0}^{t=\eta} + \int_0^\eta (J_\varepsilon^2 w^*(t) - w^*(t), w(\eta)\eta^{-1}) dt -$$

$$- \int_0^\eta \left(w^*(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} |w(\eta)|^2 + \left(\int_0^\eta (J_\varepsilon^2 w^*(t) - w^*(t)) dt, w(\eta)\eta^{-1}\right) - \int_0^\eta \left(w^*(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt.$$

Il secondo termine è infinitesimo per $\varepsilon \to 0$. Consideriamo l'ultimo termine. Si ha:

$$\int_0^\eta \left(w^*(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(w^*(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w^*(t)\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(w^*(t), J_\varepsilon \frac{d}{dt} J_\varepsilon w^*(t)\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(J_\varepsilon w^*(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon w^*(t)\right) dt = 0.$$

Passiamo ora agli altri termini che compaiono nella (7) sotto il segno di integrale. Poichè, per $\varepsilon \to 0$, v_ε converge verso w sia in $L^2(0, \tau; N^1(\Omega))$ che in $L^4(0, \tau; \boldsymbol{L}^4(\Omega))$, si può passare al limite sostituendo a v_ε w. Tenendo presente che, quasi ovunque in $0 \vdash\!\dashv \tau$, si ha $b(u, w, w) = 0$, $b(w, w, w) = 0$, $b(w, u, w) = -b(w, w, u)$, si ottiene subito la (6).

OSSERVAZIONE. - Dalla (6) si ricava, in particolare, $w \in L^\infty(0, \tau; N(\Omega))$.

Il seguente lemma ha per oggetto una diseguaglianza che rientra in una più generale data da NIRENBERG (Comunicata al Congresso dei Matematici di Edinburgo, 1958). La dimostrazione che ora diamo è una immediata conseguenza di un lemma di E. GAGLIARDO [1].

LEMMA 3 - *Sia Ω un insieme aperto tridimensionale qualunque. Sia $\mathfrak{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili e nulle fuori di un compatto contenuto in Ω. Vale allora, per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, la maggiorazione*

$$\int_\Omega |\varphi|^3 dx \leq 2^3 \prod_i \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right|_{L^{3/2}(\Omega)} . \tag{8}$$

Poniamo $w_1(x_2, x_3) = \max\limits_{-\infty < x_1 < +\infty} |\varphi(x)|$ analogamente definiamo w_2 e w_3.

Si avrà $w_1^2 = 2 \max\limits_{-\infty<x_1<+\infty} \int_{-\infty}^{x_1} \varphi \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1$, perciò $|w_1|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi| \left| \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right| dx_1$.

Da questa si ricava:

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x_2<+\infty \\ -\infty<x_3<+\infty}} |w_1|^2 dx_2 dx_3 \leq 2 \int_\Omega |\varphi| \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right| dx \leq 2 \left(\int_\Omega |\varphi|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} . \tag{9}$$

Si verifica poi facilmente la diseguaglianza

$$\int_\Omega |\varphi|^3 dx \leq \int_\Omega w_1 w_2 w_3 dx \leq \left(\iint w_1^2 dx_2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint w_2^2 dx_1 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint w_3^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Da questa utilizzando la (9) e le analoghe, si ha

$$\int_\Omega |\varphi|^3 dx \leq 2^{\frac{3}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi|^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} \prod_i \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}}$$

da cui

$$\left(\int_\Omega |\varphi|^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{3}{2}} \prod_i \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Elevando al quadrato membro a membro, si ottiene subito la (8).

Noi utilizzeremo la (8) in questo modo. Sostituiamo nella (8) u^2 a φ, essendo $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Abbiamo, tenendo presente che i numeri 4 e 4/3 sono esponenti coniugati:

$$\int_\Omega u^6 dx \leq 2^6 \prod_i \left(\int_\Omega \left| u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \leq 2^6 \left(\int_\Omega u^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_i \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Da questa si ottiene

$$\left(\int_\Omega u^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^6 \frac{1}{3^{3/2}} \left(\int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{3}{2}}$$

e, infine

$$| u |_{L^6(\Omega)} \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \| u \|. \tag{10}$$

Nel caso di un dominio limitato, questa maggiorazione si deduce dal noto teorema di SOBOLEV-IL'IN. Era importante per noi estenderne la validità al caso di un insieme aperto qualsiasi.

LEMMA 4. - *Sia u una funzione vettoriale tale che $u \in \boldsymbol{L}^\alpha(\Omega)$, $u \in \boldsymbol{L}^\beta(\Omega)$. $(1 \leq \alpha < \beta)$. Allora, per ogni q tale che $\alpha \leq q \leq \beta$, si ha $u \in \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ e*

$$| u |_{L^q(\Omega)} \leq | u |_{L^\alpha(\Omega)}^{\frac{\alpha(\beta-q)}{q(\beta-\alpha)}} | u |_{L^\beta(\Omega)}^{\frac{\beta(q-\alpha)}{q(\beta-\alpha)}} . \tag{11}$$

Infatti, siano m, n numeri positivi tali che $m + n = q$ e siano s, s' due esponenti coniugati. Si avrà

$$| u |_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_\Omega | u(x) |^{ms} dx \right)^{\frac{1}{sq}} \left(\int_\Omega | u(x) |^{ns'} dx \right)^{\frac{1}{s'q}} .$$

Imponendo che sia $ms = \alpha$, $ns' = \beta$ si ottiene immediatamente la dimostrazione della sommabilità di $| u(x) |^q$ e la verifica della (11).

LEMMA 5. - *Sia $u \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ con $p > 3$ e sia $w \in N^1(\Omega)$; vale allora la limitazione*

$$| b(w, w, u) | \leq \mu \| w \|^2 + c | u |_{L^p(\Omega)}^{\frac{2p}{p-3}} | w |^2 \tag{12}$$

essendo c una costante dipendente solo da Ω, p, μ. Questa diseguaglianza vale anche, con ovvia interpretazione di simboli, nel caso $p = +\infty$.

Preso un $p > 3$, sia q il numero tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Si avrà, evidentemente, $2 < q < 6$. Sarà

$$| b(w, w, u) | \leq \int_\Omega \left| w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} u_j \right| dx \leq \int_\Omega | w(x) | \left(\sum_{ij} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} | u(x) | dx \leq$$

$$\leq | u |_{L^p(\Omega)} | w |_{L^q(\Omega)} \| w \| \leq \frac{\mu}{2} \| w \|^2 + \frac{1}{2\mu} | u |^2_{L^p(\Omega)} | w |^2_{L^q(\Omega)} .$$

Applichiamo ora all'ultimo termine la (11) facendo $\sigma = 2$, $\beta = 6$, quindi utilizziamo la (10)

$$
(13) \qquad |b(w, w, u)| \leq \frac{\mu}{2} \| w \|^2 + \frac{1}{2\mu} | u |^2_{L^p(\Omega)} | w |^{\frac{6-q}{q}} | w |^{3\frac{q-2}{q}}_{L^6(\Omega)} \leq
$$

$$
\leq \frac{\mu}{2} \| w \|^2 + c^* | u |^2_{L^p(\Omega)} | u |^{\frac{6-q}{q}} \| w \|^{3\frac{q-2}{q}}
$$

essendo c^* una costante. Tenendo presente che $\dfrac{6-q}{2q} + 3\dfrac{q-2}{2q} = 1$, si può scrivere

$$
c^* | u |^2_{L^p(\Omega)} | w |^{\frac{6-q}{q}} \| w \|^{3\frac{q-2}{q}} \leq \frac{\mu}{2} \| w \|^2 + c \, | u |^{\frac{4q}{6-q}}_{L^p(\Omega)} | w |^2
$$

essendo c una nuova costante dipendente solo da Ω, p, μ. Sostituendo questa nella (13) e tenendo presente che $\dfrac{4q}{6-q} = \dfrac{2p}{p-3}$ si ottiene subito la (12).

La stessa dimostrazione si applica, con ovvie interpretazioni di simboli, al caso $p = +\infty$.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di unicità.

TEOREMA. - *Una funzione u, soluzione del problema posto, è unica se soddisfa all'ulteriore condizione*

$$
u \in L^{\frac{2p}{p-3}}(0, \tau; \boldsymbol{L}^p(\Omega))
$$

per un conveniente valore di p, con $3 < p \leq +\infty$.

Infatti detta u' una seconda soluzione e posto, come prima, $w = u' - u$ dalla (6) e dalla (12) si ottiene, per quasi tutti i valori di η in $0 \vdash\!\dashv \tau$,

$$
\frac{1}{2} | w(\eta) |^2 \leq c \int_0^\eta | u(t) |^{\frac{2p}{p-3}}_{L^p(\Omega)} \; | w(t) |^2 dt.
$$

Tenuto conto della sommabilità di $| u(t) |^{\frac{2p}{p-3}}_{L^p(\Omega)}$ si ottiene immediatamente $w(\eta) = 0$ quasi ovunque.

OSSERVAZIONE. - Facendo, in particolare, $p = 4$ si ha la condizione $u \in L^8(0, \tau; \boldsymbol{L}^4(\Omega))$, mentre, nell'impostazione del problema, avevamo ammesso soltanto $u \in L^4(0, \tau; \boldsymbol{L}^4(\Omega))$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gagliardo E., *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, « Ricerche di Matematica », 7, 102-137 (1958).

[2] Hopf E., *Uber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, « Math. Nachr. », 4, 213-231 (1951).

[3] Kiselev A. - Ladyzenskaya O. A., *Sull'esistenza e unicità della soluzione del problema non stazionario per un liquido viscoso incompressibile*, « Isvestia Akad. Nauk », 21, 655-680 (1957)

[4] Leray J., *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, « Acta Math. », 63, 193-248 (1934).

[5] Lions J. L., *Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes*, « Comptes Rendus Ac. Sc. » (1958).