

La géométrie des groupes simples

par ÉLIE CARTAN (à Paris).

INTRODUCTION

J'ai, dans un mémoire récent ⁽¹⁾, développant et complétant un article antérieur publié en collaboration avec M. J. A. SCHOUTEN ⁽²⁾, étudié les espaces à connexion affine, sans courbure ou sans torsion, représentatifs des groupes de transformations continus. Cette étude s'appliquait aux groupes les plus généraux, et elle était locale. Dans le cas des groupes simples, les espaces sans torsion représentatifs sont riemanniens, soit complexes, soit réels (à ds^2 défini ou indéfini). Les espaces complexes représentent les groupes simples à paramètres complexes; les espaces réels représentent les groupes simples à paramètres réels, *unitaires* (si le ds^2 est défini), ou *non unitaires* (si le ds^2 est indéfini). Les deux derniers cas se distinguent l'un de l'autre par la propriété de l'espace d'être *clos* ou *ouvert*.

Les espaces de RIEMANN représentatifs des groupes simples réels unitaires rentrent dans une catégorie plus générale et très importante d'espaces de RIEMANN, caractérisés par la propriété que leur courbure riemannienne est conservée par le transport parallèle; leur étude se ramène à l'étude de ceux que j'ai appelés *irréductibles* et qui se rattachent tous aux groupes simples ⁽³⁾. Dans chacun de ces espaces irréductibles, la courbure riemannienne a partout le même signe; dans une même classe existent à la fois des espaces à courbure positive et des espaces à courbure négative. Étant donnée une structure simple, les espaces représentatifs des groupes réels unitaires correspondants sont à

⁽¹⁾ É. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations*. (J. Math. pures et appl., t. 6, 1927, pp. 1-119).

⁽²⁾ É. CARTAN and J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups*. (Proc. Akad. Amsterdam, t. 29, 1926, pp. 803-815).

⁽³⁾ La détermination de tous ces espaces est faite dans un mémoire dont la première partie vient de paraître. (Bull. Soc. Math. de France, t. 54, 1924, pp. 214-264). Voir aussi É. CARTAN, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure*. (Rend. Acc. Lincei, (6), t. 31, 1926, pp. 544-547).

courbure positive; les espaces à courbure négative de la même classe ne sont représentatifs d'aucun groupe, mais leur groupe des déplacements est isomorphe au groupe à paramètres complexes de la structure donnée. S'il s'agit de la structure simple à trois paramètres, les deux espaces sont les espaces à trois dimensions à courbure constante, positive ou négative; le premier représente le groupe des rotations de l'espace ordinaire; le groupe des déplacements du second est isomorphe au groupe homographique *complexe* d'une variable.

L'étude détaillée des espaces de RIEMANN irréductibles les plus généraux présente un très grand intérêt, aussi bien au point de vue de la théorie des groupes qu'au point de vue géométrique. Elle fera l'objet d'un mémoire ultérieur. Dans le présent mémoire je m'occupe seulement des deux classes particulières signalées plus haut (espaces représentatifs des groupes simples réels unitaires et leurs correspondants à courbure négative). L'étude faite ici n'est plus locale; elle se rapporte plutôt aux propriétés de l'espace ressortissant à l'*Analysis situs*, à la distribution des géodésiques, à la détermination complète de leurs groupes mixtes d'isométrie, de leurs différentes formes de KLEIN, etc. Les questions qui se posent sont du reste de nature bien différente suivant que l'espace est à courbure positive ou à courbure négative.

Un premier chapitre introductif est consacré à la topologie des groupes simples réels unitaires; il a son point de départ dans les recherches de H. WEYL relatives à la théorie des groupes semi-simples ⁽¹⁾; la question y est reprise en entier; les résultats de H. WEYL sont complétés et les questions qui se posent sont résolues jusqu'au bout en utilisant un de mes mémoires récents ⁽²⁾.

Le chapitre II est consacré aux espaces des groupes réels unitaires; la distribution des géodésiques est étudiée assez complètement pour les formes simplement connexes de ces espaces; elle révèle, associées à chaque point de l'espace, l'existence d'un certain nombre de *variétés antipodiques* (qui peuvent se réduire à des points) qui sont en quelque sorte des *variétés de striction* pour les géodésiques fermées issues du point donné. Il y en a autant que d'unités dans le *rang* du groupe.

Le chapitre III est consacré aux espaces à courbure négative dont le groupe des déplacements a une structure simple *complexe*. Ils sont tous sim-

⁽¹⁾ H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*. (Math. Zeitschr., t. 23, 1925, pp. 271-309; t. 24, 1925, pp. 328-395).

⁽²⁾ E. CARTAN, *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples*. (Bull. Sc. Math., 2^{ème} série, t. 49, 1925, pp. 130-152).

plement connexes. On peut grâce à eux (et c'est ce qui se reproduira dans tous les autres espaces irréductibles à courbure négative) résoudre des problèmes importants relatifs à leur groupe des déplacements. Je signalerai seulement le résultat suivant: les groupes simples *complexes* ont, au point de vue de l'*Analysis situs*, les mêmes propriétés que les groupes réels unitaires correspondants, et ils admettent toujours un représentant linéaire simplement connexe. Ce théorème résulte lui-même d'un mode de génération remarquable des transformations finies du groupe complexe: pour ne prendre qu'un exemple, chaque rotation complexe de l'espace ordinaire est décomposable d'une manière et d'une seule en une rotation réelle et une rotation d'un angle purement imaginaire autour d'un axe réel. Enfin les espaces en question ont aussi leur importance au point de vue purement géométrique, mais cette importance se manifesterait surtout pour les espaces irréductibles plus généraux à courbure négative.

Je supposerai connus les principes fondamentaux de la théorie des groupes simples ⁽¹⁾.

CHAPITRE I.

LA TOPOLOGIE DES GROUPES SIMPLES UNITAIRES

I. Le polyèdre fondamental du groupe adjoint.

1. On sait ⁽²⁾ qu'à chaque type de groupes simples d'ordre r appartient une forme réelle unitaire, à r paramètres réels, caractérisée par la propriété que la somme des carrés des racines caractéristiques d'une transformation infinitésimale arbitraire soit une forme quadratique définie négative — $\varphi(e)$. Les groupes unitaires sont, pour les quatre grandes classes de groupes simples, respectivement isomorphes:

A) au groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'HERMITE définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_{l+1}\bar{x}_{l+1};$$

⁽¹⁾ Le lecteur pourra à cet égard, se reporter à ma Thèse (Paris, Nony, 1894) ou au mémoire précédemment cité de H. WEYL; la lecture du mémoire cité dans la note ⁽¹⁾ page 209, ne sera pas non plus inutile.

⁽²⁾ E. CARTAN, *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples*. (Bull. Sc. Math., 2^{ème} série, t. 49, 1925, p. 135).

B) *D*) au groupe linéaire d'une forme quadratique définie positive à $n = 2l + 1$ (type *B*) ou $n = 2l$ (type *D*) variables;

C) au groupe linéaire laissant invariantes une forme d'HERMITE définie positive

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{2l} \bar{x}_{2l}$$

et une forme quadratique extérieure

$$[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}].$$

Dans les notations précédentes, l désigne le *rang* du groupe, dont il va être question ci-dessous.

2. Soit G un groupe simple unitaire, Γ son groupe adjoint. Γ est un groupe linéaire à r variables réelles

$$e_1, e_2, \dots, e_r,$$

qui laisse invariante la forme quadratique définie positive $\varphi(e)$. Chaque transformation peut être représentée par une matrice T d'ordre r , de déterminant égal à 1.

Toute matrice T peut, et d'une infinité de manières, être engendrée par une transformation infinitésimale Y de Γ ⁽¹⁾. Parmi les racines caractéristiques de Y , l sont nulles ⁽²⁾, les $r - l$ autres sont deux à deux égales et opposées; elles sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers déterminés de l d'entre elles (dites *fondamentales*). Toutes ces racines sont purement imaginaires: nous les désignerons, avec H. WEYL, par la notation

$$2\pi i \varphi_\alpha;$$

les quantités φ_α sont les *paramètres angulaires* de la transformation Y .

La matrice T engendrée par Y admet l racines caractéristiques égales à 1, les autres sont les quantités $e^{2\pi i \varphi_\alpha}$.

3. Si une transformation infinitésimale Y est *générale*, c'est-à-dire n'admet pas plus de l racines caractéristiques nulles, il existe $l - 1$ autres transformations infinitésimales indépendantes entre elles et indépendantes de Y , qui

⁽¹⁾ Voir, pour ce paragraphe et le suivant, le mémoire cité dans la note précédente, pp. 134-146.

⁽²⁾ L'entier l est le rang du groupe; c'est le nombre des coefficients de l'équation caractéristique du groupe qui sont indépendants. Voir E. CARTAN, *Thèse* (Paris, Nony, 1894), p. 29.

jouissent de la propriété d'être échangeables entre elles et échangeables avec Y . On obtient ainsi un sous-groupe abélien γ d'ordre l . Si

$$e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + \dots + e_l Y_l$$

est la transformation infinitésimale la plus générale de γ , les paramètres angulaires φ_α sont des formes linéaires en e_1, e_2, \dots, e_l dont l sont linéairement indépendantes.

Si maintenant on part d'une transformation infinitésimale Y *singulière*, c'est-à-dire admettant plus de l racines caractéristiques nulles, il existe plus de l transformations indépendantes échangeables avec Y . On peut se demander si, parmi ces transformations, il en existe au moins une qui ne soit pas singulière. C'est ce que nous allons démontrer.

Soit Y_1 une transformation particulière échangeable avec Y ; soit Y_2 une transformation particulière échangeable avec Y et Y_1 (et linéairement indépendante de Y et de Y_1), et ainsi de suite. Supposons que nous arrivions à trouver ainsi λ transformations indépendantes

$$Y, Y_1, \dots, Y_{\lambda-1},$$

échangeables entre elles et telles qu'aucune autre transformation du groupe ne soit échangeable en même temps avec chacune d'elles. Les racines caractéristiques ω_α de la transformation

$$eY + e_1 Y_1 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$$

sont des formes *linéaires* ⁽¹⁾ en $e, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Parmi ces formes linéaires, il y en a au moins λ indépendantes; sinon il existerait une transformation non nulle $\Sigma e_i Y_i$ ayant toutes ses racines caractéristiques nulles; cela est impossible, puisque la somme des carrés des racines caractéristiques d'une transformation arbitraire du groupe est une forme *définie*. Les racines caractéristiques d'une transformation arbitraire étant au nombre minimum de λ indépendantes, cela prouve, d'après la définition même du rang, que λ est au plus égal à l . Mais d'autre part λ ne peut pas être inférieur à l , puisque l des racines ω_α sont nulles et qu'à chaque forme linéaire ω_α correspondent une ou plusieurs transformations X telles qu'on ait

$$(\Sigma e_i Y_i, X) = \omega_\alpha X,$$

quels que soient les coefficients $e, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Il existerait donc $l - \lambda$ trans-

⁽¹⁾ Cela tient à ce que les transformations sont échangeables entre elles.

formations indépendantes des Y et échangeables avec les Y , ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'entier λ étant égal à l , et le nombre des formes linéaires ω_α identiquement nulles ne dépassant pas l , il suffit de donner aux coefficients e_i des valeurs numériques n'annulant aucune des formes ω_α non identiquement nulles pour obtenir une transformation *générale*; la transformation donnée Y fait ainsi partie du sous-groupe γ défini par cette transformation générale.

4. Toute transformation infinitésimale Y fait donc partie d'au moins un sous-groupe abélien γ , contenant une infinité de transformation générales. Tous les sous-groupes γ sont du reste homologues entre eux dans le groupe adjoint continu Γ ⁽¹⁾, de sorte que toute transformation de Γ est homologue à une transformation d'un sous-groupe γ particulier.

Cela posé, regardons les l paramètres angulaires fondamentaux $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ d'une transformation infinitésimale arbitraire comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace à l dimensions. Nous choisirons les vecteurs unitaires de coordonnées de manière que la forme quadratique définie positive

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^2$$

représente, à un facteur constant près, le carré de la distance d'un point à l'origine.

Tout point $M(\varphi_i)$ représente une transformation infinitésimale de chaque sous-groupe γ , et par suite une infinité de transformations infinitésimales homologues entre elles. Si aucun des paramètres φ_α n'est nul, ces transformations sont générales et forment par suite un ensemble ∞^{r-l} . Si h des paramètres φ_α sont nuls (h pair), chaque transformation représentée par M est invariante par un sous-groupe à $l+h$ paramètres et par suite admet ∞^{r-l-h} homologues.

A l'intérieur d'un sous-groupe γ déterminé, une transformation infinitésimale admet un certain nombre d'homologues; on obtient leurs points représentatifs en effectuant sur les $r-l$ paramètres φ_α (regardés comme des lettres) un groupe fini \mathcal{G}' de substitutions; ces substitutions conservent les relations

⁽¹⁾ Cela tient à ce que les transformations infinitésimales *générales* Y , dont chacune définit un sous-groupe γ , forment un ensemble *connexe*; en effet, comme nous le verrons dans un instant, les transformations singulières remplissent, dans le domaine du groupe, une ou plusieurs variétés à 3 dimensions de moins que ce domaine.

linéaires à coefficients entiers qui existent entre les paramètres angulaires ⁽¹⁾. Géométriquement le groupe \mathcal{G}' , opérant sur les points représentatifs M , est un groupe de rotations et de symétries, engendré par $\frac{r-l}{2}$ symétries par rapport aux hyperplans $\varphi_\alpha = 0$ ⁽²⁾.

Si l'on considère les $\frac{r-l}{2}$ hyperplans $\varphi_\alpha = 0$ menés par l'origine, ils partagent l'espace en un certain nombre de régions indéfinies (angles polyèdres) convexes. Chacune d'elles représente le *domaine fondamental* (D) du groupe \mathcal{G}' , et toute transformation infinitésimale de γ est homologue à une transformation et une seule intérieure à cette région. Toute région convexe, limitée par un certain nombre d'hyperplans $\varphi_\alpha = 0$, et telle qu'aucun autre de ces hyperplans ne la traverse, peut être prise comme domaine fondamental. Nous vérifierons plus loin que toutes ces régions admettent exactement l faces hyperplanes.

Tout point intérieur au domaine fondamental (D) représente ∞^{r-l} transformations infinitésimales homologues; tout point situé sur l'une de ses faces, ou l'une de ses arêtes, etc., représente au plus ∞^{r-l-2} transformations homologues.

5. Passons maintenant aux transformations *finies*, ou aux matrices T du groupe Γ . Soit Y l'une de ses transformations infinitésimales génératrices, appartenant à un certain sous-groupe γ ; on peut représenter T et Y par le même point M . Or à l'intérieur du même sous-groupe γ , la matrice T peut être engendrée par une infinité de transformations infinitésimales différentes de Y ; ce sont celles qu'on obtient en ajoutant aux paramètres angulaires fondamentaux φ_i des nombres entiers arbitraires. Considérons alors le réseau (R) des points à coordonnées φ_i entières.

La même matrice T est représentée par une infinité dénombrable de points, homologues entre eux par rapport au réseau (R).

Supposons que $l + 2k$ des racines caractéristiques de T soient égales à 1; on démontre alors que, T étant invariant par un sous-groupe à $l + 2k$ para-

⁽¹⁾ Il peut y avoir des substitutions jouissant de cette propriété sans appartenir à \mathcal{G}' . Voir E. CARTAN, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples*. (Bull. Sc. Math., 2^{ème} série, t. 49, 1925, pp. 365-366).

⁽²⁾ Cette interprétation du groupe \mathcal{G}' comme groupe de rotations et de symétries, ainsi que celle de ses opérations génératrices, est due à H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*. (Math. Zeitschr., 24, 1925, pp. 367-371). Le groupe \mathcal{G}' est le groupe (S) de H. WEYL.

mètres de Γ , il existe ∞^{r-l-2k} matrices homologues à T . L'hypothèse faite revient à dire que, parmi les paramètres angulaires φ_α de Y , $2k$ sont des *nombre entiers*. La matrice T peut donc être invariante par un groupe plus grand que sa transformation génératrice Y .

6. L'ensemble des opérations du groupe \mathcal{G}' et des translations \mathcal{T} qui laissent le réseau (R) invariant engendrent un groupe \mathcal{S}_1 de déplacements et de symétries. Deux points M homologues par rapport à \mathcal{S}_1 représentent des matrices T homologues par rapport à Γ .

Nous allons maintenant considérer l'ensemble des hyperplans (Π) obtenus en égalant un des paramètres angulaires φ_α à un nombre entier arbitraire. Tous ces hyperplans partagent l'espace en une infinité de polyèdres convexes; soit (P) l'un d'entre eux, que l'on peut supposer intérieur au domaine fondamental indéfini (D) . Nous allons montrer que toute matrice T peut être représentée par un point au moins de (P) .

Partons de la remarque, due à H. WEYL ⁽¹⁾, que les matrices représentées par un point donné d'un même hyperplan (Π) , admettant au moins $l+2$ racines caractéristiques égales à 1, forment dans l'espace du groupe une variété à $r-l-2$ dimensions au plus; par suite les matrices représentées par les différents points des hyperplans (Π) forment un nombre fini de variétés à

$$(r-l-2) + (l-1) = r-3$$

dimensions. Il est donc possible d'aller d'un point à un autre de l'espace du groupe, c'est-à-dire de passer par continuité d'une matrice T quelconque à une autre matrice T' quelconque, en évitant les matrices singulières. Soit alors M_0 un point particulier intérieur à (P) , soit T_0 une des matrices représentées par M_0 , et soit T une matrice quelconque. En passant de T_0 à T de manière à éviter les matrices singulières, le point représentatif correspondant, partant de M_0 , *restera à l'intérieur de (P)* ⁽²⁾, et par suite il existe bien à l'intérieur de (P) un point M représentatif de T . En particulier la matrice unité devant être représentée, cela veut dire que l'un au moins des sommets de (P) appartient au réseau (R) . On pourra donc supposer, par une des translations \mathcal{T} , que le polyèdre (P) a l'un de ses sommets à l'origine O .

⁽¹⁾ Math. Zeitschr., t. 24, 1925, p. 379.

⁽²⁾ On peut démontrer en toute rigueur que lorsque la matrice T varie d'une manière continue sans jamais être singulière, le point représentatif M peut être également suivi par continuité, sans qu'il y ait jamais ambiguïté.

7. Nous sommes maintenant en mesure, en nous plaçant au point de vue général de H. WEYL⁽¹⁾, d'étudier la topologie de l'espace du groupe adjoint Γ , en particulier de chercher s'il existe dans cet espace des contours fermés non réductibles à un point par déformation continue.

Supposons d'abord que le polyèdre (P) n'ait aucun sommet autre que O appartenant au réseau (R). Considérons un contour fermé (C) tracé dans l'espace du groupe; nous pourrions toujours le déformer d'une manière continue de façon à le faire partir du point origine (correspondant à la transformation identique), de façon aussi qu'il ne rencontre aucune matrice singulière (autre que la matrice unité, qui correspond à son point de départ et d'arrivée). Il correspondra à (C), dans l'espace à l dimensions des φ_i , un contour (C') qu'on pourra faire partir de O , qu'on pourra supposer tout entier intérieur à (P) et qui se terminera nécessairement en O . Soit M un point de (C'); il représente une transformation infinitésimale génératrice déterminée Y de la matrice T qui appartient au point correspondant du contour (C). Les matrices tY , où t est un nombre réel compris entre 0 et 1, forment à l'intérieur de (P) un contour variable qui résulte d'une déformation continue de (C') et se réduit au point O pour $t = 0$. Les matrices finies correspondantes T formeront dans l'espace du groupe un contour fermé qui se déduira de (C) par déformation continue et se réduira au point origine pour $t = 0$. C'est ce que nous voulions démontrer. *Si donc le polyèdre (P) n'a qu'un sommet appartenant au réseau (R), l'espace du groupe Γ est simplement connexe.*

Supposons maintenant que le polyèdre P ait $h - 1$ sommets O_1, O_2, \dots, O_{h-1} différents de O et appartenant au réseau (R). Si un contour fermé (C) tracé dans l'espace du groupe est réductible à un point par déformation continue, cette déformation pourra toujours s'effectuer en évitant les matrices singulières, puisque ces matrices forment des variétés à 3 dimensions de moins que l'espace ambiant; de même si deux contours fermés sont réductibles l'un à l'autre, la réduction peut se faire en évitant les matrices singulières.

Cela posé, tout contour fermé (C) peut toujours être déformé de manière à partir du point origine et à éviter toute autre matrice singulière; il lui correspondra dans l'espace des φ_i un contour (C') qu'on pourra supposer partir de O et rester à l'intérieur de (P); il se terminera nécessairement en l'un des points O, O_1, \dots, O_{h-1} . S'il se termine en O , le contour (C) est réductible à un point. Mais s'il se termine en O_1 par exemple, le contour (C) n'est certainement pas réductible à un point; sinon en effet la réduction pourrait

⁽¹⁾ Math. Zeitschr., t. 24, 1925, pp. 380-381.

se faire en ne cessant pas de faire partir (C) du point origine et de lui faire éviter les matrices singulières; le contour (C') ne pourrait alors constamment que partir de O et aboutir à O_1 , il ne serait donc pas réductible à un point.

On voit de plus qu'il y a exactement dans l'espace du groupe h classes distinctes de contours fermés irréductibles entre eux, et qui correspondent à h chemins joignant O aux points O, O_1, \dots, O_{h-1} à l'intérieur de (P). Nous dirons que h est l'indice de connexion du groupe.

8. Si l'espace du groupe Γ n'est pas simplement connexe, le polyèdre (P) n'est pas un domaine fondamental du groupe fini \mathfrak{S}_1 , puisqu'il existe à l'intérieur de (P) h points homologues entre eux par rapport à \mathfrak{S}_1 . On aurait facilement un domaine fondamental (Q) de \mathfrak{S}_1 par la méthode du rayonnement en prenant les points de (P) qui sont plus rapprochés de O que de chacun des points O_1, \dots, O_{h-1} ; ce polyèdre (Q) a pour faces d'abord les hyperplans qui limitent le domaine (D) de \mathfrak{S}' , puis un certain nombre d'autres faces hyperplanes.

Pour obtenir le polyèdre (P), il suffit de construire d'une manière quelconque un polyèdre limité par un certain nombre d'hyperplans (Π) et qui ne soit traversé par aucun autre hyperplan (Π). Nous allons passer en revue les différents types de groupes simples et vérifier que pour chacun d'eux le polyèdre (P) admet exactement $l + 1$ faces hyperplanes. Nous déterminerons en même temps les l sommets autres que O , ainsi que ceux de ces sommets qui appartiennent au réseau (R); leur nombre sera l'indice de connexion h diminué de 1.

9. Si nous prenons d'abord le cas du groupe à 3 paramètres de rang 1 (groupe des rotations de l'espace ordinaire), il est clair que (P) est ici le segment $(0, 1)$ d'un axe; ses deux extrémités appartiennent au réseau (R). L'indice de connexion de Γ est donc égal à 2. Le domaine (Q) serait formé du segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. L'espace du groupe des rotations n'est autre, comme on sait, que l'espace elliptique à 3 dimensions qui, en effet, n'est pas simplement connexe.

10. *Type A*) (¹). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_i, \quad \pm (\varphi_i - \varphi_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

(¹) Les expressions générales des paramètres angulaires correspondant aux différents types simples se trouvent indiquées dans: E. CARTAN, *Thèse*, pp. 81-93.

Nous pouvons définir le domaine (P) par les $l + 1$ inégalités

$$1 > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0;$$

il est clair que le domaine défini par ces inégalités n'est traversé par aucun des hyperplans (Π). Les sommets de (P) autres que O sont les points de coordonnées

$$\begin{aligned} & 1, 0, 0, \dots, 0, \\ & 1, 1, 0, \dots, 0, \\ & 1, 1, 1, \dots, 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & 1, 1, 1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Ils appartiennent tous au réseau (R) formé des points à coordonnées entières. L'espace du groupe Γ à donc $l + 1$ pour indice de connexion.

11. Type B). Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Nous définirons le domaine (P) par les $l + 1$ inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Les sommets, autres que O , du polyèdre (P) sont

$$\begin{aligned} & 1, 0, 0, \dots, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le premier seul appartient au réseau (R). Le groupe Γ a donc l'indice de connexion 2.

12. Type C). Les paramètres angulaires sont

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l);$$

le réseau (R) est formé des points dont toutes les coordonnées sont entières ou des moitiés de nombres impairs. On peut définir le polyèdre (P) par

les $l+1$ inégalités

$$\frac{1}{2} > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0.$$

Les sommets, autres que O , de (P) sont

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le dernier seul appartient au réseau (R) . Le groupe Γ a donc l'indice de connexion 2.

13. Type D). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Le réseau (R) est le même que dans le cas du type C). On peut définir le polyèdre (P) par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l, \quad \varphi_{l-1} + \varphi_l > 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Les sommets, autres que O , du polyèdre (P) sont

$$\begin{aligned} & 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, 0, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 0, 0, 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, 0, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le premier et les deux derniers appartiennent au réseau (R). Le groupe Γ a donc pour indice de connexion 4.

14. Type E_6 . Les paramètres angulaires sont

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \pm(\varphi_i + \varphi_j + \varphi_k), \quad \pm(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_6).$$

Les sommets du réseau (R) sont les points dont toutes les coordonnées sont des nombres entiers ou dont toutes les coordonnées sont des tiers de nombres entiers congrus entre eux (mod 3).

On peut définir le polyèdre (P) par les 7 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_6, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_6 > 0, \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_6 < 1.$$

Les sommets, autres que 0, de (P) sont

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\ \frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2}, \\ \frac{5}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}. \end{array}$$

Le deux premiers appartiennent au réseau (R). Le groupe Γ a donc pour indice de connexion 3.

15. Type E_7 . Les paramètres angulaires sont

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \varphi_i + \varphi_j + \varphi_k + \varphi_h \quad (i, j, k, h = 1, 2, \dots, 8),$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_8 = 0.$$

Les sommets du réseau (R) sont les points dont les 8 coordonnées, de somme nulle, sont des quarts de nombres entiers congrus entre eux (mod 4).

On peut définir le polyèdre (P) par les 8 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_8, \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_8 < 1.$$

Les sommets, autres que 0 , du polyèdre (P) sont

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3}{4}, & \frac{3}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{12}, & \frac{1}{12}, & \frac{1}{12}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\ \frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2}, \\ \frac{7}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}. \end{array}$$

Le premier seul appartient au réseau (R). Le groupe Γ a donc pour indice de connexion 2.

16. Type E_9). Les paramètres angulaires sont

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \pm (\varphi_i + \varphi_j + \varphi_k) \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 9),$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_9 = 0.$$

Les points du réseau (R) sont ceux dont les coordonnées sont des tiers de nombres entiers congrus entre eux (mod 3).

On peut définir le polyèdre (P) par les 9 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_9, \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_9 < 1.$$

Les sommets, autres que O , du polyèdre (P) sont

$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{3}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,
$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{12}$,	$\frac{1}{12}$,	$-\frac{1}{6}$,					
$\frac{5}{6}$,	0 ,	0 ,	0 ,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,
$\frac{4}{5}$,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	$-\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{5}$,
$\frac{3}{4}$,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,
$\frac{2}{3}$,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	$-\frac{1}{3}$,	$-\frac{1}{3}$,
$\frac{1}{2}$,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	0 ,	$-\frac{1}{2}$,
$\frac{8}{9}$,	$-\frac{1}{9}$.							

Aucun d'eux n'appartient au réseau (R). Le groupe Γ est donc simplement connexe.

17. Type F). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_1, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j, \quad \frac{\pm \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 \pm \varphi_4}{2}.$$

Les sommets du réseau (R) sont les points dont les coordonnées sont des nombres entiers à somme paire.

On peut définir le polyèdre (P) par les 5 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4 > 0, \quad \varphi_1 > \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Ses sommets autres que O sont

$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	0 ,	0 ,
$\frac{2}{3}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{3}$,	0 ,
$\frac{3}{4}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{4}$,
1 ,	0 ,	0 ,	0 .

Aucun d'eux n'appartient au réseau (R). Le groupe Γ est donc simplement connexe.

18. Type G). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_i, \quad \pm (\varphi_i - \varphi_j) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

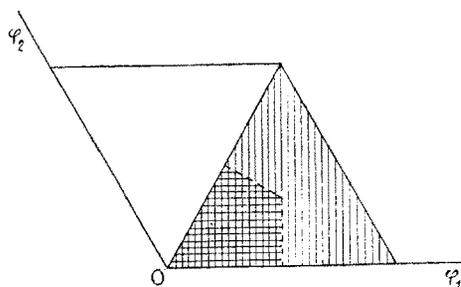


Fig. 1

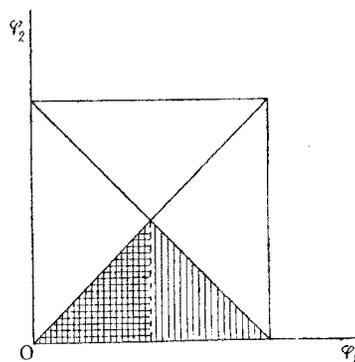


Fig. 2

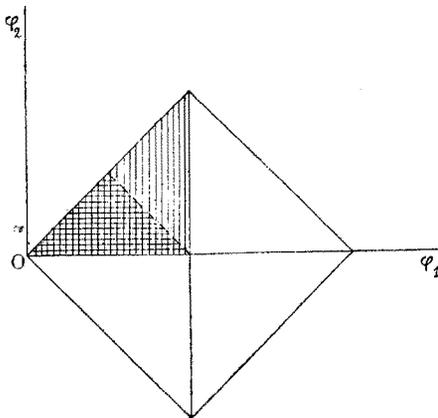


Fig. 3

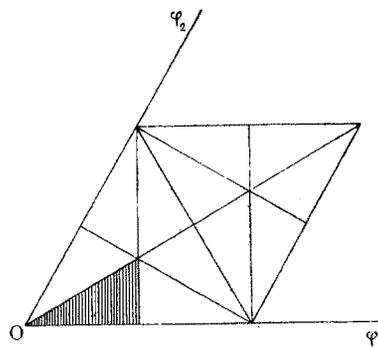


Fig. 4

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$$

On peut définir le domaine (P), qui est ici un triangle, par les 3 inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > 0, \quad \varphi_1 - \varphi_3 < 1.$$

Ses deux sommets autres que O sont

$$\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}.$$

Aucun d'eux n'appartient au réseau (R). Le groupe Γ est donc simplement connexe.

19. Nous représentons dans les figures 1, 2, 3 et 4, pour chacun des types de rang 2, à savoir A , B , C et G), un parallélogramme du réseau (R), ainsi que les droites (II) qui le limitent ou le traversent; le domaine triangulaire (P) est figuré au moyen de hachures verticales, le domaine (Q), quand il existe, au moyen d'un double système de hachures verticales et horizontales. Le groupe du type D) de rang 2 est semi-simple; c'est pour cela qu'il n'est pas figuré ⁽¹⁾. On remarquera que les figures 2 et 3 relatives aux types B) et C) sont semblables; c'est qu'en effet les deux groupes correspondants sont isomorphes.

II. Le groupe abstrait simplement connexe et ses représentations linéaires.

20. Nous avons vu que toute transformation finie T du groupe adjoint Γ peut être représentée par h points distincts intérieurs au $(l+1)$ -èdre (P). Nous allons construire un groupe abstrait $\bar{\Gamma}$ ⁽²⁾ dont chaque opération sera représentée par un point et un seul de (P).

Convenons d'appeler *élément* \bar{T} l'ensemble d'une matrice T de Γ et d'un chemin (C) joignant, dans l'espace du groupe, le point origine au point T . Deux éléments seront regardés comme identiques s'ils correspondent à la même matrice T et si les deux chemins qui achèvent de les définir sont réductibles l'un à l'autre par déformation continue. A chaque matrice T correspondent h éléments \bar{T} . Tout élément \bar{T} est représenté par un point et un seul intérieur à (P).

⁽¹⁾ Tout ce qui précède peut s'étendre aux groupes semi-simples, avec la seule différence que le polyèdre (P) est limité par plus de $l+1$ faces hyperplanes.

⁽²⁾ C'est H. WERT, qui a montré l'importance de la notion du groupe abstrait dans son mémoire précédemment cité.

Nous allons définir *in abstracto* le produit de deux éléments \bar{T} et \bar{T}' . Considérons pour cela un des chemins qui, allant du point origine au point T' , définissent l'élément T' . A chaque point de ce chemin est associée une matrice Θ variant d'une manière continue depuis la matrice unité jusqu'à T' . La matrice $T\Theta$ décrit alors un chemin continu partant de T et aboutissant à TT' . Suivons par continuité sur ce chemin l'élément correspondant, en partant de l'élément initial \bar{T} ; nous arriverons à un élément final \bar{T}'' , qui est l'un des h éléments associés à la matrice $T'' = TT'$; nous poserons

$$\bar{T}'' = \overline{TT'}.$$

Il est facile de montrer que la définition donnée du produit $\overline{TT'}$ est univoque. Il est clair maintenant que tous les éléments \bar{T} définissent un *groupe abstrait* $\bar{\Gamma}$.

Le groupe $\bar{\Gamma}$ est simplement connexe, car pour qu'un contour partant, dans l'espace du groupe, d'un point T auquel on associe l'élément \bar{T} , ramène en T le même élément \bar{T} , il faut et il suffit que ce contour soit réductible à zéro par déformation continue.

Le groupe $\bar{\Gamma}$ est isomorphe méridrique de $\bar{\Gamma}$; le groupe quotient $\bar{\Gamma}/\Gamma$ peut être regardé comme formé des h éléments de $\bar{\Gamma}$ qui correspondent à la transformation identique de Γ . Ces éléments sont représentés, dans le polyèdre (P) , par les h sommets O, O_1, O_{h-1} . Chacun de ces éléments laissant invariante chaque transformation de Γ et, par continuité, chaque transformation de $\bar{\Gamma}$, le groupe $\bar{\Gamma}/\Gamma$ est abélien. *Nous l'appellerons le groupe de connexion de Γ .*

Supposons maintenant qu'on ait un groupe G ayant même structure infinitésimale que Γ . A une transformation de G ne correspond évidemment qu'une transformation de Γ , mais la réciproque peut ne pas être vraie. Si on va par continuité, dans l'espace de G , le long d'un chemin déterminé, de la transformation identique à une transformation donnée, il lui correspondra, dans l'espace de Γ , un chemin conduisant à un élément déterminé \bar{T} de $\bar{\Gamma}$. Deux transformations différentes S et S' de G ne pourront jamais conduire de cette manière au même élément \bar{T} de $\bar{\Gamma}$; sinon, en effet, il existerait dans l'espace de G un chemin allant de S à S' et qui donnerait, dans l'espace de Γ , un contour fermé réductible à zéro; la réduction à zéro de ce chemin par une déformation continue conservant le point de départ et le point d'arrivée, entraînerait, dans l'espace de G , la réduction à zéro d'un chemin partant toujours de S et aboutissant toujours à S' , ce qui est absurde.

Si donc G est un groupe quelconque de même structure infinitésimale que Γ , le groupe $\bar{\Gamma}$ est isomorphe (méridrique ou holoédrique) de G , et le

groupe G est lui-même isomorphe (mériédrique ou holoédrique) de $\bar{\Gamma}$. Le groupe de connexion de G , à savoir $\bar{\Gamma}/G$, est un sous-groupe du groupe de connexion $\bar{\Gamma}/\Gamma$ de Γ . Ce sous-groupe peut d'ailleurs se réduire à l'opération identique ou se confondre avec $\bar{\Gamma}/\Gamma$.

Les considérations précédentes ne supposent nullement que le groupe Γ soit simple; elles s'appliquent à n'importe quelle structure infinitésimale, à la seule condition que Γ soit le groupe adjoint correspondant.

21. Jusqu'à présent le groupe $\bar{\Gamma}$ a été considéré uniquement *in abstracto*. On peut se poser la question de savoir s'il existe effectivement, dans un champ numérique convenable, un groupe d'opérations isomorphe *holoédrique* à $\bar{\Gamma}$. La réponse est fournie par le théorème suivant:

Il existe, pour chaque type de groupe simple, un groupe unitaire linéaire simplement connexe ⁽¹⁾.

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de vérifier dans chaque cas l'existence d'un groupe linéaire G tel que les transformations de ce groupe représentées par les sommets O_1, O_2, O_{h-1} du domaine (P) ne soient pas la transformation identique. Or cela est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans mon article: *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples* ⁽²⁾. Il suffit de prendre

Type A): le groupe g_1 d'une forme d'HERMITE définie positive à $l+1$ variables, dont le domaine contient $h=l+1$ fois celui du groupe adjoint;

Type B): le groupe g_1 à 2^l variables, dont le domaine contient $h=2$ fois celui du groupe adjoint;

Type C): le groupe g_1 d'un complexe linéaire, dont le domaine contient $h=2$ fois celui du groupe adjoint;

Type D), l impair: le groupe g_1 à 2^{l-1} variables, dont le domaine contient $h=4$ fois celui du groupe adjoint;

Type D), l pair: le groupe *réductible* $g_1 g_2$ à 2^l variables, dont le domaine contient $h=4$ fois celui du groupe adjoint;

*Type E*₆): le groupe g_1 dont le domaine contient $h=3$ fois celui du groupe adjoint;

⁽¹⁾ H. Weyl a démontré ce théorème pour les quatre grands types de groupes simples; pour les types exceptionnels, il a simplement montré que le groupe de connexion est fini. (Math Zeitschr., t. 24, 1925, pp. 380-381), mais sans exclure, semble-t-il, l'hypothèse de la non-existence d'un groupe linéaire simplement connexe.

⁽²⁾ Bull. Sc. Math., (2), t. 49, pp. 130-152, spécialement p. 150.

Type E_r): le groupe g_r dont le domaine contient $h = 2$ fois celui du groupe adjoint.

Pour les autres types, le groupe adjoint est simplement connexe.

On remarquera que, dans le cas du type *D*) de rang pair, il n'existe aucun groupe linéaire *irréductible* simplement connexe ⁽¹⁾.

22. On a facilement, d'après les résultats précédents, la structure du groupe $\bar{\Gamma}/\Gamma$. Il est cyclique dans tous les cas, à l'exception du type *D*) de rang pair, auquel cas il est isomorphe au groupe engendré dans un plan par les symétries, prises par rapport à deux droites rectangulaires (qui donnent par composition la symétrie par rapport à leur point d'intersection et l'opération identique).

Revenons à la représentation des transformations de Γ dans l'espace à l dimension des φ_i . Les opérations \bar{T} de $\bar{\Gamma}$ seront représentables également par les points qui représentent leurs transformations infinitésimales génératrices. Seulement le réseau (\bar{R}) des points qui représentent l'opération identique de $\bar{\Gamma}$ ne contiendra qu'une partie des sommets du réseau (R). Pour obtenir (\bar{R}), on peut remarquer que le groupe $\bar{\mathcal{G}}_1$ des déplacements et des symétries dont (P) est le polyèdre fondamental résulte de la combinaison du groupe \mathcal{G}' des rotations et des symétries autour de l'origine avec le groupe des translations $\bar{\mathcal{C}}$ du réseau (\bar{R}). Les sommets de (\bar{R}) sont les différentes positions que prend le point O quand on lui applique les opérations de $\bar{\mathcal{G}}_1$, et $\bar{\mathcal{G}}_1$ est lui-même engendré par les $l + 1$ symétries effectuées par rapport aux $l + 1$ faces du polyèdre (P).

On pourra prendre comme domaine fondamental du groupe $\bar{\mathcal{C}}$ des translations du réseau (\bar{R}), non pas un des parallélépipèdes fondamentaux de ce réseau, mais le volume (\mathfrak{D}) formé par (P) et par tous les $(l + 1)$ -èdres qui se déduisent de (P) par les opérations de \mathcal{G}' . Les faces opposées à O de tous ces $(l + 1)$ -èdres sont en effet les lieux des points équidistants de O et des points du réseau (\bar{R}) les plus rapprochés de O ; elles limitent donc le domaine fondamental du groupe $\bar{\mathcal{C}}$, tel qu'on le construirait par la méthode du rayonnement.

Les figures 5, 6 et 7 (pp. 237 et 238) indiquent la forme du domaine (\mathfrak{D}) pour les groupes simplement connexes des types *A*), *B*) et *G*) de rang 2. On a conservé

⁽¹⁾ On peut ajouter qu'il existe toujours un groupe linéaire admettant pour groupe de connexion un sous-groupe quelconque du groupe de connexion $\bar{\Gamma}/\Gamma$ du groupe adjoint.

la même échelle que pour les figures 1, 2 et 4. On obtiendrait dans chaque cas un parallélogramme fondamental du réseau (\bar{R}) en prenant les symétriques O' et O'' de O par rapport à deux côtés consécutifs non en ligne droite du périmètre de (\mathfrak{D}) , et en achevant le parallélogramme construit sur O' et O'' .

23. Les domaines (\mathfrak{D}) relatifs aux groupes de rang 3, des types $A)$, $B)$ et $C)$, se construisent facilement.

Les types $A)$ et $B)$ donnent le même polyèdre (\mathfrak{D}) : c'est un dodécaèdre formé de 12 faces losanges. Les extrémités des petites diagonales de ces losanges sont les 8 sommets d'un cube ; les extrémités des grandes diagonales sont les symétriques du centre de ce cube par rapport à ses faces. Dans le cas du type $A)$, les losanges sont partagés en deux triangles par leurs petites diagonales, ce qui correspond à 24 tétraèdres (P) remplissant le polyèdre (\mathfrak{D}) . Les sommets du cube sont les points O_1 et O_3 , chacun répété quatre fois ; les autres sommets correspondent au point O_2 . Dans le cas du type $B)$, les losanges sont partagés en 4 triangles par leurs deux diagonales, ce qui donne 48 tétraèdres (P) .

Dans le cas du type $C)$, le domaine (\mathfrak{D}) est un cube dont chaque face est partagée en 8 triangles par les diagonales et les droites joignant les milieux des côtés opposés, ce qui donne encore 48 tétraèdres (P) ; le groupe \mathcal{G} est ici le groupe de toutes les symétries du cube. Les sommets du cube sont tous des homologues de O_1 .

24. La détermination effective des sommets de (\mathfrak{D}) se fait facilement par le calcul. Il suffit de déterminer le symétrique de O par rapport à la face de (P) opposée à O , et de lui appliquer ensuite les différentes opérations de \mathcal{G} . En partant maintenant de l sommets convenablement choisis, on aura l arêtes issues de O susceptibles d'engendrer le parallélépipède fondamental du réseau (\bar{R}) . On aura le groupe $\bar{\Gamma}/\Gamma$ en regardant comme une seule opération l'ensemble des translations qui amènent de O aux points homologues à chacun des sommets O, O_1, \dots, O_{h-1} .

Type A). Le réseau (\bar{R}) est formé des points à coordonnées entières dont la somme est divisible par $l+1$. Les points homologues de O_α sont ceux pour lesquels les coordonnées sont entières avec une somme congrue à α (mod $l+1$).

Type B). Le réseau (\bar{R}) est formé des points à coordonnées entières dont la somme est paire. Les points homologues de O_1 sont ceux dont les coordonnées sont entières, avec une somme impaire.

Type C). Le réseau (R) est formé des points à coordonnées entières. Les points homologues de O_1 ont pour coordonnées des moitiés de nombres impairs.

Type D). Le réseau (\bar{R}) est formé des points à coordonnées entières dont la somme est paire. Les points homologues de O_1 ont pour coordonnées des moitiés de nombres impairs, avec une somme différant de $\frac{l}{2}$ d'un nombre impair. Les points homologues de O_3 ont pour coordonnées des moitiés de nombre impairs, avec une somme différant de $\frac{l}{2}$ d'un nombre pair. Les points homologues de O_2 ont pour coordonnées des nombres entiers de somme impaire.

Si l est impair, la translation $\overline{O\bar{O}}_1$ est cyclique (mod $\bar{6}$), son carré est la translation $\overline{O\bar{O}}_2$ et son cube la translation $\overline{O\bar{O}}_3$.

Si l est pair, chacune des translations $\overline{O\bar{O}}_i$ est cyclique d'ordre 2, et chacune d'elles est le produit des deux autres.

Type E₆). Le réseau (\bar{R}) est formé des points dont les coordonnées sont de la forme

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{3} \quad (p_i \text{ entiers, } h = 0, 1 \text{ ou } -1),$$

la somme des p_i étant divisible par 3. Les points homologues de O_α ($\alpha = 1, 2$) ont leurs coordonnées de la même forme, mais la somme des p_i étant congrue à α (mod 3).

Type E₇). Le réseau (\bar{R}) est formé des points dont les 8 coordonnées φ_i , de somme nulle, sont de la forme

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{2} \quad (p_i \text{ entiers, } h = 0 \text{ ou } 1).$$

Les points homologues de O_1 ont leurs coordonnées de somme nulle, de la forme

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{4} \quad (p_i \text{ entiers, } h = 1 \text{ ou } -1).$$

Types E₈, F, G). Le réseau (\bar{R}) est identique à (R) .

CHAPITRE II.

LES ESPACES DES GROUPES SIMPLES UNITAIRES

I. Groupe d'isométrie et groupe d'isotropie.

25. L'espace représentatif \mathcal{G} d'un groupe simple unitaire G est un espace de RIEMANN, simplement connexe si le groupe est simplement connexe ⁽¹⁾. Son groupe continu d'isométrie est symbolisé par les équations

$$S_{\xi'} = S_a S_{\xi} S_b,$$

où S_{ξ} représente une transformation arbitraire de G , $S_{\xi'}$ la transformation qui lui correspond par l'isométrie, S_a et S_b deux transformations fixes ⁽²⁾. Le groupe continu d'isotropie (ou groupe des rotations autour du point origine) est formé des transformations du groupe adjoint

$$S_{\xi'} = S_a^{-1} S_{\xi} S_a.$$

26. Il peut exister un groupe *mixte* d'isotropie; il est formé de toutes les substitutions linéaires à r variables (composantes d'un vecteur issu de A) qui laissent invariante la forme de RIEMANN

$$R = \sum_{\rho, (ij), (kh)} c_{ij\rho} c_{k\rho h} p_{ij} p_{kh},$$

où les p_{ij} désignent les composantes d'un bivecteur arbitraire, les c_{ijk} les constantes de structure du groupe, qu'on peut toujours supposer former un trivecteur. Le groupe adjoint *mixte*, c'est-à-dire l'ensemble des substitutions linéaires qui conservent les constantes de structure du groupe, fait évidemment partie du groupe mixte d'isotropie. Supposons maintenant qu'il existe une substitution linéaire Θ faisant partie du groupe d'isotropie sans appartenir au groupe adjoint. Si T est une matrice arbitraire du groupe adjoint *continu*, la matrice

$$\Theta^{-1} T \Theta = T'$$

en fait aussi partie; la matrice Θ permet ainsi d'établir une correspondance entre les matrices T et T' du groupe adjoint, et cette correspondance conserve

⁽¹⁾ Il s'agit de l'espace à connexion affine *sans torsion* du groupe. Voir É. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations*. (J. de Math., t. 6, 1927, pp. 1-119).

⁽²⁾ Voir p. 98 du mémoire précédemment cité.

évidemment la structure de ce groupe. Il existe donc, dans le groupe adjoint mixte, une substitution T_0 telle qu'on ait aussi

$$T_0^{-1} T T_0 = T';$$

on aura donc

$$\Theta^{-1} T \Theta = T_0^{-1} T T_0,$$

d'où

$$T_0 \Theta^{-1} T = T T_0 \Theta^{-1};$$

la transformation $T_0 \Theta^{-1}$ est donc échangeable avec toutes les matrices du groupe adjoint continu. *Ce groupe adjoint étant irréductible* ⁽¹⁾, il résulte d'un théorème de I. SCHUR et FROBENIUS que la matrice $T_0 \Theta^{-1}$ est le produit de la matrice unité par un facteur constant m . On a donc

$$\Theta = \frac{1}{m} T_0;$$

par suite le groupe d'isotropie doit contenir la matrice $\frac{1}{m}$, qui multiplie les composantes de chaque vecteur par $\frac{1}{m}$. Cela n'est possible que si $\frac{1}{m} = -1$.

Réciproquement toute symétrie par rapport à un point, qui revient à changer le signe de toutes les r variables sur lesquelles agit le groupe d'isotropie, conserve évidemment la forme de RIEMANN R ; elle ne fait du reste pas partie du groupe adjoint *mixte*, car si l'on change les signes de toutes les transformations infinitésimales d'un groupe simple, les coefficients de structure du groupe sont altérés.

En résumé si le groupe adjoint de G est formé de h familles continues distinctes, le groupe d'isotropie de l'espace de RIEMANN \mathcal{E} du groupe G est formé de $2h$ familles continues distinctes, qu'on obtient en combinant le groupe adjoint mixte avec la symétrie par rapport au point fixe considéré de l'espace.

D'après les résultats que j'ai démontrés relativement au groupe adjoint des groupes simples ⁽²⁾, on voit que le *groupe d'isotropie de l'espace \mathcal{E} est formé de deux familles continues, avec les exceptions suivantes*:

(1) Cela signifie qu'il ne laisse invariante aucune multiplicité plane.

(2) É. CARTAN, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples*. (Bull. Sc. Math., 2^{ème} série, t. 49, 1925, pp. 361-374). A la vérité les résultats, sans que cela soit dit explicitement, se rapportent au groupe adjoint des groupes simples à *paramètres complexes*, ainsi qu'à celui des groupes *réels unitaires*; dans les autres cas, il n'est pas

Dans le cas du type A) de rang $1 \geq 2$, du groupe D) de rang $1 \geq 5$, du type E) de rang 6, le groupe d'isotropie est formé de quatre familles continues.

Dans le cas du type D) de rang 4, le groupe d'isotropie est formé de douze familles continues.

27. A chaque famille continue du groupe d'isotropie correspond une famille de transformations isométriques. Les différentes familles de transformations isométriques ainsi obtenues sont *localement* distinctes au voisinage des transformations qui laissent fixe un point donné de l'espace. Nous allons montrer que, l'espace \mathcal{G} étant simplement connexe, il y a exactement autant de familles continues distinctes dans le groupe total d'isométrie que dans le groupe total d'isotropie. Sinon en effet on pourrait passer par continuité de la transformation identique à une transformation isométrique laissant fixe un point A et n'appartenant pas au groupe continu d'isotropie qui laisse fixe le point A . Si on applique les différentes isométries obtenues au point A , on obtient dans l'espace \mathcal{G} un contour fermé (C) partant de A et y revenant. Ce contour fermé peut par déformation continue être réduit au point A ; cette déformation entraîne avec elle une déformation continue de la suite des transformations isométriques considérées. On aurait finalement une suite continue de transformations du groupe mixte d'isotropie du point A , partant de la transformation identique et aboutissant à une transformation n'appartenant pas au groupe continu d'isotropie, ce qui est absurde.

Le raisonnement est général et montre que *dans tout espace de Riemann simplement connexe le groupe d'isométrie contient autant de familles continues distinctes que le groupe d'isotropie.*

Si le nombre de ces familles est 2, les deux familles d'isométries sont définies par les équations

$$\begin{aligned} S_{\xi'} &= S_a S_{\xi} S_b, \\ S_{\xi'} &= S_a S_{\xi}^{-1} S_b. \end{aligned}$$

28. On aurait pu partir d'un autre groupe linéaire unitaire G' isomorphe à G , mais non simplement connexe. Son espace représentatif \mathcal{G}' est un espace de RIEMANN non simplement connexe localement applicable sur le premier

certain, comme il est affirmé à la fin du n.° 2 (p. 365) de ce mémoire, que toute transformation du groupe adjoint mixte qui laisse invariante chacune des transformations Y d'un sous-groupe abélien γ appartienne au groupe adjoint *continu*

espace \mathcal{E} . L'application fait correspondre à un point de \mathcal{E}' un certain nombre k de points de \mathcal{E} , en désignant par k l'indice de connexion de G' . Les transformations isométriques de \mathcal{E} qui font passer d'un de ces points aux $k - 1$ autres constituent ce qu'on peut appeler *le groupe d'holonomie* de \mathcal{E}' par rapport à \mathcal{E} . Toutes ces transformations sont échangeables avec les différentes transformations du groupe continu d'isométrie de \mathcal{E} ; ce sont les transformation

$$S_{\mathcal{E}'} = S_a S_{\mathcal{E}},$$

où S_a désigne les différents transformations de G qui correspondent à la transformation identique de G' . Les transformations du groupe d'holonomie font ainsi partie du groupe *continu* d'isométrie de \mathcal{E} . Il en résulte en particulier que l'espace \mathcal{E}' est *orientable*. Le groupe d'holonomie n'est autre que le groupe de connexion $\bar{\Gamma}/G$; c'est un sous-groupe du groupe d'holonomie de l'espace du groupe adjoint. Si G est distinct de Γ , son groupe d'holonomie est nécessairement cyclique.

29. Les résultats précédents permettent de préciser quels sont les différents espaces de RIEMANN \mathcal{E}' correspondant à une même structure. A côté de l'espace simplement connexe \mathcal{E} , qui existe toujours, on trouve

A): autant de formes d'espaces que le nombre $l + 1$ admet de diviseurs autres que 1; chacune a un groupe d'holonomie cyclique;

B), C), E_6), E_7): une seconde forme d'espace et une seule;

D), l impair: deux autres formes d'espaces avec des groupes d'holonomie cycliques d'ordres 2 et 4;

D), l pair: quatre autres formes d'espaces, trois admettant un groupe d'holonomie cyclique d'ordre 2, la dernière admettant un groupe d'holonomie non cyclique d'ordre 4.

30. Les espaces \mathcal{E}' qui viennent d'être considérés peuvent être appelés des *formes de Klein* de l'espace \mathcal{E} . Ils admettent chacun un groupe continu d'isométrie, partout régulier et uniforme, localement isomorphe au groupe continu d'isométrie de \mathcal{E} .

On sait qu'il existe ou qu'il peut exister d'autres formes d'espaces, que nous appellerons *formes de Clifford* ⁽¹⁾, à métrique partout régulière, loca-

⁽¹⁾ Voir F. ENRIQUES, *Fondements de la Géométrie*. (Encycl. Sc. Math., t. III, vol. I, fasc. I, pp. 133-136). Nous distinguons ici les formes de KLEIN et les formes de CLIFFORD, au lieu de les confondre toutes, comme on le fait d'habitude, sous le nom de formes de CLIFFORD-KLEIN.

lement applicables sur \mathcal{E} , admettant localement (dans un domaine suffisamment petit) les mêmes transformations isométriques que \mathcal{E} , mais *ces transformations ne restent pas toutes uniformes quand on les prolonge dans tout l'espace*. C'est ainsi que le cylindre de révolution est une forme de CLIFFORD du plan euclidien; les translations du plan peuvent se prolonger et rester uniformes sur toute la surface du cylindre, mais il n'en est plus de même des rotations.

A chaque forme de CLIFFORD d'un espace simplement connexe \mathcal{E} est associé un groupe discontinu d'holonomie engendré par les transformations isométriques de \mathcal{E} qui font passer, dans cet espace, d'un point M aux différents points qui correspondent au même point que M dans l'espace de CLIFFORD. La recherche des formes de CLIFFORD revient à celle des sous-groupes discontinus du groupe (total) d'isométrie de \mathcal{E} tels qu'aucune opération d'un tel sous-groupe (autre que l'opération identique) ne laisse fixe un point de \mathcal{E} .

Dans le cas qui nous occupe, les seules formes de KLEIN \mathcal{E}' de l'espace \mathcal{E} proviennent des différents groupes linéaires unitaires de même structure; le groupe continu d'isométrie G' de \mathcal{E}' ayant en effet la même structure infinitésimale que G , et étant partout régulier et uniforme, est isomorphe holoédrique de l'un des groupes linéaires indiqués.

Nous retrouvons des résultats classiques dans le cas particulier du groupe simple à 3 paramètres. Le groupe adjoint est isomorphe au groupe des rotations autour de l'origine dans l'espace ordinaire; l'espace de ce groupe n'est autre que l'*espace elliptique* à trois dimensions. L'espace simplement connexe \mathcal{E} est l'*espace sphérique*, qui peut être regardé comme l'espace du groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'HERMITE définie positive à deux variables. Cet espace admet deux familles continues d'isométries; le groupe d'holonomie de l'espace elliptique (par rapport à l'espace sphérique) est formé de l'opération identique et de la transformation $x'_i = -x_i$, qui fait partie du groupe continu des déplacements de l'espace sphérique. L'espace elliptique est orientable. C'est la seule forme de KLEIN de l'espace sphérique.

II. Les géodésiques.

31. Le groupe d'isométrie de l'espace simplement connexe \mathcal{E} étant transitif, l'étude des géodésiques issues d'un point quelconque se ramène à celle des géodésiques issues du point origine O , qui correspond à la transformation identique de G . Ces géodésiques correspondent aux différents sous-groupes à un paramètre de G ; chercher une géodésique joignant O à un point donné A , c'est chercher une transformation infinitésimale génératrice de la transfor-

mation finie représentée par A . Il résulte immédiatement de là que *par deux points quelconque de \mathcal{E} il passe toujours une géodésique (et même une infinité si $l > 1$)*. Nous laisserons de côté dans ce qui suit le cas $l = 1$, qui correspond à l'espace sphérique (et à l'espace elliptique) à trois dimensions.

Toute direction issue de O représente une transformation infinitésimale de G , laquelle appartient au moins à un sous-groupe abélien γ (n° 3). Les transformations de γ fournissent dans l'espace \mathcal{E} une variété E_l à l dimensions passant par O . Cette variété a une courbure riemannienne nulle, puisque la rotation associée à un parallélogramme élémentaire dont les côtés représentent les transformations infinitésimales U et V a pour effet de donner au vecteur X l'accroissement géométrique $\frac{1}{4} ((UV)X)$, et est par suite nulle si le crochet (UV)

est nul : c'est le cas pour deux transformations quelconques de γ .

La variété E_l est donc localement euclidienne; elle est de plus totalement géodésique, puisqu'elle représente un sous-groupe de G . On peut définir analytiquement un point A de E_l par les l paramètres angulaires fondamentaux $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ de la transformation infinitésimale Y de γ qui engendre la transformation finie représentée par A ; la distance OA , comptée sur la géodésique correspondante, est égale, à un facteur constant près, à la racine carrée de la somme $\Sigma \varphi_\alpha^2$ étendue aux $r - l$ paramètres angulaires. On voit ainsi que *la représentation utilisée dans le Chapitre I dans un espace euclidien à l dimensions n'est autre qu'une application sur cet espace euclidien de la variété localement euclidienne E_l* .

Il y a cependant une différence importante. La variété E_l n'est pas un espace euclidien indéfini; si on la développe sur l'espace euclidien à l dimensions, elle donne le réseau (\bar{R}) de parallélépipèdes, dont chacun représente complètement E_l .

On voit d'après cela que *tout point de E_l peut être joint à O par une infinité dénombrable de géodésiques, situées tout entières dans E_l* , et qui ont pour images, dans l'espace euclidien, les droites joignant l'origine O aux différents points homologues d'un point donné par rapport au groupe $\bar{\mathcal{T}}$ des translations du réseau (\bar{R}) . Celles dont les paramètres directeurs sont rationnels sont fermées. Toutes les géodésiques, situées dans E_l , joignant O à A sont du reste *isolées*; aucune ne se coupe elle-même.

32. Au lieu de représenter E_l par le parallélépipède fondamental du réseau (\bar{R}) , il vaut mieux le représenter par le polyèdre (\mathfrak{D}) introduit au n° 26. Les opérations du groupe \mathcal{G}' correspondent à des rotations du groupe continu

d'isotropie de \mathfrak{G} qui amènent la variété E_l en coïncidence avec elle-même, (mais sans laisser fixes tous les points de E_l); dans chacune de ces rotations, les différents $(l + 1)$ édres (P) dans lesquels est décomposé le polyèdre (\mathfrak{D}) se transforment les uns dans les autres; ils sont du reste en même nombre que les opérations de \mathfrak{G}' et *chacun d'eux est un domaine fondamental pour le groupe discontinu \mathfrak{G}' .*

La figure 5 représente ainsi une des variétés planes E_2 de l'espace simplement connexe à 8 dimensions du groupe simple du type A) de rang 2. Les côtés opposés de l'hexagone régulier doivent être regardés comme identiques, leurs points se correspondant par la translation qui amène en coïncidence ces deux côtés. Les trois translations correspondant aux trois couples de côtés opposés engendrent le groupe $\bar{\mathfrak{G}}$ des translations du réseau (\bar{R}) (c'est au fond le groupe d'holonomie du plan de CLIFFORD E_2 par rapport au plan euclidien). Les trois sommets O_1 ne constituent qu'un seul point de E_2 ; il en

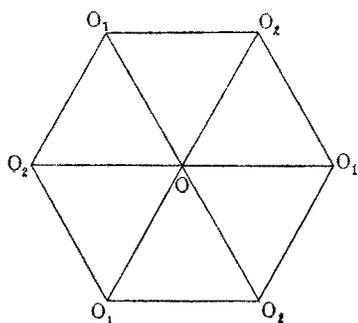


Fig. 5

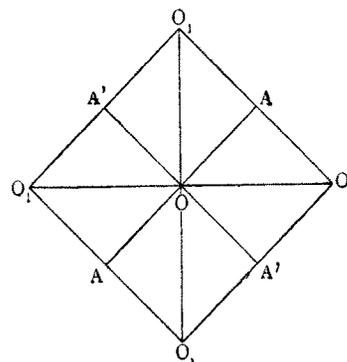


Fig. 6

est de même des trois sommets O_2 . La figure met en évidence trois géodésiques fermées distinctes issues de O ; chacune va passer successivement par les points O_1 et O_2 , qui la partagent en trois parties égales. On a une de ces géodésiques en partant par exemple de O dans le sens horizontal de la figure jusqu'en O_1 ; cette géodésique continue par l'un des côtés horizontaux $O_1 O_2$, puis se termine par le rayon horizontal $O_2 O$ qui ramène au point de départ. Ces trois géodésiques, de même longueur, se coupent en O suivant des angles de 120° (si on les prend dans le sens qui mène d'abord au point O_1). Bien entendu, il existe dans E_2 une infinité d'autres géodésiques fermées, mais elles sont plus longues.

La figure 6 montre le domaine (\mathfrak{D}) représentatif d'une variété E_2 de l'espace simplement connexe à 10 dimensions du groupe simple unitaire du

type B) de rang 2. Les côtés opposés du carré se correspondent par translation et doivent être considérés comme identiques. Les quatre sommets du carré représentent un même point de E_2 ; quant aux milieux des côtés, ils représentent deux points distincts A et A' . Il existe sur la figure quatre géodésiques fermées issues de O ; deux d'entre elles, qui se coupent en O à angle droit, sont partagées en leur milieu par le point O_1 ; deux autres (dont la longueur est à celle des précédentes dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$) sont partagées en leur milieu, l'une par le point A , l'autre par le point A' . Il existe encore sur la figure deux autres géodésiques fermées passant par O_1 et partagées en leur milieu, l'une par A , l'autre par A' .

La figure 7 représente une variété E_2 de l'espace à 14 dimensions du groupe simple du type G). Les sommets de l'hexagone régulier représentent

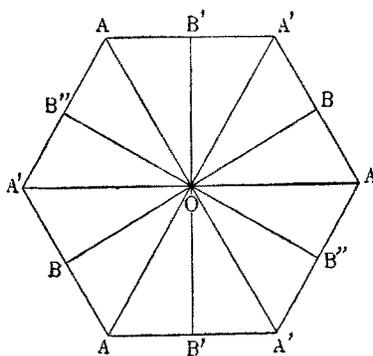


Fig. 7

deux points distincts A et A' de E_2 ; les milieux des côtés représentent trois autres points distincts B, B', B'' . La figure représente trois géodésiques fermées issues de O et passant successivement par les points A et A' qui les partagent en trois parties égales; elles sont d'autre part coupées en leur milieu par l'un des points B, B' ou B'' . La figure montre encore trois autres géodésiques fermées partagées en leur milieu par un de ces trois points, mais ne passant ni par A ni par A' . Les longueurs comparées de ces deux espèces de géodésiques sont 3 et $\sqrt{3}$.

33. Revenons à l'étude générale des géodésiques. Si un point donné A autre que O appartient à une seule variété E_l , toutes les géodésiques joignant O à A sont dans cette variété; elles sont isolées et il y en a une infinité dénombrable.

Si le point A appartient à une infinité de variétés E_l , la transformation finie de G représentée par A est échangeable avec plus de l transformations infinitésimales indépendantes, soit $l + \lambda$. On aura le nombre λ en cherchant combien, parmi les $r - l$ paramètres angulaires φ_α de A , sont des nombres entiers. Le point A est alors invariant par un sous-groupe $g_{l+\lambda}$ du groupe continu des rotations autour de O . Il appartient par suite à ∞^λ variétés E_l distinctes, et dans chacune d'elles il existe une infinité dénombrable de géodésiques joignant O à A . Supposons que la direction en O d'une de ces géodésiques soit invariante par un sous-groupe $g_{l+\mu}$ du groupe des rotations autour de O ; la géodésique correspondante appartiendra à ∞^μ variétés E_l distinctes. Si $\mu = \lambda$, cette géodésique sera isolée dans l'espace \mathcal{G} (parmi l'ensemble des géodésiques joignant O à A). Si $\mu < \lambda$, cette géodésique appartiendra à une variété continue à $\lambda - \mu + 1$ dimensions de géodésiques joignant O à A , et cette variété s'obtiendra en appliquant à la géodésique donnée toutes les rotations du groupe $g_{l+\lambda}$ qui laisse fixes les point O et A .

En définitive, *certaines géodésiques joignant O à A peuvent ne pas être isolées*; ce fait se présente si le groupe des rotations qui laissent le point A invariant est plus grand que le groupe des rotations qui laissent la direction en O de la géodésique invariante; la dimension de la variété continue dont fait partie la géodésique est la différence augmentée de 1 entre les ordres de ces deux groupes.

34. Cela posé, les point M de l'espace se partagent en trois catégories :

1° La première catégorie est formée des points qui ne peuvent être joints à O que par des géodésiques isolées;

2° La deuxième catégorie est formée des points qui peuvent être joints à O par des géodésiques isolées et par des géodésiques non isolées;

3° La troisième catégorie est formée des points qui ne peuvent être joints à O par aucune géodésique isolée.

Il est clair que dans l'espace représentatif à l dimensions utilisé au chapitre I, tout point A de l'une des deux dernières catégories doit se trouver sur un des hyperplans (II) obtenus en égalant l'un des paramètres angulaires à un nombre entier. Par suite si on suppose, ce qui ne restreint pas la généralité, ce point ramené à l'intérieur du $(l + 1)$ -édre (P), il est nécessairement sur l'une des faces ou l'une des arêtes, etc., de (P).

Réciproquement, prenons un point A à la frontière de (P); il peut arriver qu'il soit homologue (par rapport au réseau (\bar{R})) à un point A' dont tous les

paramètres angulaires entiers soient nuls ⁽¹⁾. Dans ce cas la géodésique représentée par la droite OA' admet toutes les rotations qui laissent fixe le point A' ; elle est par suite isolée. Dans le cas contraire, aucune des géodésiques joignant O à A ne sera isolée.

C'est ce qui se passe en particulier pour tout sommet A (autre que O) du polyèdre (P) ; le point A' , s'il existait, aurait en effet tous ses paramètres angulaires nuls; ce serait donc le point origine O , qui n'est pas homologue de A dans le réseau (\bar{R}) .

Les l sommets A , distincts de O , du polyèdre (P) engendrent, quand la variété euclidienne E_l prend toutes les positions possibles, l variétés distinctes qu'on peut appeler les *variétés antipodiques* de O . Il est impossible de joindre par une géodésique isolée le point O à un point quelconque d'une de ces variétés antipodiques.

La détermination complète des points de la troisième catégorie devra être faite dans chaque cas particulier, et il pourra arriver qu'il en existe ailleurs que sur les variétés antipodiques. Cette détermination dépend de considérations purement arithmétiques.

35. Si l'un des sommets du $(l+1)$ -èdre (P) est, dans la représentation du groupe adjoint Γ , un des sommets du réseau (R) , c'est-à-dire représente la transformation identique de Γ , il est clair qu'il est invariant par toutes les rotations autour de O ; ce point se trouve nécessairement dans toutes les variétés E_l . Nous dirons que nous avons un *point antipode* de O . Nous avons déterminé leur nombre $h-1$ dans les différents cas:

Dans le cas contraire, le sommet considéré du $(l+1)$ -èdre (P) n'admet qu'un sous-groupe à $r-\rho$ paramètres du groupe des rotations autour de O (c'est-à-dire du groupe adjoint continu); il engendre donc, quand on fait varier la variété E_l , une variété antipodique (M_ρ) à ρ dimensions. Le nombre des variétés antipodiques qui ne se réduisent pas à un point est $l-h+1$. Il sera facile dans chaque cas de déterminer leurs dimensions respectives. Il est clair que toute variété E_l coupe toute variété antipodique de O en un nombre fini de points. Si A est un sommet de (P) appartenant à cette variété et si on lui applique toutes les opérations de \mathcal{G}' , on obtient un certain nombre de points appartenant, dans E_l , à la même variété antipodique, mais il ne faut pas

⁽¹⁾ Il faut et il suffit pour cela que la face (ou arête, etc.) de (P) sur laquelle se trouve le point A passe, si on la prolonge suffisamment, par un sommet du réseau (\bar{R}) .

regarder comme distincts ceux qui sont homologues entre eux par les différentes translations génératrices du groupe \bar{G} du réseau (\bar{R}) .

36. Nous allons faire d'abord une étude complète pour les trois types de groupe simples de rang 2.

Dans le cas du type A , le point O admet deux antipodes O_1 et O_2 (fig. 5, p. 237). Les points situés sur l'un des côtés latéraux des triangles dans lesquels est décomposé l'hexagone (\mathfrak{D}) ont un paramètre angulaire nul (ainsi que le paramètre égal et opposé). On a donc ici $\lambda = 2$ et le point est homologue à $\infty^{\lambda-1} = \infty^1$ points de l'espace. Le lieu des points analogues (points de la seconde catégorie) est donc une variété unique à 5 dimensions (M_5) coupée par une variété E_3 suivant trois géodésiques fermées issues de O .

Parmi les géodésiques fermées, il en est qui sont situées tout entières dans (M_5) ; elles font partie chacune d'une variété continue de géodésiques fermées ($\lambda = 6$, $\mu = 2$), qui n'est autre du reste que (M_5) ; elles contiennent toutes les deux points antipodes O_1 et O_2 . D'autres géodésiques fermées ne sont pas contenues tout entières dans (M_5) , leur direction en O n'admet qu'un groupe de rotations à 2 paramètres ($\mu = 0$); chacune fait partie d'une variété continue V_7 de géodésiques fermées.

Considérons une géodésique fermée *orientée*, figurée dans le plan représentatif par une droite joignant O à un point du réseau (\bar{R}) . Les coordonnées de ce point sont des entiers p et q dont la somme est un multiple de 3. Si p et q sont premiers entre eux, la géodésique ne rencontrera aucun des deux points antipodes (qui devraient correspondre à des coordonnées tp , tq entières, avec $0 < t < 1$). Si p et q ne sont pas premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur ne peut être que 3; la géodésique passera d'abord par le point $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$ qui est un point antipode; elle passera ensuite par l'autre point antipode $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2q}{3}\right)$; elle sera partagée en trois parties égales par ces deux points. Elle rencontrera en premier lieu O_1 ou O_2 suivant que $\frac{p+q}{3}$ est congru à 1 ou à 2 (mod 3).

Il existe donc trois catégories de géodésiques fermées orientées :

- 1° celles qui contiennent les deux points antipodes dans l'ordre OO_1O_2O ;
- 2° celles qui contiennent les deux points antipodes dans l'ordre OO_2O_1O ;
- 3° celles qui ne contiennent aucun des deux antipodes.

Il est clair que les géodésiques fermées orientées de la seconde catégorie ne sont autres que celles de la première parcourues en sens inverse.

Si maintenant on joint le point O à un point particulier A de la variété (M_5) , on aura d'abord une géodésique isolée tout entière située dans (M_5) , puis une infinité de classes de géodésiques formant des variétés continues V_3 .

Si enfin on joint O à un point A non situé dans (M_5) , on aura une infinité de géodésiques isolées.

37. Dans le cas du type B de rang 2, le point O admet un point antipode O_1 (fig. 6, p. 237) et une variété antipodique coupée par E_2 en deux points A, A' . Avec les notations du n. 15, le point A est de coordonnées $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$. Les paramètres angulaires

$$\pm \varphi_1 \pm \varphi_2,$$

en nombre $\lambda = 4$, sont entiers: par suite, comme $r = 10$, $l = 2$, la variété antipodique est à 4 dimensions.

Tout point O admet donc un point antipode O_1 et une variété antipodique (M_4) .

Le lieu des points de la seconde catégorie est formé de deux variétés (M_7) et (M'_7) coupées par chaque variété E_2 suivant deux droites rectangulaires (fig. 6); l'une contient le point antipode O_1 , l'autre la variété antipodique (M_4) .

Une géodésique fermée partant de O sera représentée dans le plan euclidien par une droite partant de O et aboutissant à un point du réseau (\bar{R}) ; soit (p, q) le premier de ces points; p et q sont des entiers à somme paire (n. 28).

Si p et q sont impairs, le point $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ appartient à la variété antipodique (M_4) , qui partage la géodésique en deux parties égales; la géodésique ne passe pas par le point antipode O_1 .

Si p et q sont pairs, ils ne sont pas tous les deux divisibles par 4; si $p = 4p'$, $q = 4q' + 2$, la géodésique rencontre d'abord le point antipode O_1 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, puis revient en O .

Donc, toute géodésique fermée est coupée en son milieu soit par le point antipode O_1 , soit par la variété antipodique (M_4) .

La discussion des dimensions des variétés continues engendrées par les géodésiques joignant deux points donnés se ferait comme dans le cas A .

38. Dans le cas du type G , le point O n'admet pas d'antipode. Il existe deux variétés antipodiques, l'une coupée en deux points A, A' (fig. 7, p. 238), l'autre en trois points B, B', B'' par toute variété E_2 . Avec les notations du n. 22, l'un

des points A a pour coordonnées $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{3}$, l'un des points B a pour coordonnées $\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_2 = 0$. En introduisant la coordonnée surabondante $\varphi_3 = -\varphi_1 - \varphi_2$, on trouve que ceux des paramètres angulaires de A qui sont entiers sont

$$\pm(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \pm(\varphi_1 - \varphi_3), \quad \pm(\varphi_2 - \varphi_3);$$

on a donc $\lambda = 6$, $\nu = 14$, $l = 2$; la première variété antipodique est donc à 6 dimensions. Ceux des paramètres angulaires de B qui sont entiers sont

$$\pm\varphi_2, \quad \pm(\varphi_1 - \varphi_3);$$

on a donc $\lambda = 4$; la seconde variété antipodique est à 8 dimensions.

Tout point O de l'espace admet donc deux variétés antipodiques (M_6) et (M_8) .

Les points homologues de O ont des coordonnées entières. Les points de (M_6) ont pour coordonnées les tiers de deux entiers congrus entre eux (mod 3); les points de (M_8) ont pour coordonnées les moitiés de deux entiers non tous les deux pairs.

Toute géodésique fermée, partant de O , aboutit dans le plan euclidien à un point (p, q) , p et q étant deux entiers premiers entre eux. Nous avons alors à considérer les points $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$, $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2q}{3}\right)$. Le second point appartient à (M_8) ; le premier appartient à (M_6) si $p - q$ est divisible par 3, et il en est de même du troisième.

Il existe donc deux catégories distinctes de géodésiques fermées. Dans chaque catégorie, les géodésiques sont coupées en leur milieu par la variété antipodique (M_8) ; les géodésiques de la seconde catégorie sont en outre partagées en trois parties égales par la variété antipodique (M_6) .

La figure (7) donne des exemples de ces deux catégories de géodésiques.

III. Classification des géodésiques fermées.

Nous allons, pour les quatre grandes classes de groupes simples, déterminer les variétés antipodiques d'un point et indiquer une classification des géodésiques fermées basée sur la nature des variétés antipodiques rencontrées.

39. Espaces simplement connexes du type A . Il n'y a ici que des points antipodes. Nous appellerons O_i celui dont les i premières coordonnées sont égales à 1, les autres étant nulles (n. 10).

Le premier est le point antipode de O . Ceux des paramètres angulaires de A_i qui sont entiers sont

$$\begin{aligned} & \pm \varphi_{i+1}, \dots, \pm \varphi_l, \\ & \pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, i), \\ & \pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu \qquad (\lambda, \mu = i + 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Ils sont au nombre de

$$4i^2 - (4l + 2)i + 2l^2;$$

par suite le point A_i engendre une variété antipodique (M^i) à

$$2i(2l - 2i + 1) \qquad (i = 2, 3, \dots, l)$$

dimensions.

Les points homologues de O sont à coordonnées entières de somme paire; ceux de O_i à coordonnées entières de somme impaire. Les points qui appartiennent à la variété antipodique (M^i) ont i coordonnées qui sont des moitiés de nombres impairs, les autres coordonnées étant entières.

Soit une géodésique fermée partant de O ; elle arrivera à un point de coordonnées entières p_i , avec Σp_i pair. Si les entiers p_i sont tous pairs, ce sont les doubles de nombres entiers premiers entre eux à somme impaire. Si les entiers p_i ne sont pas tous pairs, il sont premiers entre eux.

Supposons d'abord les p_i premiers entre eux, avec une somme paire; le point $\left(\frac{p_i}{2}\right)$ appartiendra certainement à l'une des variétés antipodiques, et comme il y a un nombre pair d'entiers p_i impairs, cette variété antipodique sera (M^2) ou (M^4) ou (M^6) etc.

Supposons maintenant $p_i = 2q_i$, les q_i étant premiers entre eux et à somme impaire. Il y a lieu d'examiner les point $\left(\frac{q_i}{2}\right)$, (q_i) et $\left(\frac{3q_i}{2}\right)$. Si un seul des entiers q_i est impair, le point $\left(\frac{q_i}{2}\right)$ et le point $\left(\frac{3q_i}{2}\right)$ ne se trouvent sur aucune variété antipodique et le point (q_i) est l'antipode O_1 . Si $2h + 1 \geq 3$ entiers q_i sont impairs, le géodésique rencontre successivement (M^{2h+1}), O_1 et (M^{2h+1}) et elle est partagée en 4 segments égaux.

En résumé : *les géodésiques fermées se partagent en 1 catégories distinctes, suivant la première variété antipodique rencontrée.*

Si cette variété est le point antipode O_1 ou l'une des variétés (M^{2i}), la géodésique n'en rencontre pas d'autre et elle est partagée en deux segments égaux.

Si cette variété est l'une des variétés (M^{2i+1}) , la géodésique rencontre ensuite O_1 , puis de nouveau (M^{2i+1}) , et elle est partagée en 4 segments égaux.

41. Espaces simplement connexes du type C. Nous avons (n. 12) l sommets A_1, \dots, A_{l-1}, A_l ; le sommet A_i ayant ses i premières coordonnées égales à $\frac{1}{2}$, les autres nulles. Le point A_i est le point O_i antipode unique de O .

Ceux des paramètres angulaires de A_i qui sont entiers sont

$$\begin{aligned} & \pm 2\varphi_\alpha && (\alpha = 1, 2, \dots, l), \\ & \pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta && (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, i), \\ & \pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu && (\lambda, \mu = i + 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Ils sont au nombre de $4i^2 - 4li + 2l^2$. Par suite le point A_i engendre une variété antipodique (M^i) à $4i(l - i)$ dimensions.

Les points homologues de O sont les points à coordonnées entières, les points homologues de O_i sont ceux dont les coordonnées sont des moitiés de nombres impairs. Les points qui appartiennent à (M^i) ont i coordonnées qui sont des moitiés d'entiers impairs, les autres étant entières.

Soit une géodésique fermée partant de O ; elle aboutira à un point à coordonnées entières p_i , les nombres p_i étant premiers entre eux. Le point $\left(\frac{p_i}{2}\right)$ sera évidemment, suivant les cas, le point antipode ou un point d'une des variétés antipodiques.

Il existe 1 catégories de géodésiques fermées; toutes les géodésiques fermées rencontrent une variété antipodique et une seule, qui la partage en deux parties égales.

42. Espaces simplement connexes du type D. Le sommet A_1 du $(l + 1)$ -èdre (P) a sa première coordonnée égale à 1; le sommet A_i ($2 \leq i \leq l - 2$) a ses i premières coordonnées égales à $\frac{1}{2}$, les autres étant nulles; les sommets A_{l-1} et A_l ont leurs $l - 1$ premières coordonnées égales à $\frac{1}{2}$, la dernière étant $-\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$.

Les points A_1, A_{l-1} et A_l sont les trois antipodes O_2, O_i et O_3 de O .

Ceux des paramètres angulaires de A_i qui ont des valeurs entières sont

$$\begin{aligned} & \pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta && (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, i), \\ & \pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu && (\lambda, \mu = i + 1, \dots, l), \end{aligned}$$

au nombre de $4i^2 - 4i + 2(l - 1)$. Par suite le point A_i engendre une variété antipodique (M^i) à $4i(l - i)$ dimensions.

Il y a lieu de distinguer maintenant suivant la parité de l :

1° *l impair*. Soit une géodésique fermée orientée partant de O ; ses paramètres directeurs seront proportionnels à des entiers p_1, p_2, \dots, p_l premiers entre eux.

Si un seul de ces entiers est impair, la géodésique sera partagée en son milieu par le point $O_2(p_1, p_2, \dots, p_l)$ et ne rencontrera aucune autre variété antipodique.

Si le nombre des entiers p_i impairs est égal à $2\alpha \leq l - 3$, la géodésique rencontrera d'abord la variété antipodique ($M^{2\alpha}$) au point de coordonnées $\frac{p_i}{2}$, puis reviendra en O .

Si le nombre des entiers p_i impairs est égal à $2\alpha + 1$ ($1 \leq \alpha \leq \frac{l-3}{2}$), la géodésique fermée rencontrera d'abord la variété antipodique ($M^{2\alpha+1}$), puis le point antipode (O_2), enfin de nouveau la variété antipodique ($M^{2\alpha+1}$) pour revenir en O ; elle sera partagée ainsi en quatre segments égaux.

Si le nombre des entiers p_i impairs est égal à $l - 1$, la géodésique ne rencontrera aucune des variétés antipodiques.

Si enfin tous les entiers p_i sont impairs, la variété rencontrera les trois points antipodes, soit dans l'ordre $OO_1O_2O_3O$, soit dans l'ordre $OO_3O_2O_1O$.

Il existe donc $l + 1$ catégories de géodésiques fermées orientées.

2° *l pair*. La discussion est analogue à la précédente. La seule différence se rapporte aux cas où le nombre des entiers p_i impairs est égal à $l - 1$ ou à l .

Si $l - 1$ des entiers p_i sont impairs, la géodésique est partagée en son milieu par le point antipode O_2 .

Si les entiers p_i sont tous impairs, la géodésique est partagée en son milieu par l'un des deux points antipodes O_1 ou O_3 .

Il existe donc dans ce cas l catégories de géodésiques fermées orientées; toutes les géodésiques rencontrent 1 ou 3 variétés antipodiques.

CHAPITRE III.

LES GROUPES SIMPLES COMPLEXES ET LES ESPACES DE RIEMANN
À COURBURE NÉGATIVE ASSOCIÉSI. Les espaces de Riemann
attachés aux groupes simples complexes.

43. Nous avons étudié dans le chapitre précédent les espaces de RIEMANN représentatifs des groupes simples unitaires (à paramètres réels). Ces espaces sont à courbure riemannienne partout positive ou nulle.

À chacun de ces espaces correspond un autre espace de RIEMANN au même nombre de dimensions r , mais à courbure riemannienne *négative* (ou nulle). Le groupe d'isotropie de ces nouveaux espaces est identique à celui des premiers espaces, mais leur groupe continu d'isométrie, au lieu de se décomposer en deux groupes simples à r paramètres réels, est un groupe simple à r paramètres complexes ($2r$ paramètres réels).

44. Partons d'une structure simple donnée et choisissons r transformations infinitésimales de base X_1, \dots, X_r engendrant un groupe *unitaire* (avec coefficients de structure réels). Le groupe complexe sera engendré par les transformations infinitésimales $\Sigma e_i X_i$ avec des coefficients e_i complexes arbitraires. Nous dirons que deux transformations dans lesquelles les coefficients e_i sont complexes conjugués sont elles-mêmes complexes conjuguées. Une transformation sera purement imaginaire si les coefficients e_i sont tous purement imaginaires.

Les racines caractéristiques d'une transformation infinitésimale réelle étant purement imaginaires, celles d'une transformation infinitésimale purement imaginaire seront toutes réelles. Par suite la matrice T du groupe adjoint (complexe) engendrée par la transformation considérée a toutes ses racines caractéristiques réelles et positives; la matrice S qui représente la transformation infinitésimale est donnée sans ambiguïté par la formule

$$S = \log T,$$

où on donne aux logarithmes des racines caractéristiques de T leurs déterminations réelles ⁽¹⁾. On voit immédiatement que T n'admet qu'une transfor-

⁽¹⁾ Voir E. STUDY-E. CARTAN, *Nombres complexes*. (Encycl. Sc. Math., 15, n.° 31, pp. 438-440).

mation infinitésimale génératrice purement imaginaire. Nous dirons que les matrices T considérées du groupe adjoint continu sont purement imaginaires; elles sont caractérisées par la propriété que la matrice \bar{T} imaginaire conjuguée de T est égale à T^{-1} .

Toute matrice purement imaginaire T est définie d'une manière bi-univoque par les r nombres réels $\frac{e_x}{i}$ obtenus en divisant par i les coefficients e_x de sa transformation infinitésimale génératrice. L'espace \mathcal{G} des matrices T est donc simplement connexe, puisqu'il admet une représentation bi-univoque sur l'espace euclidien à r dimensions. Ce n'est pas un espace de groupe, car les matrices T n'engendrent pas un groupe.

45. Considérons l'espace, à $2r$ dimensions, à connexion affine sans torsion du groupe adjoint *complexe*. Le lieu \mathcal{G} des points représentatifs des matrices T est une variété totalement géodésique de cet espace ⁽¹⁾. En effet les r transformations infinitésimales génératrices des matrices T :

$$U_1 = iX_1, \quad U_2 = iX_2, \dots, \quad U_r = iX_r$$

jouissent de la propriété que les transformations

$$((U_i U_j) U_k)$$

sont des combinaisons linéaires (à coefficients réels) des U_i . Comme d'autre part les transformations isomorphiques de l'espace du groupe adjoint complexe laissent invariante la forme quadratique $\varphi(e)$, où on regarde les e_i comme des quantités complexes, et que cette forme quadratique, quand on se déplace le long de \mathcal{G} , est *définie positive*, la variété totalement géodésique \mathcal{G} est un espace de RIEMANN. Les isométries de cet espace sont formées des isomorphies de l'espace total qui laissent la variété \mathcal{G} invariante. En particulier toutes les isométries qui laissent invariant le point origine s'obtiennent en transformant T par une transformation du groupe adjoint unitaire, combinée ou non avec une symétrie par rapport à l'origine :

$$T' = R^{-1} T R,$$

$$T' = R^{-1} T^{-1} R,$$

R désignant une matrice arbitraire (réelle) du groupe adjoint (mixte) unitaire.

⁽¹⁾ É. CARTAN, *La géométrie des groupes de transformations*. (J. Math., t. 6, 1927, pp. 71-75).

Pour obtenir les autres isométries, considérons d'abord la symétrie par rapport à un point T_0 de l'espace; elle se traduit analytiquement par la relation

$$T' = T_0 T^{-1} T_0.$$

Cela posé, les isométries qui amènent l'origine en T_0 s'obtiendront en effectuant successivement une rotation autour de l'origine, puis une symétrie par rapport au point $T_0^{\frac{1}{2}}$. On aura donc les deux familles

$$\begin{aligned} T'' &= T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}}, \\ T' &= T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T^{-1} R_0 T_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Chacune de ces familles se décompose éventuellement, si elle n'est pas continue, en deux ou six familles continues.

Toute isométrie peut être regardée comme définissant une transformation du groupe adjoint mixte complexe, *considéré comme à 2r paramètres réels*. Il contient deux fois plus de familles distinctes que le groupe adjoint mixte du groupe *considéré comme à paramètres complexes indivisibles*; cela tient à ce que dans le premier cas il est permis de considérer la transformation d'un paramètre complexe en son paramètre complexe conjugué, ou, ce qui revient au même, de la transformation RT dans la transformation conjuguée RT^{-1} (ce qui correspond à la symétrie par rapport au point origine).

46. Le déplacement défini par

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} T T_0^{\frac{1}{2}},$$

qui résulte de deux symétries successives par rapport au point origine et au point $T_0^{\frac{1}{2}}$, fait évidemment partie du groupe continu des déplacements; quand on prend pour T_0 les matrices finies engendrées par une même matrice infinitésimale purement imaginaire, on obtient un déplacement continu dans lequel la géodésique (C) joignant l'origine au point T_0 glisse sur elle-même de manière que tout vecteur issu d'un point de cette géodésique se déplace parallèlement à lui-même, au sens de LEVI-CIVITA. On pourrait donner à un tel déplacement le nom de *transvection de base* (C).

Cela posé, *tout déplacement de l'espace \mathcal{E} peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une rotation (isométrique) autour de 0 et une*

transvection ayant pour base une géodésique issue de O. En effet l'égalité, quel que soit T ,

$$T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}} = T_0'^{\frac{1}{2}} R_0'^{-1} T R_0' T_0'^{\frac{1}{2}},$$

donne, en faisant $T = 1$,

$$T_0 = T_0';$$

on a ensuite

$$R_0' R_0^{-1} T = T R_0' R_0^{-1},$$

ce qui prouve que la matrice $R_0' R_0^{-1}$ est échangeable avec toutes les matrices T , c'est-à-dire avec toutes les transformations infinitésimales du groupe; c'est donc la matrice unité, et $R_0' = R_0$.

47. Le groupe continu des déplacements de l'espace \mathcal{E} est isomorphe au groupe engendré par les transformations $R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$ du groupe adjoint complexe, produit d'une matrice réelle par une matrice purement imaginaire. Si on pose

$$\Theta = R_0 T_0^{\frac{1}{2}},$$

et si on désigne par $\bar{\Theta}$ la matrice imaginaire conjuguée de Θ , on a

$$\bar{\Theta} = R_0 T_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Par suite les transformations isométriques de \mathcal{E} sont de l'une des deux formes

$$T' = \bar{\Theta}^{-1} T \Theta,$$

$$T' = \bar{\Theta}^{-1} T^{-1} \Theta,$$

en désignant par Θ une matrice arbitraire du groupe adjoint (mixte) complexe. Les transformations Θ formant nécessairement un groupe, ce groupe ne peut être que le groupe adjoint complexe, dont toutes les transformations sont ainsi réductibles à la forme $\Theta = R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$.

II. La topologie des groupes simples complexes.

48. Les résultats précédents nous permettent d'étudier la topologie du groupe adjoint continu complexe. En effet chacune de ses transformations étant décomposable d'une manière et d'une seule en une transformation du groupe adjoint unitaire et une transformation T , tout contour fermé tracé

dans le domaine du groupe se ramènera, d'une manière et d'une seule, à un contour fermé tracé dans le domaine du groupe adjoint unitaire et à un contour fermé tracé dans l'espace \mathcal{G} et formé des points transformés de O par les différentes transformations T .

L'espace \mathcal{G} étant simplement connexe, le second contour fermé est toujours réductible à zéro. Par suite *le groupe de connexion du groupe adjoint complexe est identique au groupe de connexion du groupe adjoint unitaire.*

Plus généralement, tout groupe linéaire à r paramètres complexes de la structure donnée admet le même groupe de connexion que le groupe linéaire unitaire correspondant. *Il existe donc toujours un groupe linéaire à paramètres complexes, simplement connexe, admettant une structure infinitésimale simple donnée.*

III. Les géodésiques et la trigonométrie des espaces \mathcal{G} .

49. La distribution des géodésiques de l'espace \mathcal{G} est extrêmement simple. Il passe en effet par deux points quelconque de \mathcal{G} une géodésique et une seule. Il suffit de le démontrer pour le point origine O et un autre point quelconque A correspondant à une matrice T . Le point T^t , quand t varie de 0 à 1, décrit une géodésique, et c'est la seule qui passe par O et A , car T ne possède qu'une transformation infinitésimale génératrice.

On peut du reste se demander si cette double propriété de l'espace \mathcal{G} n'est pas liée nécessairement à la double propriété qu'il possède d'être simplement connexe et d'avoir sa courbure riemannienne partout négative ou nulle.

Une conséquence importante peut être tirée de ce qui précède, c'est la *non-existence d'autres formes de Klein pour l'espace \mathcal{G}* . Sinon en effet, il existerait au moins une isométrie de \mathcal{G} échangeable avec tous les déplacements de l'espace \mathcal{G} et ne laissant aucun point fixe; soit alors A le point dans lequel cette isométrie transforme le point O . Toute rotation isométrique autour de O devrait laisser invariant le point A , par suite la géodésique OA ; et il n'existe aucune direction invariante par toutes les transformations du groupe d'isotropie: sinon il existerait une transformation infinitésimale (purement imaginaire) du groupe échangeable avec toutes les autres, ce qui n'est pas.

50. Il est facile d'indiquer une relation donnant toutes les formules de la trigonométrie de l'espace \mathcal{G} , et faisant intervenir cinq des six éléments d'un

triangle géodésique OAB . Soient en effet T_A et T_B les matrices représentées par A et B ; soient a et b leurs modules (longueurs des côtés OA et OB); leur produit scalaire $T_A | T_B$, (qui n'est autre que la quantité $-\Sigma e_\alpha e'_\alpha$ relative à leurs deux transformations infinitésimales génératrices) est égal à $ab \cos \widehat{O}$. Transportons par parallélisme le segment de géodésique AB de A en O le long de la géodésique AO ; nous obtenons un segment de géodésique égal OB' , avec

$$T_{B'} = T_A^{-\frac{1}{2}} T_B T_A^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans cette formule fondamentale on a

$$|T_A| = OA = a, \quad |T_B| = OB = b, \quad |T_{B'}| = AB = c;$$

$$T_A | T_B = ab \cos \widehat{O}, \quad T_A | T_{B'} = -ab \cos \widehat{A}.$$

Si en particulier les matrices T_A et T_B sont échangeables entre elles, ce qui revient à dire que les points A et B sont dans une même variété E_l issue de O , on a

$$T_{B'} = T_B T_A^{-1},$$

et les formules de la trigonométrie sont les mêmes que dans le plan euclidien. Ici la variété E_l est un vrai espace euclidien simplement connexe illimité.

IV. Les quatre grandes classes d'espaces \mathcal{E} .

51. Il ne sera pas mauvais, après ces généralités, de passer en revue les quatre grandes classes de groupes simples et de donner des interprétations géométriques concrètes des espaces \mathcal{E} correspondants. Une remarque générale peut être faite d'abord.

Considérons un groupe linéaire unitaire particulier, à n variables; nous savons qu'il laisse invariante une forme d'HERMITE définie positive F_0 ⁽¹⁾. Lorsqu'on applique les substitutions du groupe linéaire, aux n paramètres réels desquelles on attribue des valeurs complexes quelconques, la forme d'HERMITE F_0 est changée en une autre forme d'HERMITE définie positive F

(1) Ce théorème est dû à H. WEYL qui en a montré, dans les mémoires précédemment cités, l'importance dans la théorie de la représentation des groupes semi-simples par des groupes linéaires. Voir une autre démonstration dans mon mémoire, déjà cité: *Les tenseurs irréductibles, etc.* (Bull. Sc. Math., 2^{ème} série, t. 49, 1925, pp. 132-159).

dépendant essentiellement de r paramètres réels. L'espace de ces formes d'HERMITE est identique à l'espace \mathfrak{G} . On aura une représentation concrète plus ou moins simple suivant le groupe linéaire unitaire choisi.

52. Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui du groupe simple à 3 paramètres complexes, par exemple le groupe des transformations homographiques complexes d'une variable complexe. Si nous prenons ici pour groupe unitaire le groupè des rotations autour d'un point fixe, *les matrices T représentent les rotations autour d'un axe réel d'un angle purement imaginaire*. En utilisant les paramètres d'EULER-OLINDE RODRIGUES, chaque matrice T est définie par quatre nombres réels ρ, λ, μ, ν satisfaisant à

$$\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = 1 \quad (\rho > 0).$$

On obtient l'espace hyperbolique à trois dimensions, dont le groupe continu des déplacements est en effet isomorphe au groupe des transformations homographiques complexes d'une variable complexe (avec un indice de connexion égal à 2).

53. Le cas général du type A) conduit à l'espace \mathfrak{G} des formes d'HERMITE définies positives à $l+1$ variables, à discriminant égal à 1. Cet espace est à $(l+1)^2 - 1 = l(l+2)$ dimensions. Toute transformation infinitésimale unimodulaire laissant invariante la forme d'HERMITE

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{l+1} \bar{x}_{l+1}$$

est homologue à une transformation de la forme

$$i(a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + \dots + a_{l+1} x_{l+1} p_{l+1}) \quad (\sum a_i = 0),$$

les coefficients a_i étant réels. Par suite toute matrice T est réductible à la forme diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & e^{a_{l+1}} \end{pmatrix}.$$

Toute géodésique de l'espace \mathfrak{G} est, par un déplacement convenable, réductible au lieu des formes d'HERMITE

$$e^{a_1 s} x_1 \bar{x}_1 + e^{a_2 s} x_2 \bar{x}_2 + \dots + e^{a_{l+1} s} x_{l+1} \bar{x}_{l+1}.$$

Si l'on suppose, ce qui est le cas général,

$$a_1 > a_2 > \dots > a_l > a_{l+1},$$

le point de la géodésique qui est à l'infini négatif ($s = -\infty$) est le point représentatif de la forme d'HERMITE dégénérée $x_{l+1}\bar{x}_{l+1}$, et le point à l'infini positif représente la forme d'HERMITE dégénérée $x_1\bar{x}_1$.

Dans l'espace projectif des formes d'HERMITE à $l+1$ variables, l'espace \mathcal{E} est limité par les variétés représentatives des formes d'HERMITE dégénérées, mais jamais négatives; ces variétés constituent l'*absolu* et toutes les géodésiques ont deux points à l'infini sur l'absolu.

54. Dans le cas des types *B*) et *D*), on peut prendre pour groupe unitaire le groupe réel d'une forme quadratique réelle définie positive, ou le groupe des rotations autour de l'origine dans un espace euclidien à n dimensions. L'espace \mathcal{E} sera par exemple celui des formes d'HERMITE définies positives obtenues en appliquant à la forme

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n$$

une rotation autour d'éléments plans réels, mais d'angles purement imaginaires. Toute géodésique pourra, à un déplacement près, s'obtenir en appliquant à la forme d'HERMITE considérée la rotation

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 ch(a_{12}s) - ix_2 sh(a_{12}s), \\ x'_2 &= ix_1 sh(a_{12}s) + x_2 ch(a_{12}s), \\ x'_3 &= x_3 ch(a_{34}s) - ix_4 sh(a_{34}s), \\ x'_4 &= ix_3 sh(a_{34}s) + x_4 ch(a_{34}s), \\ &\dots \end{aligned}$$

avec les coefficients réels a_{12}, a_{34}, \dots , tels que la somme de leurs carrés soit égale à 1. On obtiendra alors les formes d'HERMITE

$$ch(2a_{12}s)(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2) + ish(2a_{12}s)(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) + \dots$$

Si on suppose par exemple

$$a_{12} > a_{34} > 0, \quad a_{56} = \dots = 0,$$

la géodésique commencera (pour $s = -\infty$) à la forme d'HERMITE dégénérée

$$x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4 - i(x_3\bar{x}_4 - x_4\bar{x}_3) = (x_3 + ix_4)(\bar{x}_3 - i\bar{x}_4),$$

et se terminera (pour $s = +\infty$) à la forme d'HERMITE dégénérée

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + i(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) = (x_1 - ix_2)(\bar{x}_1 + i\bar{x}_2).$$

55. Dans le cas du type C , on peut partir du groupe unitaire qui laisse invariante la forme quadratique extérieure

$$[x_1x_2] + [x_3x_4] + \dots + [x_{2l-1}x_{2l}]$$

et la forme d'HERMITE définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_{2l}\bar{x}_{2l}.$$

L'espace \mathcal{E} sera par exemple celui des formes d'HERMITE définies positives dans lesquelles est transformée la forme d'HERMITE précédente par une substitution linéaire complexe arbitraire laissant invariante la forme quadratique extérieure.

Toute transformation infinitésimale du groupe unitaire est réductible à la forme

$$ia_{12}(x_1p_1 - x_2p_2) + ia_{34}(x_3p_3 - x_4p_4) + \dots + ia_{2l-1,2l}(x_{2l-1}p_{2l-1} - x_{2l}p_{2l}).$$

Il en résulte que toute géodésique pourra, à un déplacement près, être regardée comme le lieu des formes d'HERMITE

$$e^{2a_{12}s}x_1\bar{x}_1 + e^{-2a_{12}s}x_2\bar{x}_2 + \dots + e^{2a_{2l-1,2l}s}x_{2l-1}\bar{x}_{2l-1} + e^{-2a_{2l-1,2l}s}x_{2l}\bar{x}_{2l},$$

avec

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 + \dots + a_{2l-1,2l}^2 = 1.$$

La quantité s désigne l'abscisse curviligne. Si l'on a

$$a_{12} > a_{34} > \dots > a_{2l-1,2l} > 0,$$

le point à l'infini négatif sur la géodésique est la forme d'HERMITE dégénérée $x_2\bar{x}_2$, tandis que le point à l'infini positif est $x_1\bar{x}_1$.

On remarquera que dans les exemples précédents *il existe en général une infinité de géodésiques se coupant aux deux mêmes points à l'infini.*