Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile

di Giuseppe Vitali, a Padova

In una recente pubblicazione [1] il prof. Beppo Levi presenta a scopi didattici una nuova definizione di integrale di funzioni limitate a proposito della quale scrive [2]:

« Per le funzioni misurabili l'integrale quale è qui definito coincide col-
« l'integrale di Lebesgue: ma resta dubbio se non sia possibile immaginare
« l'applicazione della definizione a funzioni non misurabili ».

Io dimostro che effettivamente la definizione del Levi è del tutto equivalente a quella di Lebesgue.

Nella esposizione io rinuncio ai vincoli di linguaggio che il Levi si impone per i fini didattici del suo lavoro.

1. Il Levi definisce dapprima l'integrale superiore delle funzioni limitate e >0 nel modo seguente:

« Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale limitata e >0 definita in un
« intervallo (a, b), $a < b$.

« Consideriamo una successione di segmenti di (a, b)

$$\delta_1, \quad \delta_2, \ldots \tag{1}$$

« e una successione di numeri reali e >0

$$h_1, \quad h_2, \ldots \tag{2}$$

« tali che per ogni x di (a, b) esista un numero intero positivo n, per cui x appar-
« tenga a δ_n o come punto interno o come punto estremo, e sia $f(x) \leq h_n$ [3].

[1] Beppo Levi, *Sulla definizione dell' integrale.* (« Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo I, 1923-24, pp. 58-82).

[2] Loc. cit., p. 58.

[3] Non è escluso che la successione (1) consti di un numero finito di elementi. Però in questo caso anche la (2) deve intendersi finita e contenente un numero di elementi uguale al numero degli elementi di (1).

« Formiamo poi la somma

(3) $$\Sigma_n d_n \cdot h_n$$

« nella quale d_n indica il numero assoluto che misura la lunghezza di δ_n.

« Il limite inferiore delle somme (3) corrispondenti alle varie coppie di « successioni (1) e (2) che soddisfano alle condizioni sopra richieste si chiama « *integrale superiore di* $f(x)$ da a e b e si indica con

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \text{ » } (^1).$$

Sia c il limite superiore di $f(x)$ in (a, b), e per ogni y positivo e $\leq c$ si indichi con $e(y)$ la misura esterna [2] del gruppo dei punti di (a, b) per cui $f(x) > y$.

È evidente che $e(c) = 0$ ed $e(0) = b - a$.

La $e(y)$ è una funzione monotona della y e quindi integrabile secondo RIEMANN in $(0, c)$.

Dico che

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_0^c e(y)dy.$$

---

[1] Veramente il LEVI anzichè considerare le successioni (1) e (2) considera due gruppi in corrispondenza biunivoca, che possono quindi avere anche una potenza maggiore del numerabile; prende dal 1° gruppo un numero finito qualunque di segmenti

$$\delta_1, \quad \delta_2, \dots, \quad \delta_n$$

e i corrispondenti numeri

$$h_1, \quad h_2, \dots, \quad h_n$$

del 2° gruppo, calcola il valore dell'espressione

$$d_1 h_1 + d_2 h_2 + \dots + d_n h_n$$

e considera il limite superiore S dei valori che per questa via si possono ottenere, quindi nella definizione di integrale superiore fa compiere alla S la stessa parte che la (3) compie nella definizione che ho dato nel testo.

Si può però notare che nella definizione hanno importanza solo le S finite e che una S non può essere finita che quando i gruppi assunti dal LEVI in luogo delle successioni (1) e (2) hanno una potenza non superiore a quella del numerabile.

[2] Per *misura esterna* e per *misura interna* si intende ciò che con questi nomi è stato indicato dal LEBESGUE a pag. 104 del suo trattato *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*, 1904, Paris, Gauthier-Villars.

La *misura esterna* è *l'estensione minima* della nota: G. VITALI, *Sui gruppi di punti*. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVIII, (1904), pp. 116-126).

Dim. Sia r un qualsiasi numero intero >0, e si ponga

$$y_i = i\frac{c}{r} \qquad (i=0, 1, 2,..., r),$$

cosicchè in particolare $y_0 = 0$, $y_r = c$.

Indico con G_i $(i=0, 1,..., r)$ il gruppo dei punti di (a, b) per cui $f(x) > y_i$.

La misura esterna di ogni G_i è allora data da $e(y_i)$.

Consideriamo ora una qualsiasi coppia di successioni (1) e (2) e indichiamo con μ_i la somma delle lunghezze dei segmenti di (1) a cui corrispondono numeri di (2) maggiori di y_i. Siccome ogni punto di G_i appartiene ad uno di questi segmenti (v. Def.), sarà

$$\mu_i \geq e(y_i) \qquad (i=0, 1, 2,..., n),$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Sigma_n d_n h_n &\geq \mu_{r-1}\cdot y_{r-1} + (\mu_{r-2}-\mu_{r-1})y_{r-2} + ... + (\mu_1-\mu_0)y_0\\ &= \mu_{r-1}(y_{r-1}-y_{r-2}) + \mu_{r-2}(y_{r-2}-y_{r-3}) + ... + \mu_1(y_1-y_0)\\ &\geq e(y_{r-1})(y_{r-1}-y_{r-2}) + e(y_{r-2})(y_{r-2}-y_{r-3}) + ... + e(y_1)(y_1-y_0).\end{aligned}$$

Quest' ultima sommatoria col tendere di r all' ∞ tende a

$$\int_0^c e(y)dy,$$

dunque

$$\Sigma_n d_n h_n \geq \int_0^c e(y)dy,$$

e infine

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \int_0^c e(y)dy. \tag{4}$$

Sia ora ε un numero >0 piccolo a piacere. È possibile includere i punti di G_{r-1} in un sistema Γ_{r-1} di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma minore di $e(y_{r-1})+\varepsilon$. I punti di G_{r-2} che non appartengono ad alcun segmento di Γ_{r-1} formano un gruppo che ha una misura esterna che non supera

$e(y_{r-2}) - e(y_{r-1})$ [1], e quindi si possono includere in un sistema Γ_{r-2} di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma minore di $e(y_{r-2}) - e(y_{r-1}) + \varepsilon$.

I punti di G_{r-3} che non appartengono ad alcuno dei segmenti di Γ_{r-1} e di Γ_{r-2} formano un gruppo che ha misura esterna che non supera $e(y_{r-3}) - e(y_{r-2})$ e quindi si possono rinchiudere in un sistema Γ_{r-3} di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma minore di $e(y_{r-3}) - e(y_{r-2}) + \varepsilon$, e così via.

Ordiniamo i segmenti di

$$\Gamma_{r-1}, \quad \Gamma_{r-2}, \ldots, \quad \Gamma_0$$

in una successione come (1) e costruiamo una successione (2) in modo che ad ogni segmento di Γ_{r-1} corrisponda il numero y_r, ad ogni segmento di Γ_{r-2} corrisponda il numero y_{r-1}, ad ogni segmento di Γ_{r-3} corrisponda il numero y_{r-2} e così via.

Le successioni (1) e (2) così formate soddisfano alla condizione che per ogni x di (a, b) esiste un numero intero positivo n per cui x appartiene a δ_n e sia $f(x) \geq h_n$.

Per tali successioni è

$$\begin{aligned}
\Sigma_n d_n \cdot h_n < & [e(y_{r-1}) + \varepsilon] y_r + [e(y_{r-2}) - e(y_{r-1}) + \varepsilon] y_{r-1} + \\
& + [e(y_{r-3}) - e(y_{r-2}) + \varepsilon] y_{r-2} + \ldots + [e(y_0) - e(y_1) + \varepsilon] y_1 \\
& = e(y_{r-1}) \cdot (y_r - y_{r-1}) + e(y_{r-2}) \cdot (y_{r-1} - y_{r-2}) + \ldots \\
& + e(y_1) \cdot (y_2 - y_1) + e(y_0) \cdot (y_1 - y_0) + \varepsilon (y_1 + y_2 + \ldots + y_r) \\
& < \sum_{i=0}^{r-1} e(y_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) + r \cdot \varepsilon \cdot c.
\end{aligned}$$

---

[1] Ciò è conseguenza del teorema:

Se G *è un gruppo di punti di misura esterna* e, *se* G′ *è un sottogruppo di* G *di misura esterna* e′ *e se* Γ *è un gruppo di segmenti racchiudente* G′, *il gruppo* G″ *dei punti di* G *che non appartengono a qualche segmento di* Γ *ha misura esterna* $\leq$ e − e′.

Questo teorema si può dimostrare come segue:

Per ogni $\sigma > 0$ si può includere G in un sistema Δ di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma $< e + \sigma$. I punti appartenenti a qualche segmento di Δ formano un gruppo Ω misurabile di misura $\leq e + \sigma$. I punti comuni ad un segmento di Γ e ad uno di Δ formano un gruppo misurabile di misura $\geq e'$, perchè questo gruppo contiene G'.

I punti di Ω che non appartengono ad alcun segmento di Γ formano allora un gruppo misurabile di misura $\leq (e + \sigma) - e' = (e - e') + \sigma$. Il gruppo G'' è sottogruppo di questo, quindi la misura esterna di G'' è $\leq (e - e') + \sigma$. Ciò per ogni σ, dunque la misura esterna di G'' è $\leq e - e'$. c. d. d.

Scelto poi un $\eta > 0$ piccolo a piacere, si può prendere r così grande per cui

$$\sum_{i=0}^{r-1} e(y_i)\cdot(y_{i+1} - y_i) < \int_0^c e(y)dy + \frac{\eta}{2}$$

e poi ε così piccolo per cui

$$r\cdot\varepsilon\cdot c < \frac{\eta}{2}.$$

Allora risulta

$$\Sigma_n d_n \cdot h_n < \int_0^c e(y)dy + \eta,$$

e quindi è certamente

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_0^c e(y)dy.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (4) si ricava

(5) $$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_0^c e(y)dy.$$ c. d. d.

Si osservi inoltre che se $\bar{e}(y)$ indica la misura esterna del gruppo di punti di (a, b) in cui $f(x) \geq y$ è $\bar{e}(y) \geq e(y)$ è, per ogni $\varepsilon > 0$, $\bar{e}(y) \leq e(y - \varepsilon)$, così che

(6) $$\int_0^c e(y)dy \leq \int_0^c \bar{e}(y)dy$$

ed inoltre

$$\int_0^c \bar{e}(y)dy \leq \int_0^\varepsilon \bar{e}(y)dy + \int_\varepsilon^c e(y - \varepsilon)dy.$$

Ma

$$\bar{e}(y) \leq b - a$$

e quindi

$$\int_0^\varepsilon \bar{e}(y)dy \leq \varepsilon(b - a),$$

inoltre

$$\int_{\varepsilon}^{c} e(y-\varepsilon)dy = \int_{0}^{c-\varepsilon} e(y)dy \leq \int_{0}^{c} e(y)dy,$$

dunque

$$\int_{0}^{c} \bar{e}(y)dy \leq \varepsilon(b-a) + \int_{0}^{c} e(y)dy,$$

e, poichè ε può essere piccolo a piacere,

$$\int_{0}^{c} \bar{e}(y)dy \leq \int_{0}^{c} e(y)dy.$$

Da questa disuguaglianza e da (6) si ricava

$$\int_{0}^{c} e(y)dy = \int_{0}^{c} \bar{e}(y)dy$$

e quindi anche

$$\overline{\int_{a}^{b}} f(x)dx = \int_{0}^{c} \bar{e}(y)dy. \tag{7}$$

Si ha così il

TEOREMA. *Se* f(x) *è una funzione limitata e* >0 *in* (a, b), $a < b$, *se* e(y) *è la misura esterna del gruppo dei punti di* (a, b) *in cui* $f(x) > y$, *se* $\bar{e}(y)$ *è la misura esterna del gruppo di punti di* (a, b) *in cui* $f(x) \geq y$, *se infine* c *è il limite superiore dei valori di* f(x) *si ha:*

$$\overline{\int_{a}^{b}} f(x)dx = \int_{0}^{c} e(y)dy = \int_{0}^{c} \bar{e}(y)dy.$$

2. Sia ancora $f(x) > 0$ in (a, b), $a < b$, ed m indichi un numero positivo a piacere. Poniamo

$$f_1(x) = f(x) + m$$

ed indichiamo con $e_1(y)$ la misura esterna del gruppo dei punti di (a, b) in cui $f_1(x) > y$. È evidentemente

$$e_1(y+m) = e(y),$$

e quindi

$$\int_m^{m+c} e_1(y)dy = \int_0^c e(y)dy = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Poi è

$$\overline{\int_a^b} f_1(x)dx = \int_0^{m+c} e_1(y)dy = \int_0^m e_1(y)dy + \int_m^{m+c} e_1(y)dy = \int_0^m e_1(y)dy + \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Inoltre per $y \leq m$ è $e_1(y) = b - a$ e quindi

$$\int_0^m e_1(y)dy = m(b - a),$$

dunque

$$\overline{\int_a^b} f_1(x)dx = m(b - a) + \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

o anche

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + m]dx = m(b - a) + \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Da questa relazione si ricava come fa il Levi [1] che *se* f(x) *è una funzione limitata* (non più necessariamente > 0), *qualunque sia il numero* m *tale che in tutto* (a, b) *sia* f(x) + m > 0, *l' espressione*

$$\int_a^b [f(x) + m]dx - m(b - a)$$

ha sempre lo stesso valore.

Questo valore si chiama, secondo il Levi, l'*integrale superiore* di $f(x)$ da a a b e si rappresenta con

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Così resta definito l'integrale superiore di ogni funzione limitata.

---

[1] Loc. cit., pag. 66.

3. Sia ora $f(x)$ una funzione limitata in (a, b) e sia m un numero maggiore del limite superiore di $|f(x)|$ in (a, b).

Poniamo

$$f_1(x) = f(x) + m.$$

Indichiamo con $e_1(y)$ la misura esterna del gruppo dei punti di (a, b) in cui $f_1(x) > y$, con $\bar{e}_1(y)$ quella del gruppo dei punti in cui $f_1(x) \geq y$, con $e(y)$ quella del gruppo dei punti in cui $f(x) > y$ e con $\bar{e}(y)$ quella del gruppo dei punti in cui $f(x) \geq y$.

È evidentemente

$$e_1(y) = e(y - m)$$

$$\bar{e}_1(y) = \bar{e}(y - m).$$

È inoltre

$$\overline{\int_a^b} f_1(x)dx = \int_0^{2m} e_1(y)dy = \int_0^{2m} \bar{e}_1(y)dy,$$

perchè per y maggiore del limite superiore di $f_1(x)$ è $e_1(y) = \bar{e}_1(y) = 0$.

Dunque

$$\overline{\int_a^b} f_1(x)dx = \int_0^{2m} e(y - m)dy = \int_0^{2m} \bar{e}(y - m)dy,$$

e, mutando $y - m$ in y, si ha quindi

$$\overline{\int_a^b} f_1(x)dx = \int_{-m}^{m} e_1(y)dy = \int_{-m}^{m} \bar{e}(y)dy.$$

È poi

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f_1(x)dx - m(b - a),$$

e perciò

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_{-m}^{m} e(y)dy - m(b - a)$$

ed anche

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_{-m}^{m} \bar{e}(y)dy - m(b-a) \text{ [1]}.$$

4. Il Levi chiama poi *integrale inferiore* di una funzione limitata $f(x)$ in (a, b) e lo indica con

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

il contrario dell'integrale superiore da a a b di $-f(x)$. Cosichè

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = -\overline{\int_a^b}[-f(x)]dx.$$

Allora se m è un numero maggiore del limite superiore di $|f(x)|$ in (a, b) è

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = -\int_{-m}^{m} \bar{\varepsilon}(y)dy + m(b-a) = m(b-a) - \int_{-m}^{m} \bar{e}(-y)dy$$

dove $\bar{\varepsilon}(y)$ indica la misura esterna del gruppo di punti in cui $-f(x) \geq y$ cioè in cui $f(x) \leq -y$.

Indicando con $i(y)$ la misura interna del gruppo dei punti in cui $f(x) > y$ si ha allora

$$i(y) = (b-a) - \bar{\varepsilon}(-y)$$

e quindi

$$\bar{\varepsilon}(-y) = (b-a) - i(y)$$

---

[1] Questo risultato si potrebbe anche enunciare dicendo che

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_{-m}^{m} g(y)dy = \int_{-m}^{m} \bar{g}(y)dy,$$

dove $g(y)$ è la funzione che per $y > 0$ indica la misura esterna del gruppo di punti in cui $f(x) > y$ e per $y < 0$ la contraria della misura interna del gruppo di punti in cui $f(x) \leq y$, e dove $\bar{g}(y)$ è la funzione che per $y > 0$ indica la misura esterna del gruppo di punti in cui $f(x) \geq y$ e per $y < 0$ la contraria della misura interna del gruppo dei punti in cui $f(x) < y$.

e perciò

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_{-m}^{m} [i(y) - (b-a)]dy + m(b-a)$$

$$= \int_{-m}^{m} i(y)dy - 2m(b-a) + m(b-a)$$

$$= \int_{-m}^{m} i(y)dy - m(b-a) \text{ (1)}.$$

5. Se $f(x)$ è una funzione limitata in (a, b) e se

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

si dice col LEVI che $f(x)$ è *integrabile* in (a, b), e il valore comune dei precedenti integrali si chiama *integrale* di $f(x)$ da a a b.

Allora se $f(x)$ è integrabile è

$$\int_{-m}^{m} e(y)dy = \int_{-m}^{m} i(y)dy,$$

dove m indica un qualunque numero maggiore del limite superiore di $|f(x)|$ ed $e(y)$ ed $i(y)$ hanno lo stesso significato che nei n.ⁱ 3 e 4.

Evidentemente per ogni y è

$$e(y) - i(y) \geq 0.$$

Dico che è sempre

$$e(y) - i(y) = 0$$

ossia che $f(x)$ è misurabile (2).

---

(1) Questo risultato può essere anche enunciato dicendo che

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_{-m}^{m} \gamma(y)dy,$$

dove $\gamma(y)$ è la funzione che per $y > 0$ indica la misura interna del gruppo dei punti in cui $f(x) > y$ e per $y \leq 0$ la contraria della misura esterna del gruppo dei punti in cui $f(x) \leq y$.

(2) Vedi LEBESGUE, loc. cit.

Infatti, poichè

$$\int_{-m}^{m}[e(y) - i(y)]dy = 0 \quad \text{ed} \quad e(y) - i(y) \geq 0,$$

non può esistere un segmento in cui sia sempre

$$e(y) - i(y) > 0,$$

e quindi, qualunque sia y, si può trovare una successione decrescente

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots$$

avente per limite y e tale che per ogni n sia

$$e(y_n) - i(y_n) = 0$$

e tale quindi che sia misurabile il gruppo G_n dei punti in cui $f(x) > y_n$.

Il gruppo G dei punti in cui $f(x) > y$ è l'insieme dei punti appartenenti a qualche G_n e quindi deve essere misurabile.

Si conclude che, qualunque sia y, il gruppo G dei punti in cui $f(x) > y$ è misurabile e che quindi la funzione $f(x)$ è misurabile. c. d. d.