Sur quelques problèmes du calcul des variations.

par M. LAVRENTIEFF (Moscou).

Nous nous proposons d'étudier dans ce Mémoire quelques problèmes liés à la question: dans quelles hypothèses il existe au moins une fonction $y=f(x)$ minimant l'integrale

$$\int_0^1 F(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Nous supposons que la fonction $F(x, y, y')$ est continue par rapport à l'ensemble des trois variables; quant à la classe des lignes admissibles, nous supposons que ce sont des courbes $y=f(x)$: 1°) continues; 2°) passant par l'origine et le point (1, 1); 3°) situées entièrement dans le carré (0, 0); (0, 1); (1, 1); (1, 0).

Dans la théorie classique on suppose les courbes $y=f(x)$ continues et ayant des tangentes qui varient aussi d'une manière continue (¹). M. TONELLI a construit une belle théorie dans la seule hypothèse que les $f(x)$ soient absolument continues (²). La question se pose naturellement s'il est possible d'étendre cette théorie et, en particulier, si l'on peut considérer comme lignes admissibles toutes les courbes à variation bornée; nous démontrons dans le § 1 que cette question se résoud négativement.

Ainsi donc, parmi les courbes continues la classe la plus étendue naturelle de lignes admissibles est celle des fonctions absolument continues. Pour ces fonctions là M. TONELLI a démontré que pourvu que la fonction $F(x, y, y')$ jouisse de certaines propriétés, l'extrêmé absolu de l'intégrale (1) existe (³); en ajoutant encore quelques hypothèses restrictives sur $F(x, y, y')$, M. TONELLI a démontré que la courbe qui extrême l'integrale (1) est une extrêmale (⁴).

(¹) C'est à dire les courbes $y=f(x)$ telles que $f'(x)$ est continue.

(²) L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (Bologna, Nicola Zanichelli).

(³) Loc. cit., t. II, page 281.

(⁴) Loc. cit., t. II, pp. 321, 345.

Nous donnons dans le § 2 un lemme qui indique une nouvelle voie pour démontrer l'existence de l'extrêmé absolu; dans le § 3 nous donnons l'exemple d'un problème du calcul des variations conduisant à une courbe extrêmante, qui n'est pas une extrêmale dans aucun intervalle.

Cela posé, nous cherchons à résoudre la question, si la borne inférieure des valeurs de l'integrale (1) dans la classe des courbes absolument continues est égale à la borne inférieure des valeurs de la même integrale dans la classe des courbes continues $y = f(x)$ à dérivées $f'(x)$ continues ([1]). Nous démontrons au § 4 que cette question se résoud par l'affirmative si l'on suppose $\frac{\partial F}{\partial y}$ bornée. Cette proposition attire notre attention sur un nouveau cas, où la courbe extrêmante est une extrêmale.

Nous démontrons enfin dans le § 5 qu'en posant la même question en général, on reçoit une réponse négative.

Pour simplifier l'exposition, nous allons poser quelques définitions.

Nous dirons que la courbe $y = f(x)$ *appartient à la classe* C_φ si l'on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \varphi(|h|), \qquad 0 \leq f(x) \leq 1,$$

appartient à la classe $C_\varphi^{(a)}$ si quel que soit un système fini d'intervalles δ_i sans points communs, on a

$$\sum_i |\operatorname{var} \delta_i f(x)| \leq \varphi(\sum_i \delta_i)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction continue définie pour $x \geq 0$ et telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$.

Enfin soit $C^{(a)}$ la classe de toutes les fonctions absolument continues et C' celles des fonctions à dérivées continues.

1. Sur la possibilité d'étendre la classe des lignes admissibles. — Nous allons démontrer ici la proposition suivante.

Théorème. *Si l'on considère comme lignes admissibles toutes les courbes à variation bornée* ($y = f(x)$; $0 \leq f(x) \leq 1$; $f(0) = 0$; $f(1) = 1$), *le problème du calcul des variations se résoud, en général, négativement.*

En effet, soit $F(x, y, y')$ une fonction continue par rapport à l'ensemble des variables x, y, y' définie pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et pour toute valeur de y'; nous allons démontrer d'abord que la borne inférieure de l'integrale (1) pour toutes les fonctions $y = f(x)$ à variation bornée indiquées est égale à la

([1]) Voir la note ([1]) page 7.

borne inférieure de la même intégrale où l'on suppose que $y=\varphi(x)$, $y'=\psi(x)$, φ et ψ étant des fonctions mesurables, $0\leq\varphi(x)\leq 1$, et d'ailleurs absolument quelconques. En remarquant que cette dernière borne inférieure est toujours atteinte par un certain couple de fonctions mesurables $y=\varphi(x)$ et $z=\psi(x)$, mais qu'en général la fonction $\psi(x)$ n'est pas la dérivée de la fonction $\varphi(x)$, on verra que la proposition énoncée sera demontrée.

Le théorème à démontrer est donc réduit à la proposition suivante: *Quelles que soient les fonctions mesurables et finies presque partout* $\varphi(\mathrm{x})$ *et* $\psi(\mathrm{x})$ $(0\leq\varphi(\mathrm{x})\leq 1)$, *pourvu que la fonction* $\mathrm{F}[\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x}), \psi(\mathrm{x})]$ *soit sommable et quelque petit que soit* ε, *il existe toujours une fonction* $\mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *à variation bornée* $(0\leq \mathrm{f}(\mathrm{x})\leq 1,\ \mathrm{f}(0)=0,\ \mathrm{f}(1)=1)$ *telle qu'on a*

$$\left|\int_0^1 F[x,\ \varphi(x),\ \psi(x)]dx - \int_0^1 F[x,\ f(x),\ f'(x)]dx\right|\leq\varepsilon.$$

Passons à la démonstration de cette dernière proposition.

La fonction $F(x,\ y,\ y')$ étant continue, il existe un nombre M tel que

(1) $$|F(x,\ y,\ 0)|\leq M \qquad \text{pour } 0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 1.$$

La fonction $F[x,\ \varphi(x),\ \psi(x)]$ étant sommable, il existe donc, quelque soit ε, un ensemble parfait P [1] ayant les propriétés:

1°) mes $P\geq 1-\dfrac{\varepsilon}{8M}$;

2°) $\psi(x)$ est continue sur P;

3°) $\left|\displaystyle\int_{CP} F[x,\ \varphi(x),\ \psi(x)]dx\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{8}$ [2].

Soit $\overline{\psi}(x)$ une fonction qui est égale à $\psi(x)$ sur P et à 0 en dehors de P. En posent $I_0=\displaystyle\int_0^1 F[x,\ \varphi(x),\ \psi(x)]dx$, nous avons

$$\left|I_0-\int_P F[x,\ \varphi(x),\ \overline{\psi}(x)]dx\right|\leq\frac{\varepsilon}{8}.$$

D'autre part en vertu de l'inégalité (1) on a

$$\left|\int_{CP} F[x,\ \varphi(x),\ 0]dx\right|\leq M \text{ mes } CP\leq\frac{\varepsilon}{8}$$

---

(1) Nous supposons que P est situé sur le segment $(0,\ 1)$.

(2) Nous prenons l'ensemble complémentaire par rapport au segment $(0,\ 1)$.

il en suit

$$\left| I_0 - \int_0^1 F[x,\ \varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I_1 = \int_0^1 F[x,\ \varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx.$$

Soit N le maximé de $|\bar\psi(x)|$ pour $0 \leq x \leq 1$ et K le maximé de $|F(x,\ y,\ z)|$ pour $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ |z| \leq N$.

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\bar\psi(x)$ étant mesurables, il existe un ensemble parfait P_1 ayant les propriétés:

1°) mes $P_1 \geq 1 - \frac{\varepsilon}{8K}$;

2°) $\varphi(x)$ est continue sur P_1;

3°) $\left| \int_{CP_1} F[x,\ \varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}$.

Soit $\bar\varphi(x)$ une fonction continue, égale à $\varphi(x)$ sur P_1 et variant linéairement en dehors de P_1, on a

$$\left| I_1 - \int_0^1 F[x,\ \bar\varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx \right| \leq \left| I_1 - \int_{P_1} F[x,\ \varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx \right| +$$
$$+ \left| \int_{CP_1} F[x,\ \bar\varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc, d'après (2), on a

$$\left| I_0 - \int_0^1 F[x,\ \bar\varphi(x),\ \bar\psi(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

La fonction $F(x,\ y,\ y')$ étant continue, il existe un nombre h tel que

$$|F(x,\ y + \Delta y,\ z) - F(x,\ y,\ z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $|z| \leq N$ et $|\Delta y| \leq h$.

Soit

$$\varphi^*(x) = \int_0^x \bar\psi(x)dx.$$

La fonction $\varphi^*(x)$ est continue, donc, d'après un théorème de M. N. LUSIN [1], on peut construire une fonction $\bar{\bar{\varphi}}(x)$ à variation bornée et telle que:

1°) $\bar{\bar{\varphi}}'(x) = 0$ presque partout;

2°) $|\bar{\varphi}'(x) - \varphi^*(x) - \bar{\bar{\varphi}}(x)| \leq h$;

3°) en posant $f(x) = \varphi^*(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)$ on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Il en suit

$$|\bar{\varphi}(x) - f(x)| \leq h, \tag{4}$$

$f'(x) = \bar{\psi}(x)$ presque partout, et, d'après 3°, les fonctions $\varphi^*(x)$ et $\bar{\bar{\varphi}}(x)$ étant à variation bornée, la fonction $f(x)$ l'est aussi.

D'autre part, d'après (4)

$$\left|\int_0^1 F[x, \bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)]dx - \int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, d'après (3)

$$\left| I_0 - \int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx \right| \leq \varepsilon$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2. L'extrêmé absolu. — Les considérations de ce § se fondent sur la proposition suivante.

LEMME FONDAMENTAL. *Étant donné une classe* C_φ *de courbes continues, on peut construire une fonction continue des deux variables* $\Psi(x, \alpha)$ *ayant les propriétés suivantes:*

1°) *On obtient toutes les fonctions de la classe donnée en attribuant à* α *toutes les valeurs numériques possibles* $0 \leq \alpha \leq 1$.

2°) *Quel que soit le nombre* α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, *la fonction de* x, $\Psi(x, \alpha_0)$ *appartient à la classe donnée.*

En effet, soit

$$\eta_1, \quad \eta_2, \dots, \quad \eta_n, \dots \tag{1}$$

une suite de nombres positifs telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$.

Considérons, en posant $\varepsilon_n = \varphi(\eta_n)$ [2], une nouvelle suite de nombres positifs

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \dots, \quad \varepsilon_n, \dots \qquad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

---

[1] N. LUSIN, *L'intégrale et la serie trigonométrique* (en russe). Moscou 1915, p. 34.

[2] φ est la fonction qui figure dans la définition de la classe C_φ.

D'après la définition de la classe C_φ, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée on a :

1°) $0 \leq f(x) \leq 1$;

2°) $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour tout h, $|h| = \eta_n$.

Considérons maintenant dans le carré (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) les points P_{nk} de coordonnées $(n\eta_p, k\varepsilon_p)$ $\left[n = 0, 1, 2, \ldots, E\left(\frac{1}{\eta_p}\right) + 1 ;\ k = 0, 1, 2, \ldots, E\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)\right]$, p étant un entier positif fixe. Construisons toutes les lignes polygonales possibles ayant leurs sommets aux points P_{nk} et telles que si l'un des sommets d'une telle ligne est au point P_{nk}, l'un des sommets voisins est nécessairement au point $P_{n-1,i}$ et l'autre au point $P_{n+1,j}$, i et j ne pouvant avoir d'autre valeur que $k-1$, ou k, ou $k+1$. Pour un p fixe il n'existe qu'un nombre fini de ces lignes polygonales, soit

$$\pi_1(x, p), \quad \pi_2(x, p), \ldots, \quad \pi_{N_p}(x, p)$$

toutes ces lignes.

Celà posé, considérons ceux des polygones $\pi_1(x, 1)$, $\pi_2(x, 1), \ldots$, $\pi_{N_1}(x, 1)$, qui verifient l'inégalité

$$|\pi_i(x, 1) - f(x)| \leq 2\varepsilon_1$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque de la classe C_φ ; soit

$$\pi_1'(x, 1), \quad \pi_2'(x, 1), \ldots, \quad \pi_{N_1}'(x, 1)$$

tous ces polygones.

Soit $P_1(x, \alpha)$ une fonction continue définie pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ de la manière suivante

$$P_1\left(x, \frac{k}{N_1' - 1}\right) = \pi'_{k+1}(x, 1) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N_1' - 1).$$

On achève la définition de $P_1(x, \alpha)$ en la faisant varier linéairement en suivant des droites perpendiculaires à l'axe des x dans les autres points du carré [1].

Il suit de la définition de $P_1(x, \alpha)$ qu'il existe, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe C_φ, un nombre α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, tel que

$$|f(x) - P_1(x, \alpha_0)| \leq 2\varepsilon_1.$$

---

[1] Plus précisément, nous posons

$$P_1(x, \alpha) = \left\{1 - N_1\left(\alpha - \frac{k}{N_1}\right)\right\} \pi'_{k+1}(x, 1) + N_1\left(\alpha - \frac{k}{N_1}\right) \pi'_{k+2}(x, 1) \quad \text{pour} \quad \frac{k}{N_1} \leq \alpha \leq \frac{k+1}{N_1}.$$

De plus quel que soit le nombre β_0, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, il existe toujours une fonction $f(x)$ de la classe C_φ telle que

$$|P_1(x, \beta_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_1.$$

Supposons qu'on puisse construire une fonction continue $P_n(x, \alpha)$, ayant les propriétés suivantes:

1°) quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée, il existe toujours un nombre α_0 tel que $|P_n(x, \alpha_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_n$;

2°) quel que soit le nombre α_0', $0 \leq \alpha_0' \leq 1$, il existe une fonction $f(x)$ de la classe C_φ telle que $|P_n(x, \alpha_0') - f(x)| \leq 2\varepsilon_n$.

Nous allons démontrer que dans ce cas on peut toujours construire une fonction continue $P_{n+1}(x, \alpha)$ telle que:

1°) quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe C_φ, il existe toujours un nombre β_0, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, tel que $|P_{n+1}(x, \beta_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$;

2°) quel que soit le nombre β_0', $0 \leq \beta_0' \leq 1$, il existe une fonction $f(x)$ de la classe C_φ telle que $|P_{n+1}(x, \beta_0') - f(x)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$;

3°) $|P_n(x, \alpha) - P_{n+1}(x, \alpha)| \leq 4\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$.

En effet, soit $\beta > 0$ une quantité telle que $\frac{1}{\beta}$ est un entier et qu'on a

$$|P_n(x, \alpha + h) - P_n(x, \alpha)| \leq \varepsilon_n \quad \text{pour} \quad |h| \leq \beta.$$

Cela posé, considérons ceux des polygones

$$\pi_1(x, n+1), \ldots, \quad \pi_{N_{n+1}}(x, n+1)$$

qui vérifient l'inégalité

$$|\pi(x, n+1) - f(x)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque de la classe C_φ; soit

$$\pi_1'(x, n+1), \ldots, \quad \pi'_{N'_{n+1}}(x, n+1)$$

tous ces polygones.

D'après les propriétés de la fonction $P_n(x, \alpha)$ et d'après la construction des polygones $\pi'(x, n+1)$ il existe, quel que soit le polygone $\pi_i'(x, n+1)$, un entier $j < \frac{1}{\beta}$ tel que

$$|P_n(x, j\beta) - \pi_i'(x, n+1)| \leq 3\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}. \tag{2}$$

Nous dirons que le polygone $\pi_i'(x, n+1)$ appartient à la classe j si l'inégalité (2) est vérifiée. Chacun des polygones $\pi'(x, n+1)$ appartient ainsi à une classe $j\left(0 \leq j < \frac{1}{\beta}\right)$. Inversement quel que soit le nombre $j\left(0 \leq j < \frac{1}{\beta}\right)$ il exist des polygones $\pi'(x, n+1)$ de la classe j.

Soient

$$\pi'_{j_1}(x, n+1), \quad \pi'_{j_2}(x, n+1), \ldots, \quad \pi'_{j\mu_j}(x, n+1)$$

tous les polygones de la classe j.

Passons à la construction de la fonction cherchée $P_{n+1}(x, \alpha)$; à cet effet nous divisons le segment $[j\beta, (j+1)\beta]$ en μ_j parties égales; soient

$$a_1^{(j)} = j\beta, \quad a_2^{(j)}, \ldots, \quad a_{\mu_j}^{(j)}$$

respectivement l'extrêmité gauche du segment considéré et les point de division; posons

$$P_{n+1}(x, a_k^{(j)}) = \pi'_{j_k}(x, n+1)$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots, \mu_j; \quad j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{\beta} - 1\right)$$

$$P_{n+1}(x, 1) = \pi'_{j\mu_j}(x, n+1) \quad \text{où l'on pose} \quad j = \frac{1}{\beta} - 1.$$

On achève la définition de P_{n+1} en la faisant varier linéairement en suivant des droites perpendiculaires à l'axe des x dans les antres points du carré.

Il est évident que la fonction $P_{n+1}(x, \alpha)$ vérifie les trois conditions posées.

On construit ainsi en partant de la fonction $P_1(x, \alpha)$ une suite de fonctions

$$P_1(x, \alpha), \quad P_2(x, \alpha), \ldots, \quad P_n(x, \alpha), \ldots \tag{3}$$

ayant les propriétés:

1°) quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée C_φ et quel que soit le nombre entier n, il existe un nombre α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, tel que $|P_n(x, \alpha_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_n$;

2°) quel que soit le nombre β_0, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, et quel que soit le nombre entier m, il existe toujours une fonction $f(x)$ de la classe considérée C_φ telle que $|P_m(x, \beta_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_m$;

3°) $|P_n(x, \alpha) - P_{n+1}(x, \alpha)| \leq 4\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$.

Cela posé, supposons que la suite (1) soit telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge. Alors, en vertu de 3° la suite (3) converge uniformément. Posons

$$\Psi(x, \alpha) = \lim_{n \to \infty} P_n(x, \alpha).$$

D'après les propriétés de la suite (3) il est aisé de voir que la fonction construite Ψ est la fonction cherchée.

COROLLAIRE. *Etant donné une classe* $C_\varphi^{(a)}$ *de courbes absolument continues, on peut construire une fonction continue des deux variables* $\omega(x, \alpha)$ *ayant les propriétés suivantes:*

1°) *On obtient toutes les fonctions de la classe donnée en attribuant à* α *toutes les valeurs numériques possibles* $0 \leq \alpha_0 \leq 1$;

2°) *quelque soit le nombre* α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, *la fonction de* x, $\omega(x, \alpha_0)$ *appartient à la classe donnée* (¹).

Nous passons maintenant à l'application du lemme fondamental au problème de l'existence d'un extrêmé absolu.

Considérons l'integrale

$$\int_0^1 F(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Supposons que certaines propriétés de la fonction F permettent de démontrer que s'il existe nne courbe extrémante pour l'intégrale (1) dans la classe des lignes $C^{(\alpha)}$, cette courbe appartient nécessairement à une classe $C_\varphi^{(\alpha)}$ (²).

Alors *le problème de l'existence d'une extrémante pour l'intégrale* (1) *se réduit au problème de l'existence d'un extrêmé pour une certaine fonction d'une variable.* En effet, en vertu du corollaire, la fonction

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 F[x, \omega(x, \alpha), \omega'_x(x, \alpha)]dx$$

résoud la question.

D'ailleurs, en raisonnant, comme le fait M. TONELLI (³), on démontre que dans l'hypothèse $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$ $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0\right)$ la fonction $\Phi(\alpha)$ est semicontinue inférieurement (supérieurement). On obtient ainsi le résultat de M. TONELLI: *avec*

(¹) On obtient une proposition analogue en considérant une classe de fonctions bornées dans leur ensemble et ayant des nombres dérivés bornés dans leur ensemble. On déduit d'ailleurs immédiatement du lemme fondamental, du corollaire et de la remarque faite les propositions connues de M. HILBERT et de M. ASCOLI sur l'existence des suites uniformément convergentes dans certaines classes de fonctions.

(²) M. L. TONELLI a montré qu'il en est ainsi dans l'hypothèse

$$F(x, y, y') \geq |y'|^{1+\alpha} \ (\alpha > 0), \quad \text{pour} \quad |y'| \geq Y', \quad (\alpha \text{ et } Y' \text{ sont des constantes}),$$

loc. cit., t. II, p. 282.

(³) Loc. cit., t. I, p. 397.

cette hypothèse complémentaire on peut affirmer que le minimé (maximé) *absolu existe.*

3. Exemple. — La construction de notre exemple [1] se fonde sur les deux lemmes suivants :

LEMME I. *Etant données deux courbes analytiques fermées,* $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, *sans points communs et telles que* $\varphi = 0$ *est contenue dans l'aire* D *limitée par* $f(x, y) = 0$, *on peut toujours construire une fonction* $F(x, y)$ *ayant les propriétés suivantes :*

1°) $F(x, y) < 0$ *dans* D ;

2°) $F(x, y) = 0$ *sur* $\varphi = 0$ *et* $= \varepsilon > 0$ *sur* $f = 0$;

3°) $F(x, y)$ *a des dérivées partielles des* n *premiers ordres continues par rapport a* x *et* y *et s'annullant sur* $\varphi = 0$ *et* $f = 0$;

4°) *quel que soit* $\eta > 0$, *pour* ε *assez petit la fonction* $F(x, y)$ *et ses* n *premières derivés sont de module* $< \eta$ *pour tous les points dans* D.

En effet, construisons la fonction

$$F(x, y) = \varepsilon \left[\frac{[f(x, y)]^{n+1}}{[\varphi(x, y)]^2 + [f(x, y)]^{n+1}} \right]^{2(n+1)}$$

on voit de suite que cette fonction vérifie toutes les propriétés indiqués.

LEMME II. *Etant donnée un segment de courbe continue* $[y = f(x), 0 \leq x \leq 1]$, *on peut toujurs construire une fonction continue* $\Phi(x, y)$ *ayant les propriétés suivantes :*

1°) $\Phi(x, y) > 0$, *si* $y \neq f(x)$, $\Phi(x, y) = 0$ *pour* $y = f(x)$;

2°) $\Phi(x, y)$ *a des dérivées continues des* m *premiers ordres.*

En effet construisons une suite de courbes analytiques fermées

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \ldots, \quad f_n(x, y) = 0, \ldots$$

deux à deux sans points communs et telles que :

1°) toutes les courbes $f_i(x, y) = 0$ sont contenues dans l'aire limitée par la coube $f_n(x, y)$ pour $i > n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

2°) la courbe donnée $y = f(x)$, $(0 \leq x \leq 1)$ est contenue dans l'aire limitée par la courbe $f_n(x, y) = 0$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Celà posé, construisons les fonctions (lemme I)

$$\Phi_n(x, y) = \varepsilon_n \left[\frac{[f_n(x, y)]^{m+1}}{[f_{n+1}(x, y)]^2 + [f_n(x, y)]^{m+1}} - 1 \right]^{2(m+1)} + a - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k .$$

[1] Voir l'introduction.

On choisit les nombres positifs ε_n ($n=1, 2, 3,...$) tels, qu'on a:

1°) $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = a < \infty$;

2°) Toutes les dérivées partielles de la fonction $\Phi_n(x, y)$ jusqu'à l'ordre m sont inférieures à η_n en valeur absolue, les nombres positifs η_n ($n=1, 2, 3,...$) sont tels que $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$.

D'après le lemme I, la fonction cherchée sera donc définie par les conditions suivantes:

1°) $\Phi(x, y) = 0$ pour $y = f(x)$;

2°) $\Phi(x, y) = \Phi_n(x, y)$ pour les points situés dans l'aire limitée par les courbes $f_n(x, y) = 0$ et $f_{n+1}(x, y) = 0$.

Nous passons maintenant à la construction de l'exemple indiqué.

Soit $y = \psi(x)$ une courbe absolument continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble partout dense sur (0, 1). Construisons la fonction $\Phi(x, y)$ du lemme II pour cette courbe $y = \psi(x)$ et considérons l'intégrale

$$I = \int_0^1 \Phi(x, y)(1 + y'^2)dx.$$

En posant

$$\Phi(x, y) \cdot (1 + y'^2) = \Psi(x, y, y')$$

nous avons les propriétés suivantes de $\Psi(x, y, y')$:

1°) Ψ possède toutes les dérivés des m premiers ordres par rapport à x, y et y';

2°) $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} \geq 0$;

3°) Le minimum absolu de I est donné par la courbe $y = \psi(x)$, qui n'est pas une extrémale dans aucun intervalle.

4. Les courbes admissibles $C^{(a)}$ et C'. — Nous passons à la dernière question de ce Mémoire.

LEMME. *Soit* $F(x, y, y')$ *une fonction continue et telle que* $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq M$ (1). *Soit* $f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ *une fonction absolument continue* $0 < f(x) < 1$, $f(0) = y_1$, $f(1) = y_2$, *et telle que la fonction* $F[x, f(x), f'(x)]$ *est sommable. Il existe alors,*

(1) M est une constante absolu.

quel que soit $\varepsilon > 0$, *une fonction* $\varphi(x)$ *ayant une dérivée continue et vérifiant les conditions suivantes :*

1°) $\varphi(0) = y_1$, $\varphi(1) = y_2$;

2°) $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$;

3°) $\left|\int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx - \int_0^1 F[x, \varphi(x), x'(x)]dx\right| < \varepsilon.$

Remarquons d'abord que pour démontrer le lemme il suffit de prouver qu'il existe une polygone $y = \bar{f}(x)$, vérifiant les mêmes conditions que la fonction $y = \varphi(x)$.

Pour construire un tel polygone faisons les conventions préliminaires suivantes. Désignons par N_r le maximé du module de $F(x, y, y')$ pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|y'| \leq r$. Soit P un ensemble parfait situé sur le segment (0, 1) de l'axe des x, mes. $P = \frac{1}{2}$, et tel que $f(x)$ est continue sur P; nous désignons par R le maximé du module de $f(x)$ sur P. Désignons enfin par h_ε un nombre inférieur à 1 et à $\frac{1}{M}$, tel qu'on a pour $|\Delta z| \leq h_\varepsilon$

$$(1) \qquad |F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ et pour toutes les valeurs des variables $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|z| \leq R + 1$.

Passons maintenant à la construction du polygone cherché.

Les fonctions $f'(x)$ et $F[x, f(x), f'(x)]$ étant mesurables et sommables, il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un ensemble parfait P_ε (¹) tel qu'on a :

1°) mes. $P_\varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon}{24N_0}$, $P_\varepsilon \supset P$ pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$;

2°) $f'(x)$ est continue sur P_ε;

3°) $\left|\int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), f'(x)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{12}$ (²);

4°) $\int_{CP_\varepsilon} |f'(x)|\, dx < \frac{h_\varepsilon \varepsilon}{12}$.

En vertu de la propriété 2°, $f'(x)$ est bornée sur P_ε, soit $|f'(x)| < R_\varepsilon$ sur P_ε.

(¹) Nous supposons que P_ε est situé sur le segment (0, 1).

(²) Nous prenons l'ensemble complémentaire par rapport au segment (0, 1).

$F(x, y, z)$ étant continue, il existe un nombre H_ε, $0 < H_\varepsilon < \varepsilon h_\varepsilon$, tel qu'on a pour $|\Delta z| < H_\varepsilon$

$$(2) \qquad |F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{12}$$

pour toutes les valeurs des variables $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|z| \leq R_\varepsilon + 1$. Cela posé, d'après la même condition 2° on peut diviser l'ensemble P_ε en un nombre fini de portions, deux à deux sans points communs,

$$P_\varepsilon = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p$$

telles qu'on a

$$(3) \qquad |f'(x_1) - f'(x_2)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon$$

si x_1 et x_2 appartiennent à une même portion π_i.

Soit $\psi(x)$ une fonction définie sur P_ε, constante dans chaque portion π_i et qui diffère de $f'(x)$ d'une quantité inférieure à $\frac{1}{12} H_\varepsilon$

$$(4) \qquad \psi(x) = c_i \quad \text{pour tout} \quad x \subset \pi_i$$

$$(4') \qquad |f'(x) - \psi(x)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon.$$

Désignons par $\tilde{\pi}_i$ $(i = 1, 2, 3, \dots p)$ p intervalles deux à deux sans points communs contenant respectivement les portions π_i, $\tilde{\pi}_i \supset \pi_i$, et soit

$$\pi_i = \tilde{\pi}_i - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{ik}$$

δ_{ik} étant des intervalles deux à deux sans points communs.

Soit η_i une quantité positive telle qu'on a

$$(5) \qquad (N_{c_i} + |c_i|)\eta_i < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{24p}.$$

Désignons enfin par k_i un entier positif vérifiant l'inégalité

$$(6) \qquad \sum_{k=k_i}^{\infty} \delta_{ik} < \eta_i.$$

Avec ces conventions, construisons dans l'intervalle (0, 1) une fonction $\bar{\psi}(x)$

$$(7) \qquad \bar{\psi}(x) = c_i \quad \text{pour} \quad x \subset \pi_i \quad \text{ou} \quad x \subset \delta_{ik}, \quad k \geq k_i,$$

$$(7') \qquad \bar{\psi}(x) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } x.$$

On a

(8) $$|\bar{\psi}(x)| < R_\varepsilon.$$

Posons

(9) $$\bar{f}(x) = \int_0^x \bar{\psi}(x)dx + y_1.$$

Il suit de la construction de la fonction $\bar{\psi}$, que la fonction $\bar{f}(x)$ représente un polygone: démontrons d'abord qu'on a

(10) $$|\bar{f}(x) - f(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon h_\varepsilon.$$

En effet, d'après le conditions $f(0) = y_1$ et (9), on a

$$|\bar{f}(x) - f(x)| = \left|\int_0^x \bar{\psi}(x)dx - \int_0^x f'(x)dx\right| \leq$$
$$\leq \int_{P_\varepsilon} |\bar{\psi}(x) - f'(x)|\, dx + \int_{CP_\varepsilon} |f'(x)|\, dx + \int_{CP_\varepsilon} |\bar{\psi}(x)|\, dx.$$

Considérons chacune de ces intégrales; nous avons d'après (4') et la définition de H_ε

(11) $$\int_{P_\varepsilon} |\bar{\psi}(x) - f'(x)|\, dx < \frac{1}{12} H_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}.$$

D'après la construction de l'ensemble P_ε (condition 4°) on a

(12) $$\int_{CP_\varepsilon} |f'(x)|\, dx < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}.$$

Enfin d'après les conditions (7), (7'), (6), (5)

(13) $$\int_{CP_\varepsilon} |\bar{\psi}(x)|\, dx \leq \sum_{i=1}^{p} |c_i| \sum_{k=k_i}^{\infty} \delta_{ik} < \sum_{i=1}^{p} |c_i| \eta_i < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}.$$

L'inégalité cherchée est une conséquence immédiate des trois dernières inégalités (11), (12) et (13).

Démontrons maintenant qu'on a

(14) $$\Delta = \left|\int_0^1 F[x,\ f(x),\ f'(x)]dx - \int_0^1 F[x,\ \bar{f}(x),\ \bar{f}'(x)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En effet, on a d'abord

$$\Delta_1 = \left| \int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx - \int_0^1 F[x, f(x), \bar{f}'(x)]dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{P_\varepsilon} \{ F[x, f(x), f'(x)] - F[x, f(x), \bar{\psi}(x)] \} dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), f'(x)]dx \right| + \left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), \bar{\psi}(x)]dx \right|$$

et d'après les inégalités (4'), (2)

$$\left| \int_{P_\varepsilon} \{ F[x, f(x), f'(x)] - F[x, f(x), \bar{\psi}(x)] \} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

D'autre part, d'après la condition 3°

$$\left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), f'(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

Enfin d'après la condition 1°) et les inégalités (5), (6) on a

$$\left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq N_0 \text{ mes. } CP_\varepsilon + \sum_{i=1}^{p} N_{c_i} + \sum_{k=k_i}^{\infty} \delta_{ik} \leq \frac{\varepsilon}{24} + \frac{\varepsilon}{24} = \frac{\varepsilon}{12}.$$

On a donc $\Delta_1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

D'autre part on a par hypothèse $\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq M$: il suit donc de l'inégalité (10) qu'on a

$$\Delta_2 = \left| \int_0^1 F[x, f(x), \bar{\psi}(x)]dx - \int_0^1 F[x, \bar{f}(x), \psi(x)]dx \right| \leq \int_0^1 M \, | f(x) - \bar{f}(x) | \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On a ainsi

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous nous proposons maintenant de construire un poligone $y = \bar{\bar{f}}(x)$ tel que

$$| \bar{\bar{f}}(x) - \bar{f}(x) | < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

$$\left| \int_0^1 F[x, \bar{f}(x), \bar{f}'(x)]dx - \int_0^1 F[x, \bar{\bar{f}}(x), \bar{\bar{f}}'(x)]dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

$$\bar{\bar{f}}(0) = y_1, \quad \bar{\bar{f}}(1) = y_2. \tag{17}$$

En vertu de (10) et (14), on voit de suite que ce polygone $y = \overline{\overline{f}}(x)$ est le polygone cherché.

Nous remarquons d'abord que, quel que soit $\varepsilon < \frac{1}{2}$, il existe toujours un ensemble E qui est la somme d'un nombres fini d'intervalles, dont la mesure est égale à $\frac{1}{2}$ et tel qu'on a

$$|\overline{\psi}(x)| < R + 1 \quad \text{pour tout} \quad x \subset E \ (^1). \tag{18}$$

Soit maintenant

$$\overline{f}(1) - f(1) = \varepsilon' \tag{19}$$

d'apres (10) on a

$$|\varepsilon'| < \frac{1}{4} h_\varepsilon \varepsilon. \tag{20}$$

Soit $\overline{\overline{\psi}}(x)$ une fonction vérifiant les conditions:

$$\overline{\overline{\psi}}(x) = \overline{\psi} \quad \text{pour tout} \quad x \subset CE \tag{21}$$

$$\overline{\overline{\psi}}(x) = \overline{\psi}(x) + 2\varepsilon' \quad \text{pour tout} \quad x \subset E. \tag{21'}$$

Pour obtenir la fonction $\overline{\overline{f}}(x)$ cherchée, il suffit de poser

$$\overline{\overline{f}}(x) = \int_0^x \overline{\overline{\psi}}(x) dx + y_1. \tag{22}$$

En effet, on a d'après (9), (21) et (21')

$$|\overline{\overline{f}}(x) - \overline{f}(x)| \leq \varepsilon'; \tag{23}$$

on a de plus, d'une part, d'après (21), (21'), (20) et (1)

$$\Delta_1' = \left| \int_0^1 F[x, \overline{f}(x), \overline{f}'(x)] dx - \int_0^1 F[x, \overline{f}(x), \overline{\overline{f}}'(x)] dx \right| =$$
$$= \left| \int_E F[x, \overline{f}(x), \overline{\psi}(x)] dx - \int_E F[x, \overline{f}(x), \overline{\overline{\psi}}(x)] dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4};$$

---

(1) Pour prouver l'existence d'un tel ensemble, il suffit de se rappeler (voir le commencement de ce §) que: 1°) $P_\varepsilon \supset P$; 2°) mes. $P = \frac{1}{2}$; 3°) $\overline{\psi}(x)$ est continue sur P_ε; 4°) l'inégalité (4').

d'autre part, en vertu de la condition (23), (20) et de l'hypothèse $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$, on a

$$\Delta_2' = \left|\int_0^1 F[x,\ \bar{f}(x),\ \bar{\bar{f}}'(x)]dx - \int_0^1 F[x,\ \bar{\bar{f}}(x);\ \bar{f}'(x)]dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On obtient l'inégalité (16) en ajoutant Δ_1' à Δ_2'.

L'inégalité (15) et la formule (17) sont de conséquences immédiates respectivement des formules (23), (20) et (22), (21'), (20), (19).

On déduit de ce lemme les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *La fonction* F(x, y, y') *étant continue et* $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$, *la borne inférieure* (supérieure) *de l'integrale* $\int_0^1 F(x,\ y,\ y')dx$ *dans la classe* $C^{(a)}$ *est égale à la borne inférieure* (supérieure) *de la même integrale dans la classe* C'.

THÉORÈME II. *S'il existe dans la classe* C' *une courbe qui minime l'integrale* $\int_0^1 F(x,\ y,\ y')dx$ (la fonction $F(x,\ y,\ y')$ vérifiant les conditions du lemme), *il existe aussi un minimé pour cette intégrale dans la classe* $C^{(a)}$ *et ce minimé est donné par la même courbe.*

5. Dans les démonstrations du lemme et, par conséquent, des théorèmes du § 4 on suppose essentiellement que la dérivée de $F(x,\ y,\ y')$ par rapport à y est bornée. Il est intéressant de savoir si cette condition est nécessaire. Autrement dit, le théorème subsitera-t-il si l'on ne suppose plus $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$? Et dans le cas où cette question se resoud négativement, est-il possible de remplacer cette restriction par l'hypothèse que toutes les dérivèes partielles de F jusqu'à un certain ordre existent et sont continues? Nous nous proposons maintenant de répondre négativement aux deux questions posées.

A cet effet considérons la fonction

$$\Phi(x,\ y) = e^{-\frac{2}{(y-\sqrt{x})^2}}.$$

On voit de suite qu'elle jouit des propriétés suivantes:

1°) elle est continue ainsi que toutes ses dérivées pour $0 \leq x$;

2°) $\Phi(x, \sqrt{x}) = 0$; $\Phi(x, y) > 0$ pour $y \neq \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$;

3°) $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \geq 0$, $(1 \geq x \geq 0,\ 1 \geq y \geq 0)$.

Soit maintenant $f(y')$ une fonction continue ayant des dérivées de tous les ordres et telle qu'on ait

$$f(y') \geq 1, \quad \frac{d^2 f}{dy'^2} > 0, \quad \min. f(y') = f(0). \tag{I}$$

Considérons l'integrale

$$\int_0^1 \Phi(x, y) f(y') dx. \tag{1}$$

Supposons qu'on considère comme lignes admissibles toutes les courbes absolument continues qui passent par l'origine des coordonnées et le point (1, 1). Dans ce cas, quelque soit la fonction $f(y')$ vérifiant les conditions énoncés, le minimé de l'intégrale (1) existe toujours et est égal à zéro. Nous allons montrer qu'on peut toujours construire $f(y')$ de telle façon, que la valeur de l'intégrale (1) soit > 1 pour toute courbe passant par les mêmes points et appartenant à la classe C'.

Considérons dans le plan x, y les courbes $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ et posons

$$\varphi(x, y) = \min. \int_x^1 \Phi(x, y) f(y') dx, \quad y(x) = y, \quad y(1) = 1, \tag{2}$$

on considère comme lignes admissibles les courbes de la classe C'. On a

$$\varphi(x, \sqrt{x}) = 0, \quad \varphi(x, y) > 0 \quad \text{pour} \quad y \neq \sqrt{x}$$
$$\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2) > 0 \quad \text{si} \quad y_1 < y_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq y_i \leq \sqrt{x} \ (i = 1, 2).$$

Soit $\varepsilon(x)$ le minimum de la fonction $\Phi(\xi, \eta)$ pour $1 \geq \xi \geq x$; $\frac{1}{2}\sqrt{\xi} \geq \eta \geq \frac{1}{4}\sqrt{\xi}$; on a $(1 \geq p > x)$

$$\varphi\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > \varepsilon(x) \min. \int_x^p f(y') dx, \quad y(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}, \quad y(p) = \frac{1}{2}\sqrt{p}.$$

On sait d'après la théorie classique que c'est une ligne droite qui est la courbe minimante pour la dernière intégrale. On a ainsi

$$\text{(3)}\qquad \varphi\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > \varepsilon(x) \min_{(p)} .(p - x) f\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{4}\sqrt{x}}{p - x}\right] \geq$$
$$\geq \varepsilon(x) \min_{(p)} .(p - x) f\left[\frac{\frac{1}{4}\sqrt{x}}{p - x}\right].$$

Nous choisissons la fonction $f(y')$ de telle façon qu'elle vérifie la condition

$$\text{(II)}\qquad \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) \min .(p - x) f\left[\frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}{p - x}\right] > 1 \qquad \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x < p \leq 1 \end{matrix}\right\}.$$

On a donc, d'après (3) et (I)

$$\text{(4)}\qquad \varphi\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > 1 \quad \text{pour} \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Considérons la tangente à la parabole $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ au point $\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right)$ et soit $p(x)$ l'abscisse du second (en comptant de droite à gauche) point d'intersection de cette tangente avec la parabole $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Nous supposons maintenant que la fonction $f(y')$ vérifie la troisieme condition

$$\text{(III)}\qquad \varepsilon(x)\,[p(x) - x]\, f\left[\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{p(x)} - \sqrt{x}\right)}{p(x) - x}\right] > 1 \qquad (0 < x \leq 1).$$

Il existent des fonctions, vérifiant cette condition car on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{p(x)} - \sqrt{x}}{p(x) - x} = +\infty.$$

Nous imposons enfin à $f(y')$ les deux conditions suivantes

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\varepsilon(x)}{4}\sqrt{x}\, f\left(\frac{1}{8\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{8\sqrt{x}}\right)^2}} > 1 \qquad (0 < x < 1)$$

$$\text{(V)}\qquad \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} > 0 \qquad (t > 0).$$

Remarquons qu'il existe des fonctions f, vérifiant toutes les conditions (I)-(V).

Démontrons maintenant, que dans ces hypothèses sur $f(y')$ on a

$$\varphi\left(x,\ \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > 1 \qquad (0 < x < 1).$$

Dans ce but, définissons d'abord une suite de nombre positifs

(5) $$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ldots,\quad x_n,\ldots$$

de la maniere suivante: $x_1 = \frac{1}{2}$; en supposant x_1, $x_2,\ldots,$ x_n déjà définis, on trouve x_{n+1} en résolvant l'équation $p(x_{n+1}) = x_n$. Il suit de la définition même, que la suite (5) est décroissante et qu'on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Il suit de la formule (4) qu'on a $\varphi\left(x,\ \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > 1$ pour $x \geq x_1$; supposons que l'inégalité cherchée a lieu pour $x \geq x_n$ et démontrons qu'elle aura lieu pour $x \geq x_{n+1}$.

Soit donc $x_0 \geq x_{n+1}$. On a d'après (2)

$$\varphi\left(x_0,\ \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) = \min.\left[\int_{x_0}^{p(x_0)}\Phi(x,\ y)f(y')dx + \int_{p(x_0)}^{1}\Phi(x,\ y)f(y')dx\right]$$

$$\left(y(x_0) = \frac{1}{4}\sqrt{x_0},\quad y[p(x_0)] = y_1,\quad y(1) = 1\right).$$

Il faut distinguer ici trois cas:

1°) $y_1 \leq \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}$.

Dans ce cas on a:

$$\varphi\left(x_0,\ \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min.\int_{p(x_0)}^{1}\Phi(x,\ y)f(y')dx = \varphi[p(x_0),\ y_1]$$

d'où, en vertu de 1° et des propriétés de la fonction φ, on a

$$\varphi\left(x_0,\ \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \varphi\left[p(x_0),\ \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}\right]$$

mais puisque $x_0 \geq x_{n+1}$, on a $p(x_0) \geq x_n$, donc

$$\varphi\left(x_0,\ \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > 1.$$

2°) $\frac{1}{2}\sqrt{p(x_0)} \geq y_1 \geq \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}$, $y(\xi) < \frac{1}{2}\sqrt{\xi}$ pour $x_0 \leq \xi \leq p(x_0)$ [1].

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min. \int_{x_0}^{p(x_0)} \Phi(x, y) f(y') dx \geq$$

$$\geq \min. \varepsilon(x_0)[p(x_0) - x_0] f\left[\frac{y_1 - \frac{1}{4}\sqrt{x_0}}{p(x_0) - x_0}\right].$$

Il s'en suit, d'après les conditions I, 2° et III, qu'on a

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \varepsilon(x_0)[p(x_0) - x_0] f\left[\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{p(x_0)} - \sqrt{x_0})}{p(x_0) - x_0}\right] > 1.$$

3°) $y_1 > \frac{1}{2}\sqrt{p(x_0)}$, donc la courbe d'intégration $y = y(x)$ coupe la parabole $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ dans un point au moins, dont l'abscisse est $< p(x_0)$. Soit x' la plus petite de ces abscisses.

On a ainsi

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min. \int_{x_0}^{x'} \Phi(x, y) f(y') dx \geq$$

$$\geq \min. \varepsilon(x_0)(x' - x_0) f\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x'} - \frac{1}{4}\sqrt{x_0}}{x' - x_0}\right].$$

Posons

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x'} - \frac{1}{4}\sqrt{x_0}}{x' - x_0} = t.$$

On a alors

$$x' - x_0 > \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\,\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On a donc

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min. \frac{\varepsilon(x_0)}{4}\sqrt{x_0}\, f(t) \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

---

[1] Dans le cas $\frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)} \geq y_1 \geq \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}$ et $y(\xi) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\xi}$ pour un nombre ξ au moins $x_0 \leq \xi \leq p(x_0)$, voir les considérations du cas 3°.

D'ailleurs, en vertu de $x' > p(x_0)$ on a

$$t > \frac{d}{dx_0}\left(\frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) = \frac{1}{8\sqrt{x_0}}.$$

Donc, d'après V et IV on a

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \frac{\varepsilon(x_0)}{4}\sqrt{x_0}\, f\left(\frac{1}{8\sqrt{x_0}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{8\sqrt{x_0}}\right)^2}} > 1.$$

Il est maintenant aisé de montrer que si la fonction $f(y')$ vérifie toutes les conditions (I)-(V), l'intégrale (1) surpasse 1 pour toute courbe qui passe par les points (0, 0) et (1, 1) et qui appartient à la classe C'.

En effet, soit $y = \psi(x)$ une courbe qui jouit des propriétés indiquées; x_0 étant un nombre positif assez petit, on a

$$\psi(x_0) < \frac{1}{4}\sqrt{x_0}$$

donc

$$\int_0^1 \Phi[x, \psi(x)] f[\psi'(x)] dx > \varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > 1.$$

14 février 1926.