Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane.

Memoria di B. SEGRE (a Roma)

Dedicato al Prof. L. J. Mordell in occasione del suo 75° compleanno

Sunto. - *Ved. il* Sommario *dato alla pagina seguente.*

Il presente lavoro, che sono lieto di dedicare al Prof. L. J. MORDELL in segno di ammirazione ed a ricordo dei fruttiferi amichevoli contatti quotidiani di vent'anni or sono, verte su argomenti apparentemente staccati, fra i quali viene ad istituire suggestivi legami. Esso apre così un indirizzo di ricerca per il quale fornisce mezzi idonei suggerendo tutto un complesso di problemi ulteriori.

La prima delle tre parti in cui questa Memoria si divide ha carattere introduttivo, ed arreca contributi algebrici allo studio delle estensioni finite dei campi. Per semplicità espositiva, ci si limita qui alle estensioni separabili; ma non sarebbe difficile di trasportare i relativi sviluppi con opportune modifiche ai casi esclusi.

La seconda parte tratta di rappresentazioni geometriche di dette estensioni e degli ampliamenti che queste inducono negli spazi lineari. Ciò conduce fra l'altro a «modelli» semplici per il gruppo di Galois di un campo su di un suo sottocampo, nonchè alla caratterizzazione proiettiva di certe fibrazioni di uno spazio pascaliano.

La terza parte s'impernia sul nuovo importante concetto dei cosiddetti sistemi grafici di sottospazi di uno spazio grafico, i quali includono le suaccennate fibrazioni come casi particolari. Lo studio di tali sistemi viene ivi approfondito seguendo una via costruttiva che porge ampie categorie di geometrie non desarguesiane, spiccatamente interessanti nei casi — esaminati da vicino — in cui queste risultano finite.

Il contenuto del lavoro è stato in parte esposto al *Simposio sulle geometrie finite,* svoltosi a Roma dall'8 al 12 ottobre 1963. Per altre indicazioni sul presente lavoro si potranno esaminare gli Atti di tale Simposio (ove apparirà un breve riassunto in inglese dal titolo *Galois spaces and non-Desarguesian geometries*) ed il seguente Sommario.

Parte prima

Sulle estensioni algebriche di un campo.

§ I. - Preliminari algebrici.

1. Fissato un qualsiasi campo γ, sia δ un campo ottenibile da γ mediante un' estensione propria finita commutativa, avente dunque grado $n = (\delta\,;\,\gamma) \geq 2$. In casi assai lati una siffatta estensione risulta semplice (cfr. ad es. van der Waerden [28], § 43, e B. Segre [11, 18], n. 72), e noi in seguito sempre ammetteremo per semplicità che ciò abbia luogo. In altri termini, δ sarà allora isomorfo al campo $\gamma(\theta)$ ottenuto da γ con l' aggiunzione simbolica (cfr. ad es. B. Segre [11, 18], n. 68) di un' indeterminata θ soggetta ad un' equazione algebrica di grado n:

$$f(\theta) = a_0\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0), \tag{1}$$

a coefficienti in γ ed ivi irriducibile. Supporremo inoltre che l'estensione in questione sia separabile, il che val quanto dire che il polinomio $f(\theta)$ abbia discriminante non nullo (cfr. p. es. VAN DER WAERDEN [28], § 41) e quindi — in un'opportuna estensione di γ — ammetta n radici distinte $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Le suddette ipotesi risultano ad esempio tutte automaticamente soddisfatte quando γ sia un sottocorpo proprio di un corpo δ finito.

Denoteremo in ogni caso con δ^* il campo di decomposizione della (1):

$$\delta^* = \gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n).$$

Allora $\delta \sim \gamma(\theta)$ potrà venire considerato quale un sottocampo di δ^*, bastando all'uopo identificare δ a $\gamma(\theta)$ e l'indeterminata θ ad una delle θ_i; ad esempio, per fissare le idee, assumeremo $\theta = \theta_1$. In particolare, il campo δ viene così addirittura a coincidere con δ^* se, e soltanto se, l'equazione (1) è normale in γ (cfr. ad es. VAN DER WAERDEN [28], p. 123), il che ha sempre luogo se $n = 2$ o se δ è finito.

2. Sia $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ una qualunque base di δ su γ, il che val quanto dire che le $u \in \delta$ sono tali che ogni elemento di δ possa esprimersi — in uno ed un sol modo — quale loro combinazione lineare a coefficienti in γ. Varranno dunque in particolare relazioni del tipo

$$u_i u_j = c^l{}_{ij} u_l \tag{2}$$

(qui ed in seguito gli indici od apici i, j, l assumono i valori $1, 2, \dots, n$ e si sottintende la somma rispetto a quelli fra essi che abbiano a trovarsi ripetuti in uno stesso monomio); nelle (2), le c denotano opportuni elementi di γ (costanti di struttura della base prescelta) legati da relazioni quadratiche, traducenti l'associatività dei prodotti fra le u, e dalle relazioni lineari

$$c^l{}_{ij} = c^l{}_{ji}, \tag{3}$$

che subito seguono dalla commutatività del prodotto in δ.

Introdotte due serie d'indeterminate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, consideriamo le n forme bilineari simmetriche

$$\psi^l(x|y) = c^l{}_{ij} x_i y_j; \tag{4}$$

avuto riguardo alle (3) si ha che, se γ ha caratteristica $\neq 2$, le (4) non sono altro che le forme bilineari polari rispetto alle forme quadratiche

$$\varphi^l(x) = \psi^l(x|x) = c^l{}_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

In ogni caso, porremo inoltre per abbreviare

$$\varphi^l{}_j(x) = c^l{}_{ij} x_i \tag{6}$$

e designeremo con $\Delta(x)$ la matrice delle (6) (ove l'indice inferiore denoti la riga ed il superiore la colonna) e con D il relativo determinante:

$$D = D(x) = \det\ \Delta(x) = \det\ \| \varphi^l{}_j(x) \| ; \tag{7}$$

è chiaro allora che lo jacobiano delle (5) vale $2^n D$.

3. Quando occorra, muteremo la base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in una qualsiasi altra base $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$, per la quale adotteremo notazioni analoghe a quelle del n. 2, munite di apici. Il passaggio si effettuerà mediante un'arbitraria sostituzione lineare

$$u_i = k_{ii'} u'_{i'} , \tag{8}$$

a coefficienti in γ, la cui matrice K abbia determinante non nullo:

$$\det\ K = \det\ \| k_{ii'} \| \neq 0. \tag{9}$$

In base alle (8), (2) risulta manifestamente

$$c^l{}_{ij}\, k_{ll'}\, u'_{l'} = c^l{}_{ij}\, u_l = u_i u_j = k_{ii'}\, k_{jj'}\, u'_{i'} u'_{j'} = c'^{l'}_{i'j'}\, k_{ii'}\, k_{jj'} u'_{l'} ,$$

eppertanto:

$$c^l{}_{ij}\, k_{ll'} = c'^{l'}_{i'j'}\, k_{ii'} k_{jj'} . \tag{10}$$

Se, accanto alle indeterminate x, introduciamo le x' ad esse legate dalla sostituzione lineare invertibile

$$x'_{i'} = k_{ii'}\, x_i , \tag{11}$$

dalle (10), avuto anche riguardo alle (6), si ricava

$$\varphi^l{}_j(x)\, k_{ll'} = \varphi'^{l'}_{j'}(x')\, k_{jj'} ,$$

ossia:

$$\Delta(x)\, K = K\ \Delta'(x'). \tag{12}$$

In virtù delle (7), (9), si ha quindi la relazione

$$D(x) = D'(x'). \tag{13}$$

Del pari, legando le y alle y' con la sostituzione lineare (11) e rammentando le (4), (5), dalla (10) si ottengono le:

$$\psi^l(x|y)k_{ll'} = \psi'^{l'}(x'|y'), \qquad \varphi^l(x)k_{ll'} = \varphi'^{l'}(x'),$$

le quali mostrano il carattere covariante dei sistemi di forme bilineari e quadratiche introdotte nel n. 2. Poichè, come tosto vedremo (n. 4), il determinante (7) non si annulla identicamente, ne consegue l'*indipendenza lineare* di tali forme. Inoltre, comunque si scelgano le x, *il rango della matrice* $\Delta(x)$ *risulta invariante* in forza della (12).

4. Presi ora tre elementi ξ, η, ζ di δ, esprimibili dunque nella forma

$$\xi = x_i u_i, \qquad \eta = y_j u_j, \qquad \zeta = z_l u_l,$$

in virtù delle (2), (4) la

$$\zeta = \xi\,\eta \tag{14}$$

si traduce nella

$$z_l u_l = \psi^l(x|y)u_l,$$

ed equivale quindi alle

$$z_l = \psi^l(x|y). \tag{15}$$

Poichè $\zeta = 0$ implica che sia $\xi = 0$ od $\eta = 0$, così *le forme bilineari* (4), *e quindi pure le forme quadratiche* (5), *si annullano simultaneamente su* γ *soltanto per valori tutti nulli di una delle loro serie di variabili.*

Avuto riguardo alle (6), (7), ne discende che:

La forma di grado n $D(x)$ *non ammette su* γ *zeri non banali.*

Rileviamo che, ove si effettui un cambiamento di base espresso come al n. 3 mediante le (8), l'elemento $\xi = x_i u_i$ di δ si scrive nella nuova base sotto la forma $\xi = x'_{i'} u'_{i'}$, le x' essendo fornite dalle (11). La (13) mostra dunque che, com'è noto e come verrà altrimenti chiarito in seguito (nn. 5, 13), $D(x)$ *dipende soltanto da* ξ (oltrecchè da γ, δ), risultando indipendente dalla scelta della base.

Osserviamo inoltre che, in forza delle (15), (4), (6), quando si fissi ξ, il legame fra η e ζ espresso dalla (14) si traduce con la *sostituzione lineare* fra le y e le z, di determinante $D(x)$, data da:

$$z_l = \varphi^l{}_j(x) y_j . \tag{16}$$

La *sostituzione lineare trasposta* di quest'ultima intercede invece fra le

$$\xi_{(j)} = \xi u_j \tag{17}$$

e le u, risultando in virtù delle (2), (6):

$$\xi_{(j)} = \varphi^l_j(x) u_l . \tag{18}$$

È chiaro che, per ogni scelta delle x in un'estensione di γ, affinchè si possa soddisfare alle (16) con valori tutti nulli delle z e non tutti nulli delle y occorre e basta che sia

$$D(x) = 0 . \tag{19}$$

Dunque *un elemento* $\xi = x_i u_i$ *soddisfa alla* (19) *se, e soltanto se, esiste un* $\eta = y_j u_j$ *avente le* y *non tutte nulle e tale che* $\xi\eta = 0$.

5. Mostreremo ora che:

Nell'estensione δ^* *di* γ (*di cui al n.* 1), *la forma* (7) *si spezza nel prodotto di* n *forme lineari fra loro linearmente indipendenti, risultando*

$$D(x) = N(\xi), \tag{20}$$

dove $N(\xi)$ *denota la norma di* $\xi = x_i u_i$ *rispetto a* γ [1].

In virtù della (13), è lecito — con le notazioni del n. 1 — riferirsi alla base $u_i = \theta^{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$; sicchè potremo porre

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \theta^{i-1}, \tag{21}$$

ove le x denotino arbitrari elementi di γ. Dette (come al n. 1) $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_n$ le radici della (1), i c o n i u g a t i di ξ nell'estensione da γ a δ^* sono $\xi_1 = \xi$,

---

[1] Questa proposizione trovasi già p. es. in VAN DER WAERDEN [28], § 44, dove però viene altrimenti stabilita, $D(x)$ essendo ivi introdotto in relazione alle (18) anzicchè alle (16). Un'ulteriore definizione possibile per $D(x)$ verrà fornita dalla (50) del n. 13.

$\xi_2, \ldots, \xi_n$, avendo posto

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{n} x_j \theta_j^{i-1}, \tag{22}$$

e - per definizione di norma - risulta

$$N(\xi) = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n = F(x), \tag{23}$$

dove $F(x)$ designa una forma di grado n nelle x a coefficienti in γ. Notiamo che le n forme lineari nelle x date dalle (22) sono linearmente indipendenti fra loro, in quanto il relativo determinante dei coefficienti — moltiplicato per a_0^{n-1} — ha per quadrato il discriminante della (1), che per ipotesi (n. 1) è diverso da zero.

Introduciamo per abbreviare l'elemento η di δ^* dato da:

$$\eta = \xi_2 \xi_3 \ldots \xi_n . \tag{24}$$

Dalle (22), (1) si ha allora tosto che η risulta una forma di grado $n-1$ nelle x, i cui coefficienti sono funzioni simmetriche nelle radici $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ della seguente equazione di grado $n-1$ in Θ:

$$\frac{f(\Theta) - f(\theta)}{\Theta - \theta} = 0;$$

questa ha manifestamente coefficiente direttore $a_0 \neq 0$, gli altri coefficienti essendo polinomi di grado $\leq n-1$ in θ a coefficienti in γ. Ne discende che η può venir scritto sotto la forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i \theta^{i-1}, \tag{25}$$

dove le y risultano forme di grado $n-1$ nelle x:

$$y_i = g_i(x), \tag{26}$$

a coefficienti in γ.

Rileviamo ora che, in forza delle (22), (23), si ha:

$$\xi\eta = F(x). \tag{27}$$

D'altro canto, in virtù dell'indipendenza lineare delle ξ_j, valori generici e quindi non tutti nulli delle x [in una qualsiasi estensione di $\delta = \gamma(\theta)$] che annullino la forma lineare $\xi = \xi_1$, data dalla (21), non annullano nessuna delle $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$; pertanto, in base alle (24), (25), in corrispondenza ad x siffatte si annullano il secondo membro della (27) ma non tutti i secondi membri delle (26). Avuto riguardo alla proposizione finale del n. 4, ne discende che la suddetta forma lineare $\xi = \xi_1$ divide $D(x)$. Parimente, ciascuna delle ξ_i, e quindi pure il prodotto (23) di queste, entra a fattore in $D(x)$. Poichè $F(x)$ e $D(x)$ sono forme nelle x a coefficienti in γ dello stesso grado n, si ha pertanto:

$$D(x) = cF(x), \tag{28}$$

con c elemento di γ.

Si vede poi subito che è $c = 1$, onde in virtù della (23) la (28) fornisce appunto l'uguaglianza (20) da stabilire, con l'applicare la stessa (28) per $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ (ossia $\xi = 1$). Invero, la (17) riducesi così alla $\xi_{(j)} = u_j$, onde le (18), (7) mostrano che con la suddetta specificazione delle x risulta: $D = 1$; del pari, in corrispondenza a tali valori delle x, la (23) chiaramente porge: $F(x) = N(1) = 1$.

§ II. - Trasformazione cremoniana involutoria inerente ad un'estensione algebrica.

6. Abbiamo visto nel n. 5 come, in relazione alla (1), si determinino (per $i = 1, 2, \dots, n$) le forme $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che figurano nelle (26). Ora vogliamo dimostrare che:

Ove si interpretino le x, y quali coordinate omogenee di due punti corrispondenti in un S_{n-1} proiettivo su γ, le (26) ivi rappresentano una trasformazione cremoniana involutoria.

In modo più preciso proveremo che:

Le suddette forme $g_i(x)$ sono legate alla $D(x)$ definita dalla (7) mediante le identità:

$$g_i(g(x)) = x_i \cdot (D(x))^{n-2} \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{29}$$

$$D(g(x)) = (D(x))^{n-1}. \tag{30}$$

Osserviamo all'uopo che $F(x)$ risulta un elemento di γ per ogni scelta delle x in γ, sicchè dalla (27) segue tosto la

$$N(\xi) \cdot N(\eta) = N(F(x)) = (F(x))^n.$$

Ricordata la (23), da qui si trae che è sicuramente

$$N(\eta) = (F(x))^{n-1} \tag{31}$$

se $F(x) = D(x) \neq 0$, ossia (n. 4) se le x non sono tutte nulle. Avuto riguardo alle (20), (23), (25), (26), ciò dimostra la validità della (30) per ogni scelta delle x in γ. Le precedenti argomentazioni continuano a sussistere se si pensano le x, y quali indeterminate; onde la (30) esprime l'identità delle due forme nelle x che ivi compaiono nei due membri, le quali hanno di fatto lo stesso grado $n(n-1)$.

La trasformazione (di cui al n. 5) trasformante ξ in η, espressa a norma delle (27), (23) dalla

$$\xi\eta = N(\xi), \tag{32}$$

muterà η in

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} z_i \theta^{i-1},$$

ove $z_i = g_i(y) = g_i(g(x))$, in guisa tale che

$$\eta\zeta = N(\eta). \tag{33}$$

Se si raffrontano le (32), (33), avendo presenti le (20), (23), (31), si vede che è:

$$\zeta = \xi \cdot (D(x))^{n-2};$$

e ciò dimostra le (29).

7. Completeremo i risultati del n. 6 provando che

Le varietà fondamentali della trasformazione birazionale testé considerata costituiscono il simplesso rappresentato (*a norma del n.* 5) *dalla* (19), *contato* $n-2$ *volte.*

Più precisamente, stabiliremo che:

Il determinante funzionale delle forme $g_i(x)$ (*di cui al n.* 5) *rispetto alle* x *è espresso dalla*

$$\frac{\partial(g)}{\partial(x)} = (-1)^{n-1}(n-1)\,D^{n-2}, \tag{34}$$

ove D *viene definito con la* (7), *ossia mediante la* (20).

Nell' S_{n-1} di cui al n. 6, cambiamo le coordinate operando sulle x_i la sostituzione lineare (invertibile: v. n. 5) che le muta nelle ξ_j date dalle (22).

Ove tale sostituzione lineare trasformi del pari le y_i nelle η_j, con ovvie notazioni risulta manifestamente:

$$\frac{\partial(\xi)}{\partial(x)} = \frac{\partial(\eta)}{\partial(y)} = 1 : \frac{\partial(y)}{\partial(\eta)} .$$

Poichè inoltre

$$\frac{\partial(y)}{\partial(x)} = \frac{\partial(y)}{\partial(\eta)} \frac{\partial(\eta)}{\partial(\xi)} \frac{\partial(\xi)}{\partial(x)} ,$$

in base alle (26) si ottiene che è:

$$\frac{\partial(g)}{\partial(x)} = \frac{\partial(\eta)}{\partial(\xi)} . \tag{35}$$

D'altro canto, con le attuali notazioni la (24) si scrive

$$\eta_1 = \xi_2 \, \xi_3 \dots \xi_n$$

e, più generalmente, sussistono le:

$$\eta_i = \xi_1 \, \xi_2 \dots \widehat{\xi_i} \dots \xi_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove il tetto sulla ξ_i sta per indicare che questo fattore va soppresso nel secondo membro; si ha dunque:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \dfrac{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}{\xi_i \, \xi_j} & \text{se } i \neq j . \end{cases}$$

Avuto riguardo alle (20), (23), ne consegue che è

$$\frac{\partial(\eta)}{\partial(\xi)} = (-1)^{n-1}(n-1)D^{n-2} ,$$

onde la (35) porge senz'altro l'identità (34) che dovevamo dimostrare.

§ III. - Struttura dell'algebra relativa ad un'estensione algebrica.

8. Dato un campo γ arbitrario, gli si applichi una qualsiasi estensione propria commutativa finita separabile, e quindi semplice (cfr. VAN DER

WAERDEN [28], p. 139), deducendone così un nuovo campo, δ, a cui potranno applicarsi le considerazioni del § I..

Scelta comunque una base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di δ su γ, resteranno corrispondentemente definite certe costanti di struttura $c^l_{ij} \in \gamma$ per cui valgono le (2), (3). Pensando ora le u come puri simboli soddisfacenti alle (2), si considerino le espressioni date dalla

$$(36) \qquad \xi = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$$

al variare delle x in un campo $\varkappa$ arbitrario contenente γ come sottocampo. Operando in modo ovvio per somma e moltiplicazione fra le (36), tenendo conto delle (2) (ed avuto riguardo alle (3) ed alle relazioni quadratiche fra le c, di cui al n. 2), si viene a definire un'algebra finita su $\varkappa$ [2], commutativa ed associativa, che denoteremo con $\mathfrak{A}$ e diremo relativa alla suddetta estensione di γ in δ. È subito visto che un qualunque cambiamento di base in δ non fa che mutare $\mathfrak{A}$ in un'algebra ad essa *isomorfa*.

Un elemento $\xi \in \mathfrak{A}$ che si ottenga dalla (36) dando alle x valori in γ determina un elemento di δ, che verrà denotato con (ξ), definito dalla (36) in corrispondenza agli stessi valori delle x, ma attribuendo ivi alle u il significato primitivo di elementi di δ. I suddetti elementi ξ costituiscono manifestamente una sottoalgebra di $\mathfrak{A}$, isomorfa a δ.

Si verifica subito che *l'algebra $\mathfrak{A}$ risulta dotata di modulo*, questo essendo precisamente l'elemento ξ della sottoalgebra suddetta tale che (ξ) sia l'unità di δ. Inoltre, avuto riguardo alla proposizione finale del n. 4, si ha che:

I nullifici (o divisori dello zero) di $\mathfrak{A}$ sono tutti e soli gli elementi $\xi \neq 0$ per cui sussiste la (19).

Ci proponiamo di approfondire lo studio di questi elementi in relazione alla struttura di $\mathfrak{A}$.

9. È chiaro che, qualunque sia $c \neq 0$ in $\varkappa$, $c\xi$ risulta un nullifico di $\mathfrak{A}$ se tale è ξ; si dirà di aver normato il nullifico, quando si sia scelta una determinazione per c. In vista del nostro scopo, potremo quindi utilmente introdurre uno spazio proiettivo S_{n-1} su $\varkappa$ ed associare all'elemento ξ di $\mathfrak{A}$ (e ad ogni $c\xi$) il punto di S_{n-1} — che chiameremo il punto rappresentativo di ξ od anche brevemente il *punto* ξ — avente le coordinate proiettive omogenee $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

---

[2] Per le prime nozioni sulle algebre occorrenti qui ed in seguito, cfr. ad esempio SCORZA [8], Parte 2ª, cap. II, od anche B. SEGRE [12], cap. IV, § 3; ved. altresì WEDDERBURN [29], pp. 147 e seg.ti, ove però ci si limita al caso in cui il campo base sia di caratteristica zero.

In tale S_{n-1} conviene anzitutto considerare le n reciprocità involutorie, Ψ^l, rappresentate uguagliando a zero le (4): se la caratteristica di $\varkappa$ (coincidente con quella di γ) è $\neq 2$, esse non sono altro (n. 2) che le polarità rispetto alle quadriche, Φ^l, definite uguagliando a zero le (5). Poichè anche col nuovo significato dei simboli la (14) equivale (come al n. 4) alle (15), così:

Due punti ξ, η di S_{n-1} soddisfanno alla $\xi\eta = 0$ se, e soltanto se, essi sono coniugati rispetto a ciascuna delle n reciprocità involutorie Ψ^l, e cioé rispetto ad ognuna delle reciprocità del sistema lineare Ψ da queste determinato, il quale (*n.* 3) *ha sempre esattamente la dimensione* $n-1$.

Da qui in particolare, per $\xi = \eta$, si ricava che:

Un eventuale elemento $\xi \neq 0$ che sia autonullifico [*e cioè pseudonullo* (*o nilpotente*) *di esponente* 2] *è tale che il punto rappresentativo di ξ risulta autoconiugato rispetto a ciascuna delle reciprocità di Ψ; in altri termini, in caso di caratteristica $\neq 2$, un punto ξ siffatto dev' essere punto base del sistema lineare ∞^{n-1} di quadriche definito da Ψ* (*ossia determinato dalle* Φ^l).

Dimostreremo poi (n. 12) l'inesistenza di tali punti ξ, onde seguirà che:

Qualunque sia $\varkappa$, l' algebra $\mathfrak{A}$ risulta del tutto priva di elementi autonullifici.

10. Nella parte rimanente del presente § III, per semplificare l'esposizione, supporremo che il campo $\varkappa$ contenga (non soltanto γ, ma) addirittura il campo δ^* (di cui al n. 1). Allora, in virtù dei nn. 5, 8, 9, si ha senz'altro che:

Il luogo dei punti ξ rappresentativi di nullifici dell' algebra $\mathfrak{A}$ è un n-simplesso di S_{n-1}.

Denoteremo con $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ i vertici di questo simplesso, ed anche i corrispondenti nullifici comunque normati, e con $o_1, o_2, \dots, o_n$ le facce $(n-2)$-dimensionali di tale simplesso ad essi rispettivamente opposte; sia gli n punti ω che gli n spazi o risultano intrinsecamente riferiti in modo biunivoco alle radici $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ della (1).

Ad ognuno dei punti ξ rappresentativi di nullifici resta intanto associato un intero k soddisfacente alle $1 \leq k \leq n-1$, che chiameremo l'*indice* del punto ξ (ed anche del corrispondente nullifico ξ o $c\xi$), il quale esprime il numero degli iperpiani $o_1, o_2, \dots, o_n$ di S_{n-1} che lo contengono, ossia la molteplicità dell' ipersuperficie (19) nel punto ξ; i k suddetti iperpiani si segano allora secondo un S_{n-k-1}, il quale è la faccia di dimensione minima dell'n-simplesso che contiene ξ. Affinchè ξ abbia l'indice

$$k = \mathrm{ind}\ \xi,$$

è manifestamente necessario e sufficiente che in ξ si annullino tutte le derivate parziali di $D(x)$ rispetto alle x d'ordine $k-1$, ma non tutte quelle d'ordine k.

In base alla (7), si ha di conseguenza:

$$\text{ind}\ \xi \geqq n - \text{rang}\ \Delta(x), \tag{37}$$

ove rang $\Delta(x)$ dipende soltanto da ξ (n 3), e non dalla scelta della base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di δ su γ. Vedremo in seguito (n. 11) che nella limitazione (37) va sempre scelto il segno di uguaglianza; e ciò fornisce una nuova definizione possibile dell'indice. Questa permette di estendere la nozione di indice di $\xi \in \mathfrak{A}$ anche nell'ipotesi che sia $\xi = 0$ o che ξ non sia nullifico in $\mathfrak{A}$; nei due casi, rispettivamente, attribuiremo così per definizione a quell'indice il valore n od il valore 0.

11. Sia ξ un qualsiasi nullifico *d'indice* 1 dell'algebra $\mathfrak{A}$, tale cioè (n. 10) che il relativo punto ξ giaccia su uno ed uno solo degli iperpiani o, che denoteremo con o_i. In virtù della (37), in corrispondenza ad un siffatto ξ (le cui coordinate annullano il determinante D di Δ) non può che aversi

$$\text{rang}\ \Delta(x) = n - 1\ . \tag{38}$$

Avuto riguardo al n. 4 ne consegue che, posto

$$\eta = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n\ , \tag{39}$$

la condizione

$$\xi\eta = 0 \tag{40}$$

si traduce in un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle y fra le quali ve ne sono esattamente n 1 di indipendenti; perciò, in forza della (38), la (40) determina univocamente i mutui rapporti delle y: e sia η_i il corrispondente punto (39).

Definiti poi i punti $\xi_{(j)}$ con la (17), in forza della $\xi\eta_i = 0$ risulta altresì manifestamente

$$\xi_{(j)}\eta_i = 0 \qquad (\text{per } j = 1, 2, \ldots, n);$$

pertanto, comunque si scelgano le t in $\varkappa$, sussiste la:

$$(\sum_{j=1}^{n} t_j\, \xi_{(j)})\eta_i = 0. \tag{41}$$

In virtù delle (18), (38), esattamente $n-1$ fra i punti $\xi_{(j)}$ risultano linearmente indipendenti; in altri termini, al variare delle t in $\varkappa$ il punto dato dall'espressione entro parentesi in (41) descrive un iperpiano di S_{n-1}. Questo iperpiano non può che *coincidere con* o_i, in quanto esso contiene il punto ξ (ottenibile da quell'espressione dando alle t valori tali che $\Sigma t_j u_j$ sia il modulo di $\mathfrak{A}$) e, in forza della stessa (41), è luogo di nullifici di $\mathfrak{A}$. Si ha dunque in conclusione

$$\xi\eta_i = 0, \tag{42}$$

comunque si scelga ξ in o_i; sicchè, col procedimento inizialmente seguito, *si giunge sempre allo stesso punto* η_i in corrispondenza ad ogni punto ξ di o_i che abbia indice 1 (e cioè non giaccia su altri iperpiani o, distinti da o_i).

Il suddetto procedimento fornisce dunque complessivamente n punti η:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n. \tag{43}$$

Questi sono fra loro distinti. Invero, qualora η_i coincidesse con η_j essendo $j \neq i$, varrebbe la (42) per ogni scelta di ξ tanto in o_i che in o_j, e quindi pure per ogni scelta di ξ in S_{n-1}; ma ciò è assurdo, avendosi $\xi\eta_i = \eta_i$ in corrispondenza al modulo ξ di $\mathfrak{A}$ (n. 8). In modo analogo si prova l'*indipendenza lineare* dei punti (43).

Scelta ora una qualsiasi combinazione $i_1, i_2, \ldots, i_k$ di classe k dei numeri $1, 2, \ldots, n$ (con $1 \leq k \leq n-1$), consideriamo gli spazi

$$S'_{n-k-1} = o_{i_1} \cap o_{i_2} \cap \ldots \cap o_{i_k}, \qquad S''_{k-1} = \eta_{i_1} \cup \eta_{i_2} \cup \ldots \cup \eta_{i_k}.$$

In virtù di ciò che precede, *sussiste la* (40) *comunque si scelgano* ξ *in* S' ed η in S''. In particolare, per $k = n-1$ S' riducesi ad uno qualunque dei punti ω_i, mentre S'' è un iperpiano di S_{n-1}; questo, essendo – per quanto sopra – luogo di nullifici di $\mathfrak{A}$, deve quindi *coincidere con uno degli* o, il che val quanto dire che i punti (43) coincidono, a prescindere al più dall'ordine, coi punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; e si vedrà poi (n. 12) che v'è coincidenza anche nell'ordine.

Poichè il simplesso determinato dai punti (43) coincide col simplesso dei nullifici, ne discende che — nell'argomentazione precedente — lo spazio S'' coincide con una faccia $(k-1)$-dimensionale di quest'ultimo simplesso, la quale è d'altronde arbitraria, in quanto si può arbitrariamente disporre delle i. Rileviamo inoltre che, se il luogo dei punti ξ che soddisfano alla (40) per ogni scelta di η in S'' fosse uno spazio S^* *di dimensione* $\geq n-k$, detta $j_1, j_2, \dots, j_{n-k}$ la combinazione complementare alla $i_1, i_2, \dots, i_k$ risulterebbe non vuoto lo spazio

$$S^* \cap o_{j_1} \cap o_{j_2} \cap \dots \cap o_{j_{n-k}}.$$

Un punto ξ di quest'ultimo soddisferebbe alla (40) per ogni scelta di η in

$$(\eta_{i_1} \cup \eta_{i_2} \cup \dots \cup \eta_{i_k}) \cup (\eta_{j_1} \cup \eta_{j_2} \cup \dots \cup \eta_{j_{n-k}}) = S_{n-1},$$

il che invece non ha luogo di certo per il modulo di $\mathfrak{A}$. Pertanto S^*, dovendo per quanto sopra contenere S'_{n-k-1}. non può che avere dimensione n-k-1 e coincide dunque con questo spazio. Ne consegue che:

Una qualunque faccia del simplesso dei nullifici ne definisce un'altra di dimensione duale, luogo dei punti ξ che soddisfano alla (40) *per ogni scelta di η sulla prima faccia. E ciò esige che nella* (37) *abbia sempre a valere il segno di uguaglianza, ottenendosi lo stesso luogo quando si fissi η in un qualsiasi punto della prima faccia d'indice uguale a quello del punto generico di questa; tale indice uguaglia dunque la dimensione della seconda faccia aumentata di* 1.

12. Mostreremo ora che:

Due facce del tipo considerato nell'ultimo enunciato sono necessariamente due facce del simplesso dei nullifici fra loro opposte.

Ciò equivale a dimostrare che (con le notazioni del n. 11) risulta

$$\eta_i = \omega_i \qquad (\text{per } i = 1, 2, \dots, n), \tag{44}$$

e viene manifestamente ad implicare la proposizione finale del n. 9.

Incominciamo con l'osservare che, in base al n. 11, fra i punti η ed ω intercedono coincidenze esprimibili sotto la forma

$$\eta_i = \omega_{r_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{45}$$

dove $r_1, r_2, \dots, r_n$ designa una permutazione dei numeri $1, 2, \dots, n$; e che i nullifici a quelli relativi soddisfano alle relazioni $\eta_i \omega_j = 0$, ossia alle:

$$\omega_{r_i}\omega_j = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq i). \tag{46}$$

Avuto riguardo alla commutatività di $\mathfrak{A}$, e detto m (con $0 \leq m \leq n$) il numero dei valori di i per cui risulta $r_i \neq i$, si vede subito che le relazioni (46) distinte sono in numero di

$$[n(n-1)+m]/2 \tag{47}$$

(talchè m dev' essere pari).

In virtù del n. 9, il sistema lineare Ψ ivi considerato è contenuto in quello che si ottiene dal sistema lineare Ξ, dato da tutte le relazioni bilineari simmetriche fra punti di S_{n-1}, esigendo il coniugio rispetto ad esse delle varie coppie ω_{r_i}, ω_j figuranti nelle (46). Così si viene ad imporre a Ξ - che ha la dimensione $(n-1)(n+2)/2$ - un numero di condizioni lineari dato da (47). Siccome tali condizioni risultano fra loro indipendenti, il che subito si vede assumendo $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ quale simplesso di riferimento delle coordinate, e poichè (n. 9) Ψ ha la dimensione $n-1$, così dev' essere

$$(n-1)(n+2)/2-[n(n-1)+m]/2 \geq n-1,$$

ossia $m \leq 0$. Si ha pertanto $m=0$, e quindi $r_i = i$ per $i=1, 2, \ldots, n$, onde le (45) riduconsi alle uguaglianze (44) da stabilire.

13. Approfondiremo ulteriormente i risultati dianzi ottenuti, scegliendo in δ (come al n. 5) la base

$$u_i = \theta^{i-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Nel seguito dunque, in conformità col n. 8, θ dev' essere considerato come un puro simbolo, soggetto alla (1), e le costanti di struttura c^l_{ij} risultano funzioni razionali di grado zero delle a, facilmente calcolabili; ad esempio, si vede subito che per $i+j \leq n+1$ risulta:

$$c^l_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad l \neq i+j-1, \\ 1 & \text{se} \quad l = i+j-1. \end{cases}$$

Attualmente, l' algebra $\mathfrak{A}$ viene pertanto ad essere costituita dai polinomi su $\varkappa$ nella θ:

$$\xi = X(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \theta^{i-1}, \tag{48}$$

fra i quali si operi *modulo* $f(\theta)$ con le ordinarie regole dell' algebra commutativa. Affinchè $\xi \neq 0$ sia un nullifico di $\mathfrak{A}$, occorre e basta che $\mathfrak{A}$ contenga un $\eta \neq 0$ tale che $\xi\eta = 0$, e cioè esista un polinomio non nullo

$$\eta = Y(\theta) = \sum_{i=1}^{n} y_i \theta^{i-1}$$

tale che

$$X(\theta) \cdot Y(\theta) \equiv 0 \qquad (\text{mod } f(\theta)). \tag{49}$$

È subito visto che, all'uopo, è necessario e sufficiente che sussista l'uguaglianza

$$R(x) = 0,$$

ove $R(x)$ denoti il risultante di $f(\theta)$ ed $X(\theta)$ (presi in quest'ordine). Poichè tale risultante è una forma a coefficienti interi *di grado n nelle x* (e di grado $n-1$ nelle a), così — avuto anche riguardo ai nn. 5, 8 — si ha che dev'essere:

$$R(x) = cD(x),$$

con c indipendente dalle x. Posto in quest'uguaglianza $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, un facile calcolo mostra che risulta $D = x_1^n$, $R = a_0^{n-1} x_1^n$, eppertanto $c = a_0^{n-1}$. *Sussiste quindi l'identità:*

$$R(x) = a_0^{n-1} D(x), \tag{50}$$

la quale, in base alla (20), porge una *nuova definizione possibile per la norma di* ξ.

14. Dal n. 13 si ha che, affinchè l'elemento ξ dato dalla (48) risulti nullifico in $\mathfrak{A}$, occorre e basta che il polinomio $X(\theta)$ (di grado $n-1$ nella θ) abbia a comune un certo numero k di radici con $f(\theta)$, ove $1 \leq k \leq n-1$. Dette $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{i_k}$ tali radici, e designate con $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \ldots, \theta_{j_{n-k}}$ le rimanenti $n-k$ radici di $f(\theta)$, per la validità della $\xi\eta = 0$, e cioè della (49), occorre e basta che $Y(\theta)$ sia divisibile per $(\theta - \theta_{j_1})(\theta - \theta_{j_2}) \ldots (\theta - \theta_{j_{n-k}})$; sicchè $\eta = Y(\theta)$ viene in corrispondenza a dipendere linearmente ed omogeneamente da k parametri. Avuto riguardo ai nn. 10, 11, ciò implica che k uguagli l'indice di ξ, sicchè:

L'indice k dell'elemento (48) *di $\mathfrak{A}$ coincide col numero delle radici comuni ad $X(\theta)$ e $f(\theta)$, $n-k$ venendo allora ad identificarsi col rango della matrice $\Delta(x)$ (quadrata d'ordine n) definita al n.* 2.

15. In virtù dei nn. 9-11, l'algebra $\mathfrak{A}$ possiede esattamente *n nullifici d'indice $n-1$*, ciascuno definito soltanto a meno di un fattore scalare (elemento non nullo di $\varkappa$), tali nullifici non essendo altro che quelli rappresentati al n. 10 mediante i punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (vertici del simplesso dei nullifici). Scelta la base in $\mathfrak{E}$ come indicato nel n. 13, e tenuto conto del n. 14

e del fatto che (n. 1) $f(\theta)$ ha discriminante non nullo, si possono manifestamente normare quei nullifici in guisa che risulti:

$$\omega_i = \frac{f(\theta)}{(\theta - \theta_i)\, f'(\theta_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{51}$$

I nullifici (51) costituiscono una base per l'algebra $\mathfrak{A}$, in virtù dell'indipendenza lineare dei loro punti rappresentativi. Avuto riguardo al n. 13, si vede poi subito che valgono le

$$\omega_i \omega_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j). \tag{52}$$

Risulta inoltre

$$\omega_i^2 - \omega_i = \frac{\omega_i}{f'(\theta_i)} P_i(\theta), \tag{53}$$

dove $P_i(\theta)$ designa un polinomio di grado $n-1$ in θ espresso da:

$$P_i(\theta) = f(\theta)/(\theta - \theta_i) - f'(\theta_i),$$

il quale chiaramente si annulla per $\theta = \theta_i$. Tenuto conto della (51), il secondo membro della (53) risulta dunque un polinomio (di grado $2n-2$) in θ che si annulla per $\theta = \theta_i$, oltrecchè — al pari del secondo membro della (51) — per ogni $\theta = \theta_j$ con $j \neq i$. Esso è dunque divisibile per $f(\theta)$; sicchè, in forza del n. 13, la (53) mostra che in $\mathfrak{A}$ sussistono le uguaglianze

$$\omega_i^2 = \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{54}$$

Le (52), (54) vengono in definitiva ad esprimere che:

L'algebra $\mathfrak{A}$ su di un campo $\varkappa \supseteq \delta^*$, relativa ad un'estensione commutativa separabile d'ordine n di un campo γ, risulta sempre somma diretta di n algebre del 1° ordine, ciascuna isomorfa al campo $\varkappa$.

16. L'ultimo enunciato determina compiutamente la struttura di $\mathfrak{A}$, nelle ipotesi ivi ammesse. Così ad esempio, poggiando sulle (52), (54) e ricordando la convenzione fatta alla fine del n. 10 ed il n. 14, si ottiene subito che:

Gli elementi d'indice k di $\mathfrak{A}$ $(0 \leq k \leq n)$ sono tutte e sole le combinazioni lineari di $n-k$ degli ω_i, a coefficienti in $\varkappa$ tutti diversi da zero, i nullifici essendo quegli elementi di $\mathfrak{A}$ il cui indice k soddisfa alle $1 \leq k \leq n-1$. Gli idempotenti di $\mathfrak{A}$ non sono altro che le somme di *taluno fra gli ω_i; in particolare, mediante la base formata dalle ω, il modulo di $\mathfrak{A}$ viene espresso precisamente da $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$.*

Un altro corollario immediato, il quale potrebbe pure venire stabilito in modo diretto poggiando sui nn. 10, 11, è il seguente:

Nell'algebra $\mathfrak{A}$, l'indice di un qualsiasi prodotto risulta maggiore od uguale all'indice di ciascuno dei fattori.

§ IV. - Gruppo di Galois di un'estensione algebrica nel caso dei campi finiti.

17. Sia δ un campo ottenuto da un campo γ mediante un'estensione propria finita separabile, per la quale conserviamo le notazioni del n. 1. Supporremo inoltre che tale estensione — ossia la corrispondente equazione (1) — risulti normale, e cioè (n. 1) che δ coincida col campo δ^* di decomposizione della (1).

Rammentiamo che, sotto le condizioni testè ammesse, il gruppo Γ degli automorfismi di δ che lasciano fissi i singoli elementi di γ viene chiamato il *gruppo di Galois di δ rispetto a γ*. Tale gruppo risulta d'ordine n (uguale all'ordine dell'estensione), ed induce fra le n radici della (1) un gruppo transitivo di sostituzioni a quello isomorfo, detto il *gruppo dell'equazione* (1) od anche *del polinomio* $f(\theta)$ sopra γ [3].

Vedremo poi (n. 26) come del gruppo suddetto possano venir date varie altre definizioni, di carattere geometrico, una delle quali fa soltanto intervenire la forma $D(x)$ di cui ai nn. 2, 5, 13.

18. Le condizioni specificate nel n. 17 per γ e δ risultano tutte automaticamente soddisfatte, nell'ipotesi che γ *sia un sottocampo proprio di un campo δ finito*. In tale ipotesi, designato l'ordine di γ con

$$q = p^h \qquad (p \text{ numero primo, caratteristica di } \gamma),$$

l'estensione d'ordine n di γ fornisce un campo, δ, d'ordine

$$q_1 = q^n = p^{hn}.$$

È ben noto (cfr. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 78) che γ e δ ammettono in tutto rispettivamente h ed hn automorfismi, uno qualsiasi

(3) Cfr. ad esempio VAN DER WAERDEN [28], § 52.

di questi trasformando ogni elemento ξ del campo in ξ^{p^i}, per un dato i (rispettivamente definito soltanto *modulo h* o *modulo hn*). Denotata quest'ultima trasformazione con σ_i o con τ_i secondochè essa opera su γ o su δ, è chiaro allora che τ_i muta in sé il campo γ subordinando in esso l'automorfismo σ_i; e si rammenti inoltre che risulta:

$$\sigma_i = \sigma_j \quad \text{se e soltanto se} \quad i \equiv j \quad (\text{mod } h),$$

$$\tau_i = \tau_j \quad \text{» » » »} \quad i \equiv j \quad (\text{mod } hn).$$

Ne discende che, affinchè τ_i appartenga al *gruppo di Galois di* δ *rispetto a* γ, occorre e basta che l'automorfismo σ_i da esso subordinato in γ coincida con l'automorfismo identico, σ_0, e cioè che si abbia

$$i \equiv 0 \qquad (\text{mod } h).$$

Pertanto, le n trasformazioni di detto gruppo sono precisamente la

$$\rho = \sigma_h: \quad \xi \to \xi^{p^h} = \xi^q$$

e le successive potenze di questa:

$$\sigma_{2h} = \rho^2, \ \sigma_{3h} = \rho^3, \ \dots, \ \sigma_{nh} = \rho^n,$$

l'ultima delle quali, trasformando l'elemento $\xi \in \delta$ in $\xi^{p^{hn}} = \xi^{q_1} = \xi$, non è che l'identità.

Ne discende il fatto ben noto (cfr. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 75) che, fissata comunque una radice $\theta = \theta_1$ (in δ) dell'equazione irriducibile (1), le n radici

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \tag{55}$$

di questa possono venire ordinate in guisa che risulti

$$\theta_i = \theta^{q^{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ed è subito visto che ciascuna delle suddette trasformazioni opera una sostituzione circolare sulle (55), la $\rho^{i'}$ mutando precisamente θ_i in $\theta_{i+i'}$ [ove $\theta_j = \theta_{j'}$ se, e soltanto se, $j \equiv j'$ (mod n)].

In conclusione, abbiamo così dimostrato che:

Tanto il gruppo di Galois di un campo finito rispetto ad un suo sottocampo, quanto il gruppo di un polinomio irriducibile sopra un campo finito, risultano sempre ciclici [4].

§ V. - Elementi di un'estensione algebrica aventi norma assegnata, con particolare riguardo al caso dei campi finiti.

19. Sia δ un campo dedotto da un campo γ mediante un'estensione algebrica, per la quale conserviamo le ipotesi e le notazioni del n. 1. Designeremo inoltre con γ', δ' i gruppi moltiplicativi (abeliani) di γ, δ, formati cioè dagli elementi non nulli di tali due campi, composti mediante prodotto in questi ultimi.

Ad ogni elemento ξ di δ che sia non nullo, e cioè appartenga a δ', resta associata la norma $N(\xi)$, data anche (n. 5) da $D(x)$; questa è un elemento c di γ, non nullo (n. 4) e quindi appartenente a γ'. Poichè — com'è ben noto — la norma del prodotto uguaglia il prodotto delle norme, così l'applicazione

$$\xi \rightarrow D(x) \tag{56}$$

definisce un omomorfismo di δ' in γ'. Denoteremo con δ'_1 e con γ'_1 il nucleo di tale omomorfismo e l'imagine di δ' secondo esso, i quali saranno rispettivamente sottogruppi di δ' e γ'. È chiaro che *il gruppo δ'_1 consiste degli elementi ξ di δ di norma unitaria, per cui cioè risulta*

$$D(x) = 1\,; \tag{57}$$

e designeremo con ν il numero cardinale dell'insieme formato da tali elementi, ossia il numero (positivo, finito od infinito) delle soluzioni della (57) in γ.

Da quanto sopra segue senz'altro che:

L'equazione algebrica su γ di grado n nelle n variabili x:

$$D(x) = c\,, \tag{58}$$

con c elemento non nullo di γ, ammette o non ammette soluzioni in γ secondochè c è o non è elemento di γ'_1; essa dunque possiede sempre soluzioni se, e soltanto se, γ'_1 coincide con γ', ossia se l'applicazione (56)

---

[4] Per il caso in cui γ sia un campo fondamentale (e cioè se $h=1$, $p=q$), cfr. VAN DER WAERDEN [28], p. 165.

risulta un omomorfismo su ([5]). *In ogni caso, per qualsiasi scelta di* c *in* γ'_1 *la* (58) *ha sempre lo stesso numero* ν *di soluzioni della* (57), *gli elementi* ξ *di* δ *inerenti a tali soluzioni costituendo un sistema laterale di* δ'_1 *in* δ'.

20. Esaminiamo da ultimo più da vicino l'eventualità che i campi γ e δ siano ambedue finiti, conservando per essi le notazioni del n. 18. I coniugati ξ_i di un qualsiasi elemento ξ di δ non sono allora che i trasformati di ξ mediante le varie trasformazioni ρ^i del gruppo di Galois di γ rispetto a δ, e valgono dunque

$$\xi_i = \xi^{q^{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si ha pertanto:

$$N(\xi) = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = \xi^\nu ,$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$\nu = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} . \qquad (59)$$

Ne consegue che, attualmente, l'equazione (58) equivale alla

$$\xi^\nu = c, \qquad (60)$$

con c elemento non nullo di γ, che perciò soddisfa notoriamente alla

$$c^{q-1} = 1 .$$

In base a classiche proprietà delle radici ν^{me} in un campo finito (per le quali cfr. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 79), la (60) viene ad ammettere in δ esattamente ν radici ξ distinte, sicchè:

Con le notazioni dell'enunciato del n. 19, *quando* δ *è finito risulta sempre* $\gamma'_1 = \gamma'$ *ed il numero* ν *delle soluzioni* x *in* γ *della* (58), *per ogni elemento* c *non nullo di* γ, *è quello dato dalla* (59) ([6]).

([5]) Quest'eventualità ha luogo soltanto in casi speciali (come quello considerato al successivo n. 20), che sarebbe interessante di caratterizzare tutti altrimenti; ad esempio, essa non si presenta manifestamente nell'ipotesi che γ sia il campo reale e δ sia il campo complesso.

([6]) Per una dimostrazione a carattere geometrico di quest'ultimo risultato, cfr. B. SEGRE [19], n. 35.

PARTE SECONDA

Rappresentazioni geometriche relative ad estensioni algebriche e fibrazioni che se ne deducono.

§ VI. - Fibrazioni di spazi grafici.

21. Consideriamo un qualsiasi spazio grafico irriducibile (nel senso di B. SEGRE [11, 18], nn. 105, 106), di dimensione $s-1$, che denotiamo con S_{s-1}. Un sistema Σ di sottospazi S_{n-1} di S_{s-1} (ove $1 < n < s$) si dirà costituire una *fibrazione* (globale) di S_{s-1} — mediante spazi S_{n-1} — quando per ogni punto di S_{s-1} passi uno ed un solo S_{n-1} di Σ (7).

Fibrazioni siffatte sono state considerate in precedenza quasi unicamente nel caso in cui S_{s-1} sia uno spazio proiettivo (lineare) sul campo reale; la loro determinazione, equivale allora a quella di fibrazioni di un' s-sfera mediante n-sfere equatoriali. Per l' esistenza di *fibrazioni differenziabili* di questo tipo è necessario (cfr., anche per altre citazioni, l'Introduzione ed il n. 1 di B. SEGRE [14]) che:

1) n divida s,

2) n sia una potenza del 2,

e si conosce altresì un certo numero di esempi al riguardo; non si sa però se le 1), 2) siano o meno sufficienti, la questione di un'esauriente determinazione di quelle fibrazioni (legata allo studio delle algebre primitive reali) essendo tuttora aperta.

Un altro caso importante, sul quale avremo in seguito occasione di soffermarci a lungo, è quello — precedentemente studiato da J. ANDRÉ [1], § 8 — in cui ad S_{s-1} s'imponga la sola restrizione che risulti $s = 2n$.

Nel numero successivo proveremo che la 1) è anche necessaria nel caso degli spazi grafici finiti; risulterà poi (n. 26) che — a differenza di quanto accade sul campo reale — per gli spazi di Galois essa è altresì sufficiente.

22. Stabiliremo qui il seguente teorema.

Affinchè uno spazio grafico finito irriducibile S_{s-1} ammetta una fibrazione Σ mediante S_{n-1}, è necessario che n divida s. Posto allora

$$s = nr, \tag{61}$$

(7) Più in generale, possono introdursi fibrazioni parziali (o locali), di cui qui però non faremo uso; su ciò, cfr. B. SEGRE [14].

e detto q (≥ 2) *l' o r d i n e di* S_{s-1} *(ossia il numero dei punti situati su di una sua retta qualsiasi diminuito di* 1), *ogni* Σ *siffatta viene a constare di*

$$(62) \qquad \nu = q^{n(r-1)} + q^{n(r-2)} + \dots + q^n + 1$$

spazi S_{n-1}.

Premettiamo all'uopo un semplice l e m m a aritmetico, che riuscirà ancora utile più tardi.

Se $n \geq 1$, $s \geq 1$, $q \geq 2$ *denotano tre interi qualsiansi, risulta*

$$(63) \qquad (q^n - 1,\ q^s - 1) = q^{(n,s)} - 1,$$

ove ad esempio (n, s) *designa, al solito, il massimo comun divisore di* n *ed* s.

Invero, supposto per fissare le idee $s \geq n$, sia r il quoziente e t *il resto della divisione di* s *per* n, talchè:

$$s = rn + t \qquad \text{con } 0 \leq t < n.$$

Ne consegue che è

$$q^s - 1 = q^t(q^{rn} - 1) + (q^t - 1) \qquad \text{con} \quad 0 \leq q^t - 1 < q^n - 1$$

(il segno di uguaglianza nelle ultime limitazioni avendo luogo se, e soltanto se, $t = 0$), onde $q^t - 1$ *è il resto della divisione di* $q^s - 1$ *per* $q^n - 1$. Pertanto, il procedimento euclideo per il calcolo del massimo comun divisore (n, s) di n ed s si riflette nell'analogo procedimento per il calcolo di $(q^n - 1, q^s - 1)$, in guisa che i due procedimenti vengono ad arrestarsi al medesimo tempo; il confronto degli u l t i m i r e s t i non nulli ottenuti con quelli, fornisce appunto la (63).

Suppongasi ora che vi sia una fibrazione, Σ, del tipo contemplato nel teorema inizialmente enunciato. In base alla definizione di fibrazione (n. 21), il numero ν — necessariamente finito — degli S_{n-1} di Σ deve uguagliare il quoziente fra il numero $(q^s - 1)/(q - 1)$ dei punti di S_{s-1} ed il numero $(q^n - 1)/(q - 1)$ dei punti di un qualsiasi S_{n-1}. Pertanto, il primo membro della (63) deve attualmente valere $q^n - 1$, e la (63) porge $(n, s) = n$. Sussiste dunque la (61) e ν viene ad esprimersi con la (62), come asserito.

23. Ritorniamo a supporre che S_{s-1} sia uno spazio lineare sopra un campo γ qualsiasi, ed ammettiamo che *valga la* (61). Per fibrare S_{s-1} mediante S_{n-1}, potremo procedere nel modo seguente (cfr. B. SEGRE [14], n. 2).

Riferiamoci ad un' a l g e b r a $\mathfrak{A}$ sul campo γ, supposta esistente, che sia d'ordine n e p r i m i t i v a (priva cioè di nullifici), ma — pel momento — non necessariamente commutativa od associativa. Fissiamo una base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di $\mathfrak{A}$, talchè — rispetto ad essa — ogni elemento $\xi_i \in \mathfrak{A}$ avrà una n-pla di componenti, elementi $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ di γ (tutti nulli se, e soltanto se, $\xi_i = 0$), tali che

$$\xi_i = x_{i1} u_1 + x_{i2} u_2 + \ldots + x_{in} u_n.$$

Dando ad i i valori $1, 2, \ldots, r$, potremo interpretare le $rn = s$ variabili $x_{ij} \in \gamma$ — in un ordine comunque fissato — quali coordinate omogenee di punto in S_{s-1}; ciò porta ad attaccare ad ogni punto di S_{s-1} una r-pla di elementi

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r \tag{64}$$

non tutti nulli di $\mathfrak{A}$, definiti a meno di un comune fattore scalare (elemento non nullo arbitrario di γ). Consideriamo poi un ulteriore elemento di $\mathfrak{A}$:

$$\tau = t_1 u_1 + t_2 u_2 + \ldots + t_n u_n, \tag{65}$$

e distinguiamo due casi, secondochè si suppone o meno che sia $r = 2$.

Se $r = 2$, ossia $s = 2n$, l'equazione

$$\xi_1 = \tau \xi_2$$

(quando si uguaglino le componenti omonime dei due membri) rappresenta per ogni $\tau \in \mathfrak{A}$ un S_{n-1} di S_{s-1}. Al variare di τ in $\mathfrak{A}$, si ha così un insieme di S_{n-1}; e basta aggregare a questi lo spazio di equazione $\xi_2 = 0$, per ottenere una f i b r a z i o n e di S_{s-1} mediante tali spazi. È chiaro che questi ultimi vengono a corrispondere biunivocamente senza eccezioni ai punti di una retta $S_{r-1} = S_1$ su cui le $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{A}$ siano assunte quali coordinate omogenee destre.

Se non si pone nessuna restrizione per r, ammettiamo ora che l'algebra $\mathfrak{A}$ sia a s s o c i a t i v a (ma non necessariamente commutativa). In questa ipotesi, per ogni scelta delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ quali elementi non tutti nulli di $\mathfrak{A}$ ed al variare del parametro $\tau \neq 0$ in $\mathfrak{A}$, le

$$\xi_1 = \alpha_1 \tau, \ \xi_2 = \alpha_2 \tau, \ \ldots, \ \xi_r = \alpha_r \tau \tag{66}$$

sono le e q u a z i o n i p a r a m e t r i c h e di un S_{n-1} di S_{s-1} (ottenendosi il medesimo S_{n-1} ove si moltiplichino tutte le α a destra per uno stesso fattore, elemento non nullo arbitrario di $\mathfrak{A}$). Il s i s t e m a Σ degli S_{n-1} così definiti al variare delle α costituisce allora una fibrazione di S_{s-1}; ed è manifesto che *gli* S_{n-1} *di* Σ *risultano ad equazioni su* γ, *ed in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti dello spazio* S_{r-1} *destro su* $\mathfrak{A}$ *in cui le* (64) *siano coordinate omogenee di punto.*

§ VII. - Ampliamenti di spazi pascaliani, e sistemi grafici elementari.

24. Sia S'_{r-1} un qualsiasi spazio grafico pascaliano, di dimensione $r-1 \geq 1$, ossia (B. SEGRE [11, 18], n. 119) uno spazio lineare $(r-1)$-dimensionale sopra un dato campo γ. Se γ non è algebricamente chiuso, nello studio della geometria algebrica in S'_{r-1} conviene sovente ampliare S'_{r-1} col sostituire a γ un nuovo campo base, δ, estensione algebrica propria di γ; e ciò viene a definire una estensione od ampliamento di S'_{r-1} in uno spazio pascaliano su δ, ancora di dimensione $r-1$, che denoteremo con S_{r-1}.

Un problema che così si presenta, singolarmente espressivo nel caso in cui γ sia il campo reale e δ sia il campo complesso ([8]), è quello di pervenire a *descrivere la geometria algebrica in* S_{r-1} *senza uscire dal campo* γ *iniziale*; il che manifestamente può venire ottenuto senza difficoltà quando si sia trovato un *"modello" algebrico dell'* S_{r-1}, *interamente definito su* γ.

Approfondiremo in seguito questo problema, limitandoci — per brevità di discorso — al caso in cui l'estensione algebrica (d'ordine $n \geq 2$) che fa passare da γ a δ sia separabile; condizione questa che è ad esempio sempre soddisfatta nell'ipotesi che γ sia finito od abbia caratteristica zero. Per la suddetta estensione, potremo pertanto adottare le notazioni del n. 1.

25. Introdotto — con le notazioni del n. 24 e secondo quanto suggerito dalla (61) — l'intero $s = nr$, consideriamo anzitutto uno spazio S_{s-1} pascaliano sopra γ. Riferiamoci quindi all'*algebra* $\mathfrak{A}$ *su* γ *relativa all'estensione di* γ *in* δ (n. 8) e, mediante questa, definiamo in S_{s-1} il sistema Σ di S_{n-1} su γ nel modo specificato nell'ultimo capoverso del n. 23.

Questo sistema Σ risulta esso stesso definito su γ, costituendo una fibrazione di S_{s-1} a mezzo di S_{n-1}, di un tipo ben determinato, che verrà caratterizzato proiettivamente nel n. 27; un Σ siffatto sarà denominato brevemente un *sistema grafico elementare* di S_{n-1} dell'S_{s-1}. In virtù di quanto rilevato alla fine del n. 23, il suddetto sistema Σ viene a costituire un *primo "modello" algebrico* dell'S_{r-1} (del tipo richiesto al n. 24).

([8]) In tal caso, il problema in esame è stato da tempo sviscerato da C. SEGRE in lavori [21, 23] ormai classici, che hanno poi dato luogo a numerose ricerche ulteriori di vario genere (metrico, differenziale, ecc.; cfr. ad esempio B. SEGRE [10]), dimostratesi anche utili nello studio delle funzioni analitiche di più variabili.

Osserviamo poi che, sulla grassmanniana rappresentativa degli spazi S_{n-1} di S_{s-1}, gli S_{n-1} di Σ hanno quali immagini i punti di una varietà algebrica W_d, di dimensione

$$d = (s-1)-(n-1) = n(r-1) \tag{67}$$

uguale a quella di Σ. Questa varietà risulta definita su γ ed in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti di S_{r-1}, le sue equazioni deducendosi senza difficoltà dalle (66), ond'essa costituisce un *secondo "modello" algebrico dell'* S_{r-1} (esso pure del tipo richiesto).

Si ottiene infine un *terzo "modello"*, procedendo nel modo seguente. In luogo che all'S_{r-1}, riferiamoci — per semplicità espositiva — ad uno spazio pascaliano S_r su δ. In questo, le (64) denotino coordinate proiettive non omogenee di punto, ed S_{r-1} sia il relativo "iperpiano all'infinito"; le (64) possono dunque anche pensarsi quali coordinate proiettive omogenee dei punti di detto iperpiano (o coefficienti direttivi dei "punti all'infinito" di S_r). Le $nr = s$ componenti delle (64) sono elementi di γ, i quali — in un ordine comunque fissato— possono venire assunte a coordinate non omogenee di punto entro un S_s pascaliano su γ; e sia S_{s-1} il relativo "iperpiano all'infinito". Il procedimento dell'ultimo capoverso del n. 23 fornisce allora una rappresentazione biunivoca dei punti di S_{r-1} cogli spazi di un certo sistema grafico elementare, Σ, di S_{n-1} di S_{s-1}.

In definitiva, si ha così una rappresentazione biunivoca di S_r mediante S_s, nella quale i "punti al finito" di S_r hanno per immagini i "punti al finito" di S_s, mentre i "punti all'infinito" di S_r si rappresentano cogli S_{n-1} del suddetto sistema Σ (costituenti una fibrazione dell'iperpiano S_{s-1} "all'infinito" di S_s).

26. Un caso particolarmente interessante è quello in cui δ sia un qualsiasi campo finito (o di Galois); γ allora — sottocampo proprio di δ — è esso pure finito e, a parte ciò, può venir scelto arbitrariamente assieme ad n (≥ 2) mediante opportuna determinazione di δ. Inoltre, attualmente, l'estensione da γ a δ viene senz'altro ad avere i requisiti richiesti nell'ultimo capoverso del n. 24.

In base a ciò che si è detto al n. 25 circa i "modelli" degli S_{r-1} del primo tipo, si ha pertanto che:

Un qualsiasi S_{s-1} di Galois (ossia uno spazio proiettivo su di un campo finito), la cui dimensione $s-1$ soddisfi alla (61), *può sempre venir fibrato mediante spazi S_{n-1}. Invero, fra siffatte fibrazioni di S_{s-1} vi sono sempre almeno quelle date dai sistemi grafici elementari che fanno di S_{s-1} un "modello" del primo tipo di uno spazio $(r-1)$-dimensionale di Galois.*

27. Consideriamo ora un qualsiasi sistema grafico elementare, Σ, per il quale conserviamo le notazioni del n. 25; e proponiamoci di dare di esso una caratterizzazione proiettiva.

A tal fine, è opportuno di ampliare S_{s-1} (nel senso del n. 24) in uno spazio S_{s-1}^*, il quale abbia come campo base l'estensione δ^* (di cui al n. 1) del campo base γ di S_{s-1}. Riferiamoci poi all'algebra $\mathfrak{A}^*$ su δ^* relativa (nel senso del n. 8) all'estensione da γ a δ; e rappresentiamo gli elementi $\tau \in \mathfrak{A}^*$ coi punti di uno spazio S_{n-1}^* su δ^*, nel modo specificato al n. 9. Ciò val quanto dire che, se $\tau \neq 0$ si esprime con la (65) (in cui le t ora denotano elementi non tutti nulli di δ^*), il punto rappresentativo di τ in S_{n-1}^* è quello di coordinate omogenee $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$; in S_{n-1}^* si ottiene così un n-simplesso rappresentativo dei nullifici di $\mathfrak{A}^*$ (n. 10), i cui vertici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ corrispondono biunivocamente alle radici $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ della (1), tali punti essendo fra loro coniugati nell'estensione da γ a δ^*.

Ciò premesso, consideriamo l'S_{n-1} di Σ rappresentato dalle equazioni parametriche (66) (in cui le α siano r elementi arbitrariamente fissati non tutti nulli di $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$). Detto P_i il punto di S_{n-1} fornito dalle (66) per $\tau = \omega_i$, ogni coordinata ξ relativa a P_i soddisfa alla condizione

$$\text{ind}\ \xi \geq n-1, \tag{68}$$

in forza dell'ultima proposizione del n. 16 e del fatto che, per definizione delle ω, risulta $\text{ind}\ \omega_i = n-1$. Più precisamente, in forza delle (66), gli spazi S_{n-1}^*, S_{n-1} vengono ad essere riferiti fra loro in una corrispondenza omografica, definita su γ, che muta $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ordinatamente in $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Pertanto, anche l'ampliamento di S_{n-1} relativo all'estensione da γ a δ^* (che continueremo a denotare con S_{n-1}) risulta uno spazio rappresentativo dell'algebra $\mathfrak{A}^*$, così ottenendosi varie rappresentazioni di $\mathfrak{A}^*$ in S_{n-1}, e precisamente tante quanti sono i modi di rappresentare parametricamente S_{n-1} mediante le (66) (cfr. il n. 23). Tuttavia, comunque venga effettuata quest'ultima rappresentazione, si ottengono sempre in S_{n-1} gli stessi punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$, i quali risultano le imagini dei nullifici di $\mathfrak{A}^*$ d'indice $n-1$ associati rispettivamente alle radici $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ della (1), e sono così linearmente indipendenti fra loro.

Ne consegue che le n componenti di ciascuna delle r coordinate ξ di P_i debbono soddisfare ad un medesimo opportuno sistema di $n-1$ equazioni lineari omogenee, fra loro indipendenti ed a coefficienti in $\gamma(\theta_i)$, le quali vengono ad esprimere in modo più preciso la (68). In tal guisa si ottengono complessivamente $r(n-1)$ equazioni lineari indipendenti cui deve soddisfare il punto P_i di S_{s-1}^*; il sistema da esse formato definisce dunque uno spazio T_i^*

subordinato di S^*_{s-1}, avente dimensione

$$(s-1)-r(n-1)=r-1,$$

su cui giace il punto P_i relativo a ciascun S_{n-1} di Σ.

Gli n suddetti spazi T^*_i sono manifestamente fra loro coniugati nell'estensione da γ a δ^* ed associati rispettivamente alle n radici θ_i della (1). Essi risultano inoltre linearmente indipendenti fra loro; ed invero, in caso contrario, il loro spazio congiungente avrebbe dimensione inferiore ad $nr-1=s-1$: ma ciò non può essere, in quanto gli spazi S_{n-1} congiungenti le n-ple di punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dianzi considerate invadono (fibrandolo) tutto l'S_{s-1}. Gli spazi $(r-1)$-dimensionali

$$T^*_1,\ T^*_2,\ \ldots,\ T^*_n \tag{69}$$

conducono ad una semplicissima definizione proiettiva di Σ, al modo seguente.

Preso un qualsiasi punto P di S_{s-1}, osserviamo anzitutto che P non giace su nessuno degli spazi (69). Infatti, poichè P — stando (non solo in S^*_{s-1}, ma) in S_{s-1} — è autoconiugato nell'estensione da γ a δ^*, qualora P giacesse su uno degli spazi (69), ciascuno di questi spazi dovrebbe passare per P, ond'essi non sarebbero linearmente indipendenti fra loro. In simil guisa si vede che P non può stare su nessuno degli spazi che congiungono gli spazi (69) a due a due, a tre a tre, ..., ad $n-1$ ad $n-1$. Ne discende che, in S^*_{s-1}, v'è uno ed un solo spazio $(n-1)$-dimensionale uscente da P ed appoggiato a ciascuno degli spazi (69); tale spazio risulta autoconiugato nella suddetta estensione, ed è quindi uno spazio subordinato di S_{s-1}, coincidente necessariamente coll'S_{n-1} di Σ che passa per P.

Abbiamo in conclusione che:

Un sistema grafico elementare, Σ, di spazi S_{n-1} di un dato S_{s-1} su di un campo γ $(s=nr)$ definisce una n-pla (69) *di spazi $(r-1)$-dimensionali subordinati di S_{s-1}, linearmente indipendenti fra loro e coniugati in un'opportuna estensione di γ. Il sistema Σ risulta allora precisamente costituito da quegli spazi $(n-1)$-dimensionali di S_{s-1} che sono definiti su γ e che si appoggiano (necessariamente in un sol punto) a ciascuno degli spazi* (69).

Questi ultimi vengono così ad essere definiti da Σ in modo univoco, e possono quindi chiamarsi gli *spazi direttori* di Σ.

28. Dall'ultima proposizione, in base ad una facile generalizzazione del n. 5 di C. SEGRE [23] ed anche tenuto conto di C. SEGRE [22], si ricava subito che:

La varietà W_d introdotta al n. 25 quale secondo "modello" di un S_{r-1} non è che una varietà di C. Segre, p r o d o t t o degli n spazi (69)*:*

$$W_d = T_1^* \times T_2^* \times \dots \times T_n^*.$$

Essa appartiene conseguentemente ad uno spazio lineare su γ di dimensione $r^n - 1$, essendo essa stessa definita su γ, ed ha l'ordine $d!/[(r-1)!]^n$, ove d si esprime con la (67).

Va rilevato che la suddetta W_d contiene n s i s t e m i a l g e b r i c i $\infty^{(n-1)(r-1)}$ di spazi $(r-1)$-dimensionali g e n e r a t o r i, ognuno dei quali ne fornisce una fibrazione; tali sistemi risultano fra loro c o n i u g a t i nell'estensione da γ a δ^*, ciascuno dei loro spazi essendo definito su δ^* ma non su γ. Più precisamente, gli n spazi generatori di W_d uscenti da un punto $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_n$ di W_d son dati (con notazione evidente) da

$$(70) \qquad T_1^* \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_n, \quad \sigma_1 \times T_2^* \times \dots \times \sigma_n, \quad \dots, \quad \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times T_n^*;$$

questi sono c o n g i u n t i da un S_d (il quale non è altro che lo s p a z i o t a n g e n t e a W_d in σ). Gli spazi (70) sono pertanto a due a due distinti, onde *mai nessuno di essi può risultar definito su* γ (mentre invece S_d è definito su γ se, e soltanto se, così è del punto σ).

29. Ci proponiamo di esaminare come si riflettano sui "modelli" di cui al n. 25 le t r a s f o r m a z i o n i o m o g r a f i c h e dell'S_{r-1}.

Una trasformazione omografica di S_{r-1} in sè si traduce analiticamente mediante una sostituzione lineare omogenea invertibile, a coefficienti in δ definiti a meno di un comune fattore non nullo, la quale muti p. es. le ξ nelle ξ' e, parimente, le α nelle α'. È allora chiaro che, in virtù di detta sostituzione, le equazioni (66) di un S_{n-1} di Σ vengono mutate nelle

$$\xi'_1 = \alpha'_1 \tau, \quad \xi'_2 = \alpha'_2 \tau, \quad \dots, \quad \xi'_r = \alpha'_r \tau,$$

che sono le equazioni di uno spazio S'_{n-1}, esso pure di Σ. Di più, il riferimento così indotto fra S_{n-1} ed S'_{n-1} è manifestamente un' o m o g r a f i a, la quale muta i punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ di S_{n-1} (di cui al n. 27) ordinatamente negli analoghi punti $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ di S'_{n-1}. Pertanto, i luoghi (69) dei primi vengono in tal guisa trasformati ciascuno in sè.

Rileviamo d'altro canto che le equazioni con cui si esprime la suddetta sostituzione lineare invertibile fra le ξ e ξ', quando in ciascuna si uguaglino le componenti dei due membri (rispetto alla base $u_1, u_2, \dots, u_n$ di cui al n. 23), si traducono in una sostituzione lineare invertibile — a coefficienti in γ — fra le componenti x delle ξ e le componenti x' delle ξ'. Avuto riguardo al fatto che ciò vale in particolare per la sostituzione lineare

$$\xi'_1 = \tau\xi_1 , \quad \xi'_2 = \tau\xi_2 , \ \dots , \quad \xi'_r = \tau\xi_r ,$$

che (per ogni $\tau \neq 0$ di δ) rappresenta l'omografia identica di S_{r-1}, ne discende il seguente teorema.

Sia Σ un qualsiasi sistema grafico elementare di S_{n-1} entro S_{s-1}, primo "modello,, di uno spazio S_{r-1}, per cui conserviamo le notazioni del n. 27. Restano allora definiti un gruppo G di omografie su γ di S_{s-1} in sè lascianti fissi i singoli spazi (69) *(eppertanto trasformanti Σ in sè) ed un sottogruppo invariante G_0 di G isomorfo al quoziente fra i gruppi moltiplicativi di δ e di γ, per modo che G risulti canonicamente legato al gruppo delle omografie (su δ) di S_{r-1} in sé mediante un omomorfismo di nucleo G_0.*

Sulla varietà W_d, secondo "modello,, di S_{r-1} (n. 25), le singole omografie di G hanno per imagini delle trasformazioni omografiche di W_d in sè, definite su γ e lascianti fisso ciascuno degli n sistemi di generatori di W_d (n. 28). Queste trasformazioni costituiscono un gruppo, G', e fra G e G' intercede un omomorfismo di nucleo G_0; sicchè G' risulta isomorfo al gruppo delle omografie (su δ) di S_{r-1} in sè.

Ulteriori caratterizzazioni dei gruppi G e G' verranno date poi al n. 35.

30. Se $r > 2$, fissato comunque un intero r_1 soddisfacente alle $1 < r_1 < r$ e posto $s_1 = nr_1$, si consideri — nell'S_{r-1} in cui sono coordinate omogenee le $(\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_r)$ — lo spazio subordinato S_{r_1-1} di equazioni:

$$\xi_{r_1+1} = 0, \quad \xi_{r_1+2} = 0, \ \dots , \quad \xi_r = 0.$$

Esprimendo che si annullano le componenti dei primi membri di queste, si ottengono $n(r - r_1)$ equazioni indipendenti, le quali — nell'S_{s-1} rappresentativo di S_{r-1} — definiscono, come imagine di S_{r_1-1}, uno spazio subordinato S_{s_1-1}, con

$$s_1 = s - n(r - r_1) = nr_1 .$$

Osserviamo inoltre che, in base alle (66), un punto $(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_{r_1} , 0, 0, \dots , 0)$ di S_{r_1-1} ha per imagine in S_{s-1} lo spazio S_{n-1} di Σ rappresentato parametricamente dalle

$$\xi_1 = \alpha_1\tau, \quad \xi_2 = \alpha_2\tau, \ \dots , \quad \xi_{r_1} = \alpha_{r_1}\tau, \quad \xi_{r_1+1} = \dots = \xi_r = 0.$$

I vari S_{n-1} così ottenuti fibrano S_{s_1-1}, costituendo ivi un sistema grafico elementare (primo "modello,, di S_{r_1-1}).

Avuto riguardo a ciò che ogni spazio $(r_1 - 1)$-dimensionale subordinato di S_{r-1} può venir trasformato nel suddetto S_{r_1-1} mediante un' omografia di S_{r-1} in sè, e poggiando anche sul n. 29, ne discende che:

Preso un qualsiasi numero di spazi S_{n-1} di un sistema grafico elementare Σ fibrante S_{s-1}, e detto r_1 il massimo numero di essi fra loro linearmente indipendenti, e cioè il cui spazio congiungente abbia dimensione $nr_1 - 1 = s_1 - 1$ (e non minore), si ha sempre che ciascuno di quegli S_{n-1} giace in questo ultimo S_{s_1-1}. Un siffatto S_{s_1-1} risulta quindi fibrato da spazi S_{n-1} di Σ, i quali — se $r_1 \geq 2$ — costituiscono in esso un sistema grafico elementare Σ_1 subordinato a Σ.

Con le notazioni del n. 27, gli spazi S_{s_1-1} in discorso possono ottenersi nel modo seguente (da cui agevolmente potrebbero trarsi nuove dimostrazioni per quanto sopra). Preso uno spazio $(r_1 - 1)$-dimensionale subordinato di uno degli spazi (69), definito su δ^*, se ne considerino i coniugati nella estensione da γ a δ^*; si ottengono così n spazi $(r_1 - 1)$-dimensionali situati uno in ciascuno degli spazi (69), e quindi fra loro linearmente indipendenti. Il loro spazio congiungente ha pertanto la dimensione $nr_1 - 1$, è definito su γ, ed è uno dei suddetti S_{s_1-1}; e viceversa.

31. Poggiando sui nn. 25, 30, si ottiene tosto che:

Se $r > 2$ e per ogni intero r_1 soddisfacente alle $1 < r_1 < r$, la varietà di Segre W_d (di cui al n. 28) — secondo "modello" di un S_{r-1} — risulta luogo di analoghe varietà W_{d_1}, "modelli" degli S_{r_1-1} subordinati di S_{r-1}. Ciascuna di tali W_{d_1} è il prodotto di n sottospazi $(r_1 - 1)$-dimensionali giacenti uno in ciascuno degli n spazi (69), ed ha così la dimensione $d_1 = n(r_1 - 1)$, l'ordine $d_1!/[(r_1 - 1)!]^n$ ed appartiene ad uno spazio lineare su γ di dimensione $r_1^n - 1$; inoltre, per r_1 punti generici di W_d passa una ed una sola di quelle W_{d_1}.

Supponiamo in particolare $r \geq 2$, $n = 2$ e, sulla W_d, consideriamo la W_{d_1} rappresentativa di un iperpiano S_{r-2} di S_{r-1}; è chiaro che, se $r = 2$, la W_{d_1} riducesi ad un punto di W_d. Con le precedenti notazioni, risulta così $r_1 = r - 1$, $d = 2(r - 1)$, $d_1 = 2(r - 2)$; sicchè, mentre W_d appartiene ad un S_{r^2-1}, lo spazio di appartenenza di W_{d_1} è un S_{r^2-2r}, centro dunque di una stella ∞^d appartenente ad S_{r^2-1}.

Con agevoli calcoli o considerazioni geometriche, che per brevità omettiamo, si constata che il generico S_{r^2-2r+1} di questa stella sega W_d — fuori di W_{d_1} — in uno ed un sol punto. Si può quindi procedere alla *proiezione stereografica* di W_d dal centro S_{r^2-2r} su di uno spazio S_d di S_{r^2-1} sghembo con tale centro, ottenendosi così una rappresentazione birazionale di W_d su S_d, dotata però di eccezioni. Si verifica precisamente che questa rappresentazione possiede una sola varietà eccezionale, data da W_{d_1}, cui su S_d

corrisponde l'S_{d-1} ivi segato dall'iperpiano di S_{r^2-1} che t o c c a W_d in ciascun punto di W_{d_1}.

Basta ora rispettivamente assumere gli spazi S_{r-2}, S_{d-1} — considerati nei precedenti due capoversi — quali "iperpiani all'infinito,, di S_{r-1}, S_d, per ottenere in S_d un "m o d e l l o,, (di W_d e quindi) di S_{r-1}, il quale, com'è facile vedere, non differisce da quello del t e r z o t i p o introdotto (con notazioni un po' diverse) alla fine del n. 25. Il corrispondente sistèma grafico elementare su S_{d-1} risulta formato dalle r e t t e che ivi si ottengono proiettando (da S_{r^2-2r} su S_d) gli spazi d-dimensionali t a n g e n t i a W_d nei singoli punti di W_{d_1}.

32. Riferiamoci di nuovo allo spazio subordinato S_{r_1-1} di S_{r-1} di cui al principio del n. 30, supponendo ora n qualsiasi ≥ 2 e $2 \leq r_1 \leq r$. Poichè detto spazio è definito su γ, potremo restringerci a considerare i punti che gli appartengono aventi coordinate in γ, la cui totalità denoteremo con S'_{r_1-1}. Estendendo una terminologia risalente (nel caso in cui γ e δ siano il campo reale ed il campo complesso) a STAUDT ed a C. SEGRE ([21], n. 12; [23], nn. 12-14), chiameremo *catena (r_1-1)-dimensionale (o di specie r_1-1)* dello spazio S_{r-1} una siffatta totalità S'_{r_1-1}, come pure ogni sua trasformata mediante una qualsiasi omografia (su δ) di tale spazio. Ci proponiamo di determinare le imagini delle catene sul "modello,, W_d di S_{r-1} (specificato al n. 28).

La suddetta catena è intanto per definizione il luogo del punto $(x_1, x_2, \dots, x_{r_1}, 0, 0, \dots, 0)$, ove le x denotino elementi non tutti nulli di γ. D'altra parte, in virtù del n. 23, l'imagine di un tale punto in S_{s-1} è l'S_{n-1} ivi definito dal sistema di equazioni

$$\xi_1 = x_1\tau, \quad \xi_2 = x_2\tau, \quad \dots, \quad \xi_{r_1} = x_{r_1}\tau, \quad \xi_{r_1+1} = \dots = \xi_r = 0,$$

al variare del parametro τ dato dalla (65). Se si uguagliano le componenti dei due membri di queste equazioni, risulta subito che taluna delle coordinate grassmanniane del suddetto S_{n-1} vale zero, quelle non nulle essendo date da tutti e soli i monomi di grado n nelle $(x_1, x_2, \dots, x_{r_1})$ di coefficiente ± 1. Avuto anche riguardo al n. 29, ne consegue che:

Sulla W_d di Segre rappresentativa di S_{r-1} (n. 28), ogni catena (r_1-1)-dimensionale di S_{r-1} (ove $2 \leq r_1 \leq r$) ha per imagine una varietà algebrica definita su γ ed essa pure di dimensione r_1-1, la quale risulta una v a r i e t à d i V e r o n e s e g e n e r a l i z z a t a, imagine proiettiva della totalità delle forme d'ordine n di un S_{r_1-1}; tale varietà appartiene dunque ad uno spazio (definito su γ) di dimensione $\binom{n+r_1-1}{n}-1$ ed ha l'ordine n^{r_1-1}. Per r_1+1 punti a coordinate in γ, assegnati su W_d in modo g e n e r i c o, passa una ed una sola di quelle varietà di Veronese.

§ VIII. - Rappresentazioni geometriche del gruppo di Galois di una estensione algebrica, e questioni connesse.

33. Dati un campo δ ed un suo sottocampo γ, tali che si passi da γ a δ mediante un'estensione algebrica per la quale conserviamo le ipotesi e le notazioni dei nn. 1, 2, consideriamo un qualsiasi *automorfismo ρ di δ che muti γ in sè;* è chiaro che ρ dovrà altresì subordinare di conseguenza in γ un automorfismo, che denoteremo con σ. Un qualunque elemento ξ di δ verrà allora mutato da ρ in un elemento di δ, che designeremo con ξ'; ed un qualunque elemento x di γ verrà mutato sia da ρ che da σ in uno stesso elemento di γ, da denotarsi con x'.

Gli elementi $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di una base di δ su γ saranno trasformati da ρ in elementi $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ di una nuova base; pertanto (n. 3), le u e le u' risulteranno fra loro legate da una sostituzione lineare invertibile, a coefficienti in γ. Posto quindi

$$\xi = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n, \quad \xi' = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n,$$

dal confronto della seconda relazione colla

$$\xi' = x'_1u'_1 + x'_2u'_2 + \ldots + x'_nu'_n,$$

che subito si deduce dalla prima, si vede che fra le y e le x' intercede una sostituzione lineare invertibile, a coefficienti in γ.

Combinando questo risultato con quelli del n. 29 ed usufruendo della terminologia di B. SEGRE [11, 18], n. 133, 134, si ottiene così il seguente teorema.

Sia ρ un automorfismo di δ che lasci fisso γ, subordinando in questo campo l'automorfismo σ. Allora (con le notazioni dei nn. 23-27), una qualsiasi collineazione L di S_{r-1} in sè inerente a ρ si riflette in S_{s-1} canonicamente (e cioè attraverso la rappresentazione di cui al n. 23) mediante una collineazione H inerente a σ (determinata da L soltanto a meno del prodotto per una trasformazione omografica del gruppo G_0 di cui al n. 29), la quale muta in sè Σ e quindi pure il complesso degli spazi (69). Di conseguenza, L induce su W_d una ben determinanta collineazione, K, essa pure inerente a σ.

Rileviamo infine che una collineazione di S_{r-1} in sè inerente ad un — supposto esistente — automorfismo ρ di δ che non mutasse γ in sè, non verrebbe a riflettersi in trasformazioni in sè di S_{s-1} o W_d.

34. Consideriamo reciprocamente una qualsiasi collineazione H (definita su γ) di S_{s-1} in sè che lasci fissa la n-pla di spazi (69), e cioè che trasformi Σ in sè. H dovrà quindi mutare un qualunque sottospazio $(2n-1)$-dimensionale di S_{s-1} (definito su γ), che incontri ciascuno degli spazi (69) secondo una retta, in un sottospazio di S_{s-1} ancora dello stesso tipo. Avuto riguardo a B. SEGRE [11, 18], nn. 133, 134 ed agli ultimi capoversi dei nn. 23, 30, ne discende senz'altro che H risulta l'imagine in S_{s-1} di una trasformazione puntuale L di S_{r-1} in sè, la quale conserva gli allineamenti, ed è quindi una collineazione se $r > 2$.

Parimente, poggiando invece sul n. 31, si vede che — se $r > 2$ — una qualsiasi collineazione K di W_d in sè è l'imagine su W_d di un'opportuna collineazione L di S_{r-1} in sè.

In virtù del n. 33, l'automorfismo ρ di δ cui L risulta inerente deve trasformare γ in sè; e l'automorfismo σ subordinato da ρ in γ non può essere che quello cui la collineazione H o K inizialmente considerata risulta inerente.

La proposizione del n. 33 viene così invertita nell'ipotesi che sia $r > 2$. Da qui si ricava poi il *teorema inverso* anche per $r = 2$, poggiando sulla seguente osservazione sui sistemi grafici elementari (e su una consimile — qui omessa per brevità — relativa alle varietà di Segre).

Sia Σ_1 un sistema grafico elementare di S_{n-1} di un S_{s_1-1}, con $r_1 \geq 2$, $s_1 = nr_1$, "modello„ quindi di un S_{r_1-1} sopra un certo campo δ. Preso un qualsiasi intero $r > r_1$, si può sempre pensare S_{r_1-1} come sottospazio di un S_{r-1} sullo stesso campo δ; il che porta ad immergere S_{s_1-1} in un S_{s-1} (con $s = nr$) in cui sia definito un sistema grafico elementare, Σ, che subordina Σ_1 in S_{s_1-1} (nel senso del n. 30). Ciò premesso, ed assegnata una qualunque collineazione H_1 di S_{s_1-1} trasformante Σ_1 in sè, è certamente (in più modi) possibile — in base al n. 30 — di prolungare H_1 in una collineazione H di S_{s-1} che muti in sè tanto Σ che S_{s_1-1} e che subordini su quest'ultimo spazio la collineazione H_1. Poichè $r > 2$, H è l'imagine di una collineazione di S_{r-1} in sè; questa lascia fisso S_{r_1-1}, subordinando ivi una *collineazione di* S_{r_1-1} *avente* H_1 *quale imagine in* S_{s_1-1}. L'esistenza di una collineazione di quest'ultimo tipo rimane così provata.

35. L'osservazione fatta testè si estende agevolmente al caso restante in cui si abbia $r_1 = 1$, e cioè $s_1 = n$, nel modo indicato dal seguente capoverso.

Con le notazioni del n. 27, riferiamoci ad un qualsiasi S_{n-1} di Σ (definito su γ), appoggiato dunque agli spazi (69) in punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ (definiti nel loro complesso su γ, ma singolarmente definiti soltanto su δ^*). Ebbene, in base al n. 27, una collineazione H_1 su γ di S_{n-1} che muti in sè la n-pla dei punti P_i può — ed in più modi — venire prolungata in una collineazione di S_{s-1} che lasci fissa la n-pla degli spazi (69), e cioè trasformi Σ in sè.

Va in particolare rilevato che una qualsiasi omografia su γ di S_{n-1} che lasci fissi i singoli punti P_i può venire rappresentata dalla trasformazione moltiplicativa

$$\tau' = \alpha\tau \tag{71}$$

sul parametro τ definito dalla (65), dove α denoti un elemento non nullo di δ. Ed invero, per ogni scelta di $\alpha \neq 0$ in δ, la (71) risulta chiaramente del tipo voluto; e si può disporre di α in modo che la (71) muti un punto di S_{n-1} a coordinate in γ (non situato quindi su di una faccia del simplesso di vertici i punti P_i) nel trasformato di questo mediante la data omografia, con che la (71) viene appunto ad identificarsi con tale omografia. Pertanto:

Le omografie su γ di S_{n-1} lascianti fissi i punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo G_0 considerato al n. 29.

Con le notazioni dei nn. 1-4, si può anche dire che:

Le equazioni (15), *dove le $y \in \gamma$ denotino parametri soggetti alla sola condizione $\eta \neq 0$, costituiscono la più generale trasformazione lineare invertibile delle x nelle z, a coefficienti in γ, che muti in sè l'equazione* (19) *lasciando fissa ciascuna delle n equazioni lineari in cui essa (a norma del n.* 5*) può venir decomposta.*

Un'ulteriore conseguenza di quanto sopra è che, se l'automorfismo ρ considerato nel n. 33 è l'identità, allora anche l'automorfismo σ risulta identico, onde ciascuna delle collineazioni H, K ivi definite è un'omografia, ed inoltre H lascia fisso ciascuno degli spazi (69) e K muta in sè ciascuno degli n sistemi di generatori di W_d (n. 28); e viceversa. Avuto riguardo al n. 34, si ottiene quindi che:

Il gruppo G (di cui al n. 29*) consta di tutte (e sole) le omografie su γ di S_{s-1} che mutano in sè il sistema grafico elementare Σ, lasciando fisso ciascuno dei suoi spazi direttori. Il gruppo G' consta del pari di tutte (e sole) le omografie su γ che trasformano in sè la varietà di Segre W_d, lasciando fisso ciascuno dei suoi n sistemi di generatori.*

36. Supponiamo ora che l'estensione da γ a δ sia normale e che l'automorfismo σ — di cui al n. 33 — sia identico, il che equivale ad ammettere che l'automorfismo ρ ivi considerato appartenga al gruppo Γ di Galois di δ rispetto a γ (n. 17). Sotto tali ipotesi, ognuna delle collineazioni H, K definite al n. 33 risulta un'omografia; inoltre, sulle n radici $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ dell'equazione (1) l'automorfismo ρ opera una sostituzione, appartenente al gruppo di Galois della (1): e la corrispondente sostituzione viene quindi operata da H sugli n spazi direttori (69) di Σ e da K sugli n sistemi di generatori (70) di W_d, i quali (nn. 27, 28)

risultano riferiti canonicamente in modo biunivoco fra loro ed a quelle n radici.

Tutto ciò s' inverte senza difficoltà, poggiando sul n. 34. Ne discendono vari modi di definire geometricamente la struttura del gruppo Γ di cui sopra, espressi dai seguenti teoremi.

Nelle ipotesi ammesse al principio di questo numero e per ciascuno degli infiniti valori di $r = 2, 3, 4, \ldots$, *il gruppo* G *introdotto al n.* 29 *(ed altrimenti caratterizzato alla fine del n.* 35*) è un sottogruppo invariante del gruppo di tutte le omografie (su* γ*) di* S_{s-1} *che trasformano in sè il sistema grafico elementare* Σ*; ed il quoziente di questi due gruppi risulta isomorfo al suddetto gruppo* Γ *di Galois.*

Il gruppo G', *pure introdotto al n.* 29 *(ed altrimenti caratterizzato alla fine del n.* 35*), è un sottogruppo invariante del gruppo di tutte le omografie su* γ *che trasformano in sè la* W_d *di Segre; ed il quoziente di questi due gruppi risulta isomorfo a* Γ.

Il gruppo delle sostituzioni lineari sulle x *considerato nel secondo enunciato del n.* 35 *è un sottogruppo invariante del gruppo di tutte le sostituzioni lineari (invertibili) sulle* x *a coefficienti in* γ *che trasformano in sè l'equazione* (19)*; ed il quoziente di questi due gruppi, e quindi pure quello dei due corrispondenti gruppi di omografie di* S_{n-1}, *risulta isomorfo a* Γ.

Nel caso particolare in cui i campi γ e δ siano finiti, i teoremi precedenti — presi assieme a quelli dei nn. 18, 20 — forniscono subito eleganti proprietà (che, per brevità, omettiamo di enunciare in modo esplicito) relative ai sistemi grafici elementari, alle W_d di Segre, ed alle ipersuperficie (19) e (58) di uno spazio di Galois (intorno a queste ultime, cfr. altresì B. SEGRE [19], n. 35).

PARTE TERZA

Sistemi grafici e geometrie non desarguesiane.

§ IX. - Spazi e sistemi grafici.

37. In uno spazio grafico irriducibile, S_{s-1}, consideriamo una fibrazione Φ mediante spazi subordinati S_{n-1} $(1 < n < s)$; e supponiamo che valga la condizione (61) (con $r > 1$, e cioè che n sia un divisore proprio di s), l'opportunità della quale risulta già dai nn. 21, 22. Si avrà così di conseguenza $s \geq 4$, sicchè (cfr. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 109) S_{s-1} dovrà essere uno spazio lineare sopra un corpo, γ (non necessariamente commutativo).

Si dirà poi che gli S_{n-1} di Φ costituiscono un *sistema grafico* di S_{n-1} dell'S_{s-1}, ed un tale sistema verrà allora denotato di regola col simbolo $\Sigma_{n,\,r}$ od anche semplicemente con Σ, ove accada che Φ *induca una fibrazione in ogni sottospazio di* S_{s-1} *che congiunga due o più dei suoi* S_{n-1}. Questa condizione, manifestamente non restrittiva su Φ se $r = 2$, può invece risultare limitativa se $r > 2$.

In base alla definizione di $\Sigma_{n,\,r}$ ed alla supposta irriducibilità di S_{s-1}, si ha intanto che due qualsiansi distinti degli spazi S'_{n-1}, S''_{n-1} di Σ sono congiunti da uno spazio S_{2n-1} subordinato di S_{s-1}, nel quale Σ induce una fibrazione che non può consistere dei due spazi S'_{n-1}, S''_{n-1} soltanto. In corrispondenza ad ogni intero $t = 1, 2, \ldots, r$, si possono quindi definire induttivamente degli spazi S_{nt-1} subordinati di S_{s-1}, ottenibili congiungendo alcuni degli S_{n-1} arbitrariamente presi in Σ (il numero di questi S_{n-1} risultando $\geq t$, e potendo venir ridotto a t mediante opportuna scelta di detti S_{n-1} in S_{nt-1}); ed è chiaro inoltre che in ciascuno di tali S_{nt-1} il sistema Σ induce una fibrazione, e che il complesso formato da quegli S_{nt-1} e dallo spazio vuoto risulta chiuso rispetto alle operazioni di congiungere ed intersecare. Ne discende che:

Ad ogni sistema grafico $\Sigma_{n,\,r}$ *rimane associato in modo intrinseco uno spazio grafico irriducibile,* R_{r-1} *(di dimensione* $r-1$*), ottenuto concependo astrattamente gli* S_{n-1} *di* Σ *quali suoi «punti» e, più generalmente, i suddetti spazi* S_{nt-1} *di* S_{s-1} *quali suoi «spazi subordinati»* $(t-1)$*-dimensionali.*

Supposto sino alla fine del presente numero $r > 2$ (per il caso $r = 2$ cfr. il penultimo capoverso del n. 39), il sistema grafico $\Sigma_{n,\,r}$ verrà detto *desarguesiano* o *non desarguesiano* a seconda che lo spazio grafico R_{r-1} ad esso associato risulta o meno desarguesiano. La prima eventualità ha intanto sempre luogo se $r \geq 4$; quando essa si presenta, R_{r-1} è uno spazio lineare sopra un corpo, δ (non necessariamente commutativo [9]), il quale vien così definito da Σ — assieme al corpo γ inizialmente considerato — a meno soltanto di un isomorfismo.

Diremo inoltre che Σ è *pascaliano* per esprimere che tale è R_{r-1}; ciò equivale a supporre che Σ sia desarguesiano e che il relativo corpo δ risulti commutativo (ved. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 119).

È chiaro che, se lo spazio S_{s-1} è finito, pure Σ consta di un numero finito di spazi S_{n-1} (determinato nel n. 22), onde anche R_{r-1} risulta finito. Ne discende che:

---

[9] Ved. più oltre il teorema del n. 43; un caso particolare interessante compare già nella seconda proposizione del n. 6 di B. SEGRE [14], la quale concerne sistemi grafici $\Sigma_{4,r}$ ottenibili a partire dai quaternioni reali.

Ogni sistema grafico desarguesiano in uno spazio di Galois è necessariamente pascaliano.

Avuto riguardo ad un ben noto risultato sulle algebre primitive ed associative reali (per il quale cfr. ad esempio Scorza [8], n. 280), si ha del pari che:

Ogni sistema grafico $\Sigma_{2,r}$, *che sia definito sul campo reale e desarguesiano, risulta addirittura pascaliano, il corpo* δ *ad esso associato essendo isomorfo al campo complesso.*

38. La considerazione dei "modelli" del terzo tipo introdotti nel n. 25, suggerisce un'inversione — sotto ipotesi più generali — dei risultati colà stabiliti, espressa dal seguente teorema valido, come vedremo, qualunque sia $r \geq 2$.

L' R_{r-1} *grafico associato, giusta il n.* 37, *ad un sistema grafico* $\Sigma_{n,r}$ *qualsiasi può venire immerso — quale sottospazio — in uno spazio grafico* R, *di dimensione* r, *opportunamente definito.*

Conservando per $\Sigma_{n,r}$ le notazioni del n. 37, e poichè il relativo spazio di appartenenza è un S_{s-1} lineare sopra il corpo γ, potremo intanto immergere quest'ultimo in uno spazio lineare S_s, di dimensione s, sopra lo stesso corpo γ. Costruiremo allora R nel modo seguente.

I «punti» R_0 di R saranno, per definizione, di due categorie:

1) gli S_0 giacenti in S_s, ma non in S_{s-1};

2) gli S_{n-1} di Σ (i quali fibrano S_{s-1}).

Più in generale, converremo di considerare astrattamente S_s quale «spazio» $R_r = R$, lo spazio vuoto S_{-1} di S_s quale «spazio vuoto» R_{-1} di R ed infine, quali «spazi subordinati t-dimensionali» R_t di R $(0 \leq t < r)$, assumeremo gli spazi S subordinati di S_s dell'una o dell'altra delle seguenti due categorie:

1) gli S_{nt} di S_s che (non stanno in S_{s-1} ed) incontrano S_{s-1} secondo uno degli spazi S_{nt-1} fibrati da Σ (n. 37);

2) gli $S_{n(t+1)-1}$ giacenti in S_{s-1} che sono fibrati da Σ.

È subito visto che l'insieme dei suddetti spazi R_t $(-1 \leq t \leq r)$ risulta chiuso rispetto all'operazione di intersezione, definita col riportarla ai corrispondenti spazi S, sottospazi di S_s. Un'analoga proprietà non sussiste per l'operazione del congiungere, che può però venire definita altrimenti mediante la precedente, assumendo quale spazio congiungente di due o più spazi subordinati di R l'intersezione di tutti gli spazi subordinati di R che li contengono (e cioè i cui spazi S contengono gli spazi S relativi a quelli).

Denotando con $[R_t]$ lo spazio subordinato di S_s che definisce un dato R_t, e designando le suddette due operazioni cogli usuali simboli $\cap$, $\cup$, si ha pertanto:

$$[R_t \cap R_{t'}] = [R_t] \cap [R_{t'}], \tag{72}$$

$$[R_t \cup R_{t'}] \supseteq [R_t] \cup [R_{t'}]. \tag{73}$$

È subito visto che nella (73) vale sempre il segno di uguaglianza, ove si eccettui soltanto l'eventualità che R_t ed $R_{t'}$ siano *due spazi di* 1ª *categoria* tali che $[R_t]$ ed $[R_{t'}]$ *non abbiano punti a comune fuori di* S_{s-1}; sotto queste ipotesi, la dimensione del primo membro della (73) viene infatti sempre a *superare di* $n-1$ *unità* quella del secondo membro.

Ci resta ora da dimostrare che, posto

$$R_t \cap R_{t'} = R_a, \qquad R_t \cup R_{t'} = R_b,$$

in ogni caso risulta

$$t + t' = a + b. \tag{74}$$

Esamineremo all'uopo le varie possibilità i)-iv) che possono venire offerte dagli R_t, $R_{t'}$, deducendo — per ciascuna di esse — le (74) dalla relazione:

$$\dim [R_t] + \dim [R_{t'}] = \dim ([R_t] \cap [R_{t'}]) + \dim ([R_t] \cup [R_{t'}]), \tag{75}$$

di manifesta validità in S_s.

i) Nell'eventualità pocanzi indicata che nella (73) non valga l'uguaglianza, mentre R_t, $R_{t'}$ ed R_b sono di 1ª categoria, R_a risulta di 2ª. Avuto anche riguardo alle (72), (73), si ha allora pertanto:

$$\dim [R_t] = nt, \qquad \dim [R_{t'}] = nt',$$

$$\dim ([R_t] \cap [R_{t'}]) = \dim [R_t \cap R_{t'}] = \dim [R_a] = n(a+1) - 1,$$

$$\dim ([R_t] \cup [R_{t'}]) = \dim [R_t \cup R_{t'}] - (n-1) = \dim [R_b] - n + 1 = nb - n + 1,$$

onde la (75) fornisce appunto la (74).

ii) Se R_t, $R_{t'}$ sono di 1ª categoria ed inoltre tali che $[R_t]$, $[R_{t'}]$ ammettano qualche punto a comune non situato su S_{s-1}, ciascuno degli spazi R_t,

$R_{t'}$, R_a, R_b risulta di 1ª categoria. Avuto ancora riguardo alle (72), (73), ne consegue che i quattro addendi figuranti nella (75) valgono ordinatamente nt, nt', na, nb, sicchè si ricade senz'altro nella (74).

iii) Allo stesso modo si conclude nell'ipotesi che i due spazi R_t, $R_{t'}$ siano di categorie diverse, ad esempio — per fissare le idee — R_t di 1ª ed $R_{t'}$ di 2ª categoria. Allora infatti R_a è di 2ª categoria ed R_b di 1ª, ed i quattro addendi figuranti nella (75) valgono ordinatamente nt, $n(t'+1)-1$, $n(a+1)-1$, nb.

iv) Se infine R_t, $R_{t'}$, e quindi pure R_a, R_b, sono di 2ª categoria, quei quattro addendi valgono ordinatamente $n(t+1)-1$, $n(t'+1)-1$, $n(a+1)-1$, $n(b+1)-1$, onde dalla (75) segue ancora la (74).

Abbiamo così dimostrato la (74) in ogni caso, sicchè R risulta di fatto uno spazio grafico r-dimensionale. I sottospazi di 2ª categoria di R sono quelli subordinati ad un « iperpiano » di R, manifestamente isomorfo allo spazio grafico R_{r-1} associato a Σ giusta il n. 37. Possiamo dunque identificare R_{r-1} a quell'iperpiano, il che viene ad immergere R_{r-1} in R, come voluto.

39. Lo spazio grafico R testè definito — manifestamente irriducibile come R_{r-1} — risulta desarguesiano nell'ipotesi ch'esso sia di dimensione $r>2$ (cfr. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 107). R è così uno spazio lineare sopra un opportuno corpo δ, onde R_{r-1} risulta allora uno spazio lineare sopra lo stesso δ. Tenuto anche conto del n. 37, si ha quindi che:

Un sistema grafico $\Sigma_{n,r}$ di spazi S_{n-1} sopra un corpo γ ($s=nr$) è sempre desarguesiano se $r>2$. In quest'ipotesi, $\Sigma_{n,r}$ risulta addirittura pascaliano se γ è finito oppure se γ è il campo reale ed $n=2$.

I soli spazi non desarguesiani che possano eventualmente ottenersi a partire da sistemi grafici $\Sigma_{n,r}$, sono dunque i piani R che a questi ultimi vengono collegati — a norma del n. 38 — *nel caso che si abbia* $r=2$ (e quindi $S_{s-1}=S_{2n-1}$). Ci occuperemo di essi particolareggiatamente più tardi (§§ X, XI).

Avuto riguardo al n. 38, le definizioni date verso la fine del n. 37 risultano estese al caso $r=2$ (rimanendo equivalenti a quelle ivi date se $r>2$), ove si convenga di dire — come d'ora in poi faremo — che un sistema grafico $\Sigma_{n,r}$ è (o non è) *desarguesiano* o *pascaliano* se, e soltanto se, tale è (o non è) lo spazio grafico, R_r, definito a partire da $\Sigma_{n,r}$ come al n. 38. Con ciò, in base anche al n. 37, *la seconda parte dell'ultimo enunciato viene a sussistere anche per* $r=2$.

Nell'ipotesi che sia $r=2$, la costruzione (data al n. 38) di R_r a partire da $\Sigma_{n,r}$ potrebbe venir dedotta da ANDRÉ [1], §§ 2, 3.

40. Approfondiremo ora lo studio dei sistemi grafici $\Sigma_{n,r}$ $(n \geq 2,\ r \geq 2)$ che sono desarguesiani; a norma del n. 39, quest'ultima condizione risulta sempre automaticamente soddisfatta se $r > 2$. Per semplicità di esposizione ci limiteremo al caso in cui *si abbia* $r = 2$; ma le argomentazioni che svolgeremo ed i risultati che otterremo possono venir tutti agevolmente trasportati al caso $r \geq 3$, bastando all'uopo aver presenti gli sviluppi del n. 120 in B. SEGRE [11, 18].

Attualmente dunque si ha $s = 2n$, talchè Σ è un sistema grafico (desarguesiano) di spazi S_{n-1} subordinati di un certo spazio S_{2n-1} lineare — ad esempio destro — sopra un corpo γ. A Σ resta collegato un *piano grafico desarguesiano,* $R_2 = S$, ottenibile da un S_{2n} su γ (contenente S_{2n-1}) nel modo specificato al n. 38, il quale porta fra l'altro ad assimilare i singoli S_{n-1} di Σ a « punti » di una certa « retta » R_1 di R.

Potremo fare di R un *piano lineare* esso pure destro sopra un corpo δ opportuno, procedendo ad es. come indicato nei nn. 112-117 di B. SEGRE [11, 18]; e ciò viene effettuato precisamente nel modo che passiamo ed esporre.

Assumiamo anzitutto R_1 quale « retta all'infinito » di R e, nello stesso tempo, S_{2n-1} quale « iperpiano all'infinito » di S_{2n}. Scegliamo poi ad arbitrio i seguenti elementi.

1) Un punto o « al finito » di R, il quale fungerà da origine delle coordinate; esso non è altro che un qualsiasi punto « al finito » di S_{2n}.

2) Tre distinti « punti all'infinito » di R, ossia tre S_{n-1} di Σ, che denoteremo con λ, μ, ν. I primi due verranno a fungere da direzioni degli « assi » ed il terzo da « direzione unitaria ». Gli « assi delle coordinate » in R saranno dunque le rette di 1ª categoria (n. 38) $o\lambda$, $o\mu$; e denoteremo rispettivamente con L, M i luoghi dei punti « al finito » dei relativi spazi n-dimensionali di S_{2n}.

3) Un punto u_1 dell'« asse » $o\lambda$ distinto da o e da λ (ossia un punto di L distinto da o), il quale verrà a fungere da punto unità su detto « asse ».

La « proiezione parallela » dal centro ν istituirà una corrispondenza biunivoca (omografica) fra gli spazi L, M, come pure fra i rispettivi « spazi $(n-1)$-dimensionali all'infinito » λ, μ. Se ξ è un qualsiasi punto di L, ne denoteremo con (ξ) la proiezione da ν su M; in particolare, dunque, il punto (o) verrà a coincidere con o.

Definiremo poi una corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra i punti π al finito di R, ossia di S_{2n}, e le coppie ordinate di punti ξ, η di L, mediante la condizione che π risulti l'intersezione dei due spazi n-dimensionali di S_{2n} congiungenti gli spazi λ, μ all'infinito degli « assi » rispettivamente coi punti (η) e ξ (di M ed L). La coppia (ξ, η) verrà a costituire precisamente quella delle richieste coordinate del punto π, a patto che — nell'insieme dei punti di L (e cioè dei punti «al finito» dell'asse $o\lambda$) — vengano definite opportunamente somme e prodotti, in guisa da fare di quello il corpo base δ delle coordinate.

Più circonstanziatamente, se ξ, η, ζ, τ denotano punti di L, occorre all'uopo convenire di assumere

$$\xi + \eta = \zeta \tag{76}$$

se, e soltanto se, il «punto all'infinito» della retta di S_{2n} che congiunge i punti (ξ, η) e ζ appartiene alla «direzione unitaria» ν. Va inoltre posto

$$\xi\eta = \tau \tag{77}$$

se, e soltanto se, i «punti all'infinito» delle rette $\xi(u_1)$ e $(\eta)\tau$ stanno in uno stesso spazio ρ di Σ (il che traduce il «parallelismo» fra quelle rette).

Poichè il piano grafico R è irriducibile e desarguesiano, si raggiunge in tal modo l'intento dichiarato (cfr. B. SEGRE, *loc. ult. cit.*), i punti o ed u_1 venendo così a fungere da zero e da unità per il corpo δ.

41. Le rette ou_1, $o(u_1)$ ed $u_1(u_1)$ stando in un piano, i loro «punti all'infinito» sono tre punti l_1, m_1, n_1 di S_{2n-1} fra loro allineati; ed è manifesto che questi punti giacciono ordinatamente sugli spazi λ, μ, ν (talchè i primi due si corrispondono nell'omografia posta fra λ e μ dalla proiezione di centro ν).

Avuto riguardo al significato geometrico attribuito alla (76), ne discende che il sottoinsieme di L dato dai punti al finito della retta ou_1 risulta chiuso rispetto alle operazioni di addizione e sottrazione. Del pari, in base al significato ammesso per la (77), si vede che quel sottoinsieme è altresì chiuso rispetto alle operazioni di moltiplicazione e di passaggio all'inverso per gli elementi di esso distinti da o. Il suddetto sottoinsieme è dunque un sottocorpo di δ; e ci proponiamo di mostrare che *questo risulta in ogni caso isomorfo al corpo base γ di S_{2n}* (sicchè, volendo, lo si potrà poi identificare con γ).

Osserviamo a tal uopo che lo spazio S_{2n}, il quale (n. 37) è irriducibile e desarguesiano, diventa uno *spazio lineare destro* sopra un corpo isomorfo a γ quando si proceda nel modo seguente (cfr. B. SEGRE [11, 18], n. 120).

Nello spazio n-dimensionale L si fissino arbitrariamente $n-1$ punti u_2, u_3, ..., u_n, in modo che gli $n+1$ punti $o, u_1, u_2, \ldots, u_n$ risultino linearmente indipendenti; e si considerino su M, giusta il n. 40, i punti $o=(o)$, (u_1), (u_2), ..., (u_n), essi pure fra loro indipendenti. Assunto S_{2n-1} (come già si è fatto al n. 40) quale «iperpiano all'infinito» di S_{2n}, si potranno introdurre in S_{2n} coordinate del tipo richiesto, scegliendo il riferimento in modo che il punto o sia l'origine, le $2n$ rette $ou_1, ou_2, \ldots, ou_n, o(u_1), o(u_2), \ldots, o(u_n)$ siano gli assi, e la giacitura dell'iperpiano $u_1 u_2 \ldots u_n (u_1)(u_2) \ldots (u_n)$ sia la « giacitura unitaria ». Si può allora istituire in modo ovvio una corrispondenza biunivoca fra i punti « al finito » di S_{2n} e le $(2n)$-ple ordinate di punti « al finito » dell'asse ou_1; ed attribuire poi all'insieme di questi ultimi punti una struttura additiva ed una moltiplicativa, le quali abbiano rispettivamente o ed u_1 quali elementi neutri e facciano di esso un corpo, isomorfo al corpo base γ di S_{2n}. Quest'ultimo intento si raggiunge mediante costruzioni geometriche analoghe a quelle risultanti da ciò che si è detto al n. 40 nei riguardi delle (76), (77) (nelle quali naturalmente ξ, η, ζ, τ vanno ora scelti in « punti al finito » della ou_1, il che è lecito in virtù delle proprietà di chiusura dianzi rilevate); ed è facile assodare che i risultati forniti dalle prime costruzioni collimano perfettamente coi risultati porti dalle seconde. Tale concordanza stabilisce appunto l'asserzione fatta alla fine del capoverso antiprecedente.

In base anche al primo capoverso del n. 40 ed a precisazioni successive (n. 43, riguardanti l'affermazione fatta in fine), otteniamo così il seguente teorema.

Sia $\Sigma_{n,r}$ un sistema grafico di spazi S_{n-1} di un S_{s-1} ($n \geq 2, r \geq 2, s = nr$) lineare (destro o sinistro) sopra un corpo γ. Se $\Sigma_{n,r}$ è desarguesiano (il che ha sempre luogo se $r > 2$), tale è pure sia lo spazio grafico R_{r-1} ad esso associato per $r > 2$ (n. 37) sia lo spazio grafico R_r definito da $\Sigma_{n,r}$ a norma dei nn. 38, 39, talchè ognuno di questi è uno spazio lineare (che può supporsi esso pure rispettivamente destro o sinistro) sopra un certo corpo δ. Ebbene, δ risulta necessariamente un'estensione di γ, avente il rango n.

42. Ritorniamo — per comodità espositiva — a fare l'ipotesi $r = 2$, giusta il principio del n. 40. Usufruiamo dei nn. 40-41, identificando — com'è lecito — δ all'insieme dei « punti al finito » dello spazio n-dimensionale $o\lambda$ e γ all'insieme dei « punti al finito » della retta ou_1, le relative strutture di corpi essendo definite nel modo ivi indicato.

È subito visto che i punti ξ « al finito » dello spazio $o\lambda$ sono quelli aventi in S_{2n} coordinate del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$ ove le x designano elementi arbitrari di γ, oltre i quali trovansi poscia qui ripetuti n zeri (di γ e δ), coincidenti col punto o e denotati col simbolo 0. Del pari, i punti (η) « al finito » dello spazio $o\mu$ sono quelli aventi coordinate del tipo $(0, 0, \ldots, 0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, il corrispondente punto (ξ, η) di R risultando allora quello che in S_{2n} ha le coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

In base alle due definizioni di somma in δ ed in γ (di cui ai nn. 40, 41), si ha poi che, posto $\xi = \xi' + \xi''$, $\eta = \eta' + \eta''$, se i punti (ξ', η'), (ξ'', η'') hanno in S_{2n} le coordinate $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$, $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n,$

$y''_1, y''_2, \ldots, y''_n$), il punto (ξ, η) è quello di coordinate $x_i = x'_i + x''_i$, $y_i = y'_i + y''_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Preso un qualsiasi elemento c non nullo di γ, ossia un punto « al finito » distinto da o della retta ou_1, consideriamo la corrispondenza dell'S_n $o\lambda$ in sè che associa al punto $\xi \in \delta$ il punto

$$\xi' = c\xi. \tag{78}$$

In base al significato geometrico attribuito nel n. 40 alla (77), tale corrispondenza può venire così costruita. Tracciata la retta $c(u_1)$, se ne consideri il « punto all'infinito »; questo, al variare di c, può assumere tutte e sole le posizioni distinte da l_1, m_1 sulla retta congiungente i punti l_1, m_1, n_1 (di cui al principio del n. 41). Detto ρ l'S_{n-1} di Σ uscente da tale punto (distinto quindi da λ e da μ), si passa da ξ a ξ' col proiettare anzitutto $o\lambda$ su $o\mu$ dal centro ν e poi $o\mu$ su $o\lambda$ dal centro ρ. Poichè i centri ν, ρ di proiezione trovansi per ipotesi entrambi « all'infinito », ne discende che la (78) *definisce sullo spazio n-dimensionale $o\lambda$ (lineare su γ come l'S_{2n} ambiente) un'omografia, la quale lascia fisso l'iperpiano λ « all'infinito » di detto spazio.*

Lo stesso può anche manifestamente dirsi della corrispondenza trasformante il punto ξ di coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$ nel punto, che designeremo con ξ'', di coordinate $(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n, 0, 0, \ldots, 0)$; ciò, pertanto, risulterà ancor vero della corrispondenza (prodotto dell'inversa della prima per la seconda) che così viene ad intercedere fra ξ' e ξ''. Poichè quest'ultima corrispondenza lascia palesemente fissi i punti o ed u_1 dello spazio $o\lambda$ (i quali fungono da zero e da unità tanto in δ che in γ, e sono fra loro distinti ed entrambi « al finito »), così si ha intanto subito che:

Affinchè — per ogni ξ di $o\lambda$ — il punto $\xi' = c\xi$ (ove $c \in \gamma$, $c \neq 0$) abbia in S_{2n} coordinate $x \in \gamma$ ottenibili da quelle di ξ col moltiplicarle tutte a sinistra per c, è necessario e sufficiente che (la suddetta corrispondenza fra ξ' e ξ'' subordini sullo spazio λ all'infinito di $o\lambda$ la trasformazione identica, e cioè che) ogni retta incidente agli spazi distinti λ, μ, ν si appoggi altresì a ρ.

Supponiamo ora che la condizione testè indicata valga per ogni $c \in \gamma$ (chiaramente, essa risulta sempre verificata per $c = 0$); e mostriamo che:

Il corpo γ risulta allora commutativo.

Invero, le rette k di S_{2n} incidenti agli spazi λ, μ, ν — fra cui v'è la $l_1m_1n_1$ — punteggiano tali spazi omograficamente. Pertanto, presa in λ una qualsiasi retta r_λ uscente dal punto l_1, a questa viene a corrispondere una retta r_μ di μ per m_1 ed una retta r_ν di ν per n_1, tali che le rette k uscenti dai singoli punti di r_λ si appoggiano altresì alle r_μ, r_ν, e costituiscono quindi un regolo (ossia un sistema di generatrici di una quadrica: quello definito dalle rette r_λ, r_μ, r_ν come direttrici). In virtù dell'ipotesi ammessa, gli spazi ρ (di Σ) uscenti dai singoli punti della retta $l_1m_1n_1$ risultano altresì appoggiati a ciascuna delle rette k suddette, e quindi riferiti mediante queste omograficamente fra loro ed agli spazi λ, μ, ν; detta r_ρ la retta di ρ che corrisponde alle r_λ, r_μ, r_ν in tali riferimenti, le varie r_ρ risultano appoggiate a ciascuna delle generatrici del suddetto regolo, e costituiscono quindi alla loro volta un altro regolo, complementare di quello. L'esistenza di due regoli complementari implica la commutatività del corpo base γ (ved. B. SEGRE [18], n. 190), onde l'asserto.

43. Rileviamo ora che, se la condizione specificata nel penultimo enunciato risulta verificata per ogni $c \in \gamma$, poichè il punto u_i (di cui al n. 41) ha in R_{2n} tutte le coordinate nulle salvo la i^{ma} ch'è uguale all'unità, così il punto cu_i dovrà avere tutte le coordinate nulle tranne la i^{ma} che varrà c. In base ai primi due capoversi del n. 42, ne discende che il punto ξ di S_{2n} avente le coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$ può allora venir scritto sotto la forma

$$\xi = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n, \tag{79}$$

dove nel secondo membro addizioni e moltiplicazioni vanno intese nel senso specificato al n. 40.

Ne discende anzitutto che $u_1, u_2, \ldots, u_n$ costituiscono una base di δ su γ, gli elementi (79) di δ essendo quelli di un'algebra $\mathcal{A}$ d'ordine n sopra γ, la quale risulta associativa, primitiva e dotata di modulo (ma non necessariamente commutativa); e che la rappresentazione delle coppie (ξ, η) di δ mediante i punti π di S_{2n} (di cui al n. 40) viene a coincidere con quella che si desume — in relazione ad $\mathcal{A}$ — dalle considerazioni svolte verso la fine dei nn. 23, 25.

Osserviamo infine che, nell'S_{2n-1} «all'infinito» dello spazio S_{2n} sopra il corpo commutativo γ, il luogo delle rette k appoggiate ai tre distinti S_{n-1} λ, μ, ν di Σ è una V_n^n di Segre, avente λ, μ, ν e ciascuno degli spazi ρ suddetti quali generatori.

Diremo per abbreviare che un sistema grafico $\Sigma_{n,r}$ di uno spazio S_{s-1} ($n \geq 2$, $r \geq 2$, $s = nr$) sopra un corpo γ *soddisfa alla condizione* $\mathcal{C}$ in relazione a tre distinti λ, μ, ν dei suoi R_{n-1}, i quali giacciano in un S_{2n-1} fibrato da $\Sigma_{n,r}$ (n. 37), quando esista una retta $l_1m_1n_1$ appoggiata a λ, μ, ν tale che gli S_{n-1} di $\Sigma_{n,r}$ uscenti dai punti di questa siano tutti incidenti a ciascuna delle rette di S_{2n-1} appoggiate a λ, μ, ν. Allora il corpo γ risulta necessariamente commutativo, e la condizione $\mathcal{C}$ equivale a ciò che $\Sigma_{n,r}$ abbia a contenere (non soltanto λ, μ, ν, ma) c i a s c u n o degli spazi ρ generatori della V_n^n di Segre definita da λ, μ, ν.

In base a quanto sopra, si ottiene in definitiva il seguente teorema.

$\mathfrak{A}$ denoti una qualsiasi algebra d'ordine n sopra un campo γ, che sia associativa e primitiva (ma non necessariamente commutativa). Scelta in $\mathfrak{A}$ arbitrariamente una base (p. es. sinistra), le r-ple di elementi di $\mathfrak{A}$ possono venire rappresentate coi punti «al finito» di un S_s, bastando all'uopo interpretare le $s = nr$ componenti degli elementi di una siffatta r-pla quali coordinate del corrispondente punto di S_s. Nello spazio S_{s-1} «all'infinito» di S_s rimane in conseguenza definito un sistema grafico $\Sigma_{n,r}$ di spazi S_{n-1}; e questo soddisfa alla condizione $\mathfrak{C}$, in relazione a tre qualsivogliano purchè distinti dei suoi S_{n-1} di un S_{2n-1}.

D'altro canto, se $r > 2$, il sistema $\Sigma_{n,r}$ è necessariamente desarguesiano (n. 39) *e quindi associato ad un certo corpo, δ. Ebbene, tale corpo risulta un'estensione di γ e può venir posto in corrispondenza d'isomorfismo coll'algebra $\mathfrak{A}$ (la quale è perciò sempre dotata di modulo).*

Reciprocamente, in uno spazio S_{s-1} sopra un corpo γ si consideri un sistema grafico $\Sigma_{n,r}$ ($n \geq 2$, $r \geq 2$, $s = nr$), che sia desarguesiano e che soddisfi alla condizione $\mathfrak{C}$ in relazione a tre distinti arbitrariamente f i s s a t i dei suoi S_{n-1} di un S_{2n-1}. Allora γ è necessariamente commutativo, ed il sistema Σ può definirsi nel modo suddetto a partire da un'opportuna algebra $\mathfrak{A}$ (ond'esso viene a soddisfare alla condizione $\mathfrak{C}$ in relazione a tre distinti q u a l s i a n s i dei suoi S_{n-1} di uno stesso S_{2n-1}).

Se nella prima parte di questo teorema si suppone γ finito, in virtù del n. 39 si ha che il corrispondente sistema $\Sigma_{n,r}$ risulta p a s c a l i a n o. Ciò dimostra un importante teorema di Wedderburn, secondo cui (cfr. ad esempio Scorza [8], n. 48 dell'*Appendice*) un'algebra associativa primitiva sopra un corpo finito è necessariamente c o m m u t a t i v a.

44. Completeremo lo studio iniziato al n. 40, esaminando più da vicino il caso dei sistemi grafici $\Sigma_{n,r}$ ($n \geq 2$, $r \geq 2$) che risultano p a s c a l i a n i; il che ha sempre automaticamente luogo per i sistemi $\Sigma_{n,r}$ che sono d e s a r g u e s i a n i e definiti sopra un campo base γ f i n i t o, la prima di queste due condizioni essendo senz'altro soddisfatta se $r > 2$ (n. 39). Anche ora supporremo dapprima $r = 2$, potendosi poi (giusta il principio del n. 40) passare agevolmente al caso $r > 2$.

Attualmente, lo spazio $S_{s-1} = S_{2n-1}$ cui Σ appartiene è «iperpiano all'infinito» di un S_{2n} su γ, per il quale modifichiamo leggermente le notazioni del n. 42 introducendo i simboli X ed Y per designare i *c o m p l e s s i v e r t i c a l i* (o matrici di tipo $n, 1$) rispettivamente formati dalle x e dalle y; e si rammenti che le $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ossia le componenti x ed y delle X ed Y, fungono da coordinate proiettive di punto non omogenee in S_{2n} ed omogenee in S_{2n-1}. Allora l'equazione $Y = 0$ (con ovvio significato per il secondo membro) rappresenterà: in S_{2n} lo spazio n-dimensionale $o\lambda$ (su cui le componenti di X saranno coordinate non omogenee di punto); ed in S_{2n-1} lo spazio λ immagine del « punto all'infinito » dell'asse ξ, questo asse essendo tracciato sul piano grafico pascaliano $R_2 = R$ collegato a Σ (n. 40). Parimente, $X = 0$ rappresenterà, in S_{2n}, lo spazio $o\mu$ (su cui Y definirà coordinate non omogenee di punto) e, in S_{2n-1}, lo spazio μ imagine del « punto all'infinito » dell'asse η.

Sia α un qualsiasi altro « punto all'infinito » di R; questo sarà imagine di un S_{n-1} della fibrazione indotta da Σ in S_{2n-1}, che denoteremo con ν, il quale dovrà essere distinto da λ e da μ e risulterà perciò sghembo rispetto a ciascuno di questi spazi. Ne consegue che ν potrà rappresentarsi in S_{2n-1} mediante un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle x, y a coefficienti in γ, risolubili tanto rispetto alle x che rispetto alle y; questo sarà quindi equivalente al sistema rappresentato da un'equazione della forma:

$$Y = AX, \tag{80}$$

dove A denota una matrice quadrata (d'ordine n) non degenere, ad elementi in γ.

In virtù della stessa definizione di R (n. 38), l'operazione di *proiezione dell'asse* ξ *sull'asse* η *dal centro* α, che denoteremo col simbolo $\{\alpha\}$, si tradurrà in S_{2n} mediante la proiezione dello spazio $o\lambda$ sullo spazio $o\mu$ dal centro ν; in forza della (80), quest'ultima è quella che muta il punto $(X, 0)$ di $o\lambda$ nel punto $(0, AX)$ di $o\mu$.

Presi ora in R altri due punti α_1, α_2 « all'infinito », circa i quali useremo rispettivamente notazioni ottenibili da quelle testé introdotte per α con l'apposizione dell'indice 1 o 2, l'ipotesi che R sia pascaliano implica una proprietà di chiusura inerente agli esagoni di Pappo-Pascal aventi i punti diagonali in α, α_1, α_2 ed i vertici alternativamente sui due assi ξ ed η (ved. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 118); e questa si traduce mediante l'identità

$$\{\alpha_2\}\{\alpha_1\}^{-1}\{\alpha\}\{\alpha_2\}^{-1}\{\alpha_1\}\{\alpha\}^{-1} = 1, \tag{81}$$

nella quale il secondo membro sta per indicare la trasformazione identica dell'asse ξ in sé.

Avuto riguardo al modo pocanzi specificato di rappresentare $\{\alpha\}$ in S_{2n} a partire dalla (80), è subito visto che la (81) equivale all'identità f r a m a t r i c i:

$$A^{-1}A_1A_2^{-1}AA_1^{-1}A_2 = I, \tag{82}$$

dove I designa la matrice unità (quadrata d'ordine n).

Si rilevi che — se, come non è restrittivo, si suppone che lo spazio ν coincida con quello (designato appunto con ν) mediante il quale al n. 40 sono state introdotte in S_{2n} le coordinate x, y — risulta $A = I$ (e viceversa). Corrispondentemente, la (82) riducesi alla $A_1A_2^{-1}A_1^{-1}A_2 = I$, equivalente alla

$$A_1A_2 = A_2A_1; \tag{83}$$

sicché le *matrici* A relative alle equazioni (80) rappresentanti in S_{2n-1} i vari S_{n-1} di Σ son allora *a due a due permutabili fra loro.* Si osservi infine che, con la suddetta scelta concernente ν, la V_n^n di Segre definita da λ, μ, ν (n. 42) risulta il luogo del punto di S_{2n-1} di coordinate omogenee (X, cX), ove X ha come componenti elementi arbitrari non tutti nulli di γ e c designa l'∞ od un qualsiasi elemento di γ.

45. Diremo, per abbreviare, che un *sistema grafico* $\Sigma_{n,r}$ di un S_{s-1} definito su di un campo γ (come pure la relativa *fibrazione*) risulta *generale*, se — entro un S_{2n-1} di S_{s-1} — possono trovarsi quattro distinti S_{n-1} λ, μ, ν, ν_1 di Σ che si comportino in modo g e n e r i c o rispetto alle rette di S_{2n-1}, tali cioè che l'i n t e r s e z i o n e di uno ν_1 di essi con la V_n^n di Segre definita dagli altri tre consti di n p u n t i d i s t i n t i (singolarmente definiti in γ od in un'estensione di γ); e ciò val quanto dire che gli spazi λ, μ, ν, ν_1, dianzi considerati, debbono ammettere n d i s t i n t e r e t t e t r a s v e r s a l i c o m u n i (esse pure singolarmente definite in γ od in un'estensione di γ).

Dal punto di vista analitico, se — come non è restrittivo di ammettere — λ, μ, ν, ν_1 coincidono coi quattro spazi così denominati al n. 44, la condizione di g e n e r i c i t à si traduce per essi in ciò che gli n autovalori della matrice A_1 risultino d i s t i n t i. Allora è subito visto che, in corrispondenza ad uno qualunque k_i di tali autovalori, l'equazione

$$A_1X = k_iX \tag{84}$$

definisce (a meno di un fattore scalare) una ed una sola n-pla $X = X_i \neq 0$; e che le n trasversali degli spazi λ, μ, ν, ν_1 risultano le rette di S_{2n-1} descritte dai punti

$$(X_i,\ cX_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

al variare del parametro c, e sono quindi linearmente indipendenti fra loro.

Si rammenti ora che la condizione di permutabilità (83) implica che la matrice A_2 possa venir espressa come un polinomio nella A_1 a coefficienti in γ (cfr. WEDDERBURN [29], n. 2.08):

$$A_2 = F(A_1).$$

Conseguentemente, la soluzione $X = X_i$ della (84) viene a soddisfare altresì la

$$A_2 X = F(k_i) X;$$

e ciò dimostra che lo spazio ν_2 (di cui al n. 44) risulta incidente a ciascuna delle rette (85).

Pertanto, nelle ipotesi ammesse, il sistema Σ è contenuto entro la totalità degli spazi S_{n-1} su γ che si appoggiano alle n rette (85). Per un punto di un siffatto S_{n-1}, che non stia su di una faccia del relativo n-simplesso d'appoggio, non vi sono altri S_{n-1} di quella totalità e passa invece uno ed un sol spazio di Σ, il quale deve dunque necessariamente coincidere coll'S_{n-1} inizialmente considerato. Ne discende che Σ non differisce dalla suddetta totalità, e perciò (come questa) viene a contenere ciascuno degli spazi generatori della V_n^n di Segre definita da λ, μ, ν. Abbiamo così stabilito che Σ *soddisfa alla condizione* $\mathcal{C}$ (di cui al n. 43) relativamente agli spazi λ, μ, ν.

Avuto riguardo alla commutatività di δ — conseguente alla ipotesi che Σ risulti pascaliano — ed alla parte finale del teorema del n. 43, ne discende che Σ può venir costruito — nel modo ivi indicato — a partire da un'algebra $\mathcal{A}$ commutativa. Il campo δ è così un'estensione commutativa di γ, di grado n, la quale non può ch'essere separabile per il fatto — dianzi assodato — che Σ ammette le n direttrici rettilinee (85) indipendenti e quindi certamente distinte. E l'algebra $\mathcal{A}$, in virtù ancora del n. 43, risulta isomorfa a quella relativa all'estensione di γ in δ (n. 8).

Dal caso $r = 2$ — dianzi trattato — si passa senza difficoltà alcuna a quello in cui $r > 2$. Tenuto anche conto dei nn. 25, 39, si ottiene così in definitiva il seguente teorema.

I soli sistemi grafici che siano pascaliani e generali (nel senso precisato al principio di questo numero) sono i sistemi grafici elementari.

In un S_{s-1} di Galois, possono aversi sistemi grafici $\Sigma_{n,r}$ generali che non siano elementari soltanto nel caso che risulti $r = 2$, $s = 2n$.

In base anche al n. 37, ne discende che:

In uno spazio S_{2n-1} di Galois, un sistema grafico $\Sigma_{n,2}$ che sia generale, ma non elementare, risulta sicuramente non desarguesiano. Lo stesso *può altresì dirsi di ogni sistema grafico $\Sigma_{2,2}$ di rette di un S_3 reale il quale sia generale, ma non elementare.*

Per meglio intendere la portata di questa proposizione, rammentiamo che (n. 37) un $\Sigma_{n,2}$ non è altro che una qualsiasi fibrazione di un S_{2n-1} mediante S_{n-1}; e che (nn. 27, 45) un $\Sigma_{n,2}$ elementare è caratterizzato dall'esistenza per esso di n rette direttrici fra loro indipendenti (singolarmente definite su di un'opportuna estensione del campo base di S_{2n-1}). Ne discende la possibilità di costruire dei *piani grafici R non desarguesiani finiti o reali,* dedotti (col procedimento specificato nel n. 38) da sistemi Σ — supposti esistenti — di uno dei due tipi contemplati nell'ultima proposizione; e di ciò tratteremo particolareggiatamente nei due paragrafi successivi, ove siffatti sistemi Σ verranno determinati.

46. Sia ora S_{s-1} uno spazio pascaliano sopra un campo γ. Se $s = nr$ (con $n \geq 2$, $r \geq 2$) ed ammesso che γ possegga un'estensione algebrica separabile di grado n, esistono come sappiamo fibrazioni di S_{s-1} mediante spazi S_{n-1}, una di queste venendo ad es. fornita (giusta il n. 25) da un sistema grafico elementare, $\Sigma = \Sigma_{n,r}$, definito in base alla suddetta estensione di γ (e proiettivamente caratterizzato al n. 27). Nell'ipotesi che il gruppo Γ di Galois di tale estensione sia ciclico, il che ha senz'altro sempre luogo se $n = 2$ oppure (n. 20) se γ è finito, dimostreremo che:

Se $r \geq n$ e se γ non consta di due soli elementi, esistono fibrazioni non elementari di S_{s-1} mediante spazi S_{n-1}, ottenibili a partire da quel Σ col procedimento più sotto specificato.

Consideriamo dapprima il caso in cui si abbia $r = n$. Gli spazi direttori (69) di Σ avranno allora la dimensione $n-1$; e si potranno fissare n spazi indipendenti di Σ:

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

(ciascuno di dimensione $n-1$ e definito su γ), congiunti quindi dall'$S_{s-1} = S_{n^2-1}$ ambiente. In virtù del n. 36, potremo inoltre supporre di avere scritti gli spazi (69) in un ordine tale che le n trasformazioni del gruppo Γ di Galois (per ipotesi ciclico) inducano fra quelli le n sostituzioni circolari.

Posto per abbreviare

$$P_{ij} = T_i^* \cap U_j,$$

si ha intanto che gli n n-simplessi $P_{i1}P_{i2} \ldots P_{in}$ risultano fra loro coniugati rispetto alla suddetta estensione di γ. Pertanto, uno spazio U di Σ che non si appoggi ad alcuna faccia (di dimensione $\leq n-2$) di uno di tali n-simplessi avrà ancora lo stesso comportamento nei riguardi dei rimanenti

n-simplessi. Se quindi poniamo

$$P_i = T_i^* \cap U,$$

potremo come segue definire in modo coerente delle omografie fra gli spazi (69) presi comunque a due a due: l'omografia fra T_i^* e $T_{i'}^*$ ($i, i' = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq i'$) sarà quella in cui si corrispondono P_i e $P_{i'}$, ed inoltre P_{ij} e $P_{i'j'}$ ($j, j' = 1, 2, \ldots, n$) sotto la condizione che sia $i + j \equiv i' + j'$ (mod n). Poichè ognuna delle trasformazioni di Γ muta in sé la n-pla dei punti P_i e l'una nell'altra le n n-ple dei punti P_{ij} con $i + j \equiv$ cost. (mod n), ne discende che *la $W_{2(n-1)}$ di Segre generata dagli S_{n-1} congiungenti le n-ple di punti omologhi nelle suddette omografie è definita su γ.*

Si ha una prima fibrazione di $W_{2(n-1)}$ mediante spazi S_{n-1} definiti su γ, data dagli S_{n-1} generatori di $W_{2(n-1)}$ che risultano definiti su γ; è chiaro che fra tali spazi v'è U e che ognuno di quelli è uno spazio di Σ. Ma $W_{2(n-1)}$ contiene un altro sistema di spazi S_{n-1} [spazi direttori, fra cui vi sono gli spazi (69)]; e quelli fra essi (certamente esistenti) che risultano definiti su γ costituiscono una seconda fibrazione di $W_{2(n-1)}$.

Pertanto, modificando Σ col sostituire agli spazi della prima fibrazione di $W_{2(n-1)}$ quelli della seconda, lasciando però inalterati gli altri spazi di Σ, se ne ricava manifestamente una nuova fibrazione di S_{s-1} mediante spazi S_{n-1}.

Notiamo poi che nessuno dei suddetti spazi generatori di $W_{2(n-1)}$ appartenenti a γ si appoggia a T_1^* in un punto situato su di una faccia dell'n-simplesso $P_{11}P_{12} \ldots P_{1n}$. Si supponga infatti per assurdo che uno, U', di quegli spazi non soddisfi a questa condizione. Posto

$$P'_i = T_i^* \cap U',$$

sia $P_{1j_1}P_{1j_2} \ldots P_{1j_k}$ la faccia di dimensione $k-1$ ($\leq n-2$) minima di quel simplesso che contiene P'_1. Poichè v'è una trasformazione di Γ che muta T_1^* in T_2^*, ne discende che P'_2 giace su $P_{2j_1}P_{2j_2} \ldots P_{2j_k}$; e questo spazio deve conseguentemente coincidere col trasformato di $P_{1j_1}P_{1j_2} \ldots P_{1j_k}$ nell'omografia fra T_1^* e T_2^* (la quale muta P'_1 in P'_2). Dunque, a parte l'ordine, gli interi $j_1, j_2, \ldots, j_k$ debbono essere congrui modulo n agli $j_1 + 1$, $j_2 + 1, \ldots, j_k + 1$, il che non è però possibile in quanto $k < n$. Questa contraddizione prova l'asserto.

Si considerino ora gli spazi di Σ il cui punto d'appoggio con T_1^* giace su di una faccia del simplesso $P_{11}P_{12} \ldots P_{1n}$ (fra tali spazi vi sono sempre gli $U_1, U_2, \ldots, U_n$; e non ve ne sono altri se, e soltanto se, $n = 2$). In base a quanto sopra, i rimanenti spazi di Σ si distribuiscono su tante $W_{2(n-1)}$ di Segre, le quali sono *prive a due a due di punti in comune su γ.*

Ne consegue che si ottiene a partire da Σ una nuova fibrazione di S_{s-1} mediante spazi S_{n-1}, qualora si operi nel modo dianzi specificato su talune delle suddette $W_{2(n-1)}$ scelte ad arbitrio. Avuto riguardo al n. 27, si vede poi che una siffatta fibrazione risulta di certo non elementare nell'ipotesi che la suddetta operazione non venga effettuata su almeno due distinte di quelle $W_{2(n-1)}$; il che è certamente possibile in virtù dell'ipotesi ammessa che γ non consti di due soli elementi (mentre invece, se γ possedesse soltanto due elementi, vi sarebbe una sola $W_{2(n-1)}$).

Ci resta infine da trattare il caso in cui si abbia $r > n$. Questo si riduce al precedente col fissare in S_{s-1} uno spazio subordinato S_{n^2-1} definito su γ e fibrato da spazi di Σ, il che è certamente possibile (ed anzi in più modi) in base al n. 30. Si raggiunge allora l'intento voluto, col modificare la fibrazione indotta da Σ in S_{n^2-1} nel modo precedentemente indicato, lasciando invece inalterati gli spazi di Σ non giacenti in S_{n^2-1}.

§ X. - Fibrazioni non elementari di S_3 pascaliani mediante rette, e piani non desarguesiani che ne derivano.

47. Nel presente paragrafo ci occuperemo del problema segnalato alla fine del n. 45, nel caso più semplice $n = 2$. Si tratta dunque di determinare e classificare le *fibrazioni* Φ *mediante rette di uno spazio tridimensionale* S_3 *sopra un campo* γ; il che offre interesse anche a prescindere dalle applicazioni che ne derivano nello studio dei piani grafici (n. 45).

Incominciamo col dimostrare che:

Ogni siffatta fibrazione Φ *risulta generale* (nel senso specificato al principio nel n. 45), *tranne eventualmente nel caso in cui* γ *sia di caratteristica* 2 *e non perfetto.*

Ammettiamo infatti per assurdo che Φ possa essere non generale: ciò significa che quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4 distinte qualsiansi di Φ ammettono — nella chiusura algebrica di γ — almeno tre trasversali distinte od una sola.

Il primo di questi due casi si presenta se, e soltanto se, a_1, a_2, a_3, a_4 appartengono ad uno stesso regolo; ma non è possibile che ciò abbia luogo comunque venga scelta la retta a_4 di Φ, poichè altrimenti Φ potrebbe unicamente comprendere le ∞^1 rette del regolo avente a_1, a_2, a_3 quali generatrici e non invaderebbe quindi l' S_3, com'è invece tenuto a fare.

Nel secondo caso, la congruenza lineare determinata dalle rette a_1, a_2, a_3, a_4 risulta speciale, ossia ammette una sola direttrice, b, che è pure generatrice di detta congruenza e costituisce l'unica trasversale delle a_1, a_2, a_3, a_4. La determinazione di b viene ora a dipendere da un'equazione di 2° grado avente coefficienti in γ e radici coincidenti. Se dunque supponiamo che γ non abbia la caratteristica $p = 2$ o che, essendo invece $p = 2$,

γ sia perfetto, la retta b risulta definita su γ; sicchè ogni retta della suddetta congruenza che sia definita su γ ha pure necessariamente il proprio punto d'appoggio con b definito su γ.

Quella congruenza può così contenere al più ∞^1 rette di Φ (in quanto v'è soltanto una retta di Φ per ogni punto di b); esistono quindi rette di Φ che non le appartengono, e sia a_5 una qualunque di esse. Dalle ipotesi ammesse risulta che le cinque rette a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 appartengono ad uno ed un sol complesso lineare, L, il quale è generalmente non speciale (poichè, altrimenti, a_5 e quindi pure tutte le rette di Φ risulterebbero incidenti alla b, il che non può essere); tale complesso contiene la suddetta congruenza e, di conseguenza, altresì la retta $b_5 = b$. Parimente, L dovrà contenere le rette b_1, b_2, b_3, b_4, ove si denoti con b_1 la retta incidente alle a_2, a_3, a_4, a_5, e così via. Pertanto, con la terminologia di B. SEGRE [9], n. 30, le dieci rette a, b dianzi considerate costituiscono una biquintupla. Ma allora (*loc. cit.*, n. 31) la conoscenza di a_1, a_2, a_3, a_4 ed L determina univocamente a_5. D'altro canto, fissate che siano a_1, a_2, a_3, a_4 si hanno in tutto soltanto ∞^1 possibili posizioni per L, e quindi altrettante per a_5, il che non può essere.

L'assurdità dell'ammissione fatta in principio rimane così provata in ogni caso, sotto le restrizioni dianzi specificate per γ, onde l'asserto. Tali restrizioni risultano necessarie, come mostreremo nell'Osservazione del n. 52.

48. Rileviamo che, in base al n. 27,

I sistemi grafici elementari $\Sigma = \Sigma_{2,2}$ sono tutti e soli i sistemi di rette di un S_3 pascaliano costituiti dalle rette di una congruenza lineare ellittica (ossia a direttrici distinte, definite sopra un'estensione quadratica del campo base di S_3).

Avuto anche riguardo al n. 47, v'è ora da esaminare se e come si possa fibrare S_3 in modi diversi da quelli offerti dai suddetti sistemi Σ. Un primo risultato parziale in proposito vien fornito dal n. 46, ove si faccia $n = r = 2$; ma ora ci proponiamo la ricerca di tutte le nuove fibrazioni, la quale verrà sistematicamente perseguita nei successivi nn. 49-57.

Poichè due rette distinte di una fibrazione Φ di S_3 non possono avere un punto a comune, così si ha intanto subito che:

Qualunque sia il campo base di S_3, in ogni piano di S_3 giace al più una retta di Φ.

Completeremo quest'osservazione preliminare, mostrando che:

Una fibrazione Φ di un S_3 di Galois (il quale abbia cioé un campo base γ finito) ammette una ed una sola retta in ogni piano di S_3; sicchè Φ ha allora sempre carattere autoduale.

Invero, detto q l'ordine di γ, il numero delle rette di Φ vale q^2+1 (n. 22). Poichè per una retta di S_3 passano $q+1$ piani, così il numero delle coppie costituite da una retta di Φ e da un piano per essa è $(q^2+1)(q+1)$; ma questo uguaglia precisamente il numero q^3+q^2+q+1 dei piani di S_3, onde l'asserto.

49. È ben noto come — seguendo Klein — si possano rappresentare biunivocamente le rette di S_3 coi punti di una quadrica K di uno spazio S_5, avente ancora γ quale campo base (cfr. ad esempio BERTINI [3], cap. VI, nn. 22-26, oppure COXETER [4]). K contiene un primo sistema ∞^3 di piani (definiti su γ), i quali rappresentano i singoli punti di S_3 pensati quali centri di stelle ∞^2 di rette; ed un secondo sistema ∞^3 di piani, i quali rappresentano i singoli piani di S_3 pensati quali sostegni di piani rigati. Avuto riguardo ai nn. 21, 48, si ha quindi immediatamente che:

Alle fibrazioni Φ di S_3 mediante rette corrispondono, sulla quadrica K di Klein, le superficie (o sistemi ∞^2 di punti), F, incontrate in uno ed un sol punto da ogni piano di K del primo sistema. Una siffatta superficie F viene di conseguenza ad incontrare ogni piano di K del secondo sistema in al più un punto (esattamente in un sol punto se γ è finito).

Le fibrazioni elementari di S_3 sono quelle che hanno per imagini su K superficie quadriche ellittiche (o non rigate, segate su K da opportuni spazi tridimensionali di S_5).

50. Lo studio delle superficie F di cui sopra (imagini, sulla quadrica K di Klein, di fibrazioni di S_3 mediante rette) può — come vedremo — venire semplificato e talora condotto a fondo, facendo ricorso ad una proiezione stereografica della quadrica K (circa la quale, cfr. ad esempio BERTINI [3], cap. VI, nn. 15-19).

A tal fine, si fissino comunque un punto O di K ed un iperpiano S'_4 di S_5 non passante per O, e si associ ad ogni ulteriore punto P di K la sua proiezione P' da O su S'_4. Si viene così ad istituire una corrispondenza birazionale fra K ed S'_4, la quale trasforma il punto O nell'S'_3 segato su S'_4 dall'iperpiano tangente a K in O. Questo S'_3 sega K secondo una superficie quadrica, H, luogo dei punti P' di S'_4 che sono congiunti ad O da rette situate su K, e che hanno quindi l'omologo P indeterminato sulla relativa retta OP'.

La quadrica H contiene due regoli complementari (definiti l'uno e l'altro su γ), luoghi rispettivamente delle rette k_1, k_2 segate su S'_4 dai piani di K per O del primo e del secondo sistema. Un piano K che non passi per O, ed appartenga al primo od al secondo sistema, ha rispettivamente quale imagine in S'_4 un piano non giacente in S'_3 e passante per una retta del tipo k_1 o k_2; e viceversa.

Preso un qualsiasi punto P' di H, il relativo piano π tangente sega H nelle due generatrici k_1, k_2 uscenti da P'. Uno spazio tridimensionale Π di S'_4 passante per π è congiunto ad O da un iperpiano di S_5 che tocca K in un certo punto, P, della retta OP'; si ottiene così una corrispondenza biunivoca fra la punteggiata OP' ed il fascio di asse π degli spazi Π di S'_4, nella quale al punto O viene a corrispondere lo spazio S'_3 di appartenenza della superficie quadrica H.

Se ora consideriamo — sulla quadrica di Klein K — una superficie F imagine di una fibrazione Φ di S_3, possiamo proiettare K ed F stereograficamente scegliendo il centro della proiezione in un punto O di K non appartenente ad F. Allora F viene a possedere uno ed un sol punto (distinto da O) su ciascuno degli ∞^1 piani Ok_1 di K, del primo sistema, uscenti da O; ad ognuno P di tali punti viene a corrispondere, nell'S'_4 di proiezione, uno spazio Π distinto da S'_3 e passante per la relativa retta k_1 di H (talchè Π segherà H ulteriormente secondo una retta k_2). Designeremo con F^* l'insieme degli spazi Π che così si ottengono. I rimanenti punti P di F vengono proiettati da O in punti P' di S'_4, non giacenti su S'_3, l'insieme dei quali verrà denotato con F'. Va rilevato che, se γ è finito d'ordine q, l'insieme F^* viene a constare di $q+1$ spazi Π, onde il numero dei punti P' di F' è dato da:

$$(q^2+1)-(q+1)=q^2-q.$$

Avuto anche riguardo ai nn. 48, 49, da quanto sopra discende agevolmente la seguente caratterizzazione proiettiva delle proiezioni stereografiche delle imagini F su K delle fibrazioni Φ di S_3.

In uno spazio, quadridimensionale S'_4 su di un campo γ, si consideri una superficie quadrica H non degenere e rigata; e si designino con S'_3 lo spazio di appartenenza di H e genericamente con k_1, k_2 le generatrici di H del primo e del secondo sistema. La ricerca delle suddette imagini F equivale a quella delle coppie (F^*, F') così definite:

1) *F^* deve constare di ∞^1 spazi Π (tridimensionali) di S'_4, distinti da S'_3 e tangenti ad H, tali che ogni retta k_1 stia in uno ed un sol Π ed ogni retta k_2 stia in al più un Π (se γ è finito, d'ordine q, i Π sono complessivamente in numero di $q+1$ e v'è uno ed un solo di questi anche per ogni retta k_2).*

2) *F' consti di ∞^2 punti P' di S'_4, nessuno dei quali giaccia in S'_3 od in alcuno degli spazi Π di F^*; invece, vi dev'essere un sol punto P' di F' in ciascun piano di S'_4 che contenga una retta k_2, e che non stia in S'_3 e neppure nell'eventuale spazio Π contenente k_2, (se γ è finito d'ordine q, i punti P' risultano nello stesso numero q^2-q dei piani del tipo suddetto uscenti da una qualunque fissata retta k_2).*

51. Si ottengono subito particolari coppie (F^*, F'), soddisfacenti alle condizioni volute (n. 50), procedendo nel modo seguente. Si scelga in S'_4 un qualsiasi spazio S_3^* distinto da S'_3 e non tangente ad H; e sia C la conica (irriducibile) segata da S_3^* su H. Si fissi poi ad arbitrio una quadrica ellittica G di S_3^* che passi per C.

I piani che toccano H e G in un qualsiasi punto di C sono distinti, ed hanno a comune la retta tangente a C in quel punto, ond'essi sono congiunti da uno spazio a tre dimensioni, Π. La totalità F^* di questi Π e quella, F', dei punti di G non giacenti su C soddisfano manifestamente alle condizioni 1), 2) del n. 50.

Avuto riguardo al primo enunciato del n. 48, ed a ben note proprietà della rappresentazione kleiniana su K delle rette di S_3 e della proiezione stereografica di una quadrica (per le quali ved. ad esempio BERTINI, *loc. cit.*), risulta che:

Le coppie (F^*, F'), testé considerate, sono tutte e sole quelle relative a sistemi grafici elementari $\Sigma_{2,2}$.

52. Una categoria di coppie (F^*, F') soddisfacenti alle condizioni specificate nel n. 50, e nella quale rientrano quali casi particolari le coppie (F^*, F') di cui al n. 51, può venire definita nel modo che ora passiamo ad indicare. Le coppie in questione, sono precisamente le coppie (F^*, F') relative a fibrazioni Φ di S_3 mediante ∞^2 rette situate in un c o m p l e s s o l i n e a r e (necessariamente non speciale). Per una Φ siffatta, la corrispondente superficie F (n. 49) viene a giacere sulla quadrica a tre dimensioni segata su K da un iperpiano di S_5 (non tangente a K). Si può allora scegliere il centro della proiezione stereografica in un punto O di detta quadrica sezione, non situato su F, e procedere poi come al n. 50. Completando il ragionamento con semplici argomentazioni, che possono poi venire agevolmente invertite, si perviene così al seguente teorema.

Le fibrazioni Φ di S_3 mediante ∞^2 rette situate in un complesso lineare, sono quelle definite — giusta il n. 50 *— a partire da coppie* (F^*, F') *così ottenibili* (*da un' opportuna superficie* G).

Nell' S'_4 (*di cui al n.* 50) *si consideri un qualsiasi spazio tridimensionale* S^*_3, *distinto da* S'_3, *che non tocchi* H *e quindi seghi* H *lungo una conica* C *irriducibile. Si determini poi in* S_3^* *una superficie* (*od insieme* ∞^2 *di punti*), G, *che contenga* C *e goda delle seguenti due proprietà:*

1) *In ogni punto* P' *di* C, *la* G *ammetta un ben determinato piano tangente; esista cioè uno* (*ed un solo*) *piano di* S_3^* (*passante per la tangente in* P' *a* C *e necessariamente distinto dal piano di* C) *che abbia a comune con* G *il solo punto* P'.

2) *Ogni retta di* S_3^* *che si appoggi a* C *in un sol punto,* P', *e che*

non stia nel piano tangente a G in P', incontri G ulteriormente in uno ed un sol punto.

Corrispondentemente ad una superficie G siffatta, si ottiene F^* come totalità degli spazi Π che congiungono i piani tangenti ad H, G nei singoli punti P' di C, mentre F' è semplicemente l'insieme dei punti di G non situati su C.

In virtù del n. 51, i sistemi grafici elementari $\Sigma_{2,2}$ sono precisamente quelli che provengono nel modo suddetto da superficie G che siano quadriche ellittiche. Pertanto, avuto anche riguardo ai nn. 45, 47, risulta che:

Se il campo base γ non ha la caratteristica $p=2$ o se — essendo $p=2$ — γ è perfetto, ogni superficie G di S_3 che soddisfi alle condizioni poc'anzi specificate, e che non sia una quadrica ellittica, fornisce senz'altro un piano grafico non desarguesiano.

OSSERVAZIONE. - Questa proposizione, come già quella del n. 47, non si estende al caso in cui γ abbia la caratteristica $p=2$ e non sia perfetto. Allora, infatti, una congruenza parabolica di rette di S_3, la cui (unica) direttrice non sia definita su γ (e risulti così definita su di un'estensione quadratica inseparabile di γ), viene a costituire una fibrazione di S_3, ossia (n. 37) un sistema grafico $\Sigma_{2,2}$, alla quale tuttavia rimane coordinato — giusta il n. 38 — un piano grafico desarguesiano.

53. È facile vedere che, nell'ipotesi in cui il campo base γ sia il campo reale, esistono addirittura superficie G algebriche soddisfacenti alle condizioni indicate nella proposizione finale del n. 52.

Si ottiene un esempio significativo al riguardo (dipendente da un intero $m \geq 2$ arbitrario), introducendo in S_3^* coordinate non omogenee (x, y, z) e considerando la superficie G — non quadrica — di equazione

$$z = (x^2 + y^2)^m.$$

I piani $z = \text{cost.} > 0$ segano infatti questa G lungo coniche, una delle quali può venire identificata con la C; ed è inoltre chiaro che detta G viene anche a soddisfare alle condizioni 1), 2) del n. 51, in quanto essa risulta una superficie chiusa convessa ([10]).

I piani grafici non desarguesiani che corrispondentemente si ottengono (n. 52), possono in qualche modo venire raffrontati coi piani grafici algebrici non desarguesiani introdotti in B. SEGRE [13].

([10]) Si ha anzi, di più, che la superficie G — qualunque sia γ — presenta l'interessante particolarità (studiata nel caso generale in B. SEGRE [17], n. 17, 18) che *la congruenza delle sue tangenti asintotiche si spezza in due sistemi algebrici distinti, ciascuno dei quali non possiede elementi in γ, le singole tangenti asintotiche nei punti di G su γ ed i due sistemi algebrici suddetti essendo invece definiti su* $\gamma(\sqrt{-(2m-1)})$.

54. Relativamente alle superficie G di cui al n. 52, la situazione risulta assai diversa da quella adombrata al n. 53, qualora si ammetta — come ora faremo — che il campo base γ sia finito, diciamo d'ordine

$$q = p^h \qquad (p \text{ primo}, \ h \geq 1),$$

e quindi certamente perfetto. Allora G deve constare di q^2+1 punti di S_3 (n. 22); ed il modo più semplice (suggerito dal n. 53) per cercare di soddisfare alle condizioni richieste è quello di supporre la superficie G convessa, e cioè incontrata in al più due punti da ogni retta di S_3^*, oltrecchè passante per la conica C.

La prima di queste due ipotesi si traduce in ciò che G sia una (q^2+1)-calotta od ovaloide di S_3^* (secondo la terminologia di B. SEGRE [15], [16]), ed implica l'esistenza di un ben determinato piano tangente in ogni punto di G (cfr. BARLOTTI [2], nn. 3, 4). È quindi chiaro che le condizioni 1), 2) del n. 52 risultano allora entrambe soddisfatte.

Tuttavia, *se* $p > 2$, $h \geq 1$ *arbitrario, oppure* $p = 2$, $h = 2$, i soli ovaloidi di un S_3^* finito sono le quadriche ellittiche (ved. BARLOTTI [2], n. 3; PANELLA [6], n. 1; SEIDEN [24]); sicchè nelle ipotesi attuali non v'è la possibilità di soddisfare all'ulteriore condizione indicata alla fine del n. 52, e *non si ottiene così nessun piano grafico non desarguesiano.*

Se $p = 2$, $h \geq 3$, esistono invece *ovaloidi* G *di* S_3^* *che non sono quadriche.* Il primo esempio in proposito trovasi in B. SEGRE [15] (e riguarda il caso in cui $p = 2$, $h = 3$, ossia $q = 8$); una tale superficie G non serve però ai nostri scopi, in quanto *nessuna sua sezione piana è una conica* (cfr. MIGLIORE FELLEGARA [5], p. 74). Classi di ovaloidi diversi dalle quadriche sono poi state assegnate, per $q = 2^h$, $h \geq 3$ dispari, da TITS in [25], § 4, in [26], § 2 ed in [27], § 5 (col nome di ovoidi o σ-quadriche); e rimarrebbe da investigare *se, per* $q = 2^h$, $h \geq 3$, *esistono ovaloidi che non siano quadriche e che contengano almeno una conica* (gli ovoidi di TITS non soddisfano a quest'ultima condizione, in virtù del teor 7.1 di TITS [27]).

Un esame approfondito della suddetta questione ci allontanerebbe troppo dagli argomenti trattati nel presente lavoro, e sarà qui perciò tralasciato. Tanto più che — come vedremo — vi sono altri modi per pervenire a piani grafici non desarguesiani finiti utilizzando i precedenti sviluppi.

55. Ritorniamo alle considerazioni del n. 50 relative allo spazio S'_4 sopra un campo γ, in un iperpiano S'_3 del quale sia assegnata una superficie quadrica, H, non degenere e rigata; e volgiamoci in particolare al caso in cui il campo γ sia finito, d'ordine q. Mediante semplici argomentazioni, su cui qui per brevità sorvoliamo, si prova che le condizioni ivi ottenute per le coppie (F^*, F') possono venir ora enunciate sotto forma equivalente nel modo che segue.

a) F^* deve constare di $q+1$ spazi Π tridimensionali di S'_4, distinti da S'_3 e tangenti ad H in punti distinti, a due a due non coniugati rispetto ad H (e cioè non congiunti da una retta giacente su H).

b) F' deve constare di q^2-q punti di S'_4, nessuno dei quali stia in S'_3 od in uno spazio Π, in guisa inoltre che nessuna corda di F' abbia ad appoggiarsi alla H.

Se poi ci rifacciamo ai nn. 38, 45, 47, 50, 51, vediamo senz'altro che:

Ogni coppia (F^*, F') *soddisfacente alle suddette condizioni* a), b), *dà luogo ad un piano grafico finito d'ordine* q^2 (*avente cioè* q^2+1 *punti su ogni retta*). *Tale piano grafico risulta certamente* n o n *desarguesiano, nell'ipotesi che* F' n o n *giaccia in un iperpiano di* S'_4.

Ne risulta un procedimento geometrico per la determinazione di piani siffatti, il quale può facilmente espletarsi per via empirica quando q sia piccolo, come già mostrano i due esempi che seguono (nn. 56, 57) relativi ai casi $q=3$ e $q=5$.

56. Sia $q=3$, onde γ può venire identificato al campo degli interi ridotti m o d 3. Introdotte in S'_4 coordinate omogenee $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ su γ, si prenda quale S'_3 l'iperpiano di equazione $x_0=0$ e quale H la quadrica (non degenere e rigata) di equazioni:

$$x_0=0, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0. \tag{86}$$

È allora facile constatare che si viene a soddisfare alle condizioni a), b) del n. 55, qualora si definisca F^* come insieme dei $q+1=4$ iperpiani:

$$\begin{aligned}
\Pi_1: &\quad x_0+x_2+x_3+x_4=0,\\
\Pi_2: &\quad x_1+x_3+x_4=0,\\
\Pi_3: &\quad x_1+x_2+x_4=0,\\
\Pi_4: &\quad x_1+x_2+x_3=0;
\end{aligned}$$

e si assuma poi F' come insieme dei $q^2-q=6$ punti:

$$\begin{aligned}
&P'_1\ (1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0),\\
&P'_2\ (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0),\\
&P'_3\ (1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0),\\
&P'_4\ (1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0),\\
&P'_5\ (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1),\\
&P'_6\ (1\ \ 0\ \ -1\ \ -1\ \ -1).
\end{aligned}$$

Invero, si vede subito che i suddetti iperpiani Π sono distinti da S'_3 e toccano ordinatamente H nei punti

$$(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1),$$
$$(0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1),$$
$$(0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1),$$
$$(0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0),$$

due qualunque distinti dei quali non sono coniugati rispetto ad H; inoltre, nessuno dei punti P' pocanzi definiti sta su S'_3 o su alcuno di quei Π, e nessuna delle rette che li congiungono a due a due incontra S'_3 in un punto di H.

In virtù del n. 47 e della manifesta indipendenza lineare dei punti P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, ne discende che il *piano grafico d'ordine* 9 associato — giusta i nn. 45, 50 — alla coppia (F^*, F') testè considerata *risulta non desarguesiano.*

57. Sia ora $q = 5$, onde γ può venire identificato al campo degli interi ridotti mod 5. Introdotte in S'_4 coordinate omogenee $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ su tale γ, e rappresentata ancora la quadrica H colle equazioni (86), si definisca attualmente F^* come insieme dei $q+1=6$ iperpiani:

$$\Pi_{ij}: \qquad x_i + x_j + 2x_l + 2x_m = 0,$$

dove i, j, l, m designi una permutazione degli indici $1, 2, 3, 4$; si assuma poi F' come insieme dei $q^2 - q = 20 = 6+6+4+4$ punti P_{ij}, P'_{ij}, Q_i, Q'_i aventi tutti la prima coordinata $x_0 = 1$, e di cui quindi, nessuno giace su S'_3, essendo più precisamente ad esempio:

$$P_{12}\ (1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1), \qquad P'_{12}\ (1\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ -1),$$
$$Q_1\ (1\ \ -1\ \ 2\ \ 2\ \ 2), \qquad Q'_1\ (1\ \ 1\ \ -2\ \ -2\ \ -2).$$

Si verifica senza difficoltà che la suddetta coppia (F^*, F') soddisfa — in relazione anche ad H — alle condizioni a), b) del n. 55, e che inoltre (per esempio) i punti P_{23}, P_{34}, P_{42}, P'_{34}, Q'_1 sono linearmente indipendenti fra loro. Pertanto, quella coppia senz'altro fornisce un *piano grafico non desarguesiano d'ordine* 25.

§ XI. - Un problema sulle collineazioni, e conseguenti costruzioni di sistemi grafici non elementari e di geometrie non desarguesiane.

58. Lo studio dei sistemi grafici $\Sigma_{n,r}$ di un S_{s-1} pascaliano potrebbe venir perseguito col riportarlo sulla grassmanniana degli S_{n-1} di S_{s-1}, gene-

ralizzando così ciò che si è fatto al § X nel caso più semplice $n = r = 2$, $s = 4$.

Nel presente paragrafo seguiremo invece un'altra via, di carattere più semplice e diretto, poggiante sulle osservazioni contenute nel numero successivo. Per ragioni di natura espositiva ci limiteremo a considerare sistemi grafici entro spazi S_{s-1} definiti sopra un *campo* γ *finito*, il cui ordine denoteremo al solito con $q = p^h$, sebbene parte di quanto diremo continui a valere con lievi modifiche sopra un qualsiasi campo base.

Sotto quell'ipotesi, il teorema del n. 27 e la seconda parte del primo teorema del n. 45 ci consentono di restringerci all'eventualità in cui *si abbia* $r = 2$, talchè (n. 37) i sistemi $\Sigma_{n,r}$ di cui ci occuperemo non saranno in definitiva che *fibrazioni* Φ *di un* S_{2n-1} *di Galois mediante* S_{n-1}.

59. Con riferimento ad una qualsiasi siffatta fibrazione Φ (n. 58), fissiamo comunque uno, ν, dei suoi S_{n-1} ed n distinti spazi n-dimensionali (su γ) giacenti in S_{2n-1}, passanti per ν e — com'è di certo possibile — tali che S_{2n-1} ne sia lo spazio congiungente. Denoteremo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ quegli spazi (presi in un ordine arbitrario) e rispettivamente con $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ gli insiemi (a due a due disgiunti) dei loro punti non situati su ν; è chiaro che ciascuno di questi insiemi viene a constare di q^n punti, e che n punti scelti comunque uno in ciascuno di essi risultano sempre linearmente indipendenti fra loro.

Uno qualsivoglia degli S_{n-1} di Φ distinti da ν, complessivamente in numero di q^n (n. 22), è sghembo con ν ed incontra quindi α_i in uno ed un sol punto, A_i, non giacente in ν ossia situato in α_i^*. Viceversa, per ogni punto $A_i \in \alpha_i^*$ passa uno ed un sol S_{n-1} di Φ, certamente distinto da ν. Si ha dunque che:

Fra le varie coppie d'insiemi α_i^* la fibrazione Φ induce riferimenti biunivoci coerenti [11], *in guisa che i q^n S_{n-1} di Φ distinti da ν risultano precisamente gli spazi congiungenti le q^n n-ple di punti omologhi di detti insiemi.*

60. Esaminiamo ora particolarmente il caso in cui la fibrazione Φ (ossia il relativo sistema grafico $\Sigma_{n,r}$) sia elementare. Conseguentemente (n. 27), gli spazi S_{n-1} di Φ risultano incidenti ad n rette (69); e siano $N_1, N_2, \ldots, N_n$ i punti d'appoggio di queste ultime con lo spazio ν (punti che singolarmente sono definiti in un'estensione d'ordine n del campo base γ di S_{2n-1}, e non in γ).

Quando un punto A descrive una generica retta T situata in α_i (incontrante quindi ν in un punto), l'S_{n-1} di Φ uscente da A genera una V_n^n di Segre

(11) Tali cioè che, se $i \neq j \neq l$, il prodotto dei riferimenti fra α_i ed α_j e fra α_j ed α_l sia proprio il riferimento fra α_i ed α_l se $i \neq l$ ed il riferimento identico se $i = l$.

di cui ν risulta uno spazio generatore, mentre la T e le rette (69) ne sono delle direttrici. Ciascuno degli altri $n-1$ spazi n-dimensionali α_j $(j=1, 2, \ldots, n;\ j \neq i)$, contenendo quello spazio $(n-1)$-dimensionale generatore ν, incontra ulteriormente la V_n^n di Segre lungo una direttrice, la quale sarà pertanto il luogo del punto che viene a corrispondere su α_i al suddetto punto A nel riferimento fra α_i e α_j, e che risulterà riferita alla T omograficamente. È poi subito visto che, se la retta T di α_i si specializza in una passante per uno comunque fissato dei suddetti punti N, lo stesso accade della retta corrispondente su α_j. Abbiamo così provato che:

Quando la fibrazione Φ è e l e m e n t a r e, *ciascuno dei riferimenti da essa indotti — a norma del* n. 59 — *fra due diversi spazi α risulta* o m o g r a f i c o, *e lascia* f i s s o ν (*quale sottospazio di ognuno dei suddetti α*), *come pure ciascuno degli n punti d'appoggio di ν con le direttrici di Φ.*

61. In base al n. 59, la ricerca delle f i b r a z i o n i Φ di S_{2n-1} mediante S_{n-1} viene ricondotta a quella di opportuni r i f e r i m e n t i fra gli insiemi $\alpha_i^* = \alpha_i - \nu$ definiti da n spazi n-dimensionali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ che contengano un dato spazio $(n-1)$-dimensionale ν e siano congiunti dall'S_{2n-1}. In virtù del n. 60, se tali riferimenti n o n sono omografici la corrispondente fibrazione Φ n o n è certo elementare.

Un modo interessante per ottenere riferimenti siffatti viene porto dal seguente teorema.

α_i, α_i^* e ν avendo i significati testé richiamati, sia C una c o l l i n e a z i o n e *dello spazio ν in sé, la quale (sul campo base γ a questo inerente) risulti priva di spazi subordinati uniti di tutte le dimensioni* 0, 1, ..., $n-2$. *Per* $i=1, 2, \ldots, n-1$, *si costruisca poi — com'è certamente possibile — una collineazione fra α_i ed α_{i+1} che muti in sé lo spazio ν, subordinando in esso la C, e — a partire da questi $n-1$ riferimenti — si definiscano in modo coerente i vari riferimenti fra gli spazi α presi a due a due* ([12]). *Allora lo spazio ν e gli S_{n-1} congiungenti le q^n n-ple di punti omologhi di $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ vengono a costituire una* f i b r a z i o n e *di S_{2n-1}.*

Siano invero $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ed $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ due distinte qualsiansi di quelle n-ple, ed S_{n-1}, S'_{n-1} i loro spazi congiungenti. Vogliamo anzitutto dimostrare che questi ultimi risultano sempre s g h e m b i fra loro.

Rileviamo all'uopo che (per $i=1, 2, \ldots, n$) i punti A_i, A'_i sono distinti, e congiunti quindi da una determinata retta di α_i, la quale incontrerà ν in un punto, P_i, definito su γ. Le n rette AA' si corrispondono nei riferimenti

([12]) Il riferimento fra α_i ed α_j (ove $1 \leq i < j \leq n$) sarà così precisamente il prodotto dei riferimenti fra α_i ed α_{i+1}, α_{i+1} ed α_{i+2}, ..., α_{j-1} ed α_j, e subordinerà quindi la collineazione C^{j-i} sullo spazio ν.

fra gli spazi α; ne consegue che P_i dev'essere il trasformato di P_1 mediante C^{i-1}. Da qui dedurremo che:

I punti $P_1, P_2, \dots, P_i$ sono in ogni caso linearmente indipendenti fra loro.

Questa proprietà essendo ovvia per $i=1$, basterà dimostrarla per $i>1$. A tal fine, potremo procedere per induzione rispetto ad i, ammettendo di avere già stabilito che i punti $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$ sono linearmente indipendenti, e congiunti quindi da un S_{i-2} subordinato di ν. Se — per assurda ipotesi — i punti $P_1, P_2, \dots, P_i$ risultassero dipendenti, dovrebbe P_i giacere in S_{i-2}. Ma allora, poichè C muta ordinatamente $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$ in $P_2, P_3, \dots, P_i$, lo spazio S_{i-1} risulterebbe unito per C, in contrasto con quanto inizialmente ammesso relativamente alla C.

Questa contraddizione dimostra l'asserto, il quale (per $i=n$) implica che lo spazio congiungente i punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ abbia dimensione $n-1$, eppertanto coincida con ν.

Lo spazio congiungente S_{n-1} ed S'_{n-1} contiene manifestamente ognuna delle rette $A_iA'_i$, e quindi pure ciascun punto P_i. Esso contiene così lo spazio $\nu = P_1 P_2 \dots P_n$, eppertanto altresì ognuno degli spazi $\alpha_i = \nu A_i$, e coincide dunque con S_{2n-1}. Ciò dimostra appunto che:

Gli S_{n-1} considerati nel teorema da stabilire sono sghembi fra loro a due a due (oltrecchè sghembi rispetto a ν).

Il teorema risulterà perciò provato, non appena si rilevi ancora che lo spazio ν ed i q^n suddetti spazi S_{n-1} invadono completamente S_{2n-1} (talchè ogni punto di S_{2n-1} deve stare in uno ed un solo dei q^n+1 spazi testè considerati). Invero, il numero complessivo dei punti di quegli spazi è $(q^n+1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\dots+q+1)$ ed uguaglia quindi quello $q^{2n-1}+q^{2n-2}+\dots+q+1$ dei punti di S_{2n-1}, onde l'asserto.

OSSERVAZIONE I. - Quando sia stata scelta la C, per definire i riferimenti fra gli insiemi α^* — di cui all'enunciato del precedente teorema — si può assegnare ad arbitrio una loro n-pla di punti omologhi $A_1 A_2 \dots A_n$. Preso poi in α_1^* il punto $A'_1 \neq A_1$, ciò determina la retta $A_1A'_1$, e quindi pure il punto P_1 d'incontro di questa con ν ed il trasformato P_i di P_1 mediante C^{i-1} $(i=2, 3, \dots, n)$. Si può allora scegliere ad arbitrio A'_i sulla retta A_iP_i, purchè distinto dai punti A_i, P_i, e ciò viene a determinare univocamente le collineazioni fra gli spazi α.

OSSERVAZIONE II. - Una fibrazione di S_{2n-1} ottenuta come indicato dal precedente teorema (tenuto anche conto dell'Oss. I), risulta generale nel senso precisato al principio del n. 45.

OSSERVAZIONE III. - Con le notazioni impiegate nella dimostrazione del teorema, S_{n-1}, S'_{n-1} e ν sono tre spazi della fibrazione ivi considerata, aventi le n rette $A_iA'_i$ quali trasversali comuni. Poichè gli spazi $(n-1)$-dimensionali generatori della V_n^n di Segre definita da detti spazi punteggiano omograficamente le rette a questi incidenti, ne discende che la fibrazione in questione soddisfa alla *condizione* $\mathcal{C}$ (di cui al n. 43) in relazione agli spazi S_{n-1}, S'_{n-1} e ν se, e soltanto se, i riferimenti da essa indotti fra le rette $A_iA'_i$ risultano omografici; per il che occorre e basta che C sia un'omografia.

62. Supponiamo ora che il campo γ di Galois non sia un campo fondamentale, e cioè abbia ordine $q = p^h$ con $h \geq 2$, ond'esso ammetterà qualche *automorfismo non identico.* In quest'ipotesi, abbiamo buone ragioni per ritenere valida la congettura (dimostrata più oltre per $n = 2, 3, 4$) secondo cui:

esista qualche collineazione C non omografica di uno spazio ν su γ di dimensione $n - 1$ (≥ 1) qualsiasi in sé che, sul campo base γ di ν, risulta del tutto priva di spazi uniti di ogni dimensione $0, 1, \ldots, n-2$.

Il teorema del n. 61 porge allora una fibrazione di S_{2n-1} mediante S_{n-1}, la quale — in forza del n. 60 — risulta non elementare. In virtù dell'Oss. II del n. 61 e della seconda proposizione del n. 45, il corrispondente sistema grafico $\Sigma_{n,2}$ è di certo non desarguesiano, e dà quindi luogo a piani grafici finiti non desarguesiani, d'ordine $q^n = p^{hn}$. Pertanto:

Ammessa la validità della precedente congettura, si ha che ogni spazio S_{2n-1} di Galois sopra un campo non fondamentale può venir fibrato mediante S_{n-1} in modo non elementare col procedimento del n. 61; *e ciò porge dei piani grafici finiti non desarguesiani d'ordine p^k, per ogni scelta di p primo e di k non primo.*

Ad altre fibrazioni non elementari conduce il procedimento del n. 46 *nell'ipotesi che sia $q > 2$; e ciò fornisce ulteriori piani grafici finiti non desarguesiani d'ordine p^k, per ogni scelta di p primo dispari e di $k > 1$, come pure per $p = 2$ e k non primo.*

63. Stabiliamo anzitutto la *validità della congettura formulata al* n. 62, *nell'ipotesi che (si abbia $h \geq 2$ e) ν sia una retta* $(n = 2)$.

Il campo γ viene allora ad ammettere notoriamente in tutto $h - 1$ automorfismi non identici (n. 18)

$$\sigma_i: \; x \to x^{p^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h-1).$$

Una collineazione C non omografica di ν in sè sarà dunque inerente ad uno σ_i di questi, e potrà quindi rappresentarsi con un'equazione del tipo

$$C: \; ax^{p^i}x' + bx^{p^i} + cx' + d = 0,$$

ove a, b, c, d sono elementi di γ soggetti alla condizione

$$ad - bc \neq 0, \tag{87}$$

ed x, x' denotano le coordinate (proiettive non omogenee) di due punti omologhi rispetto ad un medesimo riferimento.

I punti uniti della C essendo conseguentemente dati dalle soluzioni dell'equazione

$$ax^{p^i+1} + bx^{p^i} + cx + d = 0, \tag{88}$$

il nostro assunto consisterà nel provare che:

Si possono scegliere in γ *gli elementi* a, b, c, d *soddisfacenti alla* (87), *in guisa tale che l'equazione* (88) *risulti* ***priva*** *di soluzioni* x *in* γ.

A tale scopo, incominciamo col fissare arbitrariamente a, b, c in γ, con la sola restrizione che si abbia $a \neq 0$ ed inoltre

$$c \neq b^{p^i}/a^{p^i-1}. \tag{89}$$

Allora la (88) viene ad istituire una dipendenza fra le variabili x, d, associante ad ogni $x \in \gamma$ uno ed un solo $d \in \gamma$, onde le coppie (x, d) in γ soddisfacenti alla (88) risultano esattamente in numero di q. V'è d'altronde soltanto un $d \in \gamma$ per cui non valga la (87), espresso da $d = a^{-1}bc$; in corrispondenza a questo, la (88) ammette in γ (almeno) le due radici x date da:

$$x = -a^{-1}b, \qquad x^{p^i} = -a^{-1}c,$$

le quali sono di certo distinte, in forza della (89).

Se per ogni ulteriore d in γ la (88) avesse qualche radice x in γ, le coppie (x, d) in γ soddisfacenti alla (88) risulterebbero in numero superiore a q, in contrasto con quanto sopra. Pertanto, scelti a, b, c, in γ nel modo indicato, v'è sicuramente in γ qualche d che non soddisfa alla (87) ed in corrispondenza al quale la (88) non ha soluzioni x in γ; e ciò stabilisce l'asserto.

Ne conseguono dunque *la prima parte della proposizione data nel penultimo capoverso del* n. 62 *per* $n = 2$ e *la seconda per ogni* k *pari* > 2, i piani non desarguesiani di cui ivi è detto venendo forniti in modo esplicito da ciò che precede.

64. Perverremo ad un'altra parziale dimostrazione della congettura enunciata al principio del n. 62, attraverso allo studio delle particolari collineazioni C rappresentate mediante equazioni del tipo:

$$zx'_i = c_i x_{i+1}^p \qquad (i = 1, 2, \dots, n); \tag{90}$$

in esse, z designa un fattore di proporzionalità, elemento non nullo di γ, x_1 ($\equiv x_{n+1}$), $x_2, \ldots, x_n$ sono coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio ν $(n-1)$-dimensionale sopra un campo γ finito, d'ordine

$$q = p^h \qquad \text{(con } p \text{ primo, } h \geq 2), \tag{91}$$

le c sono elementi non nulli di γ, ed x, x' denotano punti di ν omologhi in C.

Le (90) mostrano che C è non omografica (in virtù dell'ipotesi $h \geq 2$), e che i punti uniti di C si hanno risolvendo il sistema

$$z x_i = c_i x_{i+1}^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; x_{n+1} = x_1).$$

È quindi subito visto che, posto per abbreviare

$$m = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} = (p^n - 1)/(p-1), \tag{92}$$

$$k = c_1 c_2^p c_3^{p^2} \ldots c_n^{p^{n-1}}, \tag{93}$$

la compatibilità in γ del suddetto sistema per valori non tutti nulli (e quindi tutti $\neq 0$) delle x, implica che risulti

$$z^m = k \tag{94}$$

qualora, com'è lecito, si assuma inoltre $x_1 = x_{n+1} = 1$.

Osserviamo ora che, se si introduce l'intero positivo $t = p - 1$, la (92) fornisce

$$m = [(t+1)^n - 1]/t \equiv n \qquad (\text{mod } t),$$

ond'è;

$$(m, p-1) = (n, p-1).$$

Inoltre, avuto riguardo alle (91), (92) ed al lemma del n. 22, si ha:

$$(m(p-1), q-1) = p^{(n, h)} - 1.$$

Pertanto, l'intero

$$\mu = (m, q-1) \tag{95}$$

risulta maggiore dell' unità se, e soltanto se, si ha:

$$(n, (p-1)h) > 1. \tag{96}$$

Ne discende che, ove *sussista la* (96), e sia quindi $\mu > 1$, la collineazione C definita dalle equazioni (90) risulta *priva di punti uniti* (a coordinate in γ) quando in tali equazioni si scelgano le c con opportune avvertenze. Invero, se si rammenta la (95) e ad esempio B. SEGRE [17, 18], n. 79, si ha che la compatibilità della (94) per valori di z in γ equivale a ciò che si abbia

$$k^{(q-1)/\mu} = 1, \tag{97}$$

e cioè che k risulti potenza μ^{ma} di qualche elemento di γ; mentre poi in base alla (93), assegnate in γ comunque le $c_2, c_3, \ldots, c_n$ non nulle, è certamente possibile di scegliere c_1 in guisa che k *non soddisfi alla* (97).

Una C siffatta risulta anche *priva d'iperpiani uniti*, come subito si desume dalle equazioni rappresentanti C in coordinate d'iperpiani (per cui ved. ad esempio B. SEGRE [11, 18], n. 137), le quali sono ancora del tipo delle (90).

65. Se $n \geq 4$, l'osservazione contenuta nell'ultimo capoverso del n. 64 non si trasporta senza modifiche agli spazi subordinati d-dimensionali di ν, ove $1 \leq d \leq n-3$. Invero, la trasformazione fra le coordinate grassmanniane di due S_d che si corrispondano nella C viene allora a spezzarsi in due o più sostituzioni lineari di vari ordini, ciascuna di tipo consimile a quello della (90); e v'è quindi da discutere la compatibilità della condizione cui si è pervenuti per k al n. 64 con le analoghe condizioni relative alle diverse sostituzioni lineari che così si ottengono per $d = 1, 2, \ldots, n-3$.

Ci limiteremo qui per brevità al caso in cui si abbia

$$n = 4, \qquad d = 1. \tag{98}$$

La sostituzione lineare indotta dalle (90) sulle coordinate plückeriane di retta:

$$r_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

viene ora manifestamente a spezzarsi nella

$$zr'_{13} = c_1 c_3 r_{24}^p, \qquad zr'_{24} = (-1)^p c_2 c_4 r_{13}^p, \tag{99}$$

e nella

$$zr'_{12} = c_1 c_2 r_{23}^p, \qquad zr'_{23} = c_2 c_3 r_{34}^p, \qquad zr'_{34} = c_3 c_4 r_{41}^p, \qquad zr'_{41} = c_4 c_1 r_{12}^p. \tag{100}$$

Supposto inoltre

(101) $$h \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4),$$

ed assunto per semplificare

$$c_2 = c_3 = c_4 = 1,$$

poichè $p+1$ entra a fattore nell'intero μ dato dalla (95), la condizione che k non soddisfi alla (97) è certamente soddisfatta ove si ammetta che:

(*i*) c_1 non sia potenza d'indice $p+1$ di un elemento di γ.

Con ciò, la sostituzione lineare (99) viene senz'altro a soddisfare all'analoga di detta condizione per k, ove si supponga $p=2$; mentre invece, se $p \geq 3$ e cioè se p è dispari, per tale scopo basterà supporre che:

(*ii*) $-c_1$ non sia una potenza d'indice $p+1$.

Affinchè un fatto consimile a quello si presenti per la sostituzione lineare (100), basta supporre: se $p=2$, che

(*iii*) c_1 non sia una potenza d'indice p^2+1, onde lo stesso sarà di $c_1^{p^3+1}$;

e, se $p \geq 3$, che

(*iv*) c_1 non sia una potenza d'indice $(p^2+1)/2$, onde allora $c_1^{p^3+1}$ non sarà una potenza d'indice p^2+1.

Rileviamo ora che, se $p=2$, il numero complessivo degli elementi non nulli di γ che non soddisfano a qualcuna delle (*i*), (*iii*) risulta inferiore a

$$\frac{q-1}{p+1} + \frac{q-1}{p^2+1} < q-1;$$

e che, se $p \geq 3$, il numero complessivo degli elementi non nulli di γ che non soddisfano a taluna delle (*i*), (*ii*), (*iv*) risulta inferiore a

$$2\frac{q-1}{p+1} + 2\frac{q-1}{p^2+1} < q-1.$$

É dunque in ogni caso possibile di soddisfare simultaneamente alle varie condizioni dianzi specificate per c_1.

Si conclude dunque che:

Se vale la (101) *e si sceglie* c_1 *nel modo testé indicato, la collineazione* *di S_3 di equazioni*

$$zx'_1 = c_1 x_2^p, \qquad zx'_2 = x_3^p, \qquad zx'_3 = x_4^p, \qquad zx'_4 = x_1^p$$

risulta del tutto priva di punti, rette e piani uniti sul campo γ.

66. Ritorniamo a considerare uno spazio $(n-1)$-dimensionale ν sopra il campo γ, d'ordine $q = p^h$, nel quale spazio le $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denotino coordinate proiettive omogenee di punto.

Ampliamo γ in un campo δ, d'ordine q^n, mediante un'estensione d'ordine $n \geq 2$ per la quale conserviamo le notazioni del n. 18. Corrispondentemente, lo spazio ν verrà ad a m p l i a r s i in uno spazio ν^* su δ, ancora $(n-1)$-dimensionale; ed in ν^* potremo utilmente effettuare un cambiamento di coordinate, che muti le $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nelle $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ legate a quelle mediante la sostituzione lineare invertibile (a coefficienti in δ) espressa dalle

$$\xi_i = x_1 + \theta_i x_2 + \theta_i^2 x_3 + \dots + \theta_i^{n-1} x_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove le θ_i siano precisamente le (55) del n. 18, prese nell'ordine ivi specificato.

L'automorfismo ρ di δ, che trasforma ogni elemento nella propria potenza q^{ma}, lascia fissi i singoli elementi di γ e muta θ_i in θ_{i+1} (ove $\theta_{n+1} = \theta_1$). Pertanto, se le x sono tutte elementi di γ, il punto $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vien mutato da ρ in $(\xi_2, \dots, \xi_n, \xi_1)$. Viceversa, ove questo accada, vi dev'essere un $z \in \delta$ tale che

$$\xi_i^q = z\xi_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n; \ \xi_{n+1} = \xi_1).$$

Ne conseguono le

$$(x_1^q - zx_1) + \theta_{i+1}(x_2^q - zx_2) + \dots + \theta_{i+1}^{n-1}(x_n^q - zx_n) = 0,$$

equivalenti alle $x_i^q = zx_i$, le quali implicano che i mutui rapporti delle x_i siano elementi di γ.

Ciò premesso, fissiamo un e l e m e n t o p r i m i t i v o di δ, ossia un elemento $\omega \neq 0$ tale che si abbia $\omega^a = \omega^b$ se, e soltanto se, $a \equiv b$ modulo $q^n - 1$, ed introduciamo gli elementi non nulli di δ:

$$c_i = \omega^{q^i - 1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{102}$$

i quali manifestamente soddisfano alla

$$c_n = 1$$

ed alle

$$c_1^q : c_2^q : \dots : c_{n-1}^q : c_n^q = c_2 : c_3 : \dots : c_n : c_1 .$$

Scelto poi un qualunque intero r positivo, consideriamo la collineazione C_r^* di ν^* in sè definita dalle equazioni:

$$z\xi'_i = c_i \xi_i^{p^r} \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{103}$$

inerente quindi all'automorfismo di δ denotato al n. 18 con τ_r, il quale subordina σ_r in γ. Se ξ è un punto di ν, ossia se valgono le

$$\xi_1^q : \xi_2^q : \dots : \xi_{n-1}^q : \xi_n^q = \xi_2 : \xi_3 : \dots : \xi_n : \xi_1 , \tag{104}$$

risulta altresì

$$\xi_1'^q : \xi_2'^q : \dots : \xi_{n-1}'^q : \xi_n'^q = \xi'_2 : \xi'_3 : \dots : \xi'_n : \xi'_1 ,$$

eppertanto anche ξ' è un punto di ν. La C_r^* induce dunque in ν una c o l l i n e a z i o n e , C_r, inerente a σ_r; in virtù del n. 18, si ha quindi che — affinchè C_r risulti n o n o m o g r a f i c a — occorre e basta che sia

$$r \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ h). \tag{105}$$

Un punto ξ di ν^* che stia in ν deve soddisfare — come s'è visto — alle (104), sicchè n e s s u n a delle sue coordinate ξ_i può annullarsi. In base alle (102), (103), se un punto ξ siffatto è unito per C_r, e quindi altresì per C_r^*, dev'essere

$$(\xi_n/\xi_1)^{p^r-1} = c_1/c_n = \omega^{q-1}.$$

Vi sarà poi un intero m tale che si abbia $\xi_n/\xi_1 = \omega^m$, onde l'ultima relazione fornisce:

$$m(p^r - 1) \equiv q - 1 = p^h - 1 \qquad \mathrm{mod}\ (p^{hn} - 1).$$

Questa implica che $(p^r - 1,\ p^{hn} - 1)$ divida $p^h - 1$, ossia, in forza del lemma del n. 22, che

$$(r,\ hn) \quad \text{divida } h. \tag{106}$$

È chiaro ora che la (106) non è certamente soddisfatta se p. es. n *ammette un divisore che non divida h*, e si assume *r uguale a tale divisore.* In tal caso si ha dunque che la collineazione C_r dello spazio ν in sè risulta *priva di punti uniti* (a coordinate in γ). Essa è altresì *priva d'iperpiani uniti*, in base ad un'argomentazione consimile a quella indicata alla fine del n. 64.

67. Se $n \geq 4$, per la determinazione degli spazi uniti di C_r, delle varie dimensioni $d = 1, 2, \ldots, n-3$, valgono considerazioni analoghe a quelle adombrate al principio del n. 65 circa gli spazi uniti della collineazione ivi denotata con C. Perciò, anche ora — per semplificare — analizzeremo la questione soltanto nell'ipotesi che valgano le (98); ma, a differenza di ciò ch'è stato fatto per la C al n. 65, attualmente supporremo che non valga la (101), sicchè dovremo unicamente esaminare le possibilità che sia $h \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$.

Introduciamo a quello scopo, nello spazio tridimensionale ν^* (di cui al n. 66), coordinate plückeriane di retta

$$\rho_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

ed osserviamo che — in base al secondo capoverso del n. 66 — affinchè una retta ρ_{ij} di ν^* stia addiritura in ν occorre e basta che risulti:

$$\rho_{13}^q : \rho_{24}^q : \rho_{12}^q : \rho_{23}^q : \rho_{34}^q : \rho_{41}^q = \rho_{24} : -\rho_{13} : \rho_{23} : \rho_{34} : \rho_{41} : \rho_{12} .$$

Ne consegue che, per una retta siffatta, o le ρ_{13}, ρ_{24} oppure le $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}, \rho_{41}$ sono tutte diverse da zero. In base alle (103), (102), la trasformata di detta retta mediante C_r ha coordinate ρ'_{ij} soddisfacenti nel primo caso alla

$$\rho'_{13}/\rho'_{24} = \omega^{(q-1)(q^2+1)} \; (\rho_{13}/\rho_{24})^{p^r}$$

e nel secondo alla

$$\rho'_{12}/\rho'_{41} = \omega^{q^2-1} \; (\rho_{12}/\rho_{41})^{p^r}.$$

Affinchè in ν possano esservi rette unite rispetto a C_r, occorre dunque che od $\omega^{(q-1)(q^2+1)}$ oppure ω^{q^2-1} risulti la potenza (p^r-1)-ma di un qualche elemento (non nullo) di δ.

Orbene, si può scegliere r — come tosto vedremo — in guisa tale che nè l'una nè l'altra di queste condizioni risulti soddisfatta e che valga la (105); con che la corrispondente C_r sarà di conseguenza *non omografica* e del tutto *priva di punti, rette e piani uniti* su γ. Mediante argomentazioni analoghe a quelle svolte nel penultimo capoverso del n. 66, e tenuto conto della prima delle (98), si dimostra infatti ad es. che — se $h \equiv 1, 3$ od $h \equiv 2 \pmod 4$ — rispettivamente $r = 4$ oppure $r = 8$ viene appunto ad avere i suddetti requisiti.

68. L'analisi precedente mostra fra l'altro che:

La congettura del n. 62 *è valida incondizionatamente per* ($h \geq 2$ *ed*) $n = 3, 4$.

Invero, nell'ipotesi che si abbia $n = 3$ la congettura stessa rimane in particolare stabilita dal n. 64 se $h \equiv 0 \pmod 3$ (in quanto allora la (96) è manifestamente verificata), e dal n. 66 se $h \not\equiv 0 \pmod 3$ (in quanto allora la (105) risulta valida per $r = 3$). Parimente, se $n = 4$ basta applicare il n. 65 od il n. 67, secondochè sussista o meno la (101).

La proposizione ottenuta nel penultimo capoverso del n. 62 vale dunque anche per $n = 3, 4$, e dà così il mezzo per costruire esplicitamente dei piani grafici non desarguesiani di un qualunque ordine p^{3h} o p^{4h} (con p primo, $h \geq 2$).

§ XII. - Alcune questioni aperte.

69. Il presente lavoro suggerisce tutto un complesso di problemi, in gran parte di tipo nuovo, che potranno formare oggetto di ricerche successive.

Sorvolando su quelle — di natura algebrica — principalmente connesse alla parte prima, segnaliamo invece in modo particolare le molteplici questioni collegate con la *geometrizzazione delle estensioni algebriche* e con lo studio e le possibili applicazioni dei relativi «*modelli*». Si presenta così invero un nuovo vasto campo di ricerche geometriche, che largamente generalizza quello ormai classico relativo al passaggio dal reale al complesso ed alla geometria iperalgebrica, e che meriterebbe di venire approfondito nelle varie direzioni: proiettiva, algebrico-geometrica e funzionale, con riguardo pure alle proprietà di natura metrica o differenziale od aritmetica (queste ultime, specialmente significative nel caso degli spazi finiti: ved. quale esempio il n. 20).

Avrebbe infine interesse di allargare l'indagine al caso delle *estensioni inseparabili* (che appaiono qui, ma soltanto assai di sfuggita, nell'Osservazione del n. 52).

70. Un altro degli argomenti trattati in questo lavoro, che appare certamente degno di ulteriori investigazioni, è quello delle *fibrazioni proiettive* e, in particolare, dei *sistemi grafici.*

Speciale attenzione andrà posta in proposito all'eventualità che il campo base del relativo spazio ambiente sia reale o finito. Mentre nel primo caso sarà utile studiare fibrazioni soggette ad opportune condizioni di continuità o differenziabilità od algebricità, nel secondo converrà ricorrere in alcuni casi a procedimenti di calcolo elettronico, adeguatamente combinati con quelli suesposti. Così — fra l'altro — risulterà ad es. non troppo difficile di completare i risultati dei nn. 48, 56, 57, determinando tutte le fibrazioni mediante rette di un S_3 sopra un campo finito d'ordine abbastanza piccolo.

Fra le svariate questioni suggerite in modo spontaneo dallo studio precedentemente svolto delle fibrazioni di uno spazio di Galois, segnaliamo quella di decidere se in un tale spazio — fra le superficie G di cui al n. 52 — ne esista taluna che non risulti un ovaloide (per il caso degli ovaloidi, cfr. il n. 54). Più in generale, sorge al riguardo il problema di costruire esempi di coppie (F^*, F') soddisfacenti alle condizioni a), b) del n. 55, diversi sia da quelli ottenuti nei nn. 54, 56, 57 che da quelli forniti dai nn. 46, 63.

Uno studio approfondito delle *collineazioni* fra spazi pascaliani sovrapposti — in relazione specialmente ai loro *elementi uniti* — riuscirebbe di grandissimo interesse, anzitutto in sè ed in collegamento con le questioni adombrate nel n. 69; ma altresì in vista dell'eventualità di giungere attraverso ad esso a una dimostrazione generale della *congettura* qui formulata nel n. 62, in base alla quale ampie classi di fibrazioni vengono a potersi derivare dal n. 61.

71. Molte addizionali ricerche dovrebbero venir compiute attinenti alle *geometrie non desarguesiane* qui ottenute, specie nel caso di quelle finite.

Si dovrà anzitutto cercare di meglio determinare e possibilmente classificare i piani grafici R definiti in base al teorema del n. 38, e raffrontare inoltre i singoli piani non desarguesiani così ottenibili con quelli (del loro stesso ordine) attualmente conosciuti.

Va rilevato che — in ciascuno dei piani grafici R forniti dal teorema del n. 38 — i teoremi di Desargues e di Pappo-Pascal hanno una validità parziale i cui limiti sarebbe opportuno precisare nei singoli casi, in relazione anche allo studio delle omologie (generali o speciali) ammesse dal piano stesso. A tale scopo dovrà tenersi presente il fondamentale risultato di ANDRÉ [1], § 3, in base al quale quei piani vengono ad identificarsi coi cosiddetti piani di traslazione; e potranno altresì venire utilmente adoperati alcuni dei risultati esposti in [20] dallo scrivente.

Essenziale, per la classificazione dei piani di traslazione finiti, è lo studio dei sistemi grafici $\Sigma_{n,2}$ di un S_{2n-1} lineare sopra un campo finito. Tale studio può essere condotto associando ad ogni $\Sigma_{n,2}$ un indice di irriducibilità t, dicendo che un tale $\Sigma_{n,2}$ ha indice di irriducibilità t se il piano di traslazione da esso individuato è rappresentabile con un sistema grafico $\Sigma_{t,2}$ di un S_{2t-1} lineare sopra un campo γ di Galois, ma non è rappresentabile con un $\Sigma_{t',2}$ di un $S_{2t'-1}$ lineare sopra γ, per ogni $t' < t$. γ individua, allora, il nucleo (cfr. ANDRÉ, [1]) del piano di traslazione associato a $\Sigma_{n,2}$; e la classificazione proiettiva dei $\Sigma_{t,2}$, aventi indice di irriducibilità t, di un S_{2t-1} lineare sopra un campo di Galois γ equivale alla determinazione di tutti e soli i piani di traslazione aventi nucleo γ e dimensione $2t$ sopra il nucleo. In quest'ordine di idee si può verificare (come esercizio iniziale) che l'unica fibrazione non elementare di un S_3 proiettivo sopra il campo fondamentale di ordine tre è quella individuata dal piano di Hall di ordine nove, ond'essa risulta omografica a quella fornita dal n. 56; per le fibrazioni irriducibili associate ai piani di Hall si rimanda a PANELLA [6'].

I piani in questione dovrebbero poi venire saggiati nei riguardi altresì delle loro configurazioni di Fano, il che — fra l'altro — potrebbe forse servire a gettar luce su di una nota congettura di Pickert finora dubbia (per la quale cfr. PICKERT [7], p. 301 e l'Appendice a [18] di LOMBARDO-RADICE, Probl. XIII dei «Supplementary Topics»).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ, *Ueber nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, Math. Zeitschr., 60 (1954), 156-186.

[2] A. BARLOTTI, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, Boll. Un. Mat. Ital., (3) 10 (1955), 498-506.

[3] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed. (Messina, Principato, 1923).

[4] H. S. M. COXETER, *Projective line geometry*, Math. Notae, 18 (1962, Hom. a B. Levi, vol. I), 197-216.

[5] G. MIGLIORE FELLEGARA, *Gli ovaloidi in uno spazio tridimensionale di Galois di caratteristica due* (Tesi di Laurea, Univ. di Roma, 1959-60).

[6] G. PANELLA, *Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito*, Boll. Un. Mat. Ital., (3) 10 (1955), 507-513.

[6'] — —, *Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall*, Ann. di Mat., (4) 47 (1959), 169-181.

[7] G. PICKERT, *Projective Ebenen* (Berlin, Springer, 1955).

[8] G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921).

[9] B. SEGRE, *Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 e una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario*, Mem. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6) 2 (1927), 204-229.

[10] — —, *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse*, Rendic. Semin. Mat. Univ. Roma, (2) 7, Parte II (1930-31), 59-107.

[11] — —, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).

[12] — —, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I (Roma, Docet, 1951).

[13] — —, *Plans graphiques algébriques réels non desarguésiens et correspondances crémoniennes topologiques*, Rev. de Math. pures et appl., 1 (1956), 35-50.

[14] — —, *Fibrazioni differenziali di un' r-sfera mediante k-sfere equatoriali*, Rendic. Acc. Naz. Lincei, (8) 22 $(1957)_1$, 383-392.

[15] — —, *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, Acta Arith., 5 (1959), 315-332.

[16] — —, *Le geometrie di Galois*, Ann. di Mat., (4) 48 (1959), 1-97.

[17] — —, *Variazione continua ed omotopia in geometria algebrica*, Ann. di Mat., (4) 50 (1960), 149-186.

[18] — —, *Lectures on modern geometry*, Monogr. Mat. C.N.R, vol. 7 (Roma, Cremonese, 1961).

[19] — —, *Arithmetische Eigenschaften von Galois-Räumen*. Math. Ann. (in corso di stampa).

[20] — —, *Sistemi polilaterali di spazi in un iperspazio*, Mathematicae Notae (in corso di stampa).
[21] C. SEGRE, *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Atti Acc. Sc. Torino, 25 (1889-90), 180-205, 290-317, 376-396 e 26 (1890-91), 35-71; oppure: *Opere*, vol. II (Roma, Cremonese, 1958), 237-337.
[22] — —, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 5 (1891), 192-204; oppure: *Opere*, vol. I (Roma, Cremonese, 1957), 173-184.
[23] — —, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, Math. Ann., 40 (1892), 413-467; oppure: *Opere*, vol. II (Roma, Cremonese, 1958), 338-395.
[24] E. SEIDEN, *A theorem in finite projective geometry and an application to statistics*, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 282-286.
[25] J. TITS, *Les groups simples de Suzuki et de Ree*, Sém. Bourbaki, n. 210 (Paris, 1960).
[26] — —, *Ovoïdes à translations*, Rendic. di Mat. e sue Appl., (5) 21 (1962), 37-59.
[27] — —, *Ovoïdes et Groupes de Suzuki*, Archiv. der Math., 13 (1962), 187-198.
[28] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra, I*, 4. Aufl., Die Grundlehren der Math. Wiss., Bd. 33 (Berlin, Springer, 1955).
[29] J. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on matrices*, Amer. Math. Colloquium Publ., vol. 17 (New York, 1934).