I fondamenti della geometria numerativa.

Memoria di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Nel quarantesimo anniversario della mia attività scientifica (*).

Sunto. - *Costruzione dei fondamenti della geometria numerativa (computo delle costanti, conservazione del numero, calcolo simbolico, principio generalizzato di* PLÜCKER-CLEBSCH) *dal punto di vista delle teorie (dovute all'Autore), che hanno fatto progredire e rinnovato tanta parte della moderna geometria algebrica (teoria della base, varietà virtuali, sistemi d'equivalenza, teoria generale delle corrispondenze). Teorema d'esistenza delle caratteristiche delle condizioni pure di data dimensione imposte agli elementi d'una varietà algebrica, anche in presenza di elementi degeneri. Applicazioni (teoria delle caratteristiche inerenti a spazi lineari, risoluzione generale del problema delle caratteristiche per le coniche d'un piano, base e modello minimo della varietà degli elementi lineari del piano)* [1].

Più volte mi sono occupato dei fondamenti della geometria numerativa [2]. Vi ritorno oggi, perchè la teoria dei sistemi d'equivalenza, l'uso sistematico del concetto di varietà virtuali, la risoluzione del problema generale della base e la teoria geometrico-funzionale delle corrispondenze, vanno sempre più elevando le questioni numerative dal modesto rango di determinazioni del numero delle soluzioni di questo o di quel problema (determinazioni che tuttavia originarono in più d'un caso progressi sostanziali e concettuali) a quello dei rapporti funzionali e topologici.

E vi ritorno anche perchè mi pare necessario di lumeggiare un'altra volta il valore definitivo e rigoroso dei metodi della geometria italiana. Che la geometria algebrica sia altresì veduta dal punto di vista dell'algebra moderna — come fa per esempio VAN DER WAERDEN nei suoi interessanti lavori — è indubbiamente un bene per l'algebra e per la geometria. E c'è da augurarsi che i mezzi penetranti della « Moderne Algebra » siano presto

(*) Il mio primo lavoro è stato pubblicato negli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » (vol. XXXV, pag. 774) il 27 maggio 1900. Veramente io avevo già fatto stampare fin dal 1898 mentre ero studente presso una tipografia della mia nativa Arezzo, una noticina sull'estensione dei teoremi di PASCAL e di BRIANCHON. Non sapevo allora che l'estensione era nota.

(1) La trattazione qui esposta ha fornito materia ad una parte del mio corso di Alta Geometria (1939-40) presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

(2) SEVERI, *a) Sul principio della conservazione del numero* (« Rend. del Circ. Mat. di Palermo », 33 (1912), pp. 313-327); *b) Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche* (« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 75 (1916), pp. 1122-1162); *c) Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie* (« Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität », 9 (1933), pp. 335-364).

usati per attaccare problemi essenzialmente nuovi, piuttosto che per ricostruire soltanto risultati già scoperti per via geometrica.

Ma comunque, non bisogna che queste ricostruzioni siano presentate in modo da lasciar credere che quanto si è fatto con i metodi italiani non sia acquisito definitivamente e con ogni precisione.

Lo spirito sintetico-funzionale, che ha dominato le nostre ricerche, ci ha permesso di sormontare difficoltà che i metodi puramente algebrici potranno superare più facilmente, sebbene con minor snellezza, ora che l'orizzonte è conosciuto e rischiarato in tante direzioni. E ciò sarà cagione di progresso di ciascuno dei campi così ravvicinati. Non c'è però motivo di lasciare in ombra i lavori precedenti, quando si presentano i risultati d'una ricostruzione che tocca per ora più che altro i metodi e non la sostanza in quelli elaborata.

Già mostrai a titolo di esempio (nella Memoria di Amburgo) come si possano conseguire tutte le precisazioni desiderabili nei concetti di intersezioni di varietà, restando nell'ambito concettuale della geometria italiana; e ricordai allora che la prima dimostrazione del principio della conservazione del numero (offrente condizioni necessarie e sufficienti per la validità del principio e del calcolo simbolico della geometria numerativa) è quella da me data nel 1912 ([1]).

Or io desidero di riunire nella presente Memoria quel che, dal nostro punto di vista, si può oggi dire di definitivo sui fondamenti della geometria numerativa e dimostrare quale generalità, semplicità e potenza di mezzi conferiscano a questo ramo di geometria i concetti e le teorie ricordati in principio. Ho dovuto far precedere alcuni richiami di nozioni che ho avuto occasione altre volte d'introdurre e di sviluppare con scopi diversi (intersezioni e varietà virtuali; teoria della base; condizioni irriducibili e pure; conservazione del numero e suo aspetto funzionale; ecc.). Era necessario che tutto ciò fosse presente qui, non soltanto per agevolare la lettura della Memoria, ma perchè occorreva rielaborare ed ampliare argomenti in apparenza disparati, onde farli convergere verso lo scopo unitario che m'ero prefisso.

([1]) Nella citata Memoria di Amburgo questa dimostrazione fu ripetuta alla luce delle accennate precisazioni, le quali erano il sottinteso elementare ed ovvio d'ogni deduzione, per chiunque conoscesse a fondo la nostra geometria: sottinteso che, ad ogni modo, sarebbe stato posto in evidenza quando avessimo avuto occasione di esporre trattatisticamente la materia. Non mi sembra perciò giusto che non si ricordi adeguatamente l'opera degli italiani, che più hanno contribuito ai moderni progressi della geometria algebrica, allorchè di questa si espongono metodicamente i concetti e le teorie fondamentali, come ha fatto il prof. VAN DER WAERDEN nel suo bel trattato: *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, Springer 1939), che d'altronde si ravvicina di più ai metodi della scuola italiana, che non a quelli della « Moderne Algebra ».

È naturale che tale rielaborazione getti nuova luce in più d'uno degli argomenti considerati. Si vegga ad esempio come restino precisati i caratteri distintivi delle condizioni variabili rispetto alle condizioni fisse; quale generalità s'ottenga considerando virtualmente le particolarizzazioni d'una condizione variabile; come i concetti di varietà virtuali consentano di fondare il calcolo simbolico su basi rigorose ed in tutto determinate; quale estensione i concetti stessi conferiscano alla nozione di soluzioni degeneri ed al criterio di PLÜCKER-CLEBSCH, inteso in una accezione generale, che non era stata prima conseguita.

Ma dove gli argomenti rielaborati, e specialmente la teoria della base, portano il contributo più profondamente costruttivo, è nello studio delle condizioni *caratteristiche*, il quale riceve uno sviluppo e un inquadramento, che sostituiscono una teoria organica a poche slegate e frammentarie conoscenze.

La determinazione delle condizioni caratteristiche d'un dato modulo di condizioni algebriche pure (quando nella varietà ambiente non vi sono elementi degeneri) equivale alla risoluzione del problema della base per le varietà algebriche pure di dimensione data, immerse in una varietà algebrica ambiente. D'altra parte il problema stesso equivale (n. 30) alla ricerca di un teorema di BÉZOUT nella varietà ambiente od anche (n. 31) alla determinazione di un principio generale di corrispondenza sulla varietà stessa.

Il ravvicinamento di fatti e di concetti a priori lontani gli uni dagli altri, mostra l'ampiezza del punto di vista dal quale le questioni in esame vengono considerate.

L'applicazione al problema delle caratteristiche per le condizioni algebriche pure imposte agli S_k di un dato S_r, illumina chiaramente qualche più risposta circostanza generale e porge un elegante ed esauriente sviluppo del problema.

Ben più complessa è la trattazione delle caratteristiche per condizioni imposte ad elementi di una varietà, in presenza di soluzioni, che si considerino, sotto qualche aspetto, *degeneri*. L'analisi di tal problema richiede un approfondimento di alcune proprietà della base (n. 34 e segg.). Si tratta di dimostrare l'esistenza della base pel modulo delle varietà (pure) di data dimensione della varietà ambiente, che hanno assegnati comportamenti rispetto ad una o più varietà *complete* di degenerazione. Si perviene così ad un teorema d'esistenza delle caratteristiche anche nel caso di elementi degeneri: e si vede altresì come la determinazione delle caratteristiche sia *relativa* alla scelta delle varietà complete di degenerazione ed al comportamento rispetto a queste delle condizioni (di data dimensione) che si considerano. Sicchè il numero delle caratteristiche potrebbe farsi crescere ad arbitrio particolarizzando sempre di più questo comportamento.

L'applicazione della teoria generale, in tal guisa ottenuta, alle caratteristiche delle coniche nel piano, conduce per la prima volta alla risoluzione completa del corrispondente problema per le condizioni delle varie possibili dimensioni. L'analisi occorrente è ampia e delicata, sia dal punto di vista algebrico-geometrico, come da quello infinitesimale.

Già nella mia Memoria citata del 1916 avevo stabilito rigorosamente il bel risultato di HALPHEN circoscrivente la validità (in relazione alle coniche complete degeneri di 3ª specie) delle caratteristiche μ, ν di CHASLES. VAN DER WAERDEN ha ritrovato le caratteristiche μ, ν (¹), con argomentazioni non sostanzialmente dissimili dalle mie e (senza preoccuparsi della precisazione di HALPHEN) ha considerato la questione come definitivamente chiusa. Ma così non è, a cagione appunto della relatività delle caratteristiche, in relazione alle soluzioni degeneri. Il punto di vista al quale il VAN DER WAERDEN si limita è infatti, nella sostanza, quello di cercare la base delle varietà algebriche pure a quattro dimensioni (²) entro la varietà M_5 a cinque dimensioni delle coniche complete. Però la questione non resta esaurita, perchè il calcolo simbolico che ne consegue non è applicabile alle condizioni semplici soddisfatte dalle ∞^3 coniche complete degeneri di 3ª specie (non è dunque applicabile per es. alle condizioni di superosculazione). Si tratta, per comprendere queste condizioni, di cercar la base delle varietà a 4 dimensioni di M_5, che passano per la varietà H_3' delle coniche degeneri di 3ª specie (e fra le quali son incluse, in particolare, anche quelle che non passan per H'). Così trovasi (n. 52) che, per comprender le condizioni cui si allude, occorron non più due, ma tre caratteristiche *indipendenti*.

Il problema, naturalmente, si eleva e presenta più gravi difficoltà in relazione a condizioni di maggior dimensione.

Voglio, in ultimo porre in rilievo, tra i risultati che ottengo in via sussidiaria, quello che concerne la costruzione del modello proiettivo minimo della varietà degli elementi lineari del piano, la quale si presenta come varietà H' delle coniche degeneri di 3ª specie. Anche qui si tratta della costruzione della base su tale varietà.

(¹) « Math. Annalen », Bd. 115 (1938), pp. 645-655. Ivi la mia Memoria del 1916 non è citata. L'A. dimostra anche la formula di CREMONA per le condizioni doppie (che noi ritroveremo a nostra volta), ma la considera dal punto di vista ristretto cui sotto si accenna.

(²) O delle varietà a 3 dimensioni, se trattasi di caratteristiche doppie.

Richiamo di alcune nozioni sulle intersezioni delle varietà e sulle varietà virtuali.

1. Ricordiamo in primo luogo come si consegua rigorosamente il concetto di molteplicità di intersezione in un punto P comune a due varietà *pure* (cioè composte di parti di ugual dimensione) V_k, W_{r-k} immerse in una varietà algebrica ambiente M_r, irriducibile e *priva di punti multipli* [1]. Si dirà anzitutto che P è un'*intersezione semplice* di V, W se P è semplice per ambedue le varietà e queste non hanno in P alcuna tangente comune. Ciò posto, sia P un'intersezione isolata qualunque delle V, W. Si può allora costruire (in infiniti modi) entro M_r una varietà pura V_k', non passante per P, tale che la varietà $H = V + V'$ individui in M_r un sistema algebrico infinito, siffatto che la varietà generica $\overline{H}$, in esso prossima ad H, incontri W, nell'intorno di P, in un numero finito i d'intersezioni semplici. Il numero i è indipendente dalla scelta della V_k', sotto le condizioni poste; dal modo come $\overline{H}$ tende ad H; e inoltre non muta se, nel definirlo, si scambia l'ufficio delle due varietà. Esso chiamasi la *molteplicità d'intersezione* di V, W in P. Per un'intersezione semplice è $i = 1$.

Proiettando genericamente V, W nelle $V^{(0)}$, $W^{(0)}$, di un S_r, e indicata con $P^{(0)}$ la proiezione di P, un piccolo spostamento generico di una o di ambedue le varietà $V^{(0)}$, $W^{(0)}$, nelle famiglie cui appartengono, sostituisce, all'intersezione $P^{(0)}$, i intersezioni semplici vicinissime a $P^{(0)}$, delle $V^{(0)}$, $W^{(0)}$ variate. Questa circostanza lumeggia il significato infinitesimale di molteplicità d'intersezione, perchè in S_r il punto $P^{(0)}$ assorbe i intersezioni semplici delle varietà, di cui $V^{(0)}$, $W^{(0)}$ son posizioni limiti, e perchè la proiezione generica fatta pone una corrispondenza biunivoca fra l'intorno di P in M_r e l'intorno di $P^{(0)}$ in S_r.

Il significato infinitesimale della molteplicità d'intersezione i delle V, W in P è chiarito anche da ciò, che se V; W son suscettibili di variazione continua entro M, e $\overline{V}$, $\overline{W}$ sono generiche varietà vicinissime alle posizioni iniziali di V, W (non escludendo che una delle $\overline{V}$, $\overline{W}$ possa addirittura coincidere con l'originaria posizione), le $\overline{V}$, $\overline{W}$ s'incontrano in un numero finito di punti

---

(1) Ved. la mia Memoria *c)* citata. Ved. pure le mie Lezioni sulle *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (raccolte da F. CONFORTO ed E. MARTINELLI; « Pubblicazioni dell'Istituto Mat. della R. Università di Roma », 1938 e segg.), p. 8.

P_1, P_2, ..., vicinissimi a P e le rispettive molteplicità d'intersezione i_1, i_2, ... in essi soddisfanno alla relazione $i_1 + i_2 + ... = i$.

Pertanto, se V, W hanno un numero finito di intersezioni, *una variazione abbastanza piccola delle due varietà lascia immutato il numero delle intersezioni, purchè ognuna si conti con la molteplicità che le è propria.*

Questo è il fondamento essenziale e rigoroso del principio della conservazione del numero, di cui ci occuperemo più tardi.

Ne segue anzi di più che in una variazione abbastanza piccola delle V, W, anche quando queste hanno originariamente in comune certe intersezioni isolate (in numero finito) e certe varietà di dimensione > 0 (pure in numero finito) (1), *il numero delle intersezioni isolate, a distanza non infinitesima delle varietà di dimensione* > 0 *comuni a* V, W, *si conserva immutato* (valutando ciascuna con la sua molteplicità). Osservazione importante per ampliar (come vedremo) la portata della conservazione del numero.

2. *Ricordiamo in secondo luogo il concetto di varietà virtuali* (2). Una varietà algebrica irriducibile V entro una varietà ambiente irriducibile M (priva di punti multipli), può esser associata al segno + o al segno —. Topologicamente (in modo suggestivo e concreto, ma non indispensabile pel nostro concetto) questo corrisponde a fissare un'orientazione della varietà ambiente (la cui riemanniana è appunto una varietà orientabile) e una legge di orientazione di tutte le varietà irriducibili di data dimensione k, contenute in M. Ciò è possibile. Le varietà orientate con quella legge si assumeranno positive; quelle orientate in modo opposto, negative. Una circolazione continua di una V, entro ad un sistema algebrico di varietà analoghe cui essa appartenga in M, non altera l'orientazione prefissata di V.

Una *varietà virtuale* (pura) è una somma algebrica di varietà irriducibili di dimensione k, positive (cioè *effettive*) e di varietà irriducibili negative della stessa dimensione; cioè, in ultima analisi, è la differenza di due varietà effettive.

Due varietà virtuali $V = A - B$, $V' = C - D$ (A, B, C, D varietà effettive di dimensione k) si dicono *algebricamente equivalenti* e si scrive:

$$V \equiv V'$$

se:

$$A + D \equiv B + C,$$

(1) Le quali varietà tengon luogo, in un certo senso, di un gruppo di un numero finito d'intersezioni isolate: *Ueber die Grundlagen der Algebraischen Geometrie,* (citata), p. 352, Bemerkung I.

(2) Ved. le mie Lezioni citate, p. 9 e segg.

ossia se $A+D$, $B+C$ son varietà totali dello stesso sistema algebrico irriducibile o connesso, per guisa che si può passare dall'una all'altra con continuità. La relazione $\equiv$ essendo riflessiva, simmetrica e transitiva, le varietà virtuali forman un corpo chiuso rispetto all'equivalenza algebrica ed alle operazioni di somma e di sottrazione. Dalla somma deriva poi la nozione di multiplo λV di V, con λ intero positivo o negativo: trattasi della somma di $|\lambda|$ varietà coincidenti con V, prese col loro segno o col segno opposto, secondo che λ è positivo o negativo.

Nel seguito considereremo sempre (salvo esplicito avviso contrario) varietà pure, effettive o virtuali.

Se V, V' son due tali varietà, di dimensione k, algebricamente equivalenti, la varietà $V-V'$ è lo *zero di dimensione k dell'equivalenza algebrica.*

Tutto ciò si può ripetere, mutatis mutandis, nei riguardi dell'*equivalenza razionale* fra varietà di dimensione k. Le $V=A-B$, $V'=C-D$ sono *equivalenti* (si sottintende razionalmente) e si scrive $V\equiv V'$, se $A+D\equiv B+C$, ossia se $A+D$, $B+C$ son varietà totali d'un sistema d'equivalenza (irriducibile o connesso). Lo zero di dimensione k dell'equivalenza razionale è la differenza di due varietà virtuali equivalenti.

3. Siano infine in M_r (irriducibile, priva di punti multipli) due varietà effettive *irriducibili* V_h, W_k di dimensioni h, k e sia $h+k\geq r$. Si verifica allora facilmente (o per via algebrica, con la teoria dell'eliminazione o per via analitica, col teorema di esistenza delle funzioni implicite di più variabili) che ogni punto P comune a V, W fa parte d'una varietà algebrica, pura o impura, comune alle due varietà; e che ogni parte di questa intersezione ha dimensione $\geq l=h+k-r$.

Ciò posto, senza preoccuparci della struttura e delle effettive dimensioni delle componenti l'intersezione delle V, W, anzi prescindendo dalla stessa esistenza di punti comuni (che nel fatto posson anche mancare), *cerchiamo di attribuire un significato al simbolo* (V, W), *col quale intendiamo definire la varietà intersezione nel campo delle varietà virtuali, astrazion fatta dalle precedenti peculiarità* [1].

È possibile scegliere in M_r una varietà V_k' tale che essa e la varietà generica $\overline{H}$, mobile nel sistema algebrico (connesso) individuato da $H=V+V'$, seghino W in varietà irriducibili o riducibili, ma costituite tutte da parti di dimensione l, da contarsi ciascuna semplicemente.

[1] Ved. le mie citate Lezioni, p. 13.

Il che significa che in un generico punto P d'una di queste parti, le due varietà, di dimensioni h, k, che s'intersecano, hanno un'intersezione semplice; e, nel caso $h+k>r$, questo vuol dire che P è semplice per le due varietà e gli spazi ad esse ivi tangenti son indipendenti entro lo S_r tangente in P ad M_r.

In particolare, se $h+k=r$ le intersezioni (in numero finito) delle due varietà che s'intersecano, son tutte semplici.

Orbene, in tali condizioni intenderemo che i simboli $(\overline{H}, W)$, $V', W)$ denotino le varietà effettive intersezioni delle $\overline{H}$, W e V', W, come si presentano (cioè contando ogni parte semplicemente) e si porrà per definizione, sopra W:

$$(V, W) = (\overline{H}, W) - (V', W).$$

Mutando V' ed $\overline{H}$ in tutti i modi conciliabili con le condizioni poste, la (V, W) resta definita a meno d'un'equivalenza algebrica.

Se le stesse considerazioni si ripeton, coi necessari cangiamenti di parole, a partire da W, invece che da V, si vien a definire su V, a meno d'un'equivalenza algebrica, una varietà virtuale (W, V). Le varietà virtuali (V, W), (W, V), concepite come varietà dell'ambiente M_r, son poi ivi algebricamente equivalenti; sicchè in definitiva il simbolo $(V, W) = (W, V)$ resta definito in M_r a meno d'un'equivalenza algebrica.

Le condizioni imposte a V', $\overline{H}$ posson altresì soddisfarsi consentendo a queste varietà un'indeterminazione meno lata, e cioè a meno di un'equivalenza razionale, invece che algebrica. Allora (V, W) vien definita, su V, W, M, a meno d'un'equivalenza razionale.

L'estensione a coppie di varietà riducibili o più generalmente virtuali, è ovvia. Ed è altresì ovvia l'estensione a più varietà virtuali $V_{k_1}, \dots, V_{k_t}$, con $k_1 + \dots + k_t \geq (t-1)r$. Il simbolo $(V^1, \dots, V^t)$ rappresenta una varietà virtuale di dimensione $l = k_1 + \dots + k_t - (t-1)r$ a componenti semplici, definita a meno d'equivalenza algebrica o razionale.

È inoltre opportuno di avvertire che, appunto in quanto il simbolo (V, W) o più generalmente $(V^1, \dots, V^t)$, s'intende definito a meno d'un'equivalenza algebrica o razionale, con esso devon rappresentarsi altresì le varietà virtuali limiti di quelle (a componenti semplici) ottenute sotto le condizioni (generiche) imposte alle varietà ausiliarie, che servon a definire il simbolo stesso; e ciò perchè un sistema algebrico o un sistema d'equivalenza (razionale) contiene sempre gli elementi d'accumulazione degli elementi generici.

Quando $k_1 + \dots + k_t = (t-1)r$, il simbolo $(V^1, \dots, V^t)$ rappresenta un gruppo virtuale di punti, il cui numero, *necessariamente finito*, s'indicherà con $[V^1, \dots, V^t]$.

4. Prima di procedere oltre *definiamo la molteplicità d'intersezione di due varietà effettive V_h, $W_k (h + k > r)$, immerse in M_r, in un loro punto comune P*, appartenente ad una componente N_l di dimensione $l = h + k - r$ della loro intersezione.

Tagliamo le V_h, W_k con una varietà generica T_{r-l} passante per P: generica, nel senso che passi per P semplicemenie e non abbia in P alcuna tangente comune con N_l. Il che è possibile, perchè, entro lo S_r tangente a M_r in P, il cono di dimensione l tangente ad N_l in P, è segato soltanto nel vertice da un S_{r-l} generico di S_r.

Le traccie di V, W su T sono allora necessariamente due varietà aventi attorno a P le dimensioni $h - l$, $k - l$ e presentanti in P una certa molteplicità d'intersezione i, che si definisce appunto come la molteplicità d'intersezione di V, W in P (ossia come la molteplicità di intersezione delle V, W, T in P).

Questa definizione è legittima, perchè *il numero i definito è indipendente dalla T ausiliaria* (sotto le supposte condizioni per T). Per dimostrarlo, facciamo una generica proiezione di M_r sopra un S_r, in guisa che l'intorno di P in M_r si proietti *biunivocamente* nell'intorno del punto proiezione P' in S_r. Allora T proiettasi in una varietà T' passante semplicemente per P' e le V, W in due varietà V', W' intersecantesi in P'. Le trasformazioni birazionali fra T, V, W e T', V', W', risultano biregolari attorno a P, P'; epperò le proprietà infinitesimali di T, V, W, attorno a P, equivalgono alle proprietà infinitesimali di T', V', W' attorno a P'. In particolare, i viene ad essere la molteplicità d'intersezione in P' delle varietà V', W', T'. Sicchè basta dimostrare la proprietà enunciata nello S_r, per le V', W', T'. Basta cioè provare che, se a T' si sostituisce un'altra varietà analoga U', il numero i calcolato con U' è lo stesso di quello che avevamo calcolato con T'.

Sieno invero m, n gli ordini di T', U'. Designate con F', G' le famiglie di varietà degli ordini rispettivi m, n, che contengono T', U' e con L' la famiglia di varietà X' d'ordine $m + n$, che contiene $T' + U'$, assumiamo in F', G' rispettivamente due varietà generiche $\bar{T}'$, $\bar{U}'$ non passanti per P'. Le varietà $T' + \bar{U}'$, $\bar{T}' + U'$ passano allora semplicemente per P' e appartengono alla famiglia L'. Poichè nella variazione continua entro L', di una varietà X', passante per P' semplicemente, la molteplicità d'intersezione in P' delle V', W', X' non cangia, finchè una delle intersezioni delle V', W', X', che erano distinte da P', si avvicina indefinitamente a P', cioè finchè X'

non diviene tangente in P' alla varietà comune a V', W', si conclude che le $T' + \bar{U}'$, $\bar{T}' + U'$ passanti semplicemente per P', senza toccare quest'ultima varietà, dànno luogo allo stesso i. E siccome $\bar{T}'$, $\bar{U}'$ non passan per P', si perviene alla proprietà enunciata.

5. Una componente irriducibile, di dimensione normale l, della varietà comune alle V_h, W_k del numero prec., si dice i–pla per l'intersezione stessa, quando nel suo punto generico le V, W hanno molteplicità d'intersezione i; non escludendo che in punti particolari possano avere molteplicità d'intersezione maggiore.

Consideriamo dapprima il *caso in cui V, W s'intersecano effettivamente in una varietà pura di dimensione normale l.* Facendo allora tendere $\bar{H}$ ad H si conclude subito (n. 1) che *fra le varietà virtuali corrispondenti al simbolo* (V, W) *(sia esso definito a meno d'un'equivalenza algebrica o d'un'equivalenza razionale) c'è la varietà effettiva comune a V, W, di cui ciascuna componente i–pla si conti i volte.*

Se invece V, W hanno in comune una varietà di cui una componente abbia dimensione $> l$, detta N_l la varietà pura (che può anche mancare) costituita dalle componenti di dimensione l, la varietà virtuale $(V, W) - N$ (definita a meno d'un'equivalenza algebrica o razionale) *dà l'equivalenza funzionale (algebrica o razionale) della suddetta intersezione di dimensione $> l$, concepita virtualmente come varietà comune di dimensione l.*

OSSERVAZIONE 1.ª — Nel caso $h + k = r$ può darsi che le V, W non abbiano alcuna intersezione. Allora (V, W) è, in V, W o M_r, lo zero di dimensione 0, rispetto all'equivalenza algebrica o razionale.

OSSERVAZIONE 2.ª — L'estensione delle considerazioni di questo n.º a più varietà è ovvia.

Richiamo di alcune nozioni sulla base (1).

6. Consideriamo in M_r (irriducibile e priva di punti multipli) la totalità delle varietà (pure) di data dimensione k. Più varietà $V^1 \dots V^t$ di questa tota-

(1) SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (« Math. Annalen », 62 (1906), pp. 194-225); *La base minima pour la totalité*, ecc. (« Ann. de l'École normale supérieure de Paris », (3), 25 (1908), pp. 449-468); *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 30 (1910), pp. 265-288); *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data*, ecc. (« Memorie della R. Accademia d'Italia », 1934-XII).

lità diconsi *algebricamente indipendenti* se, comunque si scelgan gli interi non tutti nulli $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, la varietà virtuale $\lambda_1 V^1 + \ldots + \lambda_t V^t$ non è mai algebricamente equivalente allo zero di dimensione k. In caso diverso le varietà stesse si dicono algebricamente dipendenti.

La risoluzione del problema fondamentale della base [1] mostra che su M_r il numero delle varietà di dimensione k, algebricamente indipendenti, raggiunge un massimo finito ρ_k (numero-base). Si posson cioè trovare in M_r certe varietà a k dimensioni $V^1, \ldots, V^{\rho_k}$ — formanti, come si dice, una *base* — tali che, presa un'altra qualunque varietà a k dimensioni V, esistan certi interi $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\rho_k}$ in guisa che:

$$\lambda V + \lambda_1 V^1 + \ldots + \lambda_{\rho_k} V^{\rho_k} \equiv 0. \tag{1}$$

Si dimostra che i numeri-base ρ_k, ρ_{r-k} sono uguali e che se $V^1, \ldots, V^{\rho_k}$; $W^1, \ldots, W^{\rho_{r-k}}$ sono due basi per le varietà di dimensioni complementari k, $r-k$, il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} (V^1, W^1) \ldots (V^1, W^{\rho_{r-k}}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (V^{\rho_k}, W^1) \ldots (V^{\rho_k}, W^{\rho_{r-k}}) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. Chiamasi *discriminante simultaneo* delle due basi, che diconsi anche *duali*. È viceversa sufficiente che due gruppi rispettivamente di ρ_k varietà a k e a $r-k$ dimensioni, abbiano il discriminante simultaneo non nullo, perchè essi formino due basi per le varietà delle rispettive dimensioni.

Il minimo valore assoluto di Δ è un divisore del discriminante di ogni coppia di basi duali e corrisponde ad una coppia di *basi duali intermediarie*. La base $V^1, \ldots, V^{\rho_k}$ dicesi *intermediaria* (per le varietà di dimensione k) se, comunque scelgasi V, sempre nella (1) l'intero λ risulta un divisore comune a $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\rho_k}$.

Da una base intermediaria si passa ad una *base minima*, aggiungendo un certo numero σ_k di *divisori dello zero di dimensione k*. Ognuno di questi divisori dello zero è una varietà virtuale di dimensione k, che non è algebricamente equivalente a zero, ma un cui multiplo conveniente è algebricamente

---

(1) Che io ho dato senza alcuna ipotesi supplementare per le curve d'una superficie o varietà, per le varietà ad $r-1$ dimensioni d'una M_r e per le varietà di ogni dimensione d'una varietà razionale. Nel caso generale, ho dovuto introdurre un'ipotesi, che le ricerche ulteriori riveleranno di certo non limitativa. È inutile che mi trattenga ora su quest'ipotesi, poichè per la geometria numerativa occorre la dipendenza aritmetica più che la dipendenza algebrica; e, nei rapporti della prima, la base è stata da me acquisita in ogni caso senza alcuna restrizione.

equivalente a zero. I divisori dello zero da aggiungersi son naturalmente *distinti* fra loro, nel senso che nessuno di essi è algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi degli altri.

Aumentate le unità della base con l'aggiunta dei σ_k divisori dello zero, ogni V_k di M_r risulta algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi delle varietà della base minima.

7. Diciamo che due varietà (pure) A, B, di dimensione k, di M_r, son *aritmeticamente equivalenti* quando, scelta comunque una varietà C di dimensione complementare $r-k$, risultano uguali i numeri virtuali $[A, C]$, $[B, C]$.

È chiaro che due varietà algebricamente equivalenti sono aritmeticamente equivalenti, e più generalmente che sono aritmeticamente equivalenti due varietà sottomultiple secondo lo stesso intero di due varietà algebricamente equivalenti, cioè due varietà che differiscano per un divisore dello zero.

Nella teoria della base, io dimostro che, viceversa, se due varietà sono aritmeticamente equivalenti esse, o due loro equimultipli convenienti, sono algebricamente equivalenti.

Pertanto, le varietà di dimensione k hanno una base, costituita da ρ_k varietà $V^1, \dots, V^{\rho_k}$, anche rispetto all'equivalenza aritmetica; nel senso che per ogni altra varietà V sussiste una relazione del tipo (1), ove il segno del secondo membro si sostituisce col segno $\doteqdot$ di equivalenza aritmetica.

Le $V^1, \dots, V^{\rho_k}$ sono le varietà medesime che dànno una base rispetto all'equivalenza algebrica.

Nel campo delle equivalenze aritmetiche non intervengono però i divisori dello zero: una varietà virtuale D_k, tale che $[D, C]=0$ (qualunque sia la varietà virtuale C a $r-k$ dimensioni), è lo zero delle equivalenze aritmetiche di dimensione k.

Se $V^1, \dots, V^{\rho_k}$ è una base intermediaria delle varietà di dimensione k, rispetto all'equivalenza algebrica, per ogni altra varietà V sussiste un'equivalenza aritmetica del tipo:

$$V \doteqdot \mu_1 V^1 + \dots + \mu_{\rho_k} V^{\rho_k},$$

essendo $\mu_1, \dots, \mu_{\rho_k}$ numeri *interi*. Nel campo aritmetico, una base intermediaria è cioè minima.

La scelta di una base intermediaria nel campo aritmetico si fa dunque come nel campo algebrico, scegliendo cioè insieme ad essa una base intermediaria duale, in corrispondenza al minimo valore assoluto del discriminante Δ.

Osservazione. — Si sostituisca alla base intermediaria $V^1, \dots, V^{\rho_k}$ un'altra base intermediaria delle V_k; e sia $\overline{V}^1, \dots, \overline{V}^{\rho_k}$: l'una delle due basi è legata all'altra (a meno di divisori dello zero o, ciò che è lo stesso, nel campo delle equivalenze aritmetiche) da una sostituzione lineare a coefficienti interi, il cui modulo ha il valore assoluto 1. Ora, se si associa la nuova base alla base intermediaria $W^1, \ldots, W^{\rho_{r-k}}$ delle W_{r-k}, poichè il discriminante simultaneo $\bar{\Delta}$ di queste basi è uguale al discriminante Δ delle basi $V^1, \ldots, V^{\rho_k}$; $W^1, \ldots, W^{\rho_{r-k}}$ moltiplicato pel modulo della predetta sostituzione, si conclude che *il valore assoluto del discriminante di due basi intermediarie duali è lo stesso (cioè il minimo), qualunque sieno le basi intermediarie scelte.*

Condizioni algebriche fisse e variabili. Condizioni irriducibili.

8. Sia una varietà algebrica irriducibile ∞^r di enti algebrici Γ. Nei miei precedenti lavori sui fondamenti della geometria numerativa, ho osservato che per risolvere e interpretare i problemi numerativi, senza il pericolo di incorrere in paradossi, occorre possedere prima o procurarsi un'imagine della totalità degli enti Γ sopra una varietà irriducibile M_r, priva di punti multipli, i cui punti rappresentino appunto birazionalmente gli enti medesimi.

Ogni deduzione relativa ai Γ va interpretata sopra M_r, perchè i problemi d'intersezione di varietà subordinate ad una data (e a tali si riducono tutte le questioni numerative) perdon senso quando le intersezioni che si considerano cadono in punti multipli della varietà ambiente ([1]). Ho già dato altrove esempi significativi in proposito.

Che cosa vuol dire rappresentar birazionalmente i Γ coi punti di M_r? L'algebricità della definizione dei Γ implica sempre che o immediatamente dalla definizione stessa o mediatamente attraverso un'analisi più o meno approfondita della genesi dei Γ, questi si possano in definitiva considerare come casi particolari di enti algebrici descriventi una varietà *lineare*; sicchè i Γ sieno determinabili con certi parametri legati da un sistema di equazioni algebriche. Prendendo questi parametri a coordinate di punto in uno spazio lineare, i Γ vengon rappresentati dai punti d'una varietà algebrica (irriducibile ∞^r, nelle nostre ipotesi) ([2]). Occorre considerare di questa varietà

([1]) Vedremo nel n. 23 che, nonostante ciò, problemi numerativi posson esser correttamente considerati anche su varietà con elementi multipli, senza passare di necessità al modello privo di elementi multipli.

([2]) P. es. se Γ è una curva algebrica sghemba di ordine m e genere p, la definizione di Γ non offre immediatamente i parametri con cui Γ può algebricamente individuarsi. Si considererà allora la proiezione generica di Γ sopra un piano e si cercherà di tradurre la un modello privo di punti multipli, ottenuto con trasformazioni birazionali [1].

Possiamo dunque riferire le nostre considerazioni al caso in cui gli enti considerati sono punti d'una varietà algebrica irriducibile M_r, priva di punti multipli in un certo spazio: sicuri che, in ultima analisi, ogni problema numerativo si riduce ad una questione relativa ad una varietà siffatta.

9. Si dice che il punto variabile su M_r è soggetto ad una *condizione algebrica*, quando le sue coordinate debbon soddisfare un sistema di equazioni algebriche, contenenti razionalmente eventuali parametri y, sottoposti, alla loro volta, ad un sistema di equazioni algebriche. Nel caso in cui i parametri y manchino, si ha una condizione *algebrica fissa*; altrimenti trattasi di una *condizione algebrica variabile*. Nel primo caso, la condizione riducesi a ciò: che il punto deve stare sulla varietà algebrica intersezione di M_r e di quella definita dal sistema di equazioni cui debbon soddisfare le coordinate del punto. Nel secondo caso, il sistema di equazioni, al variare dei parametri, rappresenta su M_r una varietà mobile in un sistema algebrico: ogni varietà di questo corrispondendo razionalmente ad un punto della varietà N, che, nello spazio lineare degli y, è determinata dalle equazioni cui sono sottoposti i parametri.

Una condizione fissa si può poi considerare come caso particolare d'una variabile: la varietà N riducendosi allora ad un sol punto.

Dette in modo generico x le coordinate del punto di M_r nello spazio S_d cui M_r appartiene (talora si dirà x il punto stesso), si ha dunque, a rappresentare la più generale condizione algebrica, un sistema del tipo:

$$f_i(x) = 0 \ (i = 1, 2, ...), \quad \varphi_j(y; x) = 0 \ (j = 1, 2, ...), \quad \psi_h(y) = 0 \ (h = 1, 2, ...),$$

ove le $f_i = 0$ rappresentano M_r; le $\varphi_j(y; x) = 0$, per ogni gruppo delle y sod-

condizione perchè una curva piana di ordine m, abbia il genere p e sia proiezione di una curva sghemba dello stesso ordine. Questi fatti si esprimono mediante le curve aggiunte alla curva piana, i cui coefficienti vengon così legati da un sistema di equazioni algebriche. Tutte le curve piane di ordine m costituiscon poi, alla lor volta, un ambiente lineare. Oppure si potrà interpretare il fatto che ogni curva sghemba è linea direttrice di un complesso speciale di rette (rappresentabile con una sola equazione sulla quadrica imagine della totalità delle rette dello spazio); ecc. ecc.

[1] La trasformabilità birazionale d'una varietà algebrica in una priva di punti multipli è la premessa indispensabile di quasi tutta la geometria algebrica. Che ogni varietà goda di questa proprietà è stato finora dimostrato soltanto per le curve e superficie. E si presume che la stessa trasformabilità sia possibile in generale. Comunque, questa trasformabilità potrà considerarsi come un'ipotesi eventualmente limitativa.

disfacente alle $\psi_h(y)=0$, la varietà di M_r su cui il punto x deve giacere; e le $\psi_h(y)=0$ rappresentano, nello spazio S_δ dei punti y, la varietà N.

Poichè le $\varphi_j(y;x)=0$ staccano una varietà di coppie di punti nel prodotto delle M_r, N, cioè una corrispondenza algebrica tra M_r ed N (1), si conclude che:

Ogni condizione algebrica, imposta ad enti algebrici d'una varietà, si traduce sempre in una corrispondenza algebrica tra gli elementi di questa e di un' altra varietà (2).

La condizione imposta agli x si può dunque enunciare dicendo che x deve essere omologo di un dato y in una assegnata corrispondenza algebrica fra M_r ed N.

La condizione considerata dicesi una *condizione irriducibile* se, oltre ad essere irriducibile M_r, è irriducibile la varietà delle coppie $\varphi_j(y;x)=0$ (e quindi anche N). Concetto questo importantissimo, ai nostri fini, ch'io introdussi in occasione della prima dimostrazione della conservazione del numero.

Se la condizione è fissa, la sua irriducibilità equivale all'irriducibilità della varietà su cui il punto x di M_r è sottoposto a giacere; mentre, se la condizione è variabile, può darsi benissimo che ad un y generico di N risponda in M_r una varietà riducibile. Però in tal caso le parti di questa varietà devono avere la stessa dimensione, in quanto devono permutarsi tra loro nelle circolazioni di y su N. Chè qualora non vi fosse piena permutabilità tra le dette parti (il che accadrebbe certo, se non tutte avessero la stessa dimensione), la condizione risulterebbe riducibile.

OSSERVAZIONE. — Noi supporremo naturalmente che anche l'ambiente N degli y sia originariamente una varietà senza punti multipli o a tale sia ridotto con trasformazioni birazionali. Allora si può immediatamente costruire *un modello del prodotto $M\times N$, privo di punti multipli.* Si ottiene senz'altro un modello siffatto sulla varietà di SEGRE (imagine del prodotto degli spazi lineari, cui appartengono M, N), come imagine del prodotto $M\times N$.

Dimensione d'una condizione. Principio del computo delle costanti. Condizioni pure (effettive o virtuali).

10. Denotiamo con s la dimensione della varietà N luogo degli y. La corrispondenza tra N_s ed M_r, imagine della data condizione algebrica irriducibile,

(1) Ved. le mie Lezioni citate, p. 94.

(2) Nel n. 4 della Nota *a)* citata in (2), p. 1 avevo stabilito la stessa conclusione in modo in apparenza diverso.

è una corrispondenza *non degenere* tra le due varietà [1], cioè essa agisce effettivamente su *tutti* i punti di N e di M. Se no, si avrebbe una corrispondenza irriducibile tra varietà subordinate ad N, M e i punti x o gli y, ad essi associati, non avrebbero i supposti gradi di libertà.

Se $r-k$ è la dimensione della varietà (irriducibile o pura) $V(y)$ costituita dagli x che corrispondono ad un generico y, si dice che *la dimensione della condizione è* k, per esprimere che la condizione medesima, per un dato y, equivale a k legami tra i parametri del punto x, riducendo il loro numero da r ad $r-k$.

Una condizione algebrica c, di dimensione k, si denoterà talora anche col simbolo c_k, ponendo l'indice per indicare la dimensione. Scriveremo pure $c_k(y)$, quando occorre tener presente che c_k è variabile col punto y di N_s (è *funzione razionale di questo*).

La corrispondenza algebrica irriducibile T fra M_r, N_s, a cui dà luogo la condizione c_k, ha la dimensione $\rho = r+s-k$ [2], cioè la sua coppia variabile x, y dipende da $r+s-k$ parametri essenziali, che sono gli s parametri necessari per individuare un punto y di N_s e gli $r-k$ parametri necessari per individuare un punto nella varietà $V(y)$. E siccome la varietà delle coppie x, y ha la dimensione $r+s$, così c_k conserva la propria dimensione k, anche se è riferita al prodotto $M \times N$: però rispetto all'ente variabile (x, y), essa non è più una condizione variabile, ma una condizione fissa, che si può chiamare l'*ampliamento della condizione* c_k.

La c_k dà inoltre luogo ad un'altra condizione imposta agli y, che può chiamarsi la *condizione coniugata* di c_k: è la condizione perchè y corrisponda ad un dato x nella T.

La coniugata di c_k, per la definizione stessa di irriducibilità d'una condizione, è irriducibile. È facile di più vedere ch'essa ha la dimensione k. Invero, se la condizione coniugata ha la dimensione k', ripetendo il calcolo della dimensione di T, dopo aver mutate le veci di M_r, N_s, si trova $\rho = s+r-k'$ e quindi $k=k'$. In conclusione: *La condizione ampliata e la condizione coniugata di una data condizione irriducibile, hanno la stessa dimensione di questa.*

In ciò consiste il *principio del computo delle costanti*, che si può anche enunciare, sotto le forme consuete seguenti [3]: *Se per un punto generico* x *di una* M_r *irriducibile, una data condizione irriducile variabile* c *ha la dimen-*

---

(1) Ved. le mie citate Lezioni, p. 97.
(2) Lezioni citate, pp. 95 e 98.
(3) Lezioni citate, p. 99.

sione k, la stessa dimensione spetta alla condizione imposta alla varietà V_{r-k} dei punti di M_r soddisfacenti a c, quando si voglia che V_{r-k} contenga un dato x.

Oppure:

Se fra i punti di una varietà irriducibile M_r e di un'altra varietà irriducibile N_s, c'è una corrispondenza irriducibile, che associ ad un generico punto di N_s $\infty^{r'}$ punti di M_r e ad un generico punto di M_r $\infty^{s'}$ punti di N_s, sussiste la relazione $r - r' = s - s'$.

Omettiamo i facili esempi, che potrebbero addursi.

11. A questo punto è opportuno di analizzare un pò a fondo una circostanza, appena accennata nelle mie citate Lezioni [1], perchè, s'essa restasse in ombra, ne potrebbero derivare equivoci.

Una particolarizzazione generica $c_k(\bar{y})$ della condizione irriducibile $c_k(y)$ può (come abbiam detto alla fine del n. 9) esser riducibile; e in tal caso si scinde in più condizioni fisse irriducibili, aventi ciascuna la dimensione k. Invece per *particolari* valori di y — sia uno di questi y_0 — la condizione $c_k(y_0)$ può scindersi in più condizioni fisse, non necessariamente della stessa dimensione. Qualcuna od anche tutte queste condizioni posson cioè aver dimensione $< k$. Ciò avviene quando y_0 è *fondamentale* per la corrispondenza T fra N_s, M_r, immagine di $c_k(y)$.

Per esaminar meglio questo fatto, riferiamoci alla varietà W_{r+s}, priva di punti multipli (n. 9, Oss.), imagine del prodotto $M \times N$ e alla varietà, che continueremo a chiamare ancora T, di dimensione $r+s-k$, imagine della corrispondenza T. Su W son tracciati due sistemi di varietà $\Phi(x) = x \times N_s$, $\Phi'(y) = y \times M_r$ [2], imagini delle coppie aventi rispettivamente x od y fisso.

La varietà T ed una generica $\Phi'(y)$, che ha dimensione r, si tagliano in una varietà di dimensione $r-k$ $[=(r+s-k)+r-(r+s)]$ e per un particolare y, sia y_0, la varietà intersezione, le cui parti hanno ad ogni modo dimensioni $\geq r-k$ (n. 3), può contenere parti di dimensione $r-k' > r-k$. La $c_k(y_0)$ viene allora a scindersi in condizioni di cui alcune hanno dimensione $k' < k$.

Comunque sia, *attesa l'irriducibilità di T*, i punti della varietà (pura o impura) $V(y_0)$, comune a T, $\Phi'(y_0)$, *sono tutti possibili limiti di punti della varietà $V_{r-k}(y)$*, comune a T e a $\Phi'(y)$, per $y \to y_0$. Per y tendente ad un generico $\bar{y}$, la varietà $V_{r-k}(y)$ tende ad una varietà individuata $V_{r-k}(\bar{y})$, che è luogo dei punti limiti; mentre, per $y \to y_0$, la varietà limite è in tutto o in

(1) Pag. 98.

(2) Lez. citate, p. 101.

parte indeterminata, entro la varietà luogo di tutti i possibili punti d'accumulazione di punti della $V_{r-k}(y)$. Le parti di $V(y_0)$, di dimensione $> r - k$, hanno tuttavia una certa *equivalenza funzionale* (nel campo delle equivalenze algebriche) rispetto all'intersezione virtuale $(T, \Phi'(y))$; e, da questo punto di vista, il fatto eccezionale vien riportato nella piena normalità. Si può insomma far da esso astrazione, purchè la varietà $V_{r-k}(y)$ si intenda per *ogni* y valutata virtualmente come varietà $(T, \Phi'(y))$. Ciò offre inoltre il vantaggio di aver da fare con una varietà costituita da parti semplici, anche se nel fatto la generica $V_{r-k}(y)$ constasse di parti multiple (da valutarsi tutte con la *stessa* molteplicità, a causa dell'irriducibilità di T).

Se $s = 1$, sicchè T ha la dimensione $r + 1 - k$, superiore soltanto di un'unità alla dimensione della generica $V_{r-k}(y)$, *ogni* varietà $\Phi'(y)$ sega T in una varietà avente esattamente, per ogni sua parte, la dimensione $r - k$. Invero, nell'ipotesi opposta, attesa l'irriducibilità di T, questa varietà apparterrebbe ad una particolare $\Phi'(y)$ e quindi T non sarebbe, come si è supposto, una condizione variabile, dipendente razionalmente dal punto y variabile sopra una curva N_1; ma una condizione fissa. *Nel caso considerato, dunque, non c'è alcuna indeterminazione nella varietà limite di $V_{r-k}(y)$, qualunque sia la posizione verso la quale tende y.*

Se la curva N_1 ha in y_0 un punto multiplo origine di $\nu > 1$ rami, si può sostituire ad N_1 una sua trasformata birazionale N_1', con soli punti semplici y'. A quei ν rami corrispondono altrettanto rami di N_1', aventi però come origini ν punti (semplici) distinti $y_0', \dots, y_0^\nu$ di N_1'. Considerata allora la data condizione c_k, cioè la varietà V_{r-k} di M_r, come funzione razionale di y' invece che di y, si conclude nel modo esposto per ciascun passaggio al limite di y' verso $y_0', y_0'', \dots, y_0^\nu$. S'ottengon così al massimo ν posizioni limiti di $V_{r-k}(y')$, cioè di $V_{r-k}(y)$, per $y \to y_0$.

Nel caso in cui $s > 1$, ne deriva che la varietà luogo dei possibili punti limiti di $V_{r-k}(y)$ per $y \to y_0$, si può interamente coprire con varietà ben determinate di dimensione $r - k$, ciascuna delle quali è limite di $V_{r-k}(y)$ per y variabile sopra un ramo di curva algebrica, tracciato su N_s ed avente l'origine in y_0. Mutando questo ramo, si hanno tutte le possibili varietà di limiti di $V_{r-k}(y)$.

Una (totale) di queste varietà limiti (contandone ogni parte con la molteplicità che le è propria) fornisce l'equivalenza funzionale di $V(y_0)$ come varietà $(T, \Phi'(y_0))$.

12. Le considerazioni dei nn. 10, 11 chiariscon così completamente il concetto di dimensione d'una condizione algebrica irriducibile, in relazione ad una sua qualunque particolarizzazione.

Si è supposto finora che la condizione $c_k(y)$, funzione razionale del punto y variabile in N_s (n. 10), sia riferibile ad ogni x di M_r, per una conveniente scelta di y; cioè che $V_{r-k}(y)$ descriva *tutta* M_r.

Ma spesso invece accade che l'enunciato della condizione contempli a priori ogni x di M_r, mentre nel fatto la condizione, pone, per la sua stessa natura, un vincolo agli x, per guisa che, sia pure variando y, essa non può esser soddisfatta che dagli x di una varietà subordinata ad M_r.

È questo il caso dell'espressivo esempio, analizzato a fondo nel mio lavoro *a)* (¹), concernente le proiettività della retta, che mutano in sè una quaderna di punti. L'enunciato della condizione chiede tali proiettività, senza a priori limitarne il carattere; mentre nel fatto proiettività (non identiche) possedenti una quaderna invariante non sono proiettività generiche. Entro la varietà (lineare) M_3 delle proiettività d'una retta, le proiettività che posseggon quaderne invarianti si distribuiscon in 3 parti irriducibili, costituite dalle totalità delle involuzioni, delle proiettività cicliche di 3° ordine e delle proiettività cicliche di 4° ordine.

È necessario dunque considerare anche condizioni irriducibili e condizioni composte mediante condizioni irriducibili, che si riferiscano a varietà subordinate ad M_r.

Sia $c(y)$ una condizione irriducibile, la quale, per y generico, sia soddisfatta dai punti di una varietà $V_{r-k}(y)$; e si debba dunque riguardare *sopra* M_r come condizione di dimensione k, tanto se $V_{r-k}(y)$ descrive tutta M_r, come se descrive una $M'_{r'}$ (necessariamente irriducibile, per l'irriducibilità di $c(y)$) subordinata ad $M_r (r' < r)$.

Supponiamo che si verifichi quest'ultima ipotesi, sicchè la corrispondenza T fra N_s, M_r, a cui dà luogo $c(y)$, è *degenere* su M_r (mentre non è degenere quale corrispondenza fra N_s, $M'_{r'}$).

Considerata $c(y)$ come condizione relativa agli x di $M'_{r'}$ essa non ha più la dimensione k, ma la dimensione $r' - (r - k) = k - (r - r')$. Inoltre l'ampliamento di $c(y)$ può considerarsi sia sul prodotto $M \times N$, come sul prodotto $M' \times N$ e dà luogo ad una condizione fissa di dimensione k nel primo caso e di dimensione $k - (r - r')$ nel secondo caso.

Circa le eventualità che posson presentarsi per la dimensione d'una particolarizzazione $c(y_0)$ di $c(y)$, quando y_0 è fondamentale per T, non c'è che da riferirsi al n. 11, sia che T si consideri su $M \times N$, come su $M' \times N$.

D'ora in poi, quando parleremo d'una condizione irriducibile di dimensione k, $c_k(y)$, funzione razionale del punto y di N_s e relativa agli x di M_r,

(¹) Citato a p. 1, nota (²) a pie' di pagina.

intenderemo alludere ad una condizione avente per imagine su $M \times N$ una corrispondenza irriducibile T, di dimensione $r+s-k$, sia che T agisca su tutti gli x o soltanto sopra una varietà (irriducibile) di x, subordinata ad M_r.

Nel caso estremo $r' = r-k$, V_{r-k} risulta indipendente da y e si ricade in una *condizione fissa*, come quando era $s=0$ (n. 9).

13. Passiamo a definire le condizioni pure virtuali (in particolare effettive).

Si dice che una $c_k(y)$, funzione razionale del punto y di N_s, imposta agli x di M_r, è una *condizione pura (effettiva o virtuale) di dimensione k*, se la sua imagine T sul prodotto $M \times N$ è una corrispondènza pura (effettiva o virtuale) *di dimensione $r+s-k$* (¹); cioè se $c_k(y)$ può scindersi in più condizioni irriducibili (prese positivamente o negativamente), aventi ciascuna la dimensione k, ognuna delle quali è relativa alla varietà fissa N_s ed è ivi non degenere, ed agisce sopra M_r o sopra una varietà irriducibile subordinata ad M_r. Non è naturalmente detto che questa varietà subordinata sia la stessa per ciascuna delle condizioni irriducibili in cui si scinde $c_k(y)$: può cioè trattarsi di varietà diverse e di differenti dimensioni.

La considerazione delle condizioni pure, nel campo virtuale, è fondamentale.

Anche *le particolarizzazioni di una data condizione pura $c_k(y)$ posson considerarsi virtualmente*, come segue.

Ogni varietà $\Phi'(y) = y \times M_r$ è una *copia* di M_r, che è con M_r in corrispondenza birazionale senza eccezioni e nella quale, per giunta, punti semplici si mutano in punti semplici. Pertanto $c_k(y)$ può addirittura riferirsi ai punti di una qualsiasi $\Phi'(y)$. Su questa si ha la varietà virtuale $(T, \Phi'(y))$. Considerare virtualmente $c_k(y)$, significa considerare, per ogni y, su $\Phi'(y)$ (cioè su M_r), la condizione virtuale perchè un punto giaccia sulla varietà virtuale $(T, \Phi'(y))$.

La conservazione del numero e il suo significato funzionale.

14. Le considerazioni dal n. 10 in poi, e sopratutto quelle del n. 11, sboccan senz'altro nelle seguenti conclusioni:

a) Una condizione pura (virtuale o effettiva) variabile con continuità si conserva algebricamente (e quindi aritmeticamente) equivalente a sè stessa, salvo

(¹) Ciò esclude che T possa esser degenere su N_r o tutta o in parte; perchè se una parte di T agisse soltanto sopra una $N'_{s'}$ subordinata ad N_s, la dimensione di quella parte sarebbe $s'+r-k < s+r-k$. La reciprocità fra $c_k(y)$ e la sua condizione coniugata, osservata nel n. 10, viene a mancare per una $c_k(y)$, anche irriducibile, ma degenere su M_r.

il caso che divenga (parzialmente o totalmente) indeterminata, cioè diminuisca, in tutto o in parte, di dimensione.

Con ciò si vuol significare che la totalità variabile degli x di M_r, che soddisfanno alla data condizione pura variabile, si muove in un sistema algebrico, di cui la totalità stessa non cessa mai d'esser varietà completa.

Inoltre:

b) Se la condizione (funzione razionale dell'elemento y) diviene indeterminata per $y \to y_0$, basta passare al limite per y variabile sopra un ramo algebrico (o analitico!) di origine y_0, appartenente alla varietà degli y, perchè si conservi l'equivalenza algebrica della condizione, la quale resta così individuata anche per $y = y_0$.

Ecco qualche esempio banale, che tuttavia pone in luce la natura del teorema *b)*.

La condizione perchè un punto del piano sia comune ad una tangente fissa y_0 d'una conica e ad una tangente variabile y, diviene indeterminata per $y = y_0$, mentre è ben determinata come limite per $y \to y_0$. In tal caso M_r è il piano ed N_s la conica.

La condizione perchè un punto dello spazio sia comune ad un piano tangente fisso y_0 di una quadrica e ad un piano tangente variabile y, è indeterminata per $y = y_0$ e tale rimane anche al limite, se non si specifica che il punto di contatto di y varii in un ramo tracciato sulla quadrica ed avente come origine il punto di contatto O col piano fisso. Mutando il ramo, si ottengono per limiti delle intersezioni dei due piani tutte le tangenti alla quadrica in O (ciascuna delle quali, notoriamente, è coniugata alla direzione in O del rispettivo ramo). In tal caso M_r è lo spazio e N_s è la quadrica.

15. Il teorema *a)*, col complemento *b)*, costituiscono il *significato funzionale della conservazione del numero*, in quanto essi trasportano tale conservazione dal campo strettamente numerativo a quello delle relazioni d'equivalenza tra varietà (funzioni) algebriche.

Quando la condizione pura considerata, imposta agli x di M_r, ha la dimensione r, essa è soddisfatta da un gruppo virtuale di un numero *finito* di punti (positivi o negativi). Allora equivalenza algebrica ed equivalenza numerativa o aritmetica coincidono, perchè i gruppi d'un prefissato numero di punti sopra M_r formano una varietà algebrica irriducibile.

Ciò è ovvio. Ma è altresì vero che l'equivalenza aritmetica delle condizioni pure di dimensione $k < r$, si riduce, a meno dei divisori dello zero, all'equivalenza algebrica (n. 7). Però questo è un fatto di natura ben più profonda, la cui dimostrazione è ardua e richiede i mezzi più elevati della geometria algebrica.

Tanto maggior interesse ha dunque il trasporto della conservazione, per $k < r$, nel campo funzionale.

16. Nei riguardi di condizioni pure di dimensione r sussiste il seguente *principio della conservazione del numero*, corollario immediato dei teoremi *a)*, *b)*:

Il numero degli elementi d'una varietà M_r (irriducibile, priva di elementi multipli), che soddisfanno ad una condizione pura (virtuale od effettiva) di dimensione r, funzione razionale del punto y mobile sopra una N_s (irriducibile e priva di punti multipli), resta costante al variare di y o diviene infinito.

Quando quest'ultima eventualità si verifica per $y = y_0$, basta far tendere y ad y_0 sopra un ramo di N_s uscente da y_0, perchè il numero suddetto resti costante anche al limite y_0.

17. È opportuna un'osservazione a proposito delle condizioni aritmeticamente nulle delle varie dimensioni (condizioni algebricamente nulle o che equivalgono a divisori dello zero).

Una condizione nulla pura di dimensione k ($\leq r$) è soddisfatta da punti distribuiti in una varietà, irriducibile o riducibile, presa positivamente; ed in un'altra varietà, aritmeticamente equivalente alla precedente, presa negativamente. Sicchè l'intersezione virtuale della varietà degli x, che soddisfanno alla considerata condizione, con una varietà di dimensione complementare, nell'ambiente M_r, dà luogo sempre ad un numero virtuale nullo di punti (tanti positivi e tanti negativi). In particolare il numero virtuale delle soluzioni d'una condizione nulla di dimensione r, è zero.

Se si assumesse come criterio, per valutare la dimensione d'una condizione, l'esistenza d'una varietà *effettiva* di soluzioni, si dovrebbe concludere che una condizione nulla è incompatibile con la definizione degli x (ha dimensione $> r$). Ma questo non sarebbe giusto, perchè la dimensione d'una condizione virtuale deve essere virtualmente valutata; e nel campo virtuale soluzioni esistono sempre e son fornite da gruppi virtuali contenenti tanti punti positivi e altrettanti negativi.

Il principio della conservazione del numero vale naturalmente anche per le condizioni pure nulle.

18. Un'altra osservazione, prima di chiudere l'argomento della conservazione.

Il fatto che si tratti di una condizione pura è non soltanto sufficiente, ma anche necessario, per la validità della conservazione, sia sotto l'aspetto funzionale che sotto quello numerativo.

Invero, se una condizione $c(y)$ è impura e si scinde per esempio in due condizioni pure c', c'', una almeno di queste sarà funzione del punto y di N_s e non di una varietà subordinata. Se l'altra condizione è funzione del punto y variabile sopra una $N'_{s'}$ $(s' < s)$ subordinata ad N_s, non può valere la conservazione, perchè quando y, mobile su N_s, tende ad un punto y_0 di $N'_{s'}$, compariscon soluzioni nuove, che non sono limiti di quelle relative ad y generico (¹).

Ma la conservazione non può valere neppure se le c', c'' sono funzioni di y variabile su tutta la N_s ed hanno quindi necessariamente dimensioni diverse, e sieno h, k $(h < k)$; perchè la varietà $V(y) = V'_{r-h}(y) + V''_{r-k}(y)$, riempita dagli x di M_r soddisfacenti alla condizione $c(y)$, non si conserva, al muoversi di y, aritmeticamente equivalente a sè stessa. Prese infatti due posizioni y_1 e y_2 di y, le varietà $V(y_1)$, $V(y_2)$ non sono aritmeticamente equivalenti, perchè una varietà W_k di M_r, che incontri $V'_{r-h}(y_1)$ e non $V'_{r-h}(y_2)$, non taglia $V(y_1)$, $V(y_2)$ nello stesso numero di punti.

OSSERVAZIONE. A proposito di quanto precede, notiamo che mentre può accadere che una particolarizzazione d'una condizione pura sia impura (n. 11), può, per converso, avvenire che ogni particolarizzazione d'una condizione impura sia pura. Consideriamo p. es. fra N_s e M_r una corrispondenza irriducibile T_1, ∞^{r+s-k}, non degenere su N_s e priva ivi di elementi fondamentali ed una corrispondenza irriducibile T_2, $\infty^{r+s'-k}$ fra M_r ed una $N'_{s'}$ di N_s, non degenere su $N'_{s'}$ e priva ivi di elementi fondamentali. Allora la condizione cui dà luogo — per gli x di M_r — la somma $T_1 + T_2$, è impura ed ha *tutte* le sue particolarizzazioni pure e di dimensione k. Ciò prova una volta di più come sia opportuno, per lo studio delle condizioni variabili, il nostro punto di vista di sostituire ad esse le corrispondenze algebriche associate, in quanto la natura d'una condizione è determinata dalla totalità delle coppie x, y ad essa soddisfacenti e non da quelle, sole, per cui y è assegnato.

Uguaglianze e operazioni fra simboli di condizioni.

19. *Nel seguito ci riferiremo (salvo avviso contrario) a condizioni pure, virtuali od effettive,* imposte ai punti x della varietà M_r, priva di punti multipli; sicchè ometteremo di solito gli attributi, limitandoci e specificare la dimensione della condizione.

Sieno c, c' due condizioni, di dimensione k, variabili (in particolare fisse),

(¹) E si avverta che ciò non esclude che le due condizioni c', c'' sieno ciascuna di dimensione k. La condizione è in tal caso impura, perchè la corrispondenza fra N_s, M_r, che la rappresenta, è impura (cfr. col. 13).

e $\{C\}$, $\{C'\}$ sieno sistemi algebrici irriducibili (o connessi) completi, di varietà pure, virtuali o effettive, determinati dalle varietà di dimensione $r-k$, C, C', costituite dagli x che soddisfanno a particolarizzazioni generiche di c, c'.

Si dice che le condizioni c, c' sono *uguali* e si scrive $c=c'$, se le varietà C, C' sono aritmeticamente equivalenti (n. 7), cioè (n. 14) se le condizioni c, c' sono aritmeticamente equivalenti. In particolare le c, c' sono uguali ad ogni loro particolarizzazione (da valutarsi virtualmente, in casi speciali, secondo quanto si è spiegato nel n. 13).

L'uguaglianza è manifestamente riflessiva, simmetrica, transitiva.

Quando si ha da fare con una condizione c di dimensione r, il numero virtuale n dei punti che soddisfanno a c s'indica talora con $[c]$ od anche semplicemente con c, se non v'è ambiguità. E si scrive $c=n$, invece di $[c]=n$.

20. Dicesi *somma* delle due condizioni c, c', di ugual dimensione k, la condizione affinchè x giaccia sulla varietà $C+C'$ o su qualunque altra varietà a questa aritmeticamente equivalente ([1]).

Esaminiamo il senso preciso di questa definizione. Le c, c' saranno rispettivamente funzioni razionali di due punti y, y' variabili in N_s, $N'_{s'}$ (non escludendo che $N'_{s'}$ possa esser la stessa N_s o una varietà ad essa subordinata). Le corrispondenze imagini di c, c' e cioè T fra N_s ed M_r e T' fra $N'_{s'}$ ed M_r, hanno le dimensioni $r+s-k$, $r+s'-k$. Ciò premesso, si consideri la varietà $N''_{s+s'}$ (priva di punti multipli) prodotto di N_s, $N'_{s'}$. Fra $N''_{s+s'}$ ed M_r nasce una corrispondenza T'', chiamando omologhi di un punto y'' (cioè di una coppia y, y') di $N''_{s+s'}$ i punti x della varietà $C(y)+C'(y')$. Orbene la corrispondenza T'' è imagine della somma $c''=c+c'$. E tale corrispondenza risulta pura, come le T, T', perchè consta di parti irriducibili, che hanno tutte la dimensione $r+s+s'-k$. Perciò c'' è pura e di dimensione k.

Il sistema descritto dalla varietà pura $C+C'$ degli x soddisfacenti a $c+c'$ è la somma dei sistemi descritti da C, C'; ognuno di questi sistemi può essere ampliabile (fino ad arrivare al sistema completo che lo contiene). Ciò dà luogo ad un ampliamento del campo di variabilità della corrispondente condizione; ma anche nei campi eventualmente ampliati vale la relazione $c''=c+c'$.

Dalla somma di due si passa alla somma di quante si vogliano condizioni della stessa dimensione, senza uscire dal campo delle condizioni pure, della stessa dimensione.

([1]) Non si considera la somma di due condizioni di dimensioni disuguali, perchè s'esce dal campo delle condizioni pure.

La somma è commutativa ed associativa ed ha, come si è detto, la stessa dimensione degli addendi.

Più uguaglianze tra simboli di condizioni della stessa dimensione si posson sommare a membro a membro.

La somma di l condizioni uguali a c è il *multiplo* lc, secondo l, della c.

La somma si può intendere naturalmente anche in senso algebrico, perchè di ogni condizione c si può considerare la condizione opposta $-c$ (che è la condizione perchè x giaccia sulla varietà $-C$); si ha $c-c'=c+(-c')$; ecc.

La somma di più condizioni della stessa dimensione k, si può anche definire come la condizione perchè siano soddisfatte disgiuntamente le condizioni singole.

OSSERVAZIONE. — Se una condizione c è aritmeticamente equivalente al multiplo secondo l d'un'altra condizione c', si dirà che *c' è equivalente al sottomultiplo di c secondo l.* Si può in questo caso considerare il prodotto di c per ogni frazione avente il denominatore l.

Per es. la condizione c, di dimensione 2, perchè una conica del piano passi per un punto dato e tocchi una retta non appartenente al punto, è una condizione che si esprime con un'equazione lineare e con un'equazione quadratica fra i coefficienti dell'equazione della conica. Mentre, se la retta passa pel punto, cosicchè trattasi della condizione c', di dimensione 2, perchè una conica abbia in un punto dato una data tangente, la c' vien espressa da due equazioni lineari fra i detti coefficienti e si ha $c=2c'$; onde si può scrivere $c'=\frac{1}{2}c$.

21. Passiamo al prodotto. Il *prodotto* si definisce per due condizioni c, c' di dimensioni k, k' tali che $k+k'\leq r$: *è la condizione affinchè le c, c' sieno soddisfatte simultaneamente.* Si designa con cc' o con $c'c$, perchè esso gode evidentemente della proprietà commutativa.

Per la condizione $c''=cc'$ si può ripetere quanto si è detto nei riguardi della somma. Anch'essa risulta cioè funzione razionale del punto y'' di $N''_{s+s'}=N_s\times N'_{s'}$, se per le c, c' si conservano le ipotesi del numero precedente.

La definizione di prodotto, nelle esposizioni sistematiche della geometria numerativa (da SCHUBERT in poi), anteriori all'uso che noi abbiamo fatto delle varietà virtuali, dava luogo ad una difficoltà essenziale, che rendeva imprecisa la definizione medesima.

Invero, mentre la somma di due condizioni pure, di dimensione k, è, senza eccezione, una condizione pura della stessa dimensione, non si può sempre affermare che il prodotto cc' sia una condizione di dimensione $k+k'$, come accade « in generale ». Le varietà C, C' corrispondenti a generiche particolarizzazioni di c, c' hanno, è vero, le dimensioni $r-k$, $r-k'$; e la dimensione « normale » della loro intersezione è: $(r-k)+(r-k')-r=r-(k+k')$; ma nel fatto l'intersezione delle due varietà può essere impura e contenere o essere addirittura costituita da parti di dimensione $> r-(k+k')$. Nè veramente in questo caso, dicendo che la dimensione dell'intersezione è « in generale » $r-(k+k')$, si afferma alcunchè di preciso rispetto al concetto rigoroso di « generico » e di « particolare » ([1]).

Si dovrebbe dire piuttosto, in modo del tutto preciso, che esistono coppie di condizioni c, c' per le quali la varietà intersezione è pura e di dimensione $r-(k+k')$; ma questo è ben poco significativo.

La difficoltà si superava finora pro' forma dicendo che la dimensione della condizione cc' è $k+k'$, quando le condizioni c, c' sono « indipendenti ». Però è chiaro che si trattava d'un circolo vizioso, perchè, viceversa, il solo criterio che si adduceva per riconoscere l'« indipendenza » delle due condizioni, era il fatto che la dimensione del loro prodotto fosse $k+k'$.

Quest'obiezione lascia incerti sopra l'effettivo valore del concetto di prodotto nel calcolo simbolico, non potendosi a priori decidere quando si possa o meno porre innanzi tale concetto.

L'uso delle varietà virtuali elimina di colpo la difficoltà e conferisce pieno rigore alla definizione.

Invero, considerate le varietà C, C' corrispondenti a due particolarizzazioni generiche di c, c' (od anche a due particolarizzazioni qualunque, da valutarsi virtualmente, se occorre; n. 13), la varietà virtuale (C, C') ha sempre la dimensione $r-(k+k')$ (n. 3). *La condizione cc' prodotto delle c, c' di dimensioni k, k', si definisce come la condizione perchè il punto x di M_r stia sulla varietà virtuale (C, C'); e così essa ha sempre la dimensione $k+k'$, ed è una condizione pura* ([2]).

È sottinteso che a C, C' si posson sostituire due varietà qualunque ad esse algebricamente equivalenti. *Dalla definizione del prodotto di due, si passa alla definizione del prodotto di più condizioni, la somma delle cui dimensioni non superi la dimensione dell'ambiente; e si ha sempre come prodotto una condizione pura di dimensione uguale alla somma delle dimensioni dei fattori.*

Il prodotto è commutativo ed associativo.

([1]) Ved. SEVERI, *Lezioni di Analisi*, I. (Bologna, Zanichelli), p. 330 e pag. 403.

([2]) Essa è rappresentata da una corrispondenza pura di dimensione $s+s'+r-(k+k')$ fra $N''_{s+s'}$ ed M_r.

22. Quel che rende possibile il calcolo coi simboli delle condizioni pure è la validità (funzionale e) numerativa della conservazione del numero.

È infatti in virtù di tale conservazione che, se c, d; c', d' sono quattro condizioni pure, le prime due di dimensione k, le altre due di dimensione k', sotto l'ipotesi $k+k' \leq r$, da

$$c = d, \qquad c' = d',$$

si deduce $cc' = dc'$, $dc' = dd'$, e quindi:

$$cc' = dd'.$$

Inoltre se $c'' = c + c'$ sono condizioni pure di dimensione k, e d è una condizione di dimensione $k'(k+k' \leq r)$, si deduce

$$c''d = cd + c'd,$$

cioè il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

23. A proposito del campo di validità del calcolo simbolico e del modo di applicarlo ai problemi singoli, c'è da avvertire quanto segue.

Sia una M_r irriducibile di punti (o enti algebrici) x. La constatazione della irriducibilità di M_r sarà sempre agevole, a partire dalla definizione degli x. Meno agevole riuscirà il constatare se M_r ha o no elementi multipli e, nel caso affermativo, il sostituire birazionalmente ad M_r una varietà, gli intorni dei cui elementi sieno tutti equivalenti tra loro dal punto di vista delle trasformazioni biregolari e biunivoche (1).

Inoltre, considerata una corrispondenza pura variabile c, relativa agli x, e tradottala, previa opportuna analisi, in una corrispondenza pura T fra M_r ed una varietà irriducibile N_s di elementi y, altrettanto si dovrebbe fare nei riguardi di N_s: accertare cioè se N_s ha elementi multipli e, in caso affermativo, liberare N_s da tali elementi, con trasformazioni birazionali.

Ora tutto ciò, ripetiamo, porrebbe di fronte a difficoltà gravissime. Ma le trasformazioni cui alludiamo non sono nel fatto necessarie. La possibilità di eseguirle, ci ha permesso di svolgere con tutto rigore la teoria esposta; all'atto pratico però basta soltanto accertare che le soluzioni che si prendono

(1) Che è poi, dal punto di vista infinitesimale intrinseco (cioè entro la varietà) quel che occorre perchè valgano i concetti che abbiamo esposto, circa le intersezioni e le molteplicità d'intersezione delle varietà subordinate ad M_r. Basta cioè che si possa trasformar l'intorno d'un punto P della varietà nell'intorno di un punto di S_r con una trasformazione biunivoca, biregolare, perchè quel punto, ai fini delle intersezioni, sia da considerarsi come semplice, anche se non lo è.

in considerazione nel problema nnmerativo da sciogliersi, sono, al variare di c, suscettibili di assumere posizioni generiche in $M_{r'}$, chè allora valgono tutte le considerazioni concernenti le molteplicità d'intersezione e quelle relative alla definizio.e delle varietà virtuali.

C'è di più. Si può fare a meno dell'ipotesi che N_s non abbia punti multipli, la quale è stata in fondo uno strumento di più agile lavoro. Invero, lo studio delle condizioni algebriche imposte a punti di $M_{r'}$ si riconduce esclusivamente a problemi d'intersezione di varietà tracciate in $M_{r'}$; onde, se mai, la sola ipotesi necessaria è quella concernente i punti di $M_{r'}$. Ma anche da questa si può fare astrazione, se ci si limita a considerare le soluzioni che cadono fuori degli eventuali punti multipli di $M_{r'}$ (distribuiti in varietà algebriche subordinate). E ciò perchè la molteplicità dell'intersezione di due varietà tracciate su $M_{r'}$, in un punto semplice P di $M_{r'}$, dipende soltanto da proprietà che riguardano l'intorno di P; o perchè la definizione del simbolo (V, W), esposta nel n. 3, vale immutata se si riferisce sia alle intersezioni isolate, che cadono in punti semplici, sia ad ogni varietà d'intersezione (di dimensione ≥ 1) il cui punto generico sia semplice per $M_{r'}$.

La conservazione del numero e il calcolo simbolico valgono, come vedremo nel successivo studio delle soluzioni « degeneri », anche se ci si limita alle soluzioni che cadono fnori di certe varietà subordinate all'ambiente $M_{r'}$; sicchè in definitiva *le ipotesi che N_s ed $M_{r'}$ non abbiano punti multipli non sono essenziali (quando si considerino come degeneri, nel senso sotto specificato, le soluzioni che cadono in punti multipli di $M_{r'}$).*

Le soluzioni degeneri e il principio di Plücker-Clebsch generalizzato.

24. Entro la varietà irriducibile $M_{r'}$ degli x cui si riferiscon le condizioni considerate, può esser data una particolare varietà algebrica E (pura o impura) i cui x siano da escludersi come soluzioni dei problemi numerativi da sciogliersi: sieno cioè, rispetto a tali problemi, *soluzioni degeneri* (1).

Per esempio, se $M_{r'}$ è lo spazio lineare S_5 i cui punti x rappresentano le singole coniche del piano (ossia i cui x hanno per coordinate omogenee i

(1) Di altri tipi di soluzioni degeneri, che nascon da modi errati di enunciare le condizioni che si considerano, ho avuto occasione di occuparmi in b) (ved. a p. 1 del presente lavoro) per rigettare esempi male addotti contro la conservazione del numero. Non è il caso che ce ne occupiamo qui.

coefficienti delle equazioni delle coniche), quando si pongono questioni numerative concernenti la determinazione di coniche sottoposte a questa o a quella condizione, s' intende sempre di alludere a coniche irriducibili. Le coniche (degeneri) spezzate in coppie di rette, distinte o coincidenti, sono allora soluzioni degeneri rispetto a quei problemi.

Come si sa, le coniche-luogo ridotte a rette doppie son rappresentate in S_5 dai punti di una superficie di Veronese G e quelle spezzate in coppie di rette da una varietà E_3^4 (d' ordine 4 e dimensione 3), riempita dalle corde (o dai piani tangenti o dai piani delle coniche) di G.

In tal caso la varietà i cui x si debbon rigettare come soluzioni degeneri è dunque questa E_3^4 (sulla quale i punti di G costituiscon alla loro volta soluzioni degeneri particolari).

Ritornando alle riflessioni generali, vediamo dunque che l' esclusione di una categoria di soluzioni, da riguardarsi come degeneri, implica che la varietà degli x, cui riferisconsi i problemi da sciogliersi, sia la $M_r - E$. Dal punto di vista topologico vuol dire che alla M_r (cioè alla sua riemanniana) si dà come *contorno* la E (cioè la riemanniana di E).

In particolare, E può essere (come dicevamo alla fine del n. prec.) il luogo dei punti multipli di M_r. Ammessa la trasformabilità birazionale di M_r in una $\overline{M}_r$ priva di punti multipli, al luogo E corrisponde in $\overline{M}_r$ un luogo $\overline{E}$ ed alle soluzioni concernenti la $M_r - E$, corrispondono le soluzioni concernenti la $\overline{M}_r - \overline{E}$, situata in un ambiente $\overline{M}_r$ assolutamente privo di punti multipli.

25. Sia $c_k(y)$ una condizione (pura) funzione razionale del punto y di N_s, relativa agli x di M_r (ove s' intende ormai, per evitare inutili complicazioni del discorso, che M_r sia priva di punti multipli). Dire che la $c_k(y)$ si riferisce agli x di $M_r - E$, in cui E designa il luogo delle soluzioni degeneri, equivale a dire (con le consuete notazioni) che, ove la varietà $V_{r-k}(y)$, corrispondente al generico y, incontri E in una certa varietà G, si devon considerare come soluzioni del problema gli x di $V_{r-k} - G$.

È essenziale qui che le soluzioni si cerchino in corrispondenza al generico y [1], perchè per un particolare y il comportamento di V_{r-k} rispetto ad E, può cangiare, in quanto altre varietà subordinate a V_{r-k} posson venire a coincidere con talune di quelle che V_{r-k} ha già comuni con E; oppure la dimensione di qualcuna delle intersezioni può aumentare.

[1] Ciò beninteso, quando si tratti di condizioni variabili. Per le condizioni fisse nulla v' è da aggiungere.

Che se poi la generica V_{r-k} non incontra E, è come se le soluzioni degeneri non esistessero.

Rispettata la norma che nella determinazione delle soluzioni non degeneri ci si deve riferire a particolarizzazioni generiche delle date condizioni variabili (pure), valgono senz'altro la conservazione e il calcolo simbolico.

Invero, in primo luogo, le intersezioni di due varietà V_{r-k}, W_k, di cui una almeno sia variabile, le quali cadono in E, sono a distanza finita dalle intersezioni che cadono fuori di E; e quindi il numero di ciascuna delle due categorie d'intersezioni si conserva costante (tenuto conto debitamente delle molteplicità d'intersezione), finchè non si facciano tendere V, W a particolari posizioni.

In secondo luogo, è chiaro che le definizioni della somma e del prodotto di due o più condizioni si posson riferire ai soli punti di $M_r - E$; e le proprietà commutativa, associativa, distributiva, continuano a valere.

26. Un caso particolare notevolissimo del concetto di condizioni riferite ad un ambiente nel quale è assegnata una varietà di degenerazione, è quello che *conduce alla più ampia estensione del criterio di* PLÜCKER-CLEBSCH [1]:

Sopra una M_r (irriducibile) di elementi sia assegnata una varietà di elementi degeneri rispetto ad una certa classe di problemi numerativi. Se il prodotto di più condizioni pure, effettive, delle quali una almeno variabile, ha dimensione r, ma possiede in generale soltanto soluzioni degeneri, qualora in un caso particolare esista una soluzione non degenere, questa non è isolata.

Sieno $c_{k_1}^{(1)}, \dots, c_{k_t}^{(t)}$ le date condizioni pure effettive $(k_1 + \dots + k_t = r)$, e $V_{r-k_1}^{(1)}, \dots, V_{r-k_t}^{(t)}$ le varietà degli x che soddisfanno alle condizioni stesse, per generici valori dei parametri da cui esse dipendono. L'ipotesi è che le $V_{r-k_1}^{(1)}, \dots, V_{r-k_t}^{(t)}$ non abbiano alcun punto comune fuori della varietà E degli elementi degeneri. Dico che, se per certe particolarizzazioni $\bar{c}_{k_1}^{(1)}, \dots, \bar{c}_{k_t}^{(t)}$ delle date condizioni, esiste un punto P comune alle $\bar{V}_{r-k_1}^{(1)}, \dots, \bar{V}_{r-k_t}^{(t)}$, fuori di E, l'intersezione P non è isolata.

All'uopo proiettiamo $V^{(1)}$ da k_1 spazi S_{d-r+k_1-2} generici dell'ambiente S_d, in guisa da ottenere k_1 forme di S_d, passanti per $V^{(1)}$, le quali taglino M_r

---

[1] Del quale ho dato la prima rigorosa dimostrazione nella Nota: *Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche* (« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 17 (1933), pp. 3-10). Ved. pure le mie citate *Lezioni di Analisi* (II ed.), vol. I, p. 409. Un'estensione del criterio stesso, da cui appunto dedurremo ora quella di maggior generalità, trovasi nella mia Nota: *Un'ampia estensione del criterio di Plücker-Clebsch* (« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », (2), 1 (1939), pp. 97-99).

in $V^{(1)}$ e ulteriormente in un'altra varietà ad $r - k_1$ dimensioni. Se $V^{(1)}$ è abbastanza vicina a $\overline{V}^{(1)}$, l'ulteriore intersezione di quelle forme non attraversa l'intorno di P, appunto perchè, quando $V^{(1)}$ va in $\overline{V}^{(1)}$, l'ulteriore intersezione delle k_1 forme variabili non passa per P (in quanto P è semplice per M_r) (1).

Similmente si ha un'altro gruppo di k_2 forme passanti per $V^{(2)}$, vicinissima a $\overline{V}^{(2)}$, la cui ulteriore intersezione non attraversa l'intorno di P, ecc.; fino a k_t forme analoghe relative a $V^{(t)}$.

Le r forme variabili complessivamente ottenute dalle V, segano M_r in altrettante varietà ad $r - 1$ dimensioni, che designeremo con N ed in particolare con N quelle relative alle $\overline{V}$. Le $\overline{N}$ passan per P e siccome i punti comuni alle $\overline{N}$ attorno a P giaccion tutti sulle $\overline{V}$, se P è un'intersezione isolata di queste, le $\overline{N}$ hanno esse pure un'intersezione isolata in P, epperò (2) anche le N vicine hanno un'intersezione isolata prossima a P, la quale giace necessariamente sulle V. Pertanto le V che hanno un'intersezione (isolata) attorno a P, e quindi fuori di E, dipendon complessivamente dallo stesso numero di parametri da cui dipendon tutte le V considerate; e ciò contrasta coll'ipotesi che le V generiche non abbiano intersezioni fuori di E. La conclusione è dunque che l'intersezione P delle $\overline{V}$, fuori di E, non può esser isolata.

Da ciò segue che *per accertare se il prodotto* $c_{k_1}^{(1)} c_{k_2}^{(2)} \ldots c_{k_t}^{(t)}$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_t = r)$ *ha soluzioni non degeneri basta verificare se per una qualche sua particolarizzazione esiste una soluzione isolata non degenere.*

Il teorema estende la conservazione del numero al caso in cui la condizione variabile di dimensione r (prodotto di più condizioni), possiede zero soluzioni non degeneri; sicchè: *il numero delle soluzioni non degeneri d'una particolarizzazione generica della data condizione, si conserva o diviene infinito, anche se è in generale nullo.*

Valutazione delle soluzioni multiple.

27. Un momento importante e spesso delicato della risoluzione d'un problema numerativo, è quello in cui si tratta di decidere sulla molteplicità delle singole soluzioni, che si presentano quando, nel calcolo d'una condi-

(1) Argomentazione elementare per chi abbia pratica di geometria algebrica; ma che tuttavia trovasi dimostrata a p. 349 della mia Memoria c).

(2) Ved. a pag. 98 della mia Nota ultimamente citata del « Bollettino dell'U.M.I. », 1939.

zione, si cerca di esprimerla con la somma algebrica di altre, meno complesse a identificarsi e a valutarsi. Di ciascuna di queste componenti occorre conoscere la molteplicità; ed allorchè si sieno trovate tali molteplicità, per la c s'ottiene un'espressione del tipo $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i c^{(i)}$ ove $c^{(i)}$ son le condizioni componenti e λ_i numeri interi, positivi o negativi, che denotan le rispettive molteplicità delle $c^{(i)}$.

Un metodo (indicato nella mia Nota *b*)) per calcolare i coefficienti λ_i, quando la condizione ha dimensione $< r$, è il seguente. Sia $k < r$ la dimensione di c. Si scelgano μ condizioni di dimensione complementare $r - k$, diciamole $d^{(1)}, \ldots, d^{(\mu)}$, tali che sia facile il calcolo dei numeri $cd^{(j)}$, $c^{(i)}d^{(j)}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ e che, inoltre il determinante $|c^{(i)}d^{(j)}|$ risulti diverso da zero. Si avrà allora fra gli interi μ un sistema di equazioni lineari, che permetterà di calcolarli.

Riassumiamo, per comodità del lettore, l'esempio che, nella Nota *b*), ho dato per illustrare questo metodo.

Indichiamo con μ la condizione semplice (cioè di dimensione 1) affinchè una conica dello spazio S_3 abbia il proprio piano passante per un punto dato A e con ν la condizione, pure semplice, perchè una conica s'appoggi ad una retta data b.

Nella mia Nota dimostro anzitutto che la condizione doppia prodotto $\mu\nu$ è irriducibile (1); sicchè ad essa si può applicare la conservazione e il calcolo simbolico.

Scelto A su b, la $\mu\nu$ si scinde nella condizione P affinchè una conica passi per A e nella condizione μ^2 perchè una conica abbia il piano passante per b. Si può pertanto scrivere:

$$\mu\nu = \lambda_1 P + \lambda_2 \mu,$$

ove λ_1, λ_2 son interi ≥ 1.

Si faccia ora successivamente il prodotto di $\mu\nu$ per la condizione d, di dimensione $6 (r = 8,\ k = 2)$, affinchè una conica giaccia sopra una quadrica d'un dato fascio ed abbia il piano passante per una retta, e per la condizione e, pure di dimensione 6, affinchè una conica giaccia sopra una quadrica ed abbia il piano passante per un punto dato. Si ottengon subito le relazioni

$$\mu\nu d = 1, \quad Pd = 1, \quad \mu^2 d = 0; \quad \mu\nu e = 2, \quad Pe = 0, \quad \mu^2 e = 1,$$

e se ne ricava $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

(1) Per l'applicabilità della conservazione del numero basta sapere che $\mu\nu$ è pura: il che segue senz'altro dal fatto che μ, ν son condizioni pure (anzi irriducibili).

Si perviene così, in modo pienamente rigoroso, alla nota relazione (di SCHUBERT):

$$P = \mu\nu - 2\mu^2.$$

Se la condizione c ha la dimensione r, il metodo indicato non è applicabile. Allora per valutare le molteplicità λ_i occorrono considerazioni infinitesimali, opportunamente adattate caso per caso e intorno alle quali si trovano esempi e norme generali, per ciò che concerne le corrispondenze (ossia, in ultima analisi, tutte le condizioni algebriche), nel mio « Trattato di geometria algebrica » e in un'antica Memoria (¹).

Caratteristiche delle condizioni di data dimensione. Loro esistenza.

28. Entro M_r (irriducibile), consideriamo la totalità delle condizioni pure di dimensione k e la totalità delle condizioni pure di dimensione complementare $r-k$. Diremo brevemente che le condizioni di dimensione k e di dimensione $r-k$ sono fra loro *duali.*

Fissiamo due basi minime duali (rispetto alle equivalenze aritmetiche) per le varietà pure di dimensione k e di dimensione $r-k$, tracciate in M_r. Si hanno così due gruppi di varietà: uno costituito da ρ varietà pure di dimensione $r-k$ e un altro da altrettante varietà pure di dimensione k. Sieno:

$$c_k^{(1)}, \dots, c_k^{(\rho)}; \quad d_{r-k}^{(1)}, \dots, d_{r-k}^{(\rho)}$$

le condizioni, di dimensioni rispettive k, $r-k$, che si impongono ai punti x di M_r volendo che giacciano sulle varietà del primo e del secondo gruppo. In conseguenza del n. 7 possiamo affermare che: *Ogni condizione pura di dimensione k, imposta agli elementi d'una varietà (irriducibile) M_r, è uguale ad una combinazione lineare a coefficienti interi (positivi o negativi) delle condizioni $c_k^{(1)}, \dots, c_k^{(\rho)}$ costituenti una base minima.*

Queste ρ condizioni di dimensione k, mediante cui si esprimono tutte le altre, si chiamano *condizioni caratteristiche di dimensione k.*

L'esistenza delle caratteristiche per condizioni di dimensione qualunque sopra una varietà algebrica qualsiasi, conseguenza ovvia dell'esistenza della base, è stata da me dimostrata nella quarta delle Memorie citate nella nota (¹) a piè della pagina 162.

(¹) SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio* (« Memorie della R. Acc. di Torino », (2), 51 (1902), pp. 81-114).

Naturalmente le caratteristiche non sono individuate, potendo essere scelte in infiniti modi, sotto la necessaria restrizione che, tenute fisse le condizioni d della base duale, il discriminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_k^{(1)} d_{r-k}^{(1)} & c_k^{(1)} d_{r-k}^{(2)} & \dots & c_k^{(1)} d_{r-k}^{(\rho)} \\ c_k^{(2)} d_{r-k}^{(1)} & c_k^{(2)} d_{r-k}^{(2)} & \dots & c_k^{(2)} d_{r-k}^{(\rho)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k^{(\rho)} d_{r-k}^{(1)} & c_k^{(\rho)} d_{r-k}^{(2)} & \dots & c_k^{(\rho)} d_{r-k}^{(\rho)} \end{vmatrix}$$

si mantenga diverso da zero e di valore assoluto minimo. Mostriamo che:

Una volta trovate le caratteristiche per le condizioni di dimensione k, si costruiscono agevolmente quelle relative alle condizioni duali.

Invero, note le c, basta scegliere ρ condizioni d di dimensione $r-k$, tali che $\Delta \neq 0$. Bisognerà poi, col metodo da me indicato nella teoria della base per costruire una base intermediaria, passare ad altri gruppi di condizioni c, d tali che Δ raggiunga il minimo valore assoluto. Si avranno così le caratteristiche di dimensione $r-k$.

29. *Modulo* di condizioni (pure) di dimensione k è un insieme di condizioni contenente la condizione zero di dimensione k e tale inoltre che la somma o la differenza di due qualunque di quelle condizioni appartenga all'insieme.

Nel modulo non posson esservi più di ρ condizioni aritmeticamente indipendenti: anzi, se ve ne sono ρ, esso comprende tutte le condizioni di dimensione k. Sia $\rho' \leq \rho$ il massimo numero di condizioni indipendenti contenute nel modulo: diciamole $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(\rho')}$ (omettendo l'indice k della dimensione). Formata la matrice di ρ' orizzontali e di ρ verticali, coi prodotti delle e per le condizioni caratteristiche duali d, qualora questa matrice fosse nulla esisterebbero certi interi non tutti nulli $\mu_1, \dots, \mu_{\rho'}$ tali che

$$\mu_1 e^{(1)} d^{(j)} + \mu_2 e^{(2)} d^{(j)} + \dots + \mu_{\rho'} e^{(\rho')} d^{(j)} = 0. \qquad (j = 1, 2, \dots, \rho)$$

Epperò la varietà degli x soddisfacenti alla condizione $\mu_1 e^{(1)} + \dots + \mu_{\rho'} e^{(\rho')}$ sarebbe aritmeticamente nulla; onde risulterebbe:

$$\mu_1 e^{(1)} + \dots + \mu_{\rho'} e^{(\rho')} = 0,$$

contrariamente al supposto.

Esistono perciò certe ρ' condizioni d, che insieme alle e, danno luogo ad un discriminante $D \neq 0$. Esse costituiscono, con le loro combinazioni lineari, un *modulo duale* del dato.

Ripetendo i procedimenti da me indicati nella teoria della base, si riesce a passare a due gruppi di e, d, appartenenti ai due moduli duali e tali che per essi il determinante D assume il minimo valore assoluto non nullo, compatibile con la scelta delle e, d, entro i rispettivi moduli.

Si conclude così che:

Ogni modulo di condizioni possiede le proprie caratteristiche.

30. Occupiamoci ora di un legame notevolissimo tra la teoria delle caratteristiche entro M_r e la teoria-generale delle corrispondenze ivi [1].

Sia $V^{(1)}, \dots V^{(\rho)}$ una base intermediaria per le varietà di dimensione $r-k$ di M_r, cosicchè le condizioni perchè il punto x di M_r giaccia su ciascuna di quelle varietà forniscon le caratteristiche di dimensione k. Sia inoltre $W^{(1)}, \dots, W^{(\rho)}$ una base intermediaria duale. Sieno infine V, W due varietà, di dimensioni rispettive $r-k$, k, le quali si espriman per le basi con le relazioni:

$$V \mathrel{\dot{\equiv}} \lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_\rho V^{(\rho)}, \qquad W \mathrel{\dot{\equiv}} \mu_1 W^{(1)} + \dots + \mu_\rho W^{(\rho)}. \tag{2}$$

Dalla seconda si trae:

$$[V,\ W] = \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j [V,\ W^{(j)}], \qquad [V^{(i)},\ W] = \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j [V^{(i)},\ W^{(j)}], \qquad (i = 1, \dots, \rho)$$

ed eliminando le $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho$ fra queste $\rho + 1$ relazioni lineari:

$$[V,\ W] = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \Delta_{ij} [V,\ W^{(j)}][W,\ V^{(i)}] \text{ [2]}, \tag{3}$$

ove Δ_{ij} è l'elemento generico del determinante reciproco del discriminante Δ delle basi considerate ($\Delta = |[V^{(i)},\ W^{(j)}]|$).

Si ottiene così quello che ho chiamato il *teorema di* BÉZOUT *per le varietà di dimensioni k, $r-k$ contenute in M_r*, in quanto gli interi $[V,\ W^{(j)}]$, $[W,\ V^{(i)}]$ posson considerarsi come gli « ordini » di V, W, rispetto alle varietà delle relative basi duali.

Il determinante dei numeri razionali Δ_{ij} vale $\frac{1}{\Delta}$; epperò i numeri Δ_{ij} son tutti interi soltanto quando $|\Delta| = 1$.

---

(1) Rinvio per quest'ultima teoria alla mia conferenza: *La teoria generale delle corrispondenze fra due varietà algebriche e i sistemi di equivalenza* (« Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität », 1939), ove son riassunti i miei precedenti lavori sull'argomento. Occorre in particolare tener conto del risultato al n. 10 della mia Nota: *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche* (« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 23 (1936-XIV), pp. 818-823, 921-925) e di quello al n. 7 dell'altra mia: *Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche* « (Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 25 (1937-XV), pp. 3-9).

(2) Dalle (2) segue anche la relazione $[V,\ W] = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j [V^{(i)},\ W^{(j)}]$, bilineare nei caratteri λ, μ delle V, W rispetto alle basi e avente per discriminante il discriminante di queste.

In particolare, se M_r è uno spazio lineare, tenuto conto che ivi le basi minime per le varietà di dimensione $r-k$, k son date da spazi lineari delle rispettive dimensioni [1], si ricade nell'ordinario teorema di BÉZOUT.

Supponiamo, viceversa, che sopra M_r siano tracciate ρ varietà $V^{(1)}, \dots, V^{(\rho)}$ ad $r-k$ dimensioni e ρ varietà a k dimensioni $W^{(1)}, \dots, W^{(\rho)}$, tali che per ogni coppia di varietà V_{r-k}, W_k valga un teorema di BÉZOUT del tipo (3); cioè che esistano certi numeri razionali $\delta_{ij} (i, j = 1, \dots, \rho)$, dipendenti soltanto da M_r e non da V, W, in guisa che risulti per ogni coppia di varietà V, W:

$$(4) \qquad [V, W] = \Sigma\, \delta_{ij}[V, W^{(j)}][W, V^{(i)}].$$

Dedurremo allora da ciò le basi per le varietà di dimensioni $r-k$, k tracciate in M_r.

Indichiamo all'uopo con δ un comun denominatore dei numeri δ_{ij}, e consideriamo gli interi $\delta'_{ij} = \delta\delta_{ij}$. Posto inoltre:

$$(5) \qquad \lambda_i = \sum_j \delta_{ij}[V, W^{(j)}], \qquad \mu_j = \sum_i \delta_{ij}[W, V^{(i)}],$$

sicchè i numeri $\lambda'_i = \delta\lambda_i$, $\mu'_j = \delta\mu_j$ son interi, confrontiamo le varietà δV, $\lambda'_1 V^{(1)} + \dots + \lambda'_\rho V^{(\rho)}$. Esse sono aritmeticamente equivalenti, perchè, qualunque sia W:

$$[\lambda'_1 V^{(1)} + \dots + \lambda'_\rho V^{(\rho)}, W] = \sum_i \lambda'_i[W, V^{(i)}] = \sum_{ij} \delta'_{ij}[V, W^{(j)}][W, V^{(i)}] = \delta[V, W].$$

Pertanto (n. 7):

$$(6) \qquad \delta V \doteqdot \lambda'_1 V^{(1)} + \dots + \lambda'_\rho W^{(\rho)},$$

e similmente:

$$(7) \qquad \delta W \doteqdot \mu'_1 W^{(1)} + \dots + \mu'_\rho W^{(\rho)}.$$

Dunque $V^{(1)}, \dots, V^{(\rho)}$; $W^{(1)}, \dots, W^{(\rho)}$ forman due basi duali, oppure le prime di esse — e quindi anche le seconde — si riducono a $\rho' < \rho$ algebricamente indipendenti; ed anche in questo caso se ne ricavan lo stesso due basi duali, costituite da ρ' opportune varietà del primo gruppo e da ρ' opportune varietà del secondo.

Si vede di più che $\rho' = \rho$ allora e soltanto allora che il discriminante della forma bilineare (4) sia diverso da 0. Invero, la relazione $\rho' = \rho$ e la disuguaglianza $\Delta = |[V^{(i)}, W^{(j)}]| \neq 0$ son l'una conseguenza dell'altra. Ora, se $\Delta \neq 0$, si deduce agevolmente che $\delta_{ij} = \Delta_{ij}$, ove Δ_{ij} è l'elemento generico del determinante reciproco di Δ. Per dimostrarlo, si taglino con $W^{(j)}$ i due

---

[1] Invero, nella mia Memoria, *La base per le varietà algebriche*, ecc. (citata a p. 162), ho dimostrato che in ogni famiglia di varietà di data dimensione k in S_r, vi sono forme limiti composte esclusivamente da spazi lineari S_k.

membri della (6) e, fatto $j = 1, \dots, \rho$, si risolvan le ρ equazioni lineari così ottenute nelle λ'_i. Si perviene alle espressioni:

$$\lambda'_i = \delta \sum_j \Delta_{ij} [V, W^{(j)}],$$

le quali, confrontate con la prima delle (5), porgono:

$$\sum_j (\delta_{ij} - \Delta_{ij}) [V, W^{(j)}] = 0,$$

valide qualunque sia V. Attesa l'indipendenza delle $W^{(1)}, \dots W^{(\rho)}$ se ne trae appunto:

$$\delta_{ij} = \Delta_{ij}. \tag{8}$$

Naturalmente, trovate due basi duali, conviene poi dedurre da esse due basi intermediarie duali. La conclusione è che:

La determinazione della base per le varietà di dimensione k contenute in una M_r (e quindi nello stesso tempo per le varietà di dimensione $r - k$) equivale alla ricerca di un teorema di BÉZOUT *per tutte le coppie di varietà a k e ad $r - k$ dimensioni di M_r.*

31. Ora un altro modo si offre spontaneo onde arrivare al teorema di BÉZOUT per le V, W di M_r, ricorrendo come segue alla teoria delle corrispondenze.

Si consideri sulla varietà delle coppie ordinate x, x' di M_r (prodotto di M_r per una *copia* sovrapposta M_r') la varietà ∞^r delle coppie x, x' aventi x su V e x' su W. Le *coincidenze* ($x = x'$) di questa varietà forniscono il numero virtuale $[V, W]$. Tali coincidenze si ottengono applicando il *principio generale di corrispondenza su M_r*, il quale dà appunto il numero virtuale delle coincidenze di una qualunque serie algebrica ∞^r di coppie x, x' in $M_r \times M'_r$, ossia di una corrispondenza ∞^r tra i punti di M_r.

Il principio generale cui si allude trovasi nei lavori in cui ho trattato della teoria dei sistemi d'equivalenza in relazione alle corrispondenze algebriche (1). La sua applicazione conduce agevolmente ad una espressione del tipo (4); ma nella sostanza il metodo non differisce da quello poggiato sulla base, perchè la dimostrazione del principio di corrispondenza implica, in generale, la conoscenza di quest'ultima.

Tuttavia, se in qualche caso concreto si riesce a trovare direttamente il

(1) Ved. in particolare: SEVERI, *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche* (« Atti della R. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 23 (1936-XIV), pp. 818-823; 921-925).

principio di corrispondenza, senza passar per la base, se ne può dedurre la soluzione del problema delle caratteristiche e ritrovare addirittura la base.

OSSERVAZIONE. — È quasi superfluo avvertire che io ho considerato il principio di corrispondenza dal punto di vista generale delle varietà virtuali, cosicchè il numero delle coincidenze d'una serie ∞^r di coppie x, x' è *sempre* virtualmente finito (e quand'è infinito ogni varietà di coincidenze vien sostituita dalla propria equivalenza funzionale).

Le caratteristiche per le condizioni relative a spazi lineari e la base sulle varietà grasmanniane.

32. Il legame esposto in generale nel numero precedente fu da me indicato, in particolare, nella ricerca delle caratteristiche per le condizioni imposte a spazi lineari di data dimensione, contenuti in un ambiente lineare S_r (1).

Riassumo la questione, che costituisce un'utile illustrazione delle generalità esposte. Com'è noto (2) SCHUBERT ha introdotto la nozione di *forma fondamentale* di S_k in S_r. Una tal forma, indicata col simbolo $[a_0, a_1, \dots, a_k]$, ove $a_0, a_1, \dots, a_k$ son interi crescenti $(0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq r)$ è l'insieme degli S_k che giaccion in un dato S_{a_k}, hanno con un $S_{a_{k-1}}$ di S_{a_k} un S_{k-1} comune, con un $S_{a_{k-2}}$ di $S_{a_{k-1}}$ un S_{k-2} comune, ...; con un S_{a_0} un punto comune. La *condizione fondamentale* perchè un S_k appartenga ad una forma siffatta s'indica col simbolo $(a_0, a_1, \dots, a_k)$. La dimensione d'una tal condizione si calcola subito. Bisogna invero, per determinare un S_k della forma, prendere un punto in S_{a_0}, un punto in un S_{a_1-1} dato genericamente in S_{a_1}, un punto in S_{a_2-2} dato genericamente in $S_{a_2}, \dots$, un punto in un S_{a_k-k} dato genericamente in S_{a_k}. E ciò importa la scelta di

$$d = a_0 + (a_1 - 1) + \dots + (a_k - k) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \frac{1}{2} k(k+1) \tag{9}$$

parametri. Pertanto $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ ha la dimensione d e $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ la dimensione

$$\delta = (k+1)(r-k) - d = \frac{(2r-k)(k+1)}{2} - \sum_{i=0}^{k} a_i . \tag{10}$$

---

(1) SEVERI, *Le coincidenze d'una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni immersi nello spazio a r dimensioni* (« Rend. della R. Acc. dei Lincei », (5), 9 (1900), pp. 321-326).

(2) Ved. p. es. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, II ed., Principato, Messina, 1923, p. 48.

Le forme di data dimensione d s'ottengono in corrispondenza ai singoli gruppi di interi $a_0, \dots, a_k$ $(0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq r)$ che, per dati d, k, soddisfanno alla (9). In particolare la forma fondamentale $[r-k, r-k+1, \dots, r]$ è lo S_r come totalità di S_k e la forma fondamentale $[0, 1, \dots, k]$ è un S_k.

Le dimensioni delle forme $[a_0, a_1, \dots, a_k]$, $[r-a_k, \dots, r-a_0]$ dànno per somma $R=(k+1)(r-k)$. Esse chiamansi *forme coniugate*.

Nella mia prima Nota sulla conservazione del numero [1] ho dimostrato che *le condizioni fondamentali* $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ *sono irriducibili e sono altresì irriducibili i prodotti di due o più condizioni fondamentali;* sicchè le loro combinazioni lineari dànno luogo soltanto a condizioni pure ed è ad esse applicabile il calcolo simbolico e la conservazione del numero.

Orbene, per risolvere il problema delle caratteristiche concernenti le condizioni algebriche relative agli S_k di S_r [2], io mi son posto (nel lavoro citato del 1900) la questione più ampia di determinare il principio di corrispondenza fra gli S_k di S_r, inteso nella più generale accezione, cioè come determinazione del numero delle coppie x, x' di spazi S_k, costituite da elementi coincidenti entro una serie $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie x, x' di tali spazi. Col sussidio dell'elementare principio di corrispondenza di CHASLES (relativo a punti di una retta o agli elementi di un ente razionale ∞^1) ho così dimostrato che il richiesto numero u di coincidenze è espresso da

$$u = \Sigma\,(a_0, a_1, \dots, a_k)(r-a_k, \dots, r-a_0)', \tag{11}$$

ove $(a_0, \dots, a_k)(r-a_k, \dots, r-a_0)'$ denota il numero delle coppie x, x' che hanno x in una data $[a_0, \dots, a_k]$ e x' in una data $[r-a_k, \dots, r-a_0]$; il sommatorio essendo esteso a tutti i possibili prodotti del tipo considerato.

Casi particolari della (11) erano noti (e nel mio lavoro sono citati). Per $k=0$ si ricade in un principio di corrispondenza di CAPORALI-PIERI, che SALMON aveva dato nel piano fin dal 1874 (non come riferentesi ad una serie ∞^2 qualunque di coppie di punti del piano, ma ad una serie i cui x, x' invadessero il piano stesso, cioè ad una corrispondenza nel senso più elementare della parola).

La (11) porge subito il teorema di BÉZOUT relativo alla totalità M_R degli S_k di S_r. Se, invero, si considera in S_r un sistema Σ, ∞^δ, di S_k e un altro sistema Σ', ∞^d, di S_k, con $d+\delta=R$, la totalità delle coppie x, x' ottenuta associando ogni x di Σ con ogni x' di Σ', è ∞^R; epperò vi è sempre

---

(1) Nota *a*) citata a p. 1.

(2) Problema che SCHUBERT aveva già sciolto nel 1886 con la conservazione del numero, ma senza le precisazioni e gli accertamenti che potevano render rigorosa la sua soluzione

un numero finito, da valutarsi se del caso virtualmente (n.º 31, Oss.), di coincidenze. Questo numero è fornito dalla (11), ove il simbolo $(a_0, \ldots, a_k)$ si riferisce a Σ e il simbolo $(r - a_k, \ldots, r - a_0)'$ a Σ'.

Per esempio, per $r = 3$, $k = 1$ si ottiene la nota formula (di HALPHEN)

$$n = \mu\mu' + \nu\nu',$$

che dà il numero delle rette comuni a due congruenze di rette ($\delta = d = 2$, $R = 4$); μ denotando l'*ordine* (numero delle rette per un punto generico) e ν la *classe* (numero delle rette in un piano generico) della prima congruenza; μ', ν' ordine e classe della seconda.

Il teorema di BÉZOUT, così ottenuto sulla M_R, fornisce alla sua volta in modo immediato la soluzione del problema delle caratteristiche per gli S_k di S_r.

Consideriamo infatti una condizione c_δ, la cui dimensione δ sia espressa da (10), e denoti Σ' il sistema ∞^d $(d = R - \delta)$ costituito dagli S_k, che soddisfanno a c_δ. Indichiamo inoltre con $\lambda_{a_0 a_1 \ldots a_k}$ il numero (finito) degli S_k di Σ', che appartengono ad una generica forma $[r - a_k, \ldots, r - a_0]$. Dico che

$$c_\delta = \Sigma\, \lambda_{a_0 a_1 \ldots a_k}(a_0, a_1, \ldots, a_k), \tag{12}$$

ove il sommatorio si estende a tutti i possibili gruppi di valori interi di $a_0, \ldots, a_k$ $(0 \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_k \leq r)$, che soddisfanno alla (10).

Dimostreremo anzi simultaneamente che, se e_d è una condizione duale di $c_\delta (d + \delta = R)$ e $\mu_{a_0 a_1 \ldots a_r}$ denota il numero (finito) degli S_k che soddisfanno ad e_d e giacciono in una generica $[a_0, \ldots, a_k]$, risulta:

$$e_d = \Sigma\, \mu_{a_0 a_1 \ldots a_k}(r - a_k, \ldots, r - a_0). \tag{13}$$

Invero, le condizioni c_δ, $\Sigma\, \lambda_{a_0 \ldots a_k}(a_0, \ldots, a_k)$ moltiplicate per e_d forniscono i numeri

$$c_\delta e_d, \quad \Sigma\, \lambda_{a_0 a_1 \ldots a_k}(a_0, a_1, \ldots, a_k) e_d$$

cioè, siccome

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k) e_d = \mu_{a_0 a_1 \ldots a_k},$$

i numeri

$$c_\delta e_d, \quad \Sigma\, \lambda_{a_0 a_1 \ldots a_k} \mu_{a_0 a_1 \ldots a_k},$$

che sono uguali, a norma del teorema di BÉZOUT. Pertanto le condizioni c_δ, $\Sigma\, \lambda_{a_0 \ldots a_k}(a_0, \ldots, a_k)$ sono uguali; e similmente lo sono le e_d,

$$\Sigma\, \mu_{a_0 a_1 \ldots a_k}(r - a_k, \ldots, r - a_0).$$

Si conclude che:

Ogni condizione (pura) di dimensione δ imposta agli S_k di S_r s'esprime con una combinazione lineare a coefficienti interi delle condizioni fondamentali *(che son dunque caratteristiche)* $(a_0, a_1, \dots, a_k)$, *ove* $a_0, a_1, \dots, a_k$ *son tutti i possibili gruppi di* $k+1$ *interi soddisfacenti alle:*

$$0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq r, \quad \Sigma\, a_i = \delta - \frac{(2r-k)(k+1)}{2}. \tag{14}$$

33. Trovate le caratteristiche, si può, reciprocamente, costruire la base delle varietà di data dimensione contenute nella M_R degli S_k di S_r.

Val la pena di fermarsi sopra tale questione, che porge l'occasione d'illustrare altre circostanze di carattere generale.

Anzitutto ricorderò che la varietà degli S_k di S_r si può rappresentare birazionalmente, *senza eccezioni*, con una M_R di punti, detta *varietà grassmanniana*, situata in uno spazio S_σ, ove $\sigma = \binom{k+1}{r+1} - 1$.

Essa è di ordine

$$n = \frac{1!\,2!\dots k!\;R!}{(r-k)!\,(r-k+1)!\dots r!}$$

ed è stata ampiamente studiata in una mia Memoria [1], dove ho per es. dimostrato che la grassmanniana è il *modello minimo* (cioè d'ordine minimo) su cui si può rappresentare birazionalmente *senza eccezioni* la totalità degli S_k di S_r [2]. La varietà è manifestamente razionale (e quindi, abbandonando l'esigenza di rappresentarla senza eccezioni, si potrebbe anche rappresentare birazionalmente in modo ovvio coi punti d'un S_R). Inoltre essa possiede un gruppo continuo transitivo di omografie che la mutano in sè e che provengono dalle omografie di S_r; per guisa dunque che tutti i punti di M_R sono semplici, perchè omograficamente equivalenti.

Consideriamo in S_r le possibili forme fondamentali $[a_0, \dots, a_k]$ di data dimensione d. Esse distribuisconsi in un certo numero ρ di sistemi algebrici irriducibili, ognuno di questi provenendo da un gruppo fissato di valori degli interi $a_0, \dots, a_k$ soddisfacenti, per dato d, alle condizioni sopra indicate.

Per ciascuno di questi sistemi scegliamo una forma. Otterremo così, sulla grassmanniana M_R, ρ varietà $V_d^{(1)}, \dots, V_d^{(\rho)}$, di dimensione d, i cui punti rappresentano gli S_k delle ρ forme fissate. Similmente potremo costruire su M_R le varietà $W_\delta^{(1)}, \dots, W_\delta^{(\rho)}$, imagini di ρ forme $[r-a_k, \dots, r-a_0]$ coniugate alle singole $[a_0, \dots, a_k]$. Supporremo di più scelti gli apici delle $V^{(i)}$, $W^{(j)}$ in guisa che due varietà di uguali apici $(i=j)$ corrispondano a forme coniugate.

[1] SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare* (« Annali di Matematica », (3), 24 (1915), pp. 89-120).

[2] Cosicchè per es. la varietà delle rette di S_3 non si può rappresentare senza eccezioni sopra una varietà d'ordine <2; la varietà delle rette di S_4 sopra una varietà d'ordine <5; ecc.

Dico che i due gruppi $V^{(1)},\dots,\ V^{(\rho)}$; $W^{(1)},\dots,\ W^{(\rho)}$ costituiscono due basi intermediarie duali per le varietà delle rispettive dimensioni tracciate su M_R.

Prese invero due varietà qualunque V_d, W_δ di M_R, il teorema di BÉZOUT per le coppie di sistemi di dimensione complementare di S_k in S_r, cioè per le coppie di varietà duali di M_R, può scriversi senz'altro sotto la forma:

$$[V,\ W] = \sum_{i=1}^{\rho} [V,\ W^{(i)}][W,\ V^{(i)}],$$

perchè i numeri sopraindicati con $\lambda_{a_0 a_1 \dots a_k}$, $\mu_{a_0 a_1 \dots a_k}$ si riducon precisamente ai simboli $[V,\ W^{(i)}]$, $[W,\ V^{(i)}]$.

Ciò posto, conservate le notazioni del n.° 30, si vede che i numeri là indicati con δ_{ij} hanno nel caso attuale i valori

$$\delta_{ij} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

E siccome il determinante $|\delta_{ij}|$ è non nullo (vale 1), si conclude senz'altro che le $V^{(1)},\dots,\ V^{(\rho)}$; $W^{(1)},\dots,\ W^{(\rho)}$ costituiscon due basi duali.

Risulta inoltre dalla (8):

$$\Delta_{ii} = 1, \quad \Delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

cioè il determinante $|\Delta_{ij}|$ vale 1; e il suo reciproco, che è il discriminante simultaneo delle due basi, vale pure 1, ossia raggiunge il valore assoluto minimo. Le due basi sono perciò intermediarie.

Infine, anche il discriminante delle due basi, come reciproco di $|\Delta_{ij}|$ ha uguali ad 1 gli elementi principali e nulli gli altri; ovvero:

$$[V^{(i)},\ W^{(i)}] = 1, \quad [V^{(i)},\ W^{(j)}] = 0 \quad (i \neq j).$$

Si può intanto raccogliere questa nota conclusione: *Il prodotto di due condizioni caratteristiche duali è 1 o 0 secondo che le due condizioni sono o no coniugate* (1).

34. Ci resta da vedere *se le basi trovate siano anche minime (di fronte alle equivalenze algebriche).*

Si presenta a tal proposito l'occasione di ricordare (dalla teoria generale della base) che la base ed il numero-base per le varietà V_k di data dimensione k contenute in una M_r ambiente, non son invarianti in via assoluta nelle trasformazioni birazionali di M_r. Essi son invarianti di fronte a tutte le trasformazioni birazionali *che non presentano eccezioni* nè su M_r nè sulla trasformata M'_r (che supponiamo, al pari di M_r, priva di punti multipli).

---

(1) Viceversa, stabilito direttamente questo fatto, ne segue che il discriminante Δ delle basi $V^{(1)},\dots,\ V^{(\rho)}$; $W^{(1)},\dots,\ W^{(\rho)}$ vale 1 e quindi che le basi sono intermediarie.

L'accennata invarianza viene invece a mancare quando esistano su M_r o su M'_r *elementi fondamentali* della trasformazione; chè allora vi son varietà, subordinate a M_r o a M'_r, le quali, nel passaggio dall'una all'altra varietà, cangian di dimensione e quindi alterano la base delle varietà delle dimensioni rispettive. Perciò questa non può più esser costituita puramente e semplicemente dalle varietà trasformate di quelle che sull'altra formavano una base (della dimensione prefissata).

Un esempio banale, ma espressivo, è fornito dalla proiezione stereografica d'una quadrica M_2 sopra un piano M'_2. Tale proiezione stabilisce una corrispondenza birazionale fra M_2, M'_2, che muta un punto di M_2 (il centro di proiezione) in una retta a' di M'_2 e due rette per quel punto in due punti di questo. Nel passaggio da M'_2 a M_2 l'ente trasformato della retta a', che formava base per le curve di M'_2, sparisce dalla base delle curve di M_2, perchè è un punto; ma siccome i due punti eccezionali situati su a' dànno luogo a due rette di M_2, così queste vengono a formar base su M_2 (in quanto sono algebricamente indipendenti, avendo il discriminante uguale a 1).

Riprendendo l'esame della grassmanniana M_R degli S_k di S_r, ricordiamo ch'essa è birazionalmente equivalente ad uno spazio lineare S_R (è razionale) ed è priva di punti multipli come S_R; ma la corrispondenza birazionale tra M_R ed S_R è *necessariamente* dotata di elementi eccezionali. Ciò segue, sia dalla circostanza ricordata, che M_R è un modello minimo per le varietà ad essa birazionalmente equivalenti senza eccezioni; sia dall'altra che il numero base ρ per le varietà di data dimensione d contenute in M_R, è espresso dal numero delle soluzioni intere delle (14) (ove $\delta = R - d$). E ρ viene uguale ad 1 soltanto per $d = 1$, $d = R - 1$, nei quali casi esistono le sole forme fondamentali coniugate:

$$[0, 1, 2, \dots, k-1, k+1], \qquad [r-k-1, r-k+1, \dots, r];$$

costituenti rispettivamente un fascio di S_k in S_{k+1} ed il complesso (lineare speciale) di tutti gli S_k appoggiati ad un dato S_{r-k-1} [1].

---

[1] Invero, per $d = 1$, sicchè $\Sigma a_i = \frac{1}{2} k(k+1) + 1$, attese le disuguaglianze fra le a, non può che essere $a_0 = 0$, $a_1 = 1, \dots, a_{k-1} = k-1$, $a_k = k+1$; e per $d = R - 1$ non può aversi che una sola forma, perchè la coniugata di ogni forma di dimensione $R - 1$ è una forma di dimensione 1. Aggiungeremo qui, a titolo di notizia, che M_R contiene soltanto due sistemi di spazi lineari: gli S_{k+1}, formanti un sistema irriducibile di dimensione $(k+2)(r-k-1)$, ognun dei quali rappresenta gli S_k giacenti in un S_{k+1} di S_r; e gli S_{r-k}, formanti un sistema di dimensione $k(r-k+1)$, ognun dei quali rappresenta gli S_k per un S_{k-1} di S_r. Si tratta delle sole forme fondamentali *lineari*.

Da quest'osservazione sui possibili valori di ρ derivano anzi due conseguenze; e cioè:

1) *Sopra la grassmanniana degli* S_k *di* S_r *esistono varietà eccezionali di tutte le dimensioni, da* $d = 2$ *a* $d = R - 2$ $(R = (k+1)(r-k))$.

Invero, se per una certa dimensione d mancano varietà eccezionali il numero ρ deve essere uguale al numero-base analogo di un S_R, cioè ad 1.

2) La M_R è un modello minimo. Invero, gli S_k appoggiati ad un S_{r-k-1} di S_r son rappresentati da una (particolare) sezione iperpiana di S_k, la quale dunque costituisce, a norma del teorema finale del n. 32, una base minima delle equivalenze aritmetiche di dimensione $R-1$ ed una base intermediaria (eventualmente minima) rispetto alle equivalenze algebriche di dimensione $R-1$ (che son poi, attesa la razionalità di M_R, equivalenze lineari). Non può dunque esistere in M_R nessun sistema lineare di varietà di dimensione $R-1$ avente il grado minore di quello del sistema delle sezioni iperpiane, ossia dell'ordine di M_R. Da ciò l'asserto, che avevo altrimenti acquisito nella Memoria del 1915.

35. Per dimostrare ora che la base trovata nel n. 33 — base minima per le equivalenze aritmetiche di data dimensione $d = R - \delta$, e base intermediaria per le equivalenze algebriche della stessa dimensione — è nel fatto minima anche per le equivalenze algebriche, occorre provare che in M_R mancano divisori dello zero diversi da zero.

L'inesistenza di divisori dello zero di dimensione $R-1$ è già contenuta nella mia Memoria del 1915, perchè ivi è appunto provato direttamente che la base minima delle varietà di dimensione $R-1$ tracciata su M_R è una sezione iperpiana. In generale il fatto deve discendere, con opportuna analisi, dalla razionalità di M_R, tenuto conto dei possibili comportamenti delle varietà di M_R rispetto alle varietà eccezionali, in una fissata rappresentazione di M_R in S_R. L'analisi cui si accenna viene semplificata dal fatto che, in virtù del gruppo continuo di omografie esistente su M_R, si posson trasportare due varietà di dimensione d, aritmeticamente equivalenti in M_R, in due varietà che taglino *soltanto* le varietà di dimensione $R-d$, e non quelle di dimensione minore, eccezionali di fronte all'accennata rappresentazione.

Ma a prescindere da quest'analisi (1) la proprietà accennata si stabilisce adattando al problema il procedimento con cui ho altrove dimostrato (2) la

(1) Che sarebbe certamente opportuno di svolgere per riemanniane qualunque, allo scopo di verificare se le torsioni topologiche sono invarianti anche di fronte alle trasformazioni (più ampie di quelle alle quali si limita oggi la topologia), biunivoche soltanto in generale.

(2) Cfr. con la nota a piè della p. 188.

possibilità di ridurre per continuità a spazi lineari le varietà di un ordine qualunque di S_r. Qui cioè, profittando delle omologie e delle omografie assiali degeneri in S_r, si dovrà dedurne lo spezzamento di un qualsiasi sistema algebrico ∞^d di S_k in una somma di forme fondamentali ∞^d.

Per es. una congruenza di rette in S_3, la quale abbia l'ordine μ e la classe ν, si deforma con continuità, per semplice proiezione da un punto generico O sopra un piano ω (proiezione che è da considerarsi limite di una omologia ω, il cui birapporto, in un certo ordine, divenga infinitesimo), nel piano rigato ω contato ν volte e nelle μ stelle aventi per centri i punti ove ω è tagliato dalle rette della congruenza uscenti da O.

Un complesso d'ordine μ di rette di S_3, si riconduce ad un complesso lineare speciale di asse a contato μ volte, mediante un'omografia avente come luoghi di punti uniti a e un'altra retta b sghemba con a, quando il birapporto (in un conveniente ordine) dell'omografia biassiale, si fa tendere a zero.

Ma non mi fermo ulteriormente su tale questione, perchè l'ho proposta ad uno dei discepoli ricercatori dell'Istituto di Alta Matematica.

Digressione su alcune proprietà della base.

36. Lo studio delle varietà algebriche sulla $M_r - E$ (n. 24), necessaria premessa alla ricerca delle caratteristiche in presenza di elementi degeneri, richiede un approfondimento di alcune proprietà della base.

In quest'approfondimento occorre considerare le intersezioni di due varietà (pure) V, W, di dimensioni qualunque, quali sono nella realtà e non virtualmente (come nel n. 3). Si dice allora che si ha riguardo alle *intersezioni proprie*. L'intersezione propria totale di V, W è la varietà virtuale (eventualmente impura) costituita dalle intersezioni proprie delle coppie di componenti di V, W, prese ciascuna col rispettivo segno.

Diremo inoltre che una varietà virtuale V *contiene* o *passa per una varietà irriducibile* W, con molteplicità s (≥ 1), quando, designata con s_i (≥ 0) la molteplicità di W per una componente V_i di V e posto $s_i' = \pm s_i$, secondo che V_i comparisce in V col $+$ o col $-$, risulta $s = \Sigma s_i'$. (Se s è nullo, V non contiene W, anche se qualcuna delle s_i è maggior di zero).

Se poi W è essa stessa virtuale e W_j è una sua componente, si dirà che V *contiene o passa per la varietà virtuale* W quando V contiene W_j con molteplicità s_j (> 0). Posto $s_j' = \pm s_j$, secondo che W_j comparisce in W col $+$ o col $-$, si dirà, più precisamente, che V passa per la varietà $\Sigma s_j' W_j$.

In particolare, una varietà irriducibile *contiene o passa* per una data varietà virtuale, quando quella contiene ogni parte, positiva o negativa, di questa.

37. Ciò premesso, dimostriamo il lemma:

a) Sia $G_h (h \leq r-1)$ una varietà irriducibile su M_r. Allora ogni V_{r-k} (virtuale e pura) di M_r, che passi per una varietà $L_{h'}$ $(h' < h,\ h' < r-k)$ di un sistema Σ, irriducibile, tracciato su G_h, è algebricamente equivalente ad una V_{r-k} passante per una $L_{h'}$, comunque prefissata in Σ.

Sia $L'_{h'}$ la varietà (virtuale e pura) fissata in Σ. Se $L_{h'}$ è generica in Σ, la proprietà è evidente, perchè ogni V_{r-k} di M_r passante per $L_{h'}$, ha per limite una V_{r-k} passante per $L'_{h'}$. Ma può darsi che per una particolare varietà di Σ, e sia $L''_{h'}$, le V_{r-k} di M_r passanti per $L''_{h'}$ non sieno tutte limiti delle V_{r-k} passanti per la $L_{h'}$ variabile. Diciamo V''_{r-k} una di queste V_{r-k} eccezionali uscenti da $L''_{h'}$. Alle forme di ordine l, *abbastanza alto*, dell'ambiente lineare di M_r, una $L_{h'}$ di Σ impone un certo numero di condizioni (lineari, semplici), che è indipendente dalla posizione di $L_{h'}$ in Σ e vale dunque anche per $L_{h'}$ particolari (1). Fissato un l pel quale questa proprietà sia verificata e designata con V'_{r-k} l'intersezione di M_r e di k forme generiche d'ordine l e con V'''_{r-k} l'ulteriore intersezione di M_r e di k forme generiche d'ordine l passanti per V''_{r-k}, la V'''_{r-k} non passa per $L_{h'}$ e risulta:

$$V''_{r-k} \equiv V'_{r-k} - V'''_{r-k} \ (2).$$

Ora, se consideriamo il sistema irriducibile Σ' in cui V'_{r-k} è suscettibile di variare, ne deriva che l'infinità delle V' di Σ' passanti per la generica $L_{h'}$, uguaglia l'infinità di quelle che passano per la particolare $L''_{h'}$; sicchè queste ultime son tutte limiti delle prime, in quanto, per l abbastanza grande, le totalità delle une e delle altre son irriducibili. Si conclude che, se pure V''_{r-k} non è limite di una V_{r-k} per $L_{h'}$, tuttavia essa è algebricamente equivalente ad una varietà virtuale $V'_{r-k} - V'''_{r-k}$, che passa per $L_{h'}$, in quanto vi passa V'_{r-k} e non V'''_{r-k}.

38. Da *a)* deduconsi i seguenti teoremi:

b) Sia B una base minima delle $L_{h'}$ tracciate in G_h. Allora ogni V_{r-k} di M_r, passante per una $L_{h'}$ qualunque, è algebricamente equivalente ad una

---

(1) Invero, la *postulazione* d'una varietà rispetto alle forme d'un ambiente lineare che la contenga, dipende soltanto dai caratteri numerativi della varietà (ved. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », 28 (1909), pp. 33-87).

(2) Si potrebbe anzi in questo caso (e negli analoghi che incontreremo) usare il simbolo $\equiv$ dell'equivalenza razionale.

combinazione lineare a coefficienti interi di certe V_{r-k} ciascuna delle quali contiene qualche varietà di B.

c) L'insieme delle V_{r-k} di M_r passanti per una data G_h ammette una base minima.

d) L'insieme delle V_{r-k} di M_r passanti per le $L_{h'}$ di una data G_h ammette una base minima.

La dimostrazione di *b), c), d)* sarà fatta simultaneamente per induzione. Proviamo che *c)* è vero per $h=0$. Basta all'uopo dimostrarlo per le V_{r-k} passanti per un punto O di M_r, perchè da ciò segue senz'altro l'estensione alle V_{r-k} passanti per un dato gruppo virtuale di punti.

Si fissi una $V^{(0)}_{r-k}$ per O e sia $V^{(1)}_{r-k}$ un'altra V_{r-k} qualunque per O. Condotte per $V^{(0)}_{r-k}$ k forme generiche di ordine l, dell'ambiente lineare di M_r, si può supporre, crescendo ove occorra l, che la loro residua intersezione, $V^{(2)}_{r-k}$, con M_r, non passi per O e che l'ulteriore intersezione $V^{(3)}_{r-k}$ con M_r, di altre k forme generiche d'ordine l condotte per $V^{(1)}_{r-k}$, non passi per O. Si perviene così all'equivalenza (razionale):

$$V^{(1)}_{r-k} \equiv V^{(0)}_{r-k} + V^{(2)}_{r-k} - V^{(3)}_{r-k};$$

e poichè le $V^{(2)}_{r-k}$, $V^{(3)}_{r-k}$, non essendo sottoposte ad alcuna condizione in O, si esprimon per le varietà d'una base minima di dimensione $r-k$, tracciata su M_r, si conclude col teorema.

Suppongasi ora che il teorema *c)* sia stato dimostrato per le varietà G di dimensione $<h$. Da esso deducesi anzitutto il teorema *b)*. Invero, siccome ogni $L_{h'}$ di G_h è algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi delle $L_{h'}$ di B, e ogni V_{r-k} per $L_{h'}$ equivale, in forza del lemma *a)*, ad una varietà passante per quella combinazione lineare, ne deriva, a cagione del teorema *c)* ammesso, che ogni V_{r-k} per $L_{h'}$ si esprime mediante una combinazione lineare a coefficienti interi di certe V_{r-k} fisse, ciascuna delle quali contiene qualche varietà di B.

I teoremi *b), c)*, porgono poi, come immediata conseguenza, *d)*.

Ci resta dunque da provare che, se *c)* è vero per le G di dimensione $<h$, è vero anche per le G_h. Diciamo all'uopo $V^{(1)},\dots, V^{(\sigma)}$ una base minima delle V_{r-k} di M_r. Condotte per G, k forme generiche $F^{(1)},\dots, F^{(k)}$ dell'ambiente lineare di M_r, di ordine m conveniente, consideriamo la varietà effettiva $T=(F^{(1)},\dots, F^{(k)}, M_r)$, intersezione propria delle varietà indicate nel simbolo. Preso poi $l>m$, sufficientemente grande, e designate con $\Phi^{(1)},\dots, \Phi^{(k)}$ k forme variabili di ordine l dell'ambiente, si può ottenere che la varietà $T'_{r-k}=(\Phi^{(1)},\dots, \Phi^{(k)}, M_r)$ contenga parzialmente una V_{r-k} prefissata di M_r, passante per G, e lasci come residuo una varietà V'_{r-k} non avente su M_r alcun punto che resti fisso al variare delle Φ.

Denotati con $I^{(1)},\dots, I^{(k)}$, k iperpiani generici dell'ambiente, sussistono allora su M_r le equivalenze:

$$(15)\qquad V+V'\equiv T',$$
$$T'\equiv(F^{(1)}+\lambda I^{(1)},\dots,F^{(k)}+\lambda I^{(k)},M_r),\qquad(\lambda=l-m),$$

e quindi

$$T'\equiv T+V'',$$

la quale, confrontata colla (15), porge:

$$V\equiv T+V''-V',$$

ove V'' è somma di varietà staccate su M_r da s iperpiani λ-pli generici e da $k-s$ forme F $(s=1, 2,\dots, k-1)$. Cioè V'' è somma di varietà che hanno in comune con G varietà (non fisse) di dimensione $h-1$ $(s=1)$; di altre che hanno in comune con G varietà (non fisse) di dimensione $h-2$ $(s=2)$; ecc.. Poichè ciascuna di queste diverse specie di componenti di V'' appartiene [in forza del teorema *d)*, già acquisito] ad una totalità che possiede una base minima e d'altronde V' si esprime per la base minima $V^{(1)},\dots, V^{(\sigma)}$, si conclude che V s'esprime per la base minima insieme delle basi mediante cui s'esprimono V' e le componenti di V'', con l'aggiunta delle varietà fissa T. Naturalmente, le varietà costituenti la base ottenuta possono essere riducibili ad un numero minore.

OSSERVAZIONE 1ª. — L'estensione dei nn. 37, 38 al caso in cui alle V_{r-k} si prescriva non soltanto il passaggio, ma un determinato comportamento sopra una G_h fissa o sulle $L_{h'}$ di una data G_h, non offre difficoltà concettuali.

OSSERVAZIONE 2ª. — La base minima delle V_{r-k} di M_r incontranti una prefissata G_h irriducibile $(h<r-1)$ secondo varietà di dimensione anormale $h'(>h-k)$, può altresì ottenersi trasformando birazionalmente M_r in una M_r' (priva, come M_r, di punti multipli), in guisa che G_h risulti eccezionale per la corrispondenza, dando luogo ad una G'_{r-1} di M_r'.

La trasformazione cui s'allude ottiensi come segue. Siano S_d lo spazio lineare di M_r ed x il generico punto di G_h. Quando l è abbastanza grande, le forme d'ordine l, di S_d, passanti per G, hanno in x un punto base semplice ed i loro S_{d-1} tangenti ivi s'intersecano soltanto nello S_h tangente a G. Inoltre, l'imagine proiettiva del sistema lineare $|F|$, $\infty^{d'}$, delle varietà ad $r-1$ dimensioni staccate su M_r da quelle forme, è una M_r', d'un $S'_{d'}$, birazionalmente equivalente ad M_r e priva di punti multipli. Sia y il generico punto di M_r e Σ il sistema lineare $\infty^{d'-1}$ delle F per y. A Σ corrisponde il sistema Σ', di sezioni iperpiane di M_r', segato dalla stella che ha per centro il punto y' omologo di y. Si faccia muovere y sopra un ramo γ tracciato in M_r ed avente l'origine in un punto x di G. Per $y \to x$, lungo γ, il limite di Σ è un sistema Σ_γ ben determinato, costituito da forme F aventi con γ in x molteplicità d'intersezione superiore (almeno di un'unità) rispetto alla molteplicità d'intersezione, in x, del ramo γ e di una F generica. Così al punto y, infinitamente vicino ad x sopra γ, risponde un ben determinato punto x' di M_r'.

Siccome poi gl'iperpiani tangenti in x alle F di Σ_γ, hanno ivi in comune un S_{h+1} (congiungente lo S_h tangente a G in x col minimo spazio osculatore di γ non appartenente ad S_h), vi sono ∞^h, e soltanto ∞^h, punti y di M_r, infinitamente vicini ad x, che dànno lo stesso x' di M_r'. Pertanto i punti x', omologhi di x, sono in corrispondenza birazionale, senza eccezione, con gli S_{h+1} passanti per lo S_h tangente in x a G e situati nello S_r tangente ivi ad M_r.

Ad x risponde dunque una varietà razionale X'_{r-h-1} [1], la quale, mentre x descrive G, muovesi in M_r' descrivendo la G'_{r-1} irriducibile, che s'assume come corrispondente di G. Per ogni punto di G' passa una sola X'.

Ad una V'_{r-k} (irriducibile) di M_r', non giacente in G', corrisponde una V_{r-k} (irriducibile) di M_r; e la dimensione h' del sistema delle X', che passan pei punti di V'_{r-k}, eguaglia la dimensione della varietà $L_{h'}$, comune a V_{r-k} e a G. È sottinteso che la varietà comune a V_{r-k} e a G può esser anche impura (può contenere cioè parti di dimensione $< h'$): con $L_{h'}$ s'indica l'insieme delle parti di dimensione massima, costituenti l'intersezione delle due varietà [2]. Viceversa, ad una V_{r-k} di M_r passante per una $L_{h'}$ di G_h, risponde una V'_{r-k} di M_r', non contenuta in G', e incontrata da $\infty^{h'}$ varietà X'.

Una V'_{r-k} (irriducibile) appartenente a G' ha invece per corrispondente in M_r una varietà $L_{h'}$ di G_h, la cui dimensione h' uguaglia ancora l'infinità delle X' passanti pei punti di V'_{r-k}; all'intersezione, di dimensione $r-k-h'$, di V'_{r-k} con una X' generica, corrispondendo $\infty^{r-k-h'}$ spazi S_{h+1}, passanti per lo S_h tangente a G nel punto x omologo di quella X' e giacenti nello S_r ivi tangente ad M_r.

Viceversa, se al generico x di una $L_{h'}$ di G è associato un sistema

---

[1] Anzi una varietà *lineare*, perchè è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti di un S_{r-h-1} situato genericamente nello S_r tangente in x ad M_r. Vedi le mie Lezioni sulle serie d'equivalenza citate a p. 157 (p. 21).

[2] La X' generica d'un sistema $\infty^{h'}$ di X' passanti pei punti di V'_{r-k} e completo come tale, sega V'_{r-k} secondo una varietà di dimensione $r-k-h'-1 \geq 0$, eventualmente impura.

$\infty^{r-k-h'}$ di spazi S_{h+1} siffatti [1], a ciascuno di questi S_{h+1} risponde un punto x', il quale, variando x e il considerato S_{h+1} entro il rispettivo sistema, descrive una V'_{r-k} tracciata su G' e incontrante $\infty^{h'}$ varietà X'.

In conclusione le V'_{r-k} di M_r' provengono (se non stanno in G') dalle V_{r-k} di M_r e (se stanno in G') dai sistemi $\infty^{r-k-h'}$ di spazi S_{h+1}, collegati nel modo suddetto ai punti delle singole $L_{h'}$ di G_h.

La base minima (eventualmente sovrabbondante) delle V'_{r-k} di M_r' si ottiene dunque aggiungendo alla trasformata d'una base minima delle V_{r-k} di M_r, la base minima delle V'_{r-k} di G'; con che si ha la possibilità d'esprimere, mediante la base, le V'_{r-k} trasformate di quelle che hanno un prefissato comportamento con G_h.

Si perviene così per altra via, nelle ipotesi semplificatrici considerate, al risultato che avevamo sopra ottenuto.

L'esempio del successivo n. illumina in un problema concreto le generalità esposte.

Le caratteristiche in relazione agli elementi degeneri.

39. Sulla M_r (priva di punti multipli) sia assegnata una varietà E (pura o impura, costituita da parti di dimensione $\leq r-1$) di elementi x degeneri (n. 24). Una parte completa G, di dimensione h, di E, dà luogo ad una *condizione di degenerazione (irriducibile) di dimensione $r-h$*. In G può esistere una varietà subordinata di elementi x, degeneri in modo più particolare. Una parte $L_{h'}$, di dimensione $h'(h' < h)$, riempita da questi particolari x degeneri, la quale sia completa nel senso che non sia contenuta in una varietà irriducibile più ampia di elementi degeneri della stessa specie, verrà considerata anch'essa come una *varietà completa di degenerazione*, nonostante giaccia in una più ampia varietà irriducibile G di elementi degeneri, ma di specie meno particolare.

40. Ciò premesso, consideriamo la totalità delle condizioni (pure) di dimensione k imposte agli x di M_r, ivi comprese le eventuali condizioni complete di degenerazione di dimensione k (costituenti nel loro complesso una condizione pura di degenerazione) e denotiamo al solito con V_{r-k} le corrispondenti varietà (virtuali) tracciate su M_r.

---

(1) Si può fissare un sistema di tal natura in corrispondenza al generico x, scegliendo un $S_{d-k-h'}$ di S_d e considerando, per ogni x, gli S_{h+1} che proiettano dallo S_k tangente ivi a G, i punti dello $S_{r-k-h'}$ intersezione di quello spazio $S_{d-k-h'}$ con lo S_r ivi tangente ad M_r.

Le V_{r-k} che segan propriamente ogni varietà completa di degenerazione in una varietà di dimensione normale o non la segano affatto (se ciò è consentito dalle dimensioni delle varietà, di cui si consideran le intersezioni) hanno come base *minima* quella, che denoteremo con $V^{(1)}, \dots, V^{(\sigma_1)}$, di tutte le V_{r-k} di M_r. L'equivalenza

(16) $$V \equiv \lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_{\sigma_1} V^{(\sigma_1)}$$

dà luogo, per intersezione con una W_k di M_r, che seghi ciascuna delle varietà dei due membri in un numero finito di intersezioni proprie, a due gruppi di punti ripartiti su $M_r - E$ ed eventualmente su E. Affinchè la (16) sia numerativamente valida in $M_r - E$, nei confronti con W, occorre e basta che le intersezioni con W dei due membri della (16), cadan tutte fuori di E (non ve ne sia nessuna degenere) o che fra le dette intersezioni quelle degeneri sieno in egual numero i (valutando ciascuna, come al solito, con la sua molteplicità d'intersezione). Quest'ipotesi comprende l'altra, per $i = 0$.

Se per una V, fornita dalla (16), esiste qualche W_k per cui si verifichi l'accennata ipotesi, diremo che *V è generica rispetto ad E ed alla propria base*. L'uso dell'attributo è giustificato dal fatto che effettivamente una varietà generica di un sistema algebrico irriducibile di varietà virtuali $\lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_{\sigma_1} V^{(\sigma_1)}$ (per dati interi λ) gode dell'indicata proprietà. Invero, se la varietà generica del sistema ha complessivamente i intersezioni con W, che cadano in E, per una varietà qualunque del medesimo il numero delle intersezioni con W, in E, è $\geq i$; e le varietà per cui il numero di queste intersezioni è $> i$ si distribuiscono in sistemi subordinati al dato.

Diremo poi che *W_k è generica rispetto a V* quando è soddisfatta l'ipotesi indicata.

Questo è evidentemente il solo punto di vista, il quale permetta di conservare validità alla (16) in $M_r - E$, rispetto alle intersezioni proprie; chè la validità incondizionata della (16) conduce a considerare alla stessa stregua soluzioni non degeneri e soluzioni degeneri, cioè a porre i problemi in M_r e non in $M_r - E$.

Il campo di validità delle relazioni d'equivalenza algebrica fra le V_{r-k}, in $M_r - E$, si può progressivamente ampliare come segue, con riferimento alle V_{r-k} che hanno particolari legami con le varietà di degenerazione. Fissiamo per es. l'attenzione sopra una G_h completa di degenerazione e consideriamo le V_{r-k} che passano per varietà $L_{h'}$ ($h' \leq h$) tracciate su G_h, ove $h' > h - k$ (1).

(1) Condizione senz'altro soddisfatta per $h' \geq 0$, se $h < k$. Se $h \geq k$, la dimensione dell'intersezione virtuale $[V, G]$ è $h - k$ e le V_{r-k} considerate contengono più soluzioni degeneri della categoria G_h, di quante non ne contenga una V_{r-k} « generica ».

Per ottenere una base minima delle V_{r-k} per le $L_{h'}$ (n. 38), occorre aggiungere alle $V^{(1)},\dots,\ V^{(\sigma_1)}$ sopra considerate certe altre varietà $V^{(\sigma_1+1)},\dots,\ V^{(\sigma_2)}$, passanti per particolari $L_{h'}$ di G_h. Così ogni V, avente il fissato legame con G_h, si esprime come un'equivalenza algebrica del tipo

$$V \equiv \lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_{\sigma_1} V^{(\sigma_1)} + \lambda_{\sigma_1+1} V^{(\sigma_1+1)} + \dots + \lambda_{\sigma_2} V^{(\sigma_2)}. \tag{17}$$

Perchè la (17) sia numerativamente valida in $M_r - E$ occorre e basta: 1°) che esista qualche W_k, la quale intersechi i due membri della (17) in un ugual numero i di soluzioni degeneri, sicchè V *sia generica rispetto ad* E *e alla propria base*, nel senso analogo a quello specificato quando la base era $V^{(1)},\dots,\ V^{(\sigma_1)}$; 2°) che ci si limiti ad intersecare la (17) con le W soddisfacenti all'ipotesi precedente (W generiche rispetto a V).

E similmente si può concludere nei confronti di particolari legami con altre condizioni di degenerazione, a sè considerati o aggiunti al precedente (nel qual caso la base trovata si allarga ulteriormente).

41. L'estensione dei problemi d'intersezione in $M_r - E$ dal campo delle intersezioni proprie a quello delle virtuali, semplifica ed amplia la conclusione precedente.

Sia, invero, $V^{(1)},\dots,\ V^{(\sigma)}$ una base minima delle V_{r-k} soddisfacenti a prefissati legami con certe varietà complete di degenerazione (essendo $\sigma \geq \sigma_1$ e valendo il segno $=$ quando non esiston questi particolari legami). In primo luogo si può definire virtualmente il simbolo d'intersezione, che indicheremo con $(\overline{V^{(i)}, W})$, delle V^i, W_k, in $M_r - E$. S'intende con ciò il gruppo virtuale $(V^{(i)}, W)$ (in M_r) diminuito dell'equivalenza funzionale (n. 5), in $(V^{(i)}, W)$, delle intersezioni proprie delle V^i, W (sieno esse in numero finito o infinito) che cadono in E. Con $[\overline{W^{(i)}, W}]$ si indicherà il numero dei punti di $(\overline{W^{(i)}, W})$.

Ciò posto, sia V una varietà (pura) *qualunque* del modulo definito dalla base $V^{(1)},\dots,\ V^{(\sigma)}$:

$$V \equiv \lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_\sigma V^{(\sigma)}.$$

Se V non è generica rispetto ad E e alla propria base, si può sempre scegliere in infiniti modi, nel modulo considerato [con procedimento analogo a quello esposto nella *c)*, citata a pag. 153] una varietà V'_{r-k}, mobile in un sistema irriducibile, tale che essa e la varietà U, mobile alla sua volta in un conveniente sistema irriducibile, contenente totalmente $V + V'$, sieno generiche rispetto ad E ed alla base data. Pongasi:

$$V' \equiv \lambda_1' V^{(1)} + \dots + \lambda_\sigma' V^{(\sigma)}$$

e quindi:

$$U \equiv (\lambda_1 + \lambda_1') V^{(1)} + \dots + (\lambda_\sigma + \lambda_\sigma') V^{(\sigma)}.$$

Sussistono allora in $M_r - E$, nei riguardi d'una W generica rispetto ad U, V', le uguaglianze numeriche

$$\overline{[U, W]} = \Sigma (\lambda_i + \lambda_i')\overline{[V^{(i)}, W]}, \quad \overline{[V', W]} = \Sigma \lambda_i' \overline{[V^{(i)}, W]}.$$

Sicchè, definito virtualmente $\overline{[V, W]}$ mediante la

$$\overline{[V, W]} = \overline{[U, W]} - \overline{[V', W]},$$

si ha:

$$\overline{[V, W]} = \Sigma \lambda_i \overline{[V^{(i)}, W]}; \tag{18}$$

e, come mostra il secondo membro, il simbolo ha un valore indipendente dalla V' ausiliaria. Si dirà allora che W è generica rispetto a V.

Supponiamo infine che W sia qualunque rispetto a V. Si può in questo caso scegliere una W'_k, generica rispetto a V e tale che $W + W'$ sia contenuta totalmente in un sistema irriducibile siffatto che la varietà X_k mobile in questo sia generica rispetto a V. Ciò permette di definire virtualmente il simbolo $\overline{[V, W]}$ come differenza $\overline{[V, X]} - \overline{[V, W']}$ e la (18), con tale definizione, continua a sussistere; sicchè il simbolo ha un valore indipendente dalla W' ausiliaria.

Indicate con $c, c^{(1)}, \ldots, c^{(\sigma)}$ le condizioni (pure) di dimensione k, perchè un punto x di $M_r - E$ giaccia in $V - E$, $V^{(1)} - E, \ldots$, $V^{(\sigma)} - E$, si conclude col seguente ***teorema di esistenza delle caratteristiche*** *per le condizioni (pure) di data dimensione k, imposte agli elementi di una varietà $M_r - E$, ottenuta escludendo da una M_r un insieme (algebrico) E di elementi degeneri:*

Stabilito il comportamento delle condizioni (pure) di dimensione k, che si voglion considerare, rispetto a certe prefissate varietà complete di degenerazione (appartenenti ad E), le condizioni definite formano un modulo, che possiede una base minima $c^{(1)}, \ldots, c^{(\sigma)}$ di caratteristiche. Per ogni c del modulo vale cioè una relazione del tipo:

$$c = \lambda_1 c^{(1)} + \ldots + \lambda_\sigma c^{(\sigma)}, \qquad (\lambda \text{ interi}).$$

Essa conserva piena validità numerativa quando si moltiplica per una qualunque condizione d, di dimensione complementare $r - k$, purchè i prodotti cd, $c^{(i)}d$ si valutino virtualmente, nel modo sopra indicato.

Come si vede *la determinazione delle caratteristiche, in una varietà $M_r - E$, è* ***relativa*** *alla scelta delle varietà complete di degenerazione (contenute in E), rispetto alle quali si fissa un particolare comportamento delle condizioni di dimensione k.*

OSSERVAZIONE. – Poichè nella possibilità di fissare comportamenti via via più particolari delle V_{r-k} di M_r, rispetto a talune varietà complete di degenerazione, non c'è limite alcuno (si posson per es. prescrivere molteplicità a mano a mano crescenti o contatti sempre più intimi) così *il numero delle caratteristiche può farsi crescere quanto si vuole, particolarizzando sempre di più le relazioni fra le condizioni di dimensione k e gli elementi degeneri.*

Le caratteristiche delle coniche nel piano. Condizioni semplici e quadruple relative a coniche-luogo (o inviluppo).

42. Applichiamo ora le generalità concernenti le caratteristiche relative a varietà con elementi degeneri, alla varietà delle coniche del piano ([1]).

Intendiamo di riferirci dapprima alle sole coniche-luogo, riservandoci di intrattenerci dipoi sulle coniche-inviluppo o, più generalmente, sulle coniche-luogo-inviluppo (*coniche complete*, secondo STUDY), ciascuna delle quali è un ente algebrico ∞^1, appartenente alla varietà degli elementi punto-retta incidenti del piano.

Come abbiamo già ricordato (n. 24), nello S_5 i cui punti rappresentano le coniche-luogo (le diremo semplicemente « coniche », finchè non vi sia ambiguità), le ∞^4 coniche spezzate in coppie di rette son rappresentate dai punti di una forma cubica E, riempita dalle corde di una superficie di VERONESE G, i cui punti son le immagini delle rette doppie. La forma E (irriducibile, razionale e modello della varietà delle coppie non ordinate dei punti d'un piano) passa doppiamente per G. La E comprende tutti gli elementi degeneri della M_5 — che in questo caso è lo S_5 — cui si riferiscono le nostre considerazioni e G è pur essa una varietà completa di degenerazione. Una conica spezzata in due rette distinte, rappresentata da un punto di E situato fuori di G, dicesi una *conica (luogo) degenere di 1ª specie*; mentre le rette doppie diconsi *coniche (luogo) degeneri di 2ª specie.* Designeremo rispettivamente con δ, $\bar{\eta}$ le condizioni (di degenerazione) delle dimensioni 1,3 perchè una conica sia di 1ª o di 2ª specie.

([1]) Ved. la mia Memoria *b*) del 1916 citata in ([2]) a piè della p. 153. Ivi trovansi le citazioni sullo stato della questione in quel momento. Si deve tener conto in modo particolare, per ciò che concerne la rappresentazione delle coniche coi punti di un S_5, del Cap. XVI (pag. 406) del trattato di BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Messina, Principato, 1923). Le considerazioni sotto riassunte, *per le condizioni semplici*, furono, quasi tutte, da me svolte nella Memoria del 1916, salvo qualche maggior determinazione, che ora s'introduce, coll'ulteriore essenziale complemento relativo a condizioni soddisfatte da tutte le coniche degeneri di 3ª specie.

43. Riferiamoci anzitutto alle *caratteristiche semplici.*

Conformemente ai concetti generali sopra esposti, potremo in primo luogo studiare le condizioni semplici imposte alle coniche, cioè ai punti x di S_5, sopra S_5, anzichè su $S_5 - E$. Non si fissa così alcun particolare comportamento di tali condizioni rispetto agli elementi degeneri. E siccome una forma generica di S_5 taglia E in una varietà a 3 dimensioni e G in una curva, ogni generica condizione semplice è soddisfatta da ∞^3 coniche degeneri di 1ª specie e da ∞^1 di 2ª specie. Qualunque condizione semplice, considerata poi dal punto di vista virtuale, è differenza di due condizioni semplici generiche, cosicchè può virtualmente considerarsi alla stregua delle condizioni generiche (n. 41).

La base minima delle forme di S_5 è un iperpiano qualsiasi. Si può assumere per esempio l'iperpiano I che rappresenta le ∞^4 coniche per un punto dato P del piano, il quale è un iperpiano tangente singolare di G, che tocca questa superficie lungo tutta la conica, i cui punti sono immagini delle ∞^1 rette per P, contate ciascuna doppiamente. Se C è una forma d'ordine m di S_5, vale l'equivalenza (lineare) $C \equiv mI$; epperò, indicate con c, μ le condizioni perchè un x di S_5 giaccia su C e rispettivamente su I (sicchè μ è la condizione perchè una conica passi per P), si può scrivere, con JONQUIÈRES:

$$c = m\mu; \tag{19}$$

risultato del quale resta qui ben precisata l'assoluta validità (nel campo delle condizioni virtuali). Dunque:

Se non si fissa alcun particolare comportamento delle condizioni semplici, imposte alle coniche del piano, rispetto alle condizioni di degenerazione, vi è un'unica caratteristica semplice (nel campo virtuale); ed è la condizione μ *perchè una conica passi per un punto.*

In particolare, risulta:

$$\delta = 3\mu, \tag{20}$$

perchè la varietà degli x soddisfacenti a δ è d'ordine $m = 3$.

Poichè una retta di S_5 rappresenta un fascio generico di coniche, si può dire che:

Il coefficiente m, che entra nella espressione (19) di una qualunque condizione semplice c mediante la caratteristica μ, *denota quante coniche soddisfacenti a c appartengono ad un fascio generico.*

44. Quali speciali comportamenti rispetto ad E, G, possono ora considerarsi per le condizioni semplici?

Poichè una condizione semplice non può esser soddisfatta da più che ∞^3 coniche di 1ª specie, senza che coincida con δ o per lo meno contenga δ come addendo (in aggiunta ad altra condizione soddisfatta da ∞^3 coniche di 1ª specie); nè può contenere più che ∞^1 coniche di 2ª specie, senza passare per G, la sola speciale relazione che possiamo supporre tra gli elementi degeneri e le condizioni semplici soddisfatte da qualche conica non degenere, è che tali condizioni siano soddisfatte da tutte le coniche di 2ª specie.

Dobbiamo, in altre parole, considerare la totalità delle forme passanti per G. Nel modulo da esse costituito, vi sono anche le forme che *non* passano per G. Una di queste si ottiene per differenza di due forme effettive passanti per G con la stessa molteplicità (n. 36). Così una forma effettiva F passante per G, a cui se ne aggiunga una generica Φ, individua un sistema lineare di forme (irriducibili) passanti per G; e, detta Ψ una generica di queste, la forma virtuale $\Psi - F \equiv \Phi$ non passa per G.

In virtù di queste osservazioni, per ottenere la base minima delle forme passanti per G, occorre aggiungere all'iperpiano I, fissato nel n. precedente, una forma che passi semplicemente per G. Potremo assumere a questo scopo la forma quadratica Q, i cui punti rappresentano le coniche tangenti ad una retta a del piano [1].

Dopo ciò, ogni forma C d'ordine m, passante per G con molteplicità β, se non contiene come parte E, è tale che la corda generica di G la incontra in 2β punti (almeno) riuniti nei punti d'appoggio di quella corda con G, epperò è $m \geq 2\beta$ [2]. La forma $(m - 2\beta)I + \beta Q$, d'ordine m, passa allora per G con molteplicità β, epperò è linearmente equivalente a C (su cui sia assegnata la superficie base β-pla G). Onde si può scrivere

$$C \equiv \alpha I + \beta Q \qquad (\alpha = m - 2\beta),$$

cioè:

$$c = \alpha\mu + \beta\nu, \tag{21}$$

ove c, ν son le condizioni perchè un elemento appartenga a C e rispettivamente a Q (ν è cioè la condizione perchè una conica tocchi una retta data).

E si conclude col teorema di CHASLES (precisato meglio da ZEUTHEN e HALPHEN):

Le caratteristiche della totalità delle condizioni semplici imposte alle co-

---

(1) È questa una forma quadratica, perchè in un fascio generico vi son due coniche tangenti ad a; e Q passa semplicemente per G, perchè in un fascio-schiera generico vi è una sola conica (irriducibile) tangente ad a.

(2) Ne segue, per $\beta = 2$, $m \geq 4$, epperò E è la forma d'ordine minimo 3, passante doppiamente per G.

niche del piano, quando si voglian includervi anche le condizioni soddisfatte dalle coniche degeneri di 2ª specie, sono la condizione μ perchè una conica passi per un punto dato e la condizione ν perchè tocchi una retta data.

Il teorema ha validità incondizionata nel campo virtuale riferito ad $S_5 - G$, nel senso che ogni condizione-semplice, considerata in $S_5 - G$, può virtualmente uguagliarsi alla differenza di due condizioni semplici generiche rispetto alla base I, Q (n. 41).

Come vedesi, cangiando il comportamento rispetto ad E, mutan le caratteristiche e si passa dalla (19) alla (21).

Anche la (20) muta e deve esser sostituita colla

$$\delta = 2\nu - \mu, \tag{22}$$

perchè è:

$$E \equiv 2Q - I.$$

Quando non si fissa alcun speciale comportamento rispetto ad E, vale tra μ, ν la relazione $2\mu = \nu$ e le (21), (22) riduconsi rispettivamente alle (19), (20).

Poichè una retta generica per un punto x di G rappresenta un fascio-schiera generico di coniche ed essa incontra C fuori di x in $n = m - \beta$ punti, si può dire:

I coefficienti α, β, che entran nella espressione (21) di una qualunque condizione semplice c, son dati dalle formule:

$$\alpha = 2n - m, \quad \beta = m - n,$$

ove m designa il numero delle coniche soddisfacenti alla condizione c, che appartengon ad un fascio generico ed n il numero delle coniche irriducibili o degeneri di 1ª specie, che appartengono ad un fascio-schiera generico e soddisfanno a c.

45. La risoluzione del problema delle caratteristiche per le condizioni semplici di $S_5 - G$ può associarsi alla risoluzione dell'analogo problema per le *condizioni quadruple* (o di dimensione 4) nello stesso ambiente. Occorre all'uopo considerare la base minima della totalità delle curve di S_5, che incontrano G. Poichè le curve di S_5 si riducono a multipli d'una retta ed i punti di G si riducono algebricamente (anzi linearmente) ad uno di essi, conformemente al n. 40 la base minima richiesta sarà costituita da una retta generica a di S_5 e da una retta l appoggiata genericamente a G in un punto. Si conclude che:

Le caratteristiche della totalità delle condizioni quadruple imposte alle coniche-luogo, ove vi si voglian comprendere anche le condizioni soddisfatte da un numero finito di coniche di 2ª specie, sono la condizione μ' perchè una co-

nica appartenga ad un fascio generico e la condizione ν' *perchè appartenga ad un fascio-schiera generico.*

OSSERVAZIONE 1ª. — Le basi minime I, Q ed a, l delle V_4 e delle curve di $S_5 - G$, risultano associate nel senso che *il loro discriminante simultaneo* Δ *ha il valore assoluto minimo.* Invero, in $S_5 - G$ è:

$$[I, a] = [I, l] = 1, \quad [Q, a] = 2, \quad [Q, l] = 1,$$

epperò $\Delta = -1$. Le basi minime I. Q ed a, l essendo pure intermediarie, ne segue che $S_5 - G$ *non contiene divisori dello zero di dimensione 1 o 4.*

OSSERVAZIONE 2ª. — Che la risoluzione del problema delle caratteristiche semplici in $S_5 - G$ importi come conseguenza quella del problema delle caratteristiche quadruple, è conforme alla constatazione generale fatta nel n. 28 (la quale, veramente, è là riferita ad una varietà senza contorno).

OSSERVAZIONE 3ª — Il significato geometrico dei coefficienti α', β' nella espressione $c' = \alpha'\mu' + \beta'\nu'$ d'una condizione quadrupla c', s'ottiene subito dalle:

$$c'\mu = \alpha' + \beta', \quad c'\nu = 2\alpha' + \beta',$$

donde $\alpha' = c'(\nu - \mu)$, $\beta' = c'(2\mu - \nu)$.

La varietà delle coniche complete.

46. Le conclusioni precedenti posson riferirsi alle coniche-inviluppo, coi semplici cangiamenti derivanti dalla dualità nel piano. In particolare la (22) fornisce per dualità la relazione:

$$\eta = 2\mu - \nu,$$

ove η è la condizione semplice [1] perchè una conica-inviluppo degeneri in due fasci distinti di raggi.

Vediamo invece che cosa può dirsi delle coniche complete (coniche-luogo-inviluppo). Ricordo anzitutto la rappresentazione della totalità delle coniche complete, che usai nella Memoria del 1916. Rappresentate le coniche-luogo coi punti di un S_5, ad un sistema lineare ∞^4 di coniche-luogo corrisponde un iperpiano di S_5, che si assume a immagine della conica-inviluppo coniugata con quelle ∞^4 coniche-luogo.

Così le coniche-luogo son rappresentate coi punti e le coniche-inviluppo con gli iperpiani di S_5, in guisa che la relazione di incidenza punto-iperpiano

---

[1] Da non confondersi dunque con $\bar{\eta}$, che è una condizione tripla relativa alle coniche-luogo (n. 42).

è immagine della relazione di coniugio tra una conica-luogo ed una conica-inviluppo.

Fissiamo ora l'attenzione sulla polarità determinata in S_5 della forma cubica E. Le quadriche polari dei punti di S_5 rispetto ad E sono le ∞^5 quadriche passanti per G (che, si ricordi, è doppia per E) (¹). E l'iperpiano polare di un punto P di S_5 rispetto ad E (cioè alla quadrica polare di P) è l'immagine della conica-inviluppo aderente alla conica-luogo rappresentata da P. Pertanto *le coniche complete son rappresentate in S_5 dalle coppie punto-iperpiano omologhi nella polarità rispetto ad E.*

Le possibili degenerazioni di una conica completa, che analizzai già dal punto di vista dell'accennata rappresentazione, nella mia Memoria del 1916, son le seguenti:

1ª) *Coniche complete degeneri di 1ª specie*, spezzate, come luogo, in due rette distinte e, come inviluppo, nel fascio di rette contato due volte, avente per centro il punto comune alle due rette. Esse sono ∞^4 e ognuna è rappresentata da un punto di E e dall'iperpiano tangente ivi (²). Continueremo a designare con δ la condizione semplice, perchè una conica completa sia degenere nel modo indicato.

2ª) *Coniche complete degeneri di 2ª specie.* Son le duali delle precedenti. Ognuna è spezzata, come luogo, in due rette coincidenti e, come inviluppo, in due fasci di rette, aventi i centri, distinti, sul sostegno della conica-luogo: ed è rappresentata da un punto di G associato ad uno degli ∞^2 iperpiani tangenti a G in quel punto. Designeremo con η questa condizione, semplice, di degenerazione. La corrispondente condizione $\overline{\eta}$, riferita alle coniche-luogo, non è semplice, ma ha la dimensione 3.

3ª) *Coniche complete degeneri di 3ª specie.* Partecipano dei caratteri di quelle di 1ª specie e di quelle di 2ª specie. Cioè ognuna consta, come luogo, dei punti d'una retta doppia, e, come inviluppo, delle rette d'un fascio doppio, avente il centro su quella retta; ed è rappresentata da un punto di G associato ad uno degli iperpiani tangenti singolari a G in quel punto. La relativa condizione di degenerazione ha la dimensione 2: è il prodotto $\delta\eta$ delle due condizioni precedenti.

(¹) Queste ∞^5 quadriche formano un sistema omaloidico e ciascuna di esse rappresenta le ∞^4 coniche-luogo aderenti ad un sistema *lineare* ∞^4 di coniche-inviluppo.

(²) Si tenga presente che gli iperpiani tangenti alla forma E, la quale, si ricordi, è luogo degli ∞^2 piani delle coniche di G, sono ∞^2, ciascuno d'essi essendo un iperpiano tangente singolare di G (tangente a G in tutti i punti d'una conica ed immagine delle coniche del piano passanti per un punto).

47. Volendosi avere un modello della totalità delle coniche complete sopra una M_5 di punti, in un conveniente spazio lineare, si può, per esempio, considerare la varietà U_{10}^{252} di Segre, appartenente ad uno spazio lineare S_{35}, la quale rappresenta coi suoi punti le coppie punto-iperpiano di S_5. Le coppie punto-iperpiano immagini delle coniche complete, vengon così rappresentate coi punti di una M_5 tracciata su U. Non occorre indagare, almeno in un primo tempo, se i punti di M_5 immagini delle coniche degeneri (distinti in due varietà a 4 dimensioni di M_5, aventi in comune la varietà a 3 dimensioni rappresentante le coniche di 3ª specie), siano o no semplici per M_5, perchè trattasi di elementi che vogliamo appunto considerare come degeneri (cfr. col n. 24) ([1]). Una conica completa non degenere è certamente rappresentata da un punto semplice di M_5, perchè ogni punto di M_5, fuori della varietà degli elementi degeneri, può essere portato in ogni altro, esterno alla stessa varietà, dalle trasformazioni birazionali di M_5 in sè, immagini delle omografie piane; e tali trasformazioni (aventi come varietà invarianti le singole varietà di coniche complete degeneri) non presentano alcuna eccezione, fuori della totalità degli elementi degeneri.

48. La considerazione delle coniche complete non è necessaria onde risolvere il problema delle caratteristiche relativo alle coniche-luogo (o inviluppo), *entro i limiti consueti*; e ciò tanto se trattasi di condizioni semplici, come di condizioni di dimensione maggiore di 1. Tale affermazione risulta già giustificata, per le condizioni semplici e quadruple dai nn. 43, 44, 45; e per le condizioni delle dimensioni 2, 3 deriverà dal seguito. Tuttavia l'intervento delle coniche complete permette di approfondire ulteriormente, nel campo delle soluzioni proprie, le condizioni di validità della formula $c = \alpha\mu + \beta\nu$ e di ampliare la portata della risoluzione del problema.

Anzitutto, attesa la corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra le coniche-luogo irriducibili ed i loro inviluppi, la corrispondenza birazionale fra S_5 e la M_5 del n. 47 presenta elementi eccezionali soltanto nei punti imagini di coniche degeneri. Pertanto le coniche complete irriducibili posson intendersi rappresentate anche coi punti (o cogl'iperpiani) di $S_5 - E$, invece che colle coppie punto-iperpiano omologhi nella polarità rispetto ad E. Così una forma di S_5, non contenente come parte E, rappresenta pure un sistema di coniche complete irriducibili, cioè una condizione semplice a queste imposta. E il

([1]) La dimostrazione che la M_5 costruita nel modo indicato è priva di punti multipli, trovasi nella Memoria di Van der Waerden («Math. Ann.», 1938), citata in ([1]) a p. 156. Accenneremo nel n. 50 al modo di pervenire a questa conclusione.

sistema ∞^1 di coniche complete resta naturalmente determinato per continuità anche nei suoi elementi degeneri.

Anzi quest'ultima conclusione si estende pure alla varietà $E - G$, perchè l'iperpiano polare di un punto x di $E - G$ è ben determinato (ossia l'inviluppo aderente ad una conica spezzata in due rette distinte è, come abbiamo già avvertito, ben determinato).

Sicchè, le coniche complete degeneri di 2^a e di 3^a specie riescon determinate per continuità quali limiti di coniche complete, ridotte, come luoghi, a coppie di rette distinte, facendo muovere il punto x di $E - G$ sui rami di curve tracciati su $E - G$ ed aventi le origini nei punti di G.

Quel che si è detto per una forma vale per una varietà a tre dimensioni qualunque o per una curva o superficie, il cui punto generico sia fuori di G. Si ha così un sistema ∞^3 o ∞^2 o ∞^1 di coniche complete (irriducibili o ridotte come luoghi a coppie di rette distinte), del quale riescono perfettamente determinate per continuità le coniche degeneri complete di 2^a o di 3^a specie.

Ciò premesso, sia γ un ramo di S_5, di origine x, appartenente eventualmente anche a G. In forza di una proprietà già osservata (ved. la fine del n. 11), il limite della coppia $\bar{x}$, $\bar{X}$, ove $\bar{x}$ sia un punto mobile in γ e $\bar{X}$ l'iperpiano polare di $\bar{x}$ rispetto ad E, è sempre determinato per $\bar{x} \to x$. Se x è un punto di E, ma non di G, l'iperpiano X, che al limite va associato ad x, non è che l'iperpiano ivi tangente ad E; se x è un punto di G, ho dimostrato altrove (a pag. 1147 della Memoria del 1916), che, indicata con t la tangente in x al ramo, e con π il piano tangente a G in x (e supposto γ non tangente a G in x), l'iperpiano X è l'iperpiano polare dello spazio a 3 dimensioni πt, rispetto al cono quadrico Γ, di vertice π, tangente in x ad E [1]. Se γ tocca G in x, l'ufficio di πt è sostenuto dallo S_3 che congiunge π col piano osculatore a γ in x; e se γ oscula G in x (e, in particolare, se giace in G), l'ufficio di πt è sostenuto dallo S_3 osculatore a γ in x. In ogni caso è determinato con precisione il limite di $\bar{X}$.

La coppia limite x, X rappresenta generalmente una conica degenere di 2^a specie; perchè rappresenti, in particolare, una conica di 3^a specie, occorre e basta che il predetto S_3 (determinato nei modi indicati, secondo che γ non tocca o tocca o oscula G in x), coincida con uno degli S_3 generatori del cono quadrico Γ, giacchè soltanto in tal caso l'iperpiano polare diviene uno degli iperpiani tangenti a Γ. Insomma, *perchè il sistema ∞^1 di coniche complete*

[1] Si ricordi che il cono Γ è luogo degli ∞^1 S_3 che proiettan da π le ∞^1 coniche di G uscenti da x; e che gli iperpiani tangenti a quel cono nei suoi spazi generatori son gli iperpiani tangenti singolari, che toccan G lungo le predette coniche.

rappresentato da γ contenga una conica degenere di 3^a specie occorre e basta che il numero dei punti successivi, che γ ha comuni con E in x, superi di uno (almeno) il numero dei punti successivi di γ situati sul vertice π di Γ: cioè γ deve toccare E in x.

49. L'analisi svolta nel n. precedente ci permette di concludere facilmente quanto segue.

Se C è una forma di S_5, incontrante G lungo la curva D (e quindi E secondo una varietà a 3 dimensioni), il sistema ∞^4 di coniche complete rappresentato da C contiene ∞^3 coniche degeneri di 1^a specie, le cui coppie rappresentative sono ovviamente visibili; ∞^3 coniche degeneri di 2^a specie, la generica delle quali ha come coppia rappresentativa un punto generico x di D ed un generico iperpiano passante per il piano π tangente a G in x; ∞^2 coniche degeneri di 3^a specie, la generica delle quali ha come coppia rappresentativa un x di D ed un iperpiano tangente singolare in x.

Invero, in un punto x di D, ove C non tocchi G, vi sono ∞^2 piani tangenti a C e a D, che dànno luogo ad altrettanti iperpiani polari rispetto a Γ, cioè a tutti gli iperpiani passanti per π; ed ∞^1 piani tangenti a C situati sugli S_3 generatori di Γ, i quali dànno luogo ad altrettanti iperpiani polari rispetto a Γ, cioè a tutti gli iperpiani tangenti singolari in x.

Se C tocca G nel punto x di D continuan naturalmente ad esservi ∞^2 iperpiani polari rispetto a Γ, di punti situati in C ed infinitamente vicini ad x, ma esterni a π. Per individuare uno di questi iperpiani basta prendere in C un ramo γ di origine x, tangente a G in x, e considerare lo S_3 congiungente x col piano osculatore di γ in x o addirittura lo S_3 osculatore a γ in x, se γ oscula π. L'iperpiano polare di tale S_3 è uno dei richiesti. E fra questi ∞^2 iperpiani polari ve ne sono ancora ∞^1 tangenti singolari.

In ogni caso, dunque, è vero quel che si è affermato circa l'infinità delle coniche di 2^a e di 3^a specie appartenenti ad un sistema ∞^4 di coniche complete, contenente ∞^1 coniche ridotte, come luoghi, a rette doppie.

Passiamo ora ad una forma C contenente addirittura G, cioè ad un sistema ∞^4 di coniche complete, che possegga ∞^2 coniche spezzate, come luoghi, in rette doppie. Anche in tale caso vi sono nel sistema ∞^3 coniche complete degeneri di 1^a, ∞^3 coniche degeneri di 2^a e ∞^2 coniche degeneri di 3^a specie. Le prime sono senz'altro rappresentate dall'associare ad ogni punto x della varietà $(C, E) - G$ l'iperpiano ivi tangente ad E; le seconde dall'associare ad un generico punto x di G ciascuno degli ∞^1 iperpiani polari, rispetto al cono Γ, ivi tangente ad E, degli $\infty^1 S_3$ tangenti in x a C e a G; le ultime dall'associare al generico x di G i due iperpiani tangenti a Γ nei due S_3 generatori, che toccano C in x.

Se C coincide con E, ogni conica completa degenere di 2ª specie, appartenente al sistema ∞^4 delle coniche complete di 1ª specie, è in conseguenza di 3ª specie (n. 46) e il sistema contiene tutte le coniche complete di 3ª specie; conseguenza d'accordo con il fatto che i soli iperpiani polari degli S_3 tangenti ad E in un punto x di G, son gli iperpiani tangenti al cono Γ, cioè gli iperpiani tangenti singolari uscenti da x. Concludendo:

Un sistema ∞^4 (irriducibile) di coniche complete irriducibili contiene sempre ∞^3 coniche degeneri di 1ª specie, ∞^3 coniche degeneri di 2ª specie ed ∞^2 coniche degeneri di 3ª specie. Il sistema ∞^4 (irriducibile) delle coniche (complete) degeneri di 1ª specie contiene tutte le ∞^3 coniche degeneri di 3ª specie (e nessuna di 2ª). Dualmente dicasi del sistema ∞^4 irriducibile delle coniche (complete) degeneri di 2ª specie.

50. L'analisi del n. 48, in quanto ci fa conoscere tutte le coppie x, X che rappresentan le coniche complete, consente di studiare la M_5 del n. 47 nell'intorno di ognuno dei suoi punti (x, X). Si verifica allora con un semplice calcolo (¹) che l'intorno di un punto qualunque di M_5, sulla varietà stessa, anche se il punto è imagine d'una conica completa degenere (di una delle tre possibili specie), si può rappresentar parametricamente con funzioni razionali di 5 parametri, razionalmente, epperò *univocamente invertibili.* Sicchè ogni punto di M_5 è origine d'una sola falda *lineare* e quindi è un punto semplice.

Chiamiamo E', F', H' le varietà irriducibili, delle dimensioni rispettive 4, 4, 3, che rappresentano in M_5 le coniche degeneri di 1ª, 2ª, 3ª specie. Le E', F', H' sono (come si accennò nel n. 47) le *varietà eccezionali* della corrispondenza birazionale, definita nel n. 47, tra i punti di M_5 ed i punti (o gli iperpiani) di S_5.

Ad un x di S_5 appartenente ad E, ma non a G, corrisponde un sol punto di E', che rappresenta la coppia x, X, ove X è l'iperpiano tangente ad E in x; ma ad un iperpiano X tangente ad E in un punto x, fuori di G, corrispondono ∞^2 punti di E', perchè X tocca E in tutti i punti di un piano passante per x (²). Ad un punto x di G corrispondono ∞^2 punti di F', i quali costituiscono una superficie f' e risultan dall'associare ad x tutti gli X tangenti a G in x; mentre ad un generico iperpiano X tangente a G, in quanto tocca G in

(¹) Che non stiamo a riportare qui dalla citata Memoria di VAN DER WAERDEN.

(²) Che è un piano (individuato da x) di una delle coniche di G.

un sol punto, risponde un sol punto di F'. Infine ad un punto x di G corrispondono ∞^1 punti di H', i quali costituiscono una curva ψ' e risultan dall'associare ad x ciascuno degli ∞^1 iperpiani tangenti singolari a G, che passan per x; e ad un iperpiano tangente singolare corrispondono pure ∞^1 punti di H', costituenti una curva g', perchè esso tocca G lungo tutta una conica g.

Giova inoltre considerare le immagini dei fasci e delle schiere di coniche irriducibili. I fasci son rappresentati dalle ∞^8 rette a di S_5 e le schiere dalle ∞^8 coniche b di S_5 appoggiate in tre punti a G. Un fascio generico non contiene alcuna conica completa degenere di seconda specie; ed una schiera generica non contiene alcuna conica degenere completa di prima specie, le 6 intersezioni di b con E essendo tutte assorbite dai 3 punti d'appoggio di b su G, ciascun dei quali, come punto doppio di E, conta due volte.

Fra le coniche trisecanti di G ve ne sono ∞^7 spezzate in coppie di rette: una di queste è formata da una retta l, appoggiata a G in un punto x, e da una corda q di G, appoggiata ad l in un punto. La corda q è imagine di uno degli ∞^4 fasci di coniche spezzate nelle coppie di un'involuzione entro un fascio di raggi; e la retta l rappresenta (come già si è detto) uno degli ∞^6 fasci-schiera. Quando l, oltrechè appoggiarsi a G nel punto x, tocca ivi E, il fascio-schiera diviene uno degli ∞^5 fasci di *coniche superosculatrici*, cioè un fascio di coniche aventi con una data, in un punto dato, un contatto quadripunto.

Poichè q sta in E, il punto comune ad l, q è l'unico punto ove E è segata da l, fuori di x.

Se la schiera rappresentata da una conica b, trisecante G, tende al fascio-schiera rappresentato da l, la conica b tende ad una conica spezzata $l+q$.

Dualizzando, nel piano, si trova il limite completo di un fascio, che tenda a divenire un fascio-schiera.

Tutto ciò può trasportarsi agevolmente sopra M_5; ed è quello che più interessa. In M_5 un fascio generico di coniche complete è rappresentato da una curva (razionale) a', che taglia E' in 3 punti, ma non incontra affatto F'. Una schiera generica di coniche complete è rappresentata da una curva (razionale) b', che taglia F' in 3 punti e non incontra affatto E'. Un fascio-schiera generico è rappresentato da una curva (razionale) l', che taglia ciascuna delle E', F' in un punto, fuori di H'. Un fascio-schiera di coniche superosculantisi è rappresentato da una l' appoggiata ad H' e non incontrante nè E', nè F', fuori di quel punto d'appoggio. La diremo una curva t'.

Se la schiera rappresentata da b' tende al fascio-schiera rappresentato da l', la curva b' tende al limite $l'+q'$, ove q' è una curva (razionale) tracciata su E' e passante pel punto (E', l'), la quale rappresenta un fascio di coniche degeneri di 1ª specie. I punti di q' sono le imagini delle coppie punto-iperpiano formate da un punto variabile su q e dall'iperpiano fisso tangente ad E lungo q. E siccome q sta nell'iperpiano singolare tangente a G lungo la conica individuata dai punti d'appoggio della corda stessa, così q' incontra H' in due punti distinti (imagini delle due coniche complete, degeneri di terza specie, che provengono dai raggi doppi dell'involuzione le cui coppie son rappresentate dai punti di q').

Pertanto i 3 punti comuni a b' e ad F' hanno per limiti questi due punti ed il punto (F', l'). Ciò prova che *i punti di H' son semplici per F'*, perchè ognun d'essi assorbe una sola intersezione di F' con una curva $l' + q'$.

Similmente, il limite del fascio rappresentato da a', quando questo tende al fascio-schiera rappresentato da l', è una curva $l' + p'$, ove p' è tracciata su F' e appoggiasi in due punti ad H', passando inoltre pel punto (F', l').

La curva p' è imagine della schiera delle coniche degeneri di 2^a specie, che provengon dall'associare ad una retta fissa del piano le coppie di una sua involuzione.

Si conclude altresì che *i punti di H' son semplici per E'*.

Aggiungasi che le intersezioni di q' con F' sono necessariamente semplici, in quanto ognuna di esse non può che contare una volta nel gruppo delle 3 intersezioni di $l' + q'$ con F'; epperò la curva q' non tocca F' nei due punti in cui la incontra. Ne deriva che in tali punti neppure la E', su cui q' è tracciata, può toccare F'. E poichè infine i punti stessi son generici su H', si conclude che *le E', F' non si toccan lungo H'*.

Un'ulteriore precisazione è fornita dall'osservare che le ∞^8 omografie del piano in sè, in quanto dànno luogo ad altrettante omografie di S_5, che mutano in sè E e G, hanno per imagini omografie mutanti in sè la varietà di SEGRE U, definita nel n. 47 e, ivi, la M_5 e ciascuna delle varietà E', F' e H'. Su M_5 il gruppo continuo di tali omografie ha per sole varietà invarianti E', F', H' ed è fuori di esse transitivo; su E' (od F') il gruppo ha per sola varietà invariante H' ed è fuori transitivo; ed infine su H' è del tutto transitivo. Perciò *il comportamento delle E', F' è lo stesso in tutti i punti di H'*: si tratta sempre insomma di intersezioni semplici.

Si osserverà di più che, oltre al predetto gruppo continuo ∞^8, la M_5 possiede un altro sistema continuo (non un gruppo) ∞^8 di omografie, che permutan tra loro E', F' e lasciano invariata H'; è il sistema indotto dalle reciprocità piane. Due di queste omografie dànno per prodotto un'omografia del gruppo continuo.

OSSERVAZIONE 1^a. — Dal fatto che ogni punto di E' (o di F') esterno ad H' può esser portato in ogni altro punto di E' (o risp. di F') da una delle ∞^8 omografie, che mutano E' (od F') in sè e che, inoltre, H' è luogo di punti semplici per E' (od F'), i quali alla lor volta si scambian colle omografie del predetto gruppo, che mutano in sè H' ed operano ivi transitivamente, segue che:

Le varietà E', F', H' son prive di punti multipli.

Inoltre F' *è, come* E', *razionale*, perchè esistono omografie di M_5 in sè che scambian tra di loro le due varietà; ed è *razionale anche* H', perchè i suoi punti, rappresentando la coppia x, X, con X iperpiano tangente singolare di G, rappresentano altresì birazionalmente senza eccezioni le coppie punto-conica incidenti di G, cioè, in ultima analisi, le coppie punto-retta incidenti d'un piano. In conclusione H' *è un modello rappresentante birazionalmente senza eccezioni la totalità degli elementi lineari d'un piano.*

È opportuno anche di notar quanto segue. Si ricordi che E è il modello proiettivo minimo del *prodotto topologico simmetrico (o quadrato)* del piano con sè stesso; cioè delle varietà delle coppie non ordinate dei punti del piano, e che G è doppia per E, perchè quella varietà è di sua natura non omogenea. In forza di quanto precede, possiamo affermare che E' *è un modello proiettivo, privo di punti multipli, del quadrato del piano.* Come si sa a priori, un modello siffatto non può rappresentare il detto quadrato senza eccezioni. Nel nostro caso le eccezioni nascon nei punti di H'. È curioso di osservare che basta però parlare, anzichè del quadrato del piano, della varietà il cui elemento variabile è costituito da 2 punti e dalla loro congiungente, perchè la nuova varietà definita sia rappresentata senza eccezioni da E'.

Osservazione 2ª. — Da quanto è stato esposto resta precisato in qual senso debba intendersi la frase (del principio del n.) che *le* E', F', H' *son le varietà eccezionali della corrispondenza fra* S_5 *ed* M_5.

La corrispondenza birazionale fra S_5 ed M_5 può intendersi come corrispondenza fra i punti x di S_5 ed i punti $x' = (x, X)$ di M_5 o come corrispondenza fra gl'iperpiani X di S_5 e i punti x' di M_5: un punto x ed un iperpiano X, omologhi nella polarità rispetto ad E, essendo rappresentati dallo stesso x'.

Nel primo caso le sole varietà (eccezionali) di M_5, che si trasformano in varietà di dimensione diversa di S_5, sono F' e le sue varietà subordinate: la F' è invero luogo delle ∞^2 superficie eccezionali f' e corrispondenti ai punti x di G. In questo caso E' non è eccezionale, ma contiene tuttavia la varietà eccezionale $H' [= (E', F')]$, luogo di ∞^2 curve eccezionali ψ', provenienti dai punti di G.

Nel secondo caso invece le sole varietà eccezionali di M_5 sono E' e le varietà subordinate: la E' è luogo delle ∞^2 superficie eccezionali corrispondenti agl'iperpiani tangenti singolari. La F' non è eccezionale, ma contiene la varietà eccezionale H', la quale così abbraccia tutte le varietà eccezionali rispetto alle due corrispondenze.

Le caratteristiche semplici e quadruple relative alle coniche complete.

51 *Conosciuta così la struttura della varietà M_5, determiniamo la base minima delle varietà a quattro dimensioni in essa tracciate.*

La base minima delle forme di S_5 è un iperpiano; sicchè, a *meno delle varietà eccezionali*, le varietà V_4' di M_5 si riducon algebricamente a multipli della varietà K' rappresentante un sistema ∞^4 di coniche complete determinato da un sistema *lineare* ∞^4 di coniche-luogo (cfr. col n. 34). La conclusione è senz'altro applicabile alle V_4' di M_5 provenienti da V_4 di S_5, non passanti per G. Consideriamo una V_4' omologa di una V_4 passante per G e riguardiamo questa V_4 come limite d'una $\overline{V}_4$, d'ordine λ, non passante per G. Quest'ultima stacca su G una curva D ed è rappresentata in M_5 da una $\overline{V}_4'$, che taglia F' in una varietà a 3 dimensioni Φ', luogo delle ∞^1 superficie f', tracciate su F', omologhe dei punti di D (1). Per ottenere, dal sistema lineare di forme d'ordine λ passanti per D, la V_4, basta imporre ad una $\overline{V}_4$ di quel sistema di contenere un punto x di G, fuori di D. Così la varietà corrispondente alla V_4 passante per G, incontra F' fuori di Φ', epperò si spezza in F' ed in una V_4' imagine del sistema di coniche complete rappresentato, in S_5, da V_4. Sussiste cioè su M_5 la equivalenza (lineare):

$$V_4' + F' \equiv \lambda K'. \tag{23}$$

Pertanto V_4' si esprime come combinazione lineare a coefficienti interi di K', F' e la conclusione si estende alle V_4 passanti per G con molteplicità $s > 1$: per esse il coefficiente di F', che figura nella precedente relazione, viene uguale ad s.

Consideriamo in ultimo su M_5 una V_4', passante per H'. che sia imagine d'un sistema ∞^4 di coniche complete (non degeneri di 2ª specie) contenente le ∞^3 coniche degeneri di 3ª specie (invece di ∞^2, come generalmente accade). Perchè questo avvenga occorre e basta (n. 48) che la V_4 rappresentativa, in S_5, passi per G almeno doppiamente ed il suo cono tangente in ogni punto x di G coincida col cono quadrico Γ tangente ad E in x o lo contenga come parte. L'ordine λ di una tale V_4 è non minore di 3 (n. 44), sicchè V_4 ed $E + (\lambda - 3)K$ individuano in S_5 un fascio di forme di ordine λ, tangenti ad E lungo G.

---

(1) Ciascuna delle f' rappresenta le ∞^2 coniche complete degeneri di 2ª specie, ottenute associando ad una retta fissa le sue coppie di punti.

Qualora V_4 passi per G soltanto doppiamente, alle V_4, $E+(\lambda-3)K$ corrispondon in M_5 (tenuto conto degli elementi eccezionali) le varietà

$$V_4' + 2F', \quad (E' + 2F') + (\lambda - 3)K',$$

ove V_4' designi la varietà di M_5 imagine del sistema ∞^4 di coniche complete rappresentato da V_4. Pertanto sussiste sopra M_5 l'equivalenza

$$V_4' \equiv E' + (\lambda - 3)K'.$$

Suppongasi invece che V_4 passi per G con la molteplicità $s+2$ $(s>0)$, toccando ivi E. Allora $V_4 + 2sK$ ed $E + sQ + (\lambda - 3)K$, ove Q sia una qualunque forma quadratica di S_5 passante per G (in particolare la forma rappresentativa delle coniche tangenti ad una retta data; n. 44) hanno lo stesso ordine $\lambda + 2s$ e la stessa molteplicità $s+2$ lungo G, toccando ivi E. Mediante il fascio da esse individuato in S_5, si ottiene, per trasformazione, su M_5, la relazione

(24) $$V_4' + 2sK' \equiv E' + sQ' + (\lambda - 3)K',$$

la quale prova che le V_4' passanti per H' si esprimon come combinazioni lineari a coefficienti interi delle varietà K', Q', E'.

Dalla (23) si trae agevolmente analoga conclusione per le V_4' non passanti per H'. Invero, la (23) porge anzitutto in particolare la

(25) $$Q' + F' \equiv 2K'$$

e questa, confrontata con la (23), dà:

$$V_4' \equiv Q' + (\lambda - 2)K',$$

che deve essere sostituita dalla:

$$V_4' \equiv sQ' + (\lambda - 2s)K',$$

se V_4 passa per G con la molteplicità s.

Le K', Q', E' non son però indipendenti. Infatti scritta la (25) sotto la forma:

(26) $$Q' + F' \equiv 2I',$$

(ove I', equivalente a K', rappresenta il sistema ∞^4 delle coniche complete passanti per un punto del piano) e applicata alle varietà della (25) una delle ∞^8 omografie di M_5 in sè, che scambian tra loro E', F' e Q', I', si ha l'equivalenza:

(27) $$I' + E' \equiv 2Q'$$

ossia:

$$E' \equiv 2Q' - K'.$$

Pertanto ogni V_4' di M_5 è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti interi delle sole K', Q' (o dualmente delle Q', E').

Infine, le K', Q' sono fra loro indipendenti. Infatti, associando ad esse le curve a', l', si ha il seguente valore del discriminante Δ delle due coppie K', Q'; a', l':

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

e ciò prova che le K', Q' e le a', l', costituiscon le basi minime (e intermediarie, sicchè *mancano in M_5 i divisori dello zero di dimensione 4 ed 1*) rispettivamente delle V_4' e delle curve di M_5. Concludendo:

La base minima delle varietà a quattro dimensioni tracciate sulla M_5 delle coniche complete, consta della varietà I' imagine del sistema delle coniche per un punto e della varietà Q' imagine del sistema delle coniche tangenti ad una retta.

Inoltre:

La base minima delle curve di M_5 consta della curva rappresentativa di un fascio di coniche e della curva rappresentativa d'un fascio-schiera.

Come vedesi *le caratteristiche delle condizioni semplici e delle condizioni quadruple sulla M_5, quando non si fissino speciali comportamenti delle condizioni stesse rispetto alle varietà complete di degenerazione E', F', H', son le medesime* μ, ν *e rispettivamente* μ', ν' *valevoli per le condizioni semplici e quadruple, non già di S_5, ma di $S_5 - G$.*

La sostituzione di M_5 ad S_5 offre il vantaggio di poter considerare le condizioni da studiare in una varietà senza contorni.

52. Il problema delle caratteristiche semplici su M_5 non resta però così risoluto nei confronti con le condizioni che abbian particolari comportamenti rispetto alle E', F', H'. Non sarebbe p. es. possibile applicare la risoluzione indicata a condizioni di superosculazione [1].

Già la relazione (25) del n. prec. non vale più sulla varietà $M_5 - H'$ (che occorre considerare per includere le condizioni di superosculazione). Invero, una curva l' (n. 50) appoggiata ad H' in un punto — cioè la curva t' imagine di un fascio di coniche superosculatrici — non incontra F' fuori

[1] Io circoscrissi compiutamente ed esattamente, nella Memoria del 1916, le condizioni di validità della formula di CHASLES $\alpha\mu + \beta\nu$ in relazione alle coniche complete, precisando il risultato di HALPHEN, secondo cui la formula cessa di valere in presenza di condizioni soddisfatte da coniche degeneri di 3ª specie.

di H', mentre incontra ciascuna delle Q', K' in un punto, fuori di H': cosicchè in $M_5 - H'$ si ha una sola soluzione corrispondente al simbolo $[Q' + F'; t']$ e 2 corrispondenti al simbolo $[2K', t']$. Similmente cade in difetto la relazione (27).

Tuttavia il ragionamento svolto nel n. prec. onde pervenire alla (24), conserva attualmente piena validità, perchè si riferisce già alla $M_5 - H'$, in quanto trattasi delle V_4' cui si è prescritta la varietà base H'.

Pertanto vale la conclusione che ogni V_4' di $M_5 - H'$ esprimesi come combinazione lineare a coefficienti interi delle K', Q', E'. Però, a differenza di quanto prima accadeva sulla M_5, le K', Q', E', considerate sulla $M_5 - H'$, sono indipendenti. Invero, associando queste tre varietà alle curve a', l', t', si ha sopra $M_5 - H'$:

$$[K', a'] = [K', l'] = [K', t'] = 1, \quad [Q', a'] = 2, \quad [Q', l'] = 1, \quad [Q', t'] = 1,$$
$$[E', a'] = 3, \quad [E', l'] = 1, \quad [E', t'] = 0;$$

onde il discriminante simultaneo Δ delle due terne K', Q', E'; a', l', t' vale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Le due terne sono dunque indipendenti e formano le basi minime delle varietà delle rispettive dimensioni. Inoltre segue che *anche su $M_5 - H'$ non vi sono divisori dello zero delle dimensioni 4 ed 1.*

Concludendo (ove si sostituisca K' con I'):

Le caratteristiche della totalità delle condizioni semplici imposte alle coniche complete, quando vi si vogliano includere anche le condizioni soddisfatte dalle ∞^3 coniche degeneri di terza specie, sono le caratteristiche μ, ν già trovate, con l'aggiunta della condizione δ, perchè una conica completa sia degenere di prima specie.

Di più:

Le caratteristiche delle condizioni quadruple (quando si vogliano includervi le condizioni soddisfatte da un numero finito > 0 di coniche degeneri di terza specie) sono le μ', ν' già trovate e la condizione τ' perchè una conica completa irriducibile appartenga ad un fascio di coniche superosculatrici.

53. Se una condizione semplice c in $M_5 - H'$ si esprime per le caratteristiche con la relazione:

$$c = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\delta,$$

si trovano agevolmente i significati dei coefficienti α, β, γ calcolando i prodotti $c\mu'$, $c\nu'$, $c\tau'$. Invero:

$$\begin{aligned} c\mu' &= \alpha + 2\beta + 3\gamma, \\ c\nu' &= \alpha + \beta + \gamma, \\ c\tau' &= \alpha + \beta; \end{aligned}$$

onde:

$$\alpha = c(3\nu' - \mu' - \tau'), \quad \beta = c(\mu' + 2\tau' - 3\nu'), \quad \gamma = c(\nu' - \tau').$$

In particolare, si ricava l'espressione di η in funzione delle caratteristiche, perchè:

$$\eta\mu' = 0, \quad \eta\nu' = 1, \quad \eta\tau' = 0.$$

Si trova così:

$$\alpha = 3, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 1,$$

e si può enunciare:

La condizione η affinchè una conica completa sia degenere di 2^a specie, si esprime in $M_5 - H'$ colla relazione:

$$\eta = 3\mu - 3\nu + \delta,$$

la quale in M_5 si riduce alla:

$$\eta = 2\mu - \nu,$$

tenuto conto che ivi è (n. 51) $\delta = 2\nu - \mu$.

54. Se una condizione quadrupla c' si esprime in $M_5 - H'$ mediante le caratteristiche colla relazione:

$$c' = \alpha'\mu' + \beta'\nu' + \gamma'\tau',$$

i coefficienti α', β', γ' si ottengono col calcolo dei prodotti:

$$\begin{aligned} c'\mu &= \alpha' + \beta' + \gamma', \\ c'\nu &= 2\alpha' + \beta' + \gamma', \\ c'\delta &= 3\alpha' + \beta', \end{aligned}$$

donde:

$$\alpha' = c'(\nu - \mu), \quad \beta' = c'(\delta + 3\mu - 3\nu) \quad \gamma' = c'(2\nu - \mu - \delta).$$

Le caratteristiche doppie e triple relative alle coniche-luogo (o inviluppo).

55. Esaminiamo ora il problema delle *caratteristiche doppie* (di dimensione 2). Procederemo rapidi nelle argomentazioni simili a quelle usate per le caratteristiche semplici e ci fermeremo un pò più sulle argomentazioni sostanzialmente nuove.

Riferiamoci anzitutto alle coniche-luogo. Se non si fissa alcun particolare comportamento delle condizioni doppie rispetto agli elementi degeneri, ricordato che in S_5 la base minima delle varietà V_3 è un S_3 — e come tale può assumersi l'intersezione (I, I) di due iperpiani I (n. 43) — si conclude senz'altro che vi è la sola caratteristica μ^2.

Atteso il modo come una V_3 generica interseca E, G, se s'escludon le V_3 giacenti in E, le particolarità che possono imporsi a V_3, rispetto agli elementi degeneri, sono o che V_3 incontri G secondo una linea (oltre ad eventuali punti isolati) o che passi addirittura per G. Conformemente al procedimento generale dei nn. 37, 38, per ottenere la base minima delle V_3 incontranti G secondo linee, bisogna anzitutto costruire la base minima delle curve di G, che è una conica g; e considerare la base minima delle V_3 che passano per g, avvertendo che, al variare di g nel proprio sistema lineare ∞^2, non può mai accadere che una V_3 passante per una g particolare non sia limite d'una V_3 passante per la g generica. Ciò permette di ottenere la richiesta base minima mediante le V_3 passanti per una g *comunque* fissata in G. La possibilità di ottenere una g qualunque di G da ogni altra, applicando in S_5 un'omografia del gruppo continuo ∞^8, che muta G in sè, conduce subito alla conclusione accennata [1].

Cerchiamo dunque la base minima delle V_3 per g. Sia A una tale V_3 e C, D due forme generiche di ordini m, n passanti per A, sicchè

$$(C, D) = A + B, \tag{28}$$

ove B è la V_3 intersezione delle C, D fuori di A. La B incontra G in un numero finito di punti e si riduce perciò ad un multiplo $k(I, I)$ della base minima (I, I) delle V_3 di S_5. Ogni A esprimesi così con una combinazione lineare del tipo $(C, D) - k(I, I)$. Ciò posto, si avverta che g sta in ∞^2 S_3 e che fra questi vi sono gli ∞^1 S_3 ciascun dei quali rappresenta il sistema lineare delle coniche passanti pel punto P del piano, omologo di g, e tangenti ivi ad una retta data per P (n. 20, Oss.). La condizione relativa si designerà con $\widehat{\mu\nu}$, posto che $\mu\nu$ indica già la condizione (rappresentata da una V_3^2 di S_5) affinchè una conica passi per un punto P e tocchi una retta non appartenente a P. Poichè lo S_3 considerato (chiamiamolo S) è un particolare (I, I) — intersezione dell'iperpiano rappresentativo delle ∞^4 coniche per P coll'iperpiano rappresentativo delle ∞^4 coniche per un punto infinita-

[1] Quest'argomentazione non è del resto essenziale, perchè ci riferiamo a varietà e a condizioni virtuali; e per queste la proprietà di cui è questione è sempre vera [n. 37, a)].

mente vicino a P — e poichè una forma C o D per g si riduce ad un multiplo di un iperpiano I passante per g, così risulta $(C, D) \equiv hS$ (ove $\equiv$ è ora il simbolo dell'equivalenza razionale, non lineare).

In definitiva ogni A per g si esprime con una combinazione lineare a coefficienti interi di (I, I) e di S; cioè le caratteristiche delle condizioni doppie soddisfatte da ∞^1 (al più) coniche-luogo degeneri di 2^a specie, sono μ^2 e $\widehat{\mu\nu}$.

Procediamo oltre, considerando le condizioni doppie soddisfatte da tutte le coniche-luogo degeneri di 2^a specie, cioè rappresentate da V_3 passanti per G.

Seguendo la linea concettuale fissata, conduciamo per G due generiche forme C, D di ordini m, n.

Vale allora la (28), ove A denoti attualmente una V_3 per G e B la intersezione residua delle C, D, la quale incontra G in un numero finito di punti. Pertanto è, come prima, $B \equiv k(I, I)$.

Sia Q la forma quadratica passante (semplicemente) per G, che rappresenta le coniche del piano tangenti ad una retta data (n. 44). Poichè 2 è il minimo ordine delle forme per G, sarà $m \geq 2$, $n \geq 2$.

Avremo pertanto, in $S_5 - G$:

$$C \equiv Q + (m-2)I, \quad D \equiv Q + (n-2)I,$$

epperò:

$$(C, D) \equiv (Q, Q) + (m+n-4)(I, Q) + (m-2)(n-2)(I, I).$$

Ora (I, Q) è una V_3 passante per la quartica lungo cui I incontra G; e quindi essa si esprime, in virtù del risultato precedente, con una combinazione lineare a coefficienti interi di (I, I) e di S. In conclusione A si esprime, in $S_5 - G$, mediante (I, I), S, (Q, Q). Queste tre varietà sono poi indipendenti tra loro in $S_5 - G$, perchè nessun multiplo di $(I. I)$ passa per g e quindi S è indipendente da (I, I); e nessuna combinazione lineare a coefficienti non ambedue nulli di (I, I) e di S passa per G, onde (Q, Q) è indipendente da (I, I), S. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Le caratteristiche doppie, riferite alle coniche-luogo, sono la condizione μ^2 *perchè una conica passi per due punti distinti, la condizione* $\widehat{\mu\nu}$ *perchè essa passi per due punti infinitamente vicini e la condizione* ν^2 *perchè tocchi due rette distinte* [1].

---

[1] Le caratteristiche doppie μ^2, $\widehat{\mu\nu}$, ν^2 sono state trovate da CREMONA, colla indeterminazione del loro campo di validità, che derivava dallo sviluppo allora immaturo della geometria algebrica. Veggasi pure la citata Memoria di VAN DER WAERDEN.

Se si escludono le condizioni soddisfatte da tutte le ∞^2 *coniche-luogo degeneri di* 2^a *specie, bastan le caratteristiche* μ^2, $\widehat{\mu\nu}$; *e se si escludono anche le condizioni soddisfatte da* ∞^1 *coniche-luogo degeneri di* 2^a *specie, basta la caratteristica* μ^2.

56. Passiamo a considerare, sulla varietà delle coniche-luogo, le *condizioni triple* (o di dimensione 3). Usufruiscasi ancora del concetto di costruire le varietà di S_5, sottoposte ad assegnate condizioni rispetto a G, quali combinazioni lineari di varietà della stessa dimensione, aventi i medesimi legami con G, e che siano intersezioni complete di forme, e di varietà non sottoposte ad alcuna condizione rispetto a G; e si ricordi inoltre che la base minima delle V_2 di S_5 è un piano (I, I, I). Si deduce senz'altro da ciò che:

a) La base minima delle V_2 di S_5 incontranti G (in un numero finito di punti) è costituita da un piano generico π dello S_5 — come tale si può prendere anche un piano (I, I, I), che non appoggiasi a G — e da un piano π_x passante per un punto x, comunque fissato in G.

b) La base minima delle V_2 di S_5 distinte da G e incontranti G secondo curve, si ottiene aggiungendo alla precedente base π, π_x, il piano π_g di una conica, comunque fissata in G.

Ora la condizione perchè un punto di S_5 giaccia in (I, I, I) è rappresentata dal simbolo μ^3; la condizione perchè giaccia in π_x, cioè perchè una conica (non degenere di 2^a specie) appartenga ad una rete congiungente un fascio generico con una conica-luogo degenere di 2^a specie [1], la designeremo con ξ; e infine la condizione perchè giaccia in π_g, cioè sia una delle ∞^2 coniche degeneri di 1^a specie formate dalle coppie di rette uscenti da un punto del piano, la designeremo con ζ.

Così μ^3, ξ, ζ risultano le tre caratteristiche delle condizioni triple.

È poi chiaro che tali caratteristiche sono indipendenti tra loro, perchè, in $S_5 - G$, lo sono π, π_x, π_g, in quanto i multipli di π non incontrano G e quindi sono indipendenti da π_x e le combinazioni lineari di π, π_x tagliano G in numero finito (≥ 0) di punti e sono indipendenti da π_g.

Si può in conclusione enunciare:

Le caratteristiche triple delle coniche-luogo sono la condizione μ^3 *perchè una conica passi per tre punti distinti, la condizione* ξ *perchè giaccia in una rete contenente una (sola) conica-luogo degenere di* 2^a *specie e la condizione* ζ *perchè si spezzi in due rette passanti per un punto.*

---

(1) Una tal rete, alla quale appartenga la retta doppia r del piano, è il luogo degli ∞^1 fasci-schiera definiti dalla retta doppia r e dalle singole coniche passanti per 4 punti generici del piano.

Se si escludono le condizioni triple soddisfatte soltanto da coniche degeneri di 2^a specie, bastano le caratteristiche μ^3, ξ; *e se si escludono le condizioni triple soddisfatte da qualche conica-luogo degenere di 2^a specie, basta la caratteristica* μ^3.

57. Le basi (I, I), S, (Q, Q) e π, π_x, π_g, per le V_3 e le V_2 di $S_5 - G$, dànno luogo al discriminante simultaneo

$$\Delta = \begin{vmatrix} [I, I, \pi] & [I, I, \pi_x] & [I, I, \pi_g] \\ [S, \pi] & [S, \pi_x] & [S, \pi_g] \\ [Q, Q, \pi] & [Q, Q, \pi_x] & [Q, Q, \pi_g] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

il cui valore assoluto (minimo) 1 conferma che si tratta di basi minime (intermediarie). Ne segue che $S_5 - G$ *non contiene divisori dello zero di dimensione* 2, 3, *e quindi di nessuna dimensione*, perchè già si è visto (n. 45, Oss. 1ª) che non ne contiene di dimensione 1 o 4.

Sieno

$$c = \alpha\mu^2 + \beta\widehat{\mu\nu} + \gamma\nu^2$$
$$c' = \alpha'\mu^3 + \beta'\xi + \gamma'\zeta,$$

le espressioni di due condizioni c, c', l'una, c, doppia e l'altra, c', tripla, mediante le caratteristiche. I valori dei coefficienti α, β, γ; α', β', γ' si deducon subito dalle:

$$\begin{aligned} c\mu^3 &= \alpha + \beta + 4\gamma & c'\mu^2 &= \alpha' + \beta' + \gamma' \\ c\xi &= \alpha + \beta + 3\gamma & c'\widehat{\mu\nu} &= \alpha' + \beta' \\ c\zeta &= \alpha & c'\nu^2 &= 4\alpha' + 3\beta', \end{aligned}$$

ottenendosi:

$$\alpha = c\zeta, \quad \beta = c(4\xi - 3\mu^3 - \zeta), \quad \gamma = c(\mu^3 - \xi),$$
$$\alpha' = c'(\nu^2 - 3\widehat{\mu\nu}), \; \beta' = c'(4\widehat{\mu\nu} - \nu^2), \quad \gamma' = c'(\mu^2 - \widehat{\mu\nu}).$$

In particolare, assunto p. es. $c = \mu\nu$, siccome:

$$\mu\nu\zeta = 0, \quad \mu^4\nu = 2, \quad \mu\nu\xi = 2,$$

risulta $\mu\nu = 2\widehat{\mu\nu}$ (conformemente al n. 21, Oss.); mentre in S_5 è $\mu\nu = 2\mu^2$.

OSSERVAZIONE. — Tutte le considerazioni dei nn. 55, 56, 57 si trasportano per dualità alle *coniche-inviluppo*.

Digressione sulla base entro la varietà di degenerazione H' (varietà degli elementi lineari del piano).

58. Per esaurire la nostra ricerca bisogna in ultimo considerare le condizioni doppie e triple sulla M_5 delle coniche complete, perchè *altrimenti non si potrebbe applicare il calcolo simbolico alle condizioni di superosculazione.*

Ma un'ulteriore premessa è necessaria, concernente la determinazione delle basi delle varie dimensioni sulle E', F', H': anzi sulle E', H', perchè dà E' si passa ad F' con una delle ∞^8 omografie di M_5 in sè, che scambiano E' con F'. Cominceremo da H'.

59. Per non trascinar dietro notazioni che sarebbero ora inutilmente ingombranti, useremo, in questo n. e nei due successivi, notazioni a sè.

Della varietà degli elementi lineari del piano si può sempre considerare un modello V, *privo di punti multipli*, che rappresenti biunivocamente senza eccezione i detti elementi, giacchè H' ci dà già un siffatto modello.

Su V son tracciate due congruenze, d'indice 1, di curve razionali l_x, l_u: ogni l_x rappresenta gli elementi lineari, che appartengono ad un punto x ed ogni l_u gli elementi lineari, che appartengono ad una retta u. Ciascuna di tali congruenze è mutata in sè dal gruppo continuo ∞^8 delle trasformazioni birazionali di V in sè, che proviene dalle omografie piane; e le due congruenze sono scambiate fra loro dalle ∞^8 trasformazioni imagini delle reciprocità piane.

Consideriamo anzitutto una superficie F di V che sia composta colle l_x. Le l_x di questa F provengono dai punti di una linea f del piano e forman su F un fascio, in corrispondenza birazionale con f (1).

Poichè f è linearmente equivalente sul piano ad un multiplo d'una retta u, e l'equivalenza lineare fra curve del piano si muta ovviamente nell'equivalenza lineare fra superficie composte colle l_x, così F risulta su V linearmente equivalente ad un multiplo d'una superficie U, riempita dalle l_x corrispondenti ai punti x d'una data retta u. Ogni U è unisecante delle l_u e non taglia la generica l_x.

Dualmente: ogni superficie F di V, composta colle l_u, si riduce ad un multiplo d'una superficie X riempita dalle l_u corrispondenti alle rette d'un fascio di centro x. Ogni X è unisecante delle l_x e non taglia la generica l_u.

Consideriamo infine una superficie F non composta nè tutta nè in parte colle l_x o colle l_u. Sia m il numero dei punti in cui essa incontra le l_x. Allora le superficie F, mX taglian le l_x in due gruppi contenenti lo stesso numero di punti, cioè in due gruppi equivalenti, attesa la razionalità delle l_x. Pertanto le due superficie sono equivalenti (linearmente) o differiscono per superficie composte colle l_x (2). Ma siccome queste riduconsi a multipli di U,

(1) La F è pertanto birazionalmente equivalente ad una rigata di genere uguale al genere di f.

(2) Estensione ovvia alle varietà di uno de' miei criteri d'equivalenza. Ved. p. es. le mie Lezioni sulle serie e i sistemi d'equivalenza citate a pag. 157; pp. 190 e segg.

si ha in definitiva

$$F \equiv mX + nU; \tag{29}$$

ed il significato dell'intero n si determina subito intersecando i due membri di quest'equivalenza con una l_u. Viene invero:

$$[F, l_u] = m[X, l_u] + n[U, l_u]$$

e siccome:

$$[X, l_u] = 0, \quad [U, l_u] = 1,$$

così n risulta uguale al numero dei punti in cui F sega le l_u.

E poichè le X, U non posson essere dipendenti (perchè altrimenti non potrebbero esistere curve che segan l'una e non l'altra), si conclude che:

La base minima (e intermediaria) delle superficie appartenenti alla varietà V degli elementi lineari del piano consta della superficie imagine degli elementi lineari le cui rette passan per un punto e della superficie imagine degli elementi lineari i cui punti appartengono ad una retta.

Si trova ora subito la base, duale, delle curve tracciate su V.

Invero, il numero base relativo alle curve è uguale al numero base 2 relativo alle superficie e d'altronde il discriminante simultaneo delle coppie X, U; l_x, l_u vale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} [X, l_x] & [X, l_u] \\ [U, l_x] & [U, l_u] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

sicchè l_x, l_u risultano indipendenti, in quanto $\Delta \neq 0$, e formano base minima (intermediaria), perchè Δ ha certo il valore assoluto minimo. Dunque:

La base minima (e intermediaria) delle curve tracciate su V consta della curva imagine degli elementi appartenenti ad un punto e della curva imagine degli elementi appartenenti ad una retta.

Naturalmente siccome V è razionale, le equivalenze algebriche fra curve di U son equivalenze razionali. Inoltre:

La varietà V è priva di divisori dello zero (di ogni dimensione).

OSSERVAZIONE. — I risultati ottenuti posson in particolare esser riferiti al modello H', a noi occorrente.

Allora le curve sopraindicate con l_x, divengon su H' le curve g', che rappresentan le coppie punto-iperpiano x, X ottenute associando ai punti x d'una conica g di G, l'iperpiano singolare X, tangente a G lungo g; cioè, come si può dir brevemente, le curve g' corrispondenti alle coniche g di G.

Le curve l_u divengon su H' le curve eccezionali ψ' corrispondenti ai punti di G (n. 50); cioè rappresentano le ∞^1 coppie x, X costituite da un punto x di G e dagli iperpiani tangenti singolari X, che passan per x.

Le superficie X divengon le superficie G', ognuna delle quali è luogo delle ψ' corrispondenti ai punti d'una conica g, e rappresenta le coppie x, X ottenute associando ad ogni iperpiano tangente singolare X, in un punto x variabile sopra una conica g, il punto medesimo. Infine, una superficie U diviene una superficie Ψ' luogo delle g' omologhe delle g passanti per un punto e rappresenta le coppie x, X ottenute associando ad ogni iperpiano tangente singolare X, passante per un dato punto di G, ciascuno dei punti x della conica di contatto di quell'iperpiano.

60. Quanto è esposto nel n. prec. basta per le considerazioni ulteriori sulle caratteristiche doppie e triple delle coniche complete. Ma val la pena di esaurire lo studio della varietà V dal punto di vista della base, cercandone il *modello minimo* [1].

Anzitutto si osservi che sopra V un sistema lineare $|F|$ di superficie, la cui imagine proiettiva sia un modello di V, deve esser irriducibile e non composto (con una involuzione o con una congruenza di linee o con un fascio di superficie).

Ciò implica che nell'espressione (29) di una superficie variabile nel sistema, non manchi nè X nè U (altrimenti il sistema sarebbe composto o colle l_u o colle l_x). I coefficienti m, n, dovranno anzi essere positivi, perchè non sono che gli ordini delle curve imagini delle l_x, l_u, nel modello cercato. Se poi si vuole che questo modello abbia l'ordine minimo, occorre che il grado virtuale del sistema sia il minimo compatibile colle predette condizioni.

Ciò posto, il grado virtuale $\nu = [F, F, F]$ della F, espressa mediante la (29), è dato da:

$$[mX + nU,\ mX + nU,\ mX + nU] =$$
$$= m^3[X, X, X] + n^3[U, U, U] + 3m^2n[X, X, U] + 3mn^2[X, U, U];$$

e siccome:

$$[X, X, X] = [U, U, U] = 0, \quad [X, X, U] = [X, U, U] = 1,$$

risulta $\nu = 3mn(m + n)$; epperò, essendo $m \geq 1$, $n \geq 1$, viene $\nu \geq 6$.

Il modello minimo riuscirà dunque di ordine $\nu = 6$, se il sistema individuato da $F = X + U$, che corrisponde ad $m = n = 1$, soddisfa alle volute condizione.

Studiamo questo sistema. Intanto, mentre il punto x descrive il piano, la superficie X definita nel n. prec. si muove descrivendo in V un sistema

[1] Ved. a proposito dei modelli minimi le mie citate Lezioni, p. 20.

lineare ∞^2 (1). Dualmente, mentre la retta u descrive il piano, la superficie U descrive un sistema lineare ∞^2.

La somma $|F| = |X + U|$ è irriducibile (ossia la sua superficie generica è irriducibile) in virtù dell'ovvia estensione alle varietà d'un teorema di Bertini (2),

Invero, $|F|$ non ha punti base, perchè non ne possiedono nè $|X|$ nè $|U|$, e di più $|F|$ non può essere composto (e quindi in particolare riducibile), perchè, come ora vedremo, le F passanti per un punto qualunque P di V, non passan tutte in conseguenza per qualche altro punto Q. Si fissi all'uopo in V un qualsiasi punto Q distinto da P. Fra le due curve l_x, l_u passanti per P, una almeno, e sia l_x, non passa per Q (in quanto una l_x ed una l_u non possono avere più d'un punto comune). Allora una generica U passante per P, insieme ad una generica X, fornisce una $X + U$, cioè una F, passante per P e non per Q.

Ciò posto, calcoliamo il genere curvilineo (virtuale) di $|F|$, cioè il genere virtuale d'una curva (F, F). Si osservi anzitutto che

$$(F, F) = (F, X) + (F, U) \tag{30}$$

e che:

$$(F, X) = (X, X) + (X, U), \quad (F, U) = (U, U) + (X, U),$$
$$(X, X) = l_u, \quad (U, U) = l_x.$$

Quanto ad (X, U), trattasi manifestamente d'una curva razionale (come le l_x, l_u), perchè rappresenta l'insieme degli elementi lineari del piano che hanno il punto sopra una retta e la retta per un punto; e su X la (X, U) è unisecante delle l_u; su U è unisecante delle l_x (3). Applicando la formula che dà il genere d'una curva spezzata con assegnati punti di connessione, si conclude che su X il genere virtuale di (F, X) è $0 + 0 + 1 - 1 = 0$, e similmente che su U il genere virtuale di (F, U) è zero. Inoltre su F le due curve (F, X), e (F, U) si taglieranno nel gruppo

$$(F, X, U) \equiv (X, X, U) + (U, X, U),$$

(1) Si tratta, invero, d'un sistema razionale ∞^2, tale che per due punti generici di V passa una sola superficie del sistema.

(2) La parte variabile della V_{k-1}, che descrive un sistema lineare di V_{k-1} entro una V_k può spezzarsi soltanto se le V_{k-1} son composte con le varietà W_{k-1} di un fascio. Conseguenza immediata questa p. es. del teorema concernente i punti multipli che la V_{k-1} mobile possegga fuori di varietà base del sistema. Ved. Bertini, *Geom. proiettiva degli iperspazi* (citata) p. 285.

(3) Prendendo incidenti il punto e la retta cui sopra si allude, si riconosce subito che $(X, U) \equiv l_x + l_u$, ove l_x, l_u son due curve aventi a comune un punto.

cioè in una coppia di punti. La formula che dà il genere d'una curva spezzata, applicata ancora una volta, mostra che su F la curva (F, F), espressa dalla (30), ha il genere virtuale $0 + 0 + 2 - 1 = 1$. La conclusione è dunque che due generiche F si tagliano secondo una curva ellittica (irriducibile), che ha su ciascuna di esse il grado virtuale 6; e quindi la serie caratteristica curvilinea di $|F|$ ha al più la dimensione $6 - 1 = 5$; cioè il sistema caratteristico di $|F|$ ha al più la dimensione 6, epperò $|F|$ ha al più la dimensione 7 [1].

Il modello *minimo* che cercavamo è insomma l'*imagine* del sistema $|X + U|$; ha l'ordine 6, le sezioni curvilinee ellittiche ed appartiene ad uno spazio lineare di dimensione ≤ 7.

Tale modello resta determinato a meno d'un'omografia, se gli si prescrive di essere normale; giacchè esso è l'imagine d'un sistema lineare completo ben individuato su V.

61. Si costruisce ora come segue in modo effettivo ed elementare il modello proiettivo di cui si è dimostrata l'esistenza.

Sieno x_0, x_1, x_2 coordinate proiettive omogenee di punto ed u_0, u_1, u_2 coordinate proiettive omogenee di retta, sul piano. La varietà di SEGRE, W_4^6, che rappresenta senza eccezione le coppie punto-retta del piano, com'è ben noto, è data parametricamente nello spazio S_8 in cui sono X_{ij} le coordinate omogenee di punto, dalle:

$$\rho X_{ij} = x_i u_j \quad (\rho \text{ fattore di proporzionalità}; \; i, j = 0, 1, 2).$$

La sezione di W_4 con l'iperpiano:

$$X_{00} + X_{11} + X_{22} = 0, \tag{31}$$

ha l'ordine 6, ed è appunto un modello proiettivo (senza eccezioni) della nostra varietà V. Continueremo a chiamarlo V. Ed è il modello normale cui alludevamo alla fine del n.° prec., perchè la dimensione del suo spazio di appartenenza è 7. Cosicchè si può affermare che il sistema lineare $|F|$, del n.° prec., ha proprio la dimensione 7 [2] e non minore.

---

[1] Applicando proposizioni generali di geometria sulle varietà (ved SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 28 (1909), pp. 33-87) se ne trarrebbe subito che la serie lineare caratteristica di $|F|$ è completa a quindi che $|F|$ ha la dimensione 7; ma non val la pena di ricorrere a tanto per una questione così elementare e alla quale si risponde agevolmente in modo diretto, come ora vedremo.

[2] Si tenga presente che una varietà razionale di 6° ordine ha come spazio massimo di appartenenza un S_8; ma quando sta in S_8 le sue curve sezioni son necessariamente razionali (normali). In questo caso la nostra V, le cui curve sezioni son ellittiche (normali), è normale in S_7.

È appena necessario di aggiungere che la sezione di W_4 con l'iperpiano (31) è una sezione iperpiana generica di W_4.

Invero, W_4 possiede un gruppo ∞^{16} di omografie in sè (che provengono dall'associare a coppie le ∞^8 omografie del piano, considerate, le due omografie d'una coppia. l'una come agente sui punti x e l'altra sulle rette u).

Di queste omografie ve ne sono ∞^8 che mutano in sè una sezione iperpiana generica; e viceversa, una sezione iperpiana, che sia mutata in sè soltanto da ∞^8 di dette omografie, è portata dalle omografie del gruppo ∞^{16} in ogni altra sezione generica. Ora V si trova precisamente in tale condizione.

Da questa considerazione risulta pure che V è priva di punti multipli, perchè il gruppo delle ∞^8 omografie, che la mutano in sè, è transitivo. Dunque:

Il modello minimo normale su cui può rappresentarsi birazionalmente senza eccezioni la varietà degli elementi lineari del piano appartiene ad S_7 ed ha l'ordine 6. Esso è privo di punti multipli; è a curve sezioni ellittiche [1] *ed è sezione iperpiana generica della varietà di* Segre *prodotto di due piani.*

Le curve l_x, l_u sopra un tal modello V sono rette e le superficie X, U rigate del 3° ordine normali.

Osservazione. — Si posson facilmente caratterizzare le curve (anche non algebriche) di V, che rappresentan le curve luogo-inviluppo del piano.

Presi invero un punto x ed una retta u del piano, che si appartengano, le l_x, l_u corrispondenti costituiscono la curva $l_x + l_u$, passante pel punto P di V imagine della coppia x, u, e che è comune alle superficie X, U, relative a quel punto e a quella retta. Le X, U si toccan dunque in P ed il loro piano tangente comune è il piano π delle rette l_x, l_u di V passanti per P: si dirà il *piano principale* in P.

Una curva luogo-inviluppo del piano, alla quale appartenga la coppia x, u, è tale che l'elemento lineare infinitamente vicino su essa all'elemento x, u,

(1) Perciò rientra fra le varietà a curve sezioni ellittiche classificate da Scorza (« Annali di Matematica » 1908). Alla V_3^6 (che era stata in precedenza trovata da Enriques nella ricerca sui sistemi lineari di superficie dello spazio, a intersezioni variabili ellittiche o iperellittiche, « Math. Annalen », 1895) Scorza dedica un ampio studio. Un sistema rappresentativo della V_3^6, in S_3, è costituito dalle superficie cubiche che passan per una cubica gobba, avendo un punto doppio in un punto dato di questa; la V_3^6 è generabile come luogo delle rette comuni agli S_3 omologhi di 3 sistemi lineari ∞^2, tra loro omografici e generici, in S_7; è una delle V_3 di uno spazio S_r, con $r > 6$ (determinate dallo stesso Scorza in un precedente lavoro, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 1908), i cui S_3 tangenti s'incontran a due a due; ecc. Ma non mi consta che nessuno degli Autori che si sono occupati di questa varietà, abbia avvertito ch'essa è un possibile modello senza eccezioni della varietà degli elementi lineari del piano (e tanto meno che essa sia il modello minimo: la qual cosa non può dimostrarsi, senza aver risoluto prima sulla varietà il problema della base).

ha il proprio punto giacente in u e la propria retta passante per x; epperò esso è rappresentato da un punto infinitamente vicino a P, comune alle X, U. Pertanto *la imagine della considerata curva luogo-inviluppo tocca in P il piano principale; e viceversa.*

Una superficie qualunque Φ di V, in quanto rappresenta una ∞^2 di elementi lineari, è imagine d'un'equazione differenziale del 1° ordine; e se questa soddisfa alle condizioni che assicuran l'esistenza, in un certo campo, di ∞^1 curve integrali, su Φ giace un fascio di curve toccate in ogni punto dal relativo piano principale.

Una trasformazione di contatto è una trasformazione puntuale di V in sè caratterizzata dalla proprietà di far corrispondere ad ogni giacitura principale una giacitura principale. Questo punto di vista può, per es., agevolare la ricerca delle trasformazioni birazionali di contatto; ecc..

La base entro le varietà di degenerazione E', F'.

62. Torniamo al problema delle caratteristiche e determiniamo perciò la base su E', e quindi (n. 58) su F'.

La varietà E, di cui E' è la trasformata nella rappresentazione che abbiamo fatta delle coppie x, X coi punti di M_5, è birazionalmente equivalente ad un'involuzione di 2° ordine sul prodotto Π del piano con una sua copia (varietà delle coppie ordinate dei punti del piano).

I punti doppi di questa involuzione riempion su Π la superficie Ω (in corrispondenza senza eccezione con G), che rappresenta l'identità. Dalle basi delle varie dimensioni su Π si deducon agevolmente le basi delle stesse dimensioni su E.

Naturalmente s'ottengon risultati diversi secondo che ci si riferisce ad E o ad $E - G$. Su $E - G$ la base minima delle curve è costituita dal prodotto d'un punto e d'una retta del piano (cioè da una retta s generica appartenente ad un piano tangente di G) e da una corda q di G, in quanto rappresenta le coppie d'un involuzione sopra una retta.

Su E le q, s riduconsi invece per continuità l'una all'altra: cosicchè la base minima delle curve di E è una sola di queste due rette.

La base minima delle superficie di $E - G$ è data dal prodotto d'un punto per tutto il piano (cioè da un piano π_x tangente a G in un punto x) e dal piano π_g di una conica g di G, come imagine delle coppie di punti d'una retta.

Questi due piani sono algebricamente (cioè razionalmente) indipendenti anche su E.

Infine la base minima delle V_3 di $E - G$ è data dal prodotto d'una retta per l'intero piano (cioè dalla sezione A di E con un iperpiano tangente singolare e quindi anche con un iperpiano qualunque) e dalla sezione B di E con una quadrica Q, passante semplicemente per G.

Su E la B riducesi (linearmente) al doppio di A [1].

63. Passando da E ad E' s'introduce, al posto della superficie doppia G di E, la varietà eccezionale H'.

I singoli punti di G vengon mutati nelle curve eccezionali ψ', di una delle due congruenze lineari di curve razionali tracciate su H' e le coniche g nelle curve g' dell'altra congruenza lineare (n. 59, Oss.).

Dalla (26) (n. 51), intersecandone i due membri con E', tenuto conto che E', F' hanno molteplicità d'intersezione 1 in ogni punto di H' (n. 50) e quindi che su M_5, $H' \equiv (E', F')$, segue:

$$B' + H' \equiv 2A' \tag{32}$$

ove A' sia la trasformata di A e B' la trasformata di B, a prescindere dalla H', che nasce come omologa di G. In altre parole: B' è la V_3' ben determinata di M_5, che contiene i trasformati dei punti di B fuori di G e i loro punti d'accumulazione.

La H', in quanto nasce ex novo su E', va a priori aggiunta alla base delle V_3' di E', la quale riesce così costituita da H' e dalle A', B'. Ma in definitiva, a cagione della (32), la base minima delle V_3' di H' riducesi alle sole A', B' (o A', H').

In verità, perchè si possa affermare che A', B' son ambedue indispensabili per costituir la base, occorre dimostrare la loro indipendenza (lineare). All'uopo calcoliamo il discriminante simultaneo Δ della coppia A', B' e della coppia di curve s', q', trasformate delle s, q. È chiaro senz'altro che:

$$[A', s'] = [A', q'] = 1, \quad [B', s'] = 2. \tag{33}$$

Cerchiamo dunque i punti comuni a B', q'.

Si osserverà che, in forza della (32), è

$$[B', q'] + [H', q'] = 2[A', q']$$

e che (n. 50) $[H', q') = 2$; onde risulta $[B', q'] = 0$.

---

[1] La base minima delle V_3 di E fu determinata altrimenti da BORDIGA (« Annali di Matematica », (3), 27 (1918), pp. 1-40), il quale giunse appunto alla conclusione che ogni V_3 di E è multipla di A.

Pertanto

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Ciò prova che le A', B' sono indipendenti e che lo sono (razionalmente) le s', q'; sicchè A', B' risulta una base minima a varietà indipendenti, epperò intermediaria, delle V_3' di E'. Quanto alle s', q', si può soltanto affermare ch'esse forniscono una base per le curve di E', perchè son uguali i numeri base delle dimensioni 1 e 3; ma non si può assicurare ch'esse formino una base minima (intermediaria).

Rimane cioè dubbio se esistan su E' altre due curve indipendenti, che formino con A', B' un discriminante uguale (a meno del segno) ad 1.

Tale eventualità non può certo verificarsi in relazione a curve di E' situate fuori di H', perchè esse corrispondono a curve di $E - G$ e per queste sappiamo che la base minima è s, q. Occorre perciò esaminare le curve di H'. Per queste (come abbiamo dimostrato) la base minima è formata dalle ψ', g'. Perchè s', q' formin base minima su E' occorre e basta dunque che ψ', g' si possano esprimere come combinazioni lineari di s' q'.

Per dimostrarlo, si consideri in S_5 il piano π_x tangente a G in x; e, in M_5, la superficie π'_x di E', trasformata birazionale di π_x, colla sola eccezione inerente al punto x, il quale si muta nella curva eccezionale ψ', omologa di x. Questa ψ' giace su π'_x, perchè π_x è toccato da tutte le coniche di G per x.

Ne consegue che, se una retta s di π_x tende su π_x ad una retta $\bar{s}$ passante per x, la curva omologa s' varia in π'_x e al limite si spezza in $\bar{s}' + \psi'$, ove $\bar{s}'$ è la curva ben determinata di π'_x, che contiene l'omologo di ogni punto di $\bar{s}$ distinto da x. Le due $\bar{s}'$, ψ' s'incontran naturalmente nel punto x' di ψ' corrispondente alla conica di G tangente ad $\bar{s}$ in x.

E siccome $\bar{s}$ è una particolare corda di G, cioè una q, viene:

$$\psi' \equiv s' - q'. \tag{34}$$

Si consideri ora il piano π_g di una conica g di G e su questo due corde q_1, q_2 di G, cioè di g. Esse individuano, insieme a g, un fascio di coniche tracciato in E, al quale corrisponde su E' un fascio di curve razionali tracciate sulla superficie π'_g, omologa di π_g, incontrante semplicemente H' nella curva g', omologa di g. Poichè $q'_1 + q'_2$ e g' son curve totali di questo fascio, risulta:

$$g' = 2q'.$$

Si conclude, come si è preannunciato, che le s', q' forman la base minima delle curve di E'.

Osservazione. — L'equivalenza aritmetica delle ψ', $s'-q'$ (donde segue l'equivalenza razionale delle due curve (¹)) può anche controllarsi col calcolo diretto dei numeri delle intersezioni di tali curve colle A', B'. Si ha, in primo luogo, $[\psi', A'] = 0$. Cerchiamo le intersezioni di ψ' con B'. Esse sono rappresentate in S_5 dal punto x di G, omologo di ψ', associato a ciascuno dei due iperpiani singolari X tangenti al cono Γ nei due S_3 generatori, che toccano in x la forma Q; sicchè $[\psi', B'] = 2$. Per le (33), insieme alla $[B', q'] = 0$, ne deriva:

$$[\psi', A'] = [s'-q', A'] = 0, \quad [\psi', B'] = [s'-q', B'] = 2,$$

che dimostrano l'equivalenza aritmetica delle ψ', $s'-q'$.

Controlliamo l'equivalenza aritmetica delle g', $2q'$. Le intersezioni di g' con A' sono rappresentate in S_5 da ciascun, x, dei punti ove A sega la conica g di G e dall'iperpiano singolare X tangente a G in g; sicchè $[g', A'] = 2$. Quanto alle intersezioni di g' con B', siccome gl'iperpiani tangenti a Q dei punti d'una conica g di G, inviluppano un cono quadrico, avente per vertice il piano polare di π_g rispetto a Q, e questi due piani non si tagliano, non v'è alcuno di quegli iperpiani, che contenga il piano di g'; epperò $[g', B'] = 0$. Ne deriva:

$$[g', A'] = [2q', A'] = 2, \quad [g', B'] = [2q', B'] = 0,$$

donde l'equivalenza aritmetica delle g', $2q'$.

In conclusione:

La base minima (e intermediaria) delle curve di E' consta delle curve s', q' e la base minima (e intermediaria) delle V_3' di E' consta delle varietà A', B'.

Non esistono in E' i divisori dello zero di dimensione 1 *o* 3.

64. Dobbiamo infine determinare la base delle superficie di E'. La base delle superficie di $E'-H'$ non è che la trasformata di quella delle superficie di $E-G$, ed è pertanto data dalle coppie di superficie π_x', π_g'.

Ma queste non bastano a formare la base su E', perchè il discriminante Δ della coppia π_x', π_g' con se stessa vale 0, in quanto:

$$[\pi_x', \pi_x'] = 1, \quad [\pi_x', \pi_g'] = [\pi_g', \pi_g'] = 0.$$

Tuttavia le π_x', π_g' non son dipendenti (²), in quanto i multipli $k\pi_x'$ di π_x'

(¹) Perchè non esiston divisori curvilinei dello zero, in quanto s', q' è una base intermediaria e minima.

(²) L'annullarsi di Δ implicherebbe necessariamente la dipendenza delle π'_x, π'_g, soltanto se il numero-base superficiale di E' fosse 2.

hanno il grado virtuale $k^2 > 0$, mentre i multipli di π'_g hanno il grado virtuale zero.

Siccome ogni superficie di E' s'esprime come combinazione lineare a coefficienti interi delle π_x', π_g', costituenti la base su $E' - H'$ e delle superficie G', Ψ' costituenti la base su H' (n. 59, Oss.), il numero base superficiale di E' varrà al più 4. Perchè sia 4, occorre e basta che sia $\neq 0$ il discriminante Δ della quaderna π_x', π_g', G', Ψ' con se stessa.

Calcoliamo dunque questo discriminante. Occorre all'uopo considerare le intersezioni a due a due delle 4 superficie. Si hanno subito le relazioni:

$$[\pi_x', G'] = 0, \quad [\pi_g', G'] = 1, \quad [\pi_x', \psi'] = 1, \quad [\pi_g', \psi'] = 0.$$

Poichè conosciamo già i numeri virtuali delle intersezioni delle π_x', π_g' fra loro, ci resta da determinare

$$[G', G'], \quad [\Psi', \Psi'], \quad [G', \Psi'].$$

I simboli (G', G'), (Ψ', Ψ'), (G', Ψ') sopra H' rappresentano curve, che abbiamo già determinato; ma qui i predetti simboli van considerati su E', ove essi denotano gruppi virtuali di un numero finito di punti.

Per trovare i numeri dei punti di questi gruppi virtuali, consideriamo in S_5 una conica g di G e due iperpiani I_1, I_2, passanti per g, tangenti (non singolari) a G in due punti distinti. Siano inoltre: A la sezione di E con un iperpiano generico; A_1, A_2 le intersezioni di I_1, I_2 con E; A', A_1', A_2' le trasformate delle A, A_1, A_2 su E'. Le A_1, A_2 sono varietà cubiche passanti doppiamente per g e contenenti il piano π_g. La loro intersezione (A_1, A_2) sopra E non è che l'intersezione (A_1, I_2) in S_5: e questa consta del piano π_g e d'una superficie quadrica D passante per g. Pertanto in S_5 vale l'equivalenza:

$$(A, A) \equiv (A_1, A_2) = \pi_g + D.$$

A $\pi_g + D$ corrisponde in $E' - H'$ l'intersezione delle A_1', A_2' fuori di H'. Designata con D' la superficie costituita dai trasformati dei punti di D situati fuori di G (e dai loro punti d'accumulazione), poichè A_1', A_2' s'incontrano in H' soltanto nella superficie G', omologa di g, avremo sopra E':

$$(A', A') = \pi_g' + D' + G', \tag{35}$$

donde:

$$[A', A', G'] = [\pi_g', G'] + [D', G'] + [G', G'].$$

Ora $[A', A', G'] = 0$, perchè la superficie del 3° ordine segata su E da un S_3 generico di S_5, ha per imagine in E' una superficie incontrante H' in 4 curve ψ', che non segan la generica G'. Quanto a $[\pi_g', G']$, abbiam già visto che vale 1; e $[D', G']$ vale pure 1, perchè la superficie D' taglia H' semplicemente secondo la conica g' corrispondente a g, e le g' sono unisecanti delle G'. Risulta dunque:

$$[G', G'] = -2.$$

E siccome una delle ∞^8 omografie che mutano in sè H', mutando le G' nelle Ψ', muta il gruppo virtuale (G', G') nel gruppo virtuale (Ψ', Ψ'), viene altresì:

$$[\Psi', \Psi'] = -2.$$

Infine dalla (35) segue:

$$[A', A', \Psi'] = [\pi_g', \Psi'] + [D', \Psi'] + [G', \Psi'].$$

E poichè, come si è detto, la superficie (A', A') taglia H' in 4 curve ψ'. e le π_g', D' tagliano ciascuna H' in una curva g', viene:

$$[A', A', \Psi'] = 4, \quad [\pi_g', \Psi'] = [D', \Psi'] = 0.$$

E quindi:

$$[G', \Psi'] = 4.$$

Il discriminante Δ vale così:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

In conclusione:

La base minima (e intermediaria) delle superficie di E' consta delle quattro superficie indipendenti π_x', π_g', G', Ψ'.

La varietà E' è priva di divisori superficiali dello zero.

65. L'applicazione d'una delle omografie di M_5 in sè, che mutano E' in F', conduce senz'altro alle conclusioni seguenti. Denotino:

σ' la curva imagine su F' delle ∞^1 coniche complete, ognuna delle quali è spezzata, come inviluppo, in un punto fisso ed in un punto variabile sopra una retta generica del piano;

χ' la curva imagine su F' delle ∞^1 coniche complete, ognuna delle quali è spezzata, come inviluppo, in una coppia di punti di un'involuzione data sopra una retta;

p'_g la superficie di F' imagine delle ∞^2 coniche complete, ognuna delle quali è spezzata, come inviluppo, in un punto fisso ed in un punto variabile sul piano;

p'_x la superficie di F' imagine delle ∞^2 coniche complete, ognuna delle quali è spezzata, come inviluppo, in una coppia di punti d'una retta data;

A' la V_3' di F' imagine delle ∞^3 coniche complete di 2ª specie, appartenenti ad un sistema *lineare* ∞^3 di coniche inviluppo;

B' una V_3' di F' equivalente a $2A' - H'$.

Allora:

La base minima (e intermediaria) delle curve di F', è formata dalle σ', χ'; quella delle superficie di F' dalle p'_g, p'_x, Ψ', G'; quella delle V_3' di F' dalle A', B' (o dalle A', H').

La varietà F' è priva di divisori dello zero di qualunque dimensione.

Le caratteristiche doppie e triple relative a coniche complete.

66 Riprendiamo infine (per trattarlo rapidamente con l'omissione di tutte le argomentazioni ormai familiari) il problema delle caratteristiche doppie e triple nella M_5 delle coniche complete.

Considereremo in primo luogo tali condizioni senza prescriver loro alcun particolare comportamento rispetto alle varietà di degenerazione E', F', H'; cosicchè si tratterà di studiare le V_3' di M_5 (relative a condizioni doppie), che segano E', F' secondo superficie ed H' secondo curve; e le superficie di M_5 (relative a condizioni triple), che segano E', F' secondo linee ed H' in gruppi di un numero finito di punti.

Cominciamo dalle V_3' ed osserviamo preliminarmente che le V_3' seganti (virtualmente) E', F' in una superficie ed H' secondo una curva, sono tutte comprese fra le V_3' che segano H' secondo una curva. Sicchè basterà considerare la totalità delle V_3' seganti H' lungo curve. Queste provengono da V_3 di S_5 che incontrano G in un numero finito di punti (nel qual caso la V_3' corrispondente sega H' secondo un numero finito di linee ψ') o da V_3 che incontrano G secondo una curva (nel qual caso la V_3' corrispondente incontra ∞^1 linee ψ' di H') o da V_3 passanti genericamente per G e ognuna delle quali è quindi tangente ad E lungo una curva di G determinata dalla stessa V_3 (nel qual caso la V_3' corrispondente incontra ancora ∞^1 curve ψ').

La base di tali V_3' non è dunque che la trasformata della base delle V_3 di S_5, che hanno gli accennati comportamenti rispetto a G.

Analoga conclusione si stabilisce allo stesso modo per le condizioni triple e si perviene così al teorema:

Le caratteristiche delle condizioni doppie e triple imposte alle coniche complete, qualora si escludan le condizioni soddisfatte da ∞^2 (almeno) o rispettivamente da ∞^1 (almeno) coniche complete degeneri di terza specie, sono le stesse di quelle già trovate (nn. 55, 56) per la totalità delle condizioni di ugual di-

mensione riferite alle coniche-luogo, qualora vi si comprendano le condizioni soddisfatte da ∞^2 (al più) o rispettivamente da ∞^1 (al più) coniche-luogo degeneri di seconda specie.

Naturalmente la condizione ξ del n. 56, dovrà, in relazione alle coniche complete, essere enunciata come la condizione perchè una conica completa giaccia nel sistema ∞^2 di coniche complete definito da una rete di coniche-luogo contenente una sola conica-luogo degenere di 2ª specie, e la condizione ζ dovrà esser definita come la condizione perchè una conica completa appartenga al sistema ∞^2 definito dalle coniche-luogo spezzate in coppie di rette per un punto.

67. Consideriamo infine le V_3' che hanno particolari comportamenti rispetto a E', F', H'. Escluse le condizioni soddisfatte soltanto da coniche complete degeneri (di prima, seconda o terza specie), possiamo limitarci alle V_3' che incontrano H' secondo superficie (includendo fra queste anche le V_3' che si comportano normalmente rispetto ad H').

Le V_3' incontranti H' secondo superficie si ottengono (a norma del procedimento generale dei nn. 37, 38) dalle V_3' che passano per le superficie G', Ψ' costituenti su H' la base minima (n. 59, Oss.).

Poichè ogni V_3' passante per una G' è (razionalmente) equivalente ad una combinazione lineare di una particolare V_3' passante per G' e di una V_3' generica di M_5 (e ciò in forza di un'argomentazione addotta nel n. 37), basterà ai nostri fini costruire una V_3' passante per G'.

Ora questa è data dalla imagine della V_3^3 di S_5 staccata su E da un iperpiano K passante pel piano π_g di una conica g di G. Invero, la V_3^3 passa (semplicemente per π_g e) doppiamente per g; e il cono quadrico tangente a V_3^3 nel punto variabile x di g è contenuto nel cono quadrico Γ, tangente in x ad E (è la sezione di questo). In particolare può assumersi, invece di K, l'iperpiano I rappresentante le coniche per un punto generico del piano. Allora la condizione perchè un punto di $S_5 - G$ giaccia in V_3^3 è uguale al prodotto $\delta\mu$. Tale è dunque la caratteristica, che otteniamo in M_5 corrispondentemente alle V_3' per G'.

Mediante una reciprocità piana, avente per imagine in M_5 una delle ∞^8 omografie, che scambiano E' ed F', lascian fissa H' e mutan tra loro le G', Ψ', dalla predetta V_3' s'ottiene una V_3' passante per una Ψ' e corrispondente al simbolo $\eta\nu$.

Sicchè *si ottengono in M_5 come caratteristiche delle condizioni doppie, incluse le condizioni soddisfatte da ∞^2 coniche complete di terza specie, le:*

$$(36) \qquad \mu^2, \quad \widehat{\mu\nu}, \quad \nu^2, \quad \delta\mu, \quad \eta\nu;$$

le prime tre provenendo dalle V_3' che hanno comportamento normale rispetto ad H'.

Quanto alle condizioni triple, si osserverà:

1) Che la base minima delle V_2' di M_5 non è che la trasformata della base delle superficie di $S_5 - G$, cioè (n. 56) la superficie (I', I', I') insieme alle superficie π_x', π_g'.

2) Che le V_2' incontranti H' secondo linee si riducono a V_2' passanti per una ψ' o per una g'.

3) Che le superficie corrispondenti ai simboli $\delta\mu^2$, $\eta\nu^2$ già passano rispettivamente per una ψ' e per una g'.

Ne deriva che *su M_5 le caratteristiche delle condizioni triple, incluse le condizioni soddisfatte da ∞^1 coniche complete di terza specie, sono*

$$\mu^3, \quad \xi, \quad \zeta, \quad \delta\mu^2, \quad \eta\nu^2. \tag{37}$$

Tralasciamo per brevità di constatare se e quali delle caratteristiche (36) e (37) sono tra loro indipendenti.

La ricerca non offre difficoltà concettuali, trattandosi di calcolare il valore del discriminante simultaneo Δ della quintupla delle V_3' e della quintupla della V_2' considerate in M_5; e, se questo si annulla, di calcolare il valore del discriminante formato con le quaderne di V_3' e di V_2' corrispondenti rispettivamente ai simboli μ^2, $\widehat{\mu\nu}$, ν^2, $\delta\mu$; μ^3, ξ, ζ, $\delta\mu^2$.

Osservazione. — Nel determinare le caratteristiche (36) e (37) si sono escluse le condizioni soddisfatte soltanto da coniche degeneri.

Per includere anche queste occorre usufruire delle basi, già determinate, delle varietà appartenenti ad E', F', H'. Non ci dilunghiamo in proposito.