SUR L'ALLURE DES FONCTIONS DE GREEN ET DE NEUMANN DANS LE VOISINAGE DU CONTOUR.[1]

PAR

PAUL LÉVY

à PARIS.

Introduction.

§ 1. Il est utile, dans bien des questions, de connaître l'allure des fonctions de GREEN ou de NEUMANN dans le voisinage du contour. En désignant par Φ_B^A la valeur d'une de ces fonctions pour les points A et B, on peut se poser à ce sujet le problème suivant:

Problème A. Former une fonction φ_B^A telle que la différence $\Phi_B^A - \varphi_B^A$ soit une fonction holomorphe des points A et B.

Dans le cas où on ne saura pas résoudre ce problème, on peut du moins essayer de résoudre cet autre problème:

Problème B. Former une fonction φ_B^A telle que la différence $\Phi_B^A - \varphi_B^A$ soit finie, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un ordre donné.

Dans le cas du plan, la résolution du problème B est immédiate, si on utilise la notion de représentation conforme.[2] En effet, si on connaît une représentation conforme du contour étudié C sur un cercle, on en déduit aisément la valeur exacte de Φ_B^A. Or la fonction qui définit cette représentation conforme peut être définie facilement par son développement en série dans le voisinage d'un point M du contour; en prenant pour M le point du contour le plus voisin de B (ou, pour conserver la symétrie, celui pour lequel la somme $MA + MB$ est

---

[1] Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 6 avril 1914.

[2] Voir sur ce sujet les observations de M. HADAMARD à la suite de ma note citée.

minima), et en limitant ce développement à un nombre convenable de termes, on obtient une fonction φ_B^A qui résout le problème B.

Si on cherchait à résoudre par cette méthode le problème A, il faudrait introduire une infinité de coefficients. Le résultat obtenu serait très peu satisfaisant, tant à cause de sa complication qu'à cause du fait que la fonction obtenue φ_B^A ne serait autre que Φ_B^A. Or une solution du problème B ne peut présenter d'intérêt que si la fonction obtenue est beaucoup plus simple que la fonction Φ_B^A.

Il est possible d'obtenir à ce point de vue une solution tout-à-fait satisfaisante, qui a déjà été indiquée par M. E. E. LEVI.[1] Je la rappellerai dans la première partie de ce travail. La fonction par laquelle le problème A est ainsi résolu est définie par une intégrale prise le long du contour C. Je résoudrai aussi le problème A pour la fonction de GREEN d'ordre deux.

Dans le cas de l'espace, la nature analytique des fonctions de GREEN et de NEUMANN est beaucoup moins simple. M. CISOTTI a déjà obtenu la solution du problème B pour la fonction de NEUMANN.[2] Il ne considère, il est vrai, les valeurs de la fonction de NEUMANN (que nous désignons par γ_B^A dans la suite de ce travail), que quand le point B vient en un point β du contour, et l'expression asymptotique qu'il donne de γ_B^A est telle que les dérivés d'ordre supérieur au premier de la différence entre cette expression et γ_B^A ne restent pas finies. Mais d'une part la méthode qu'il a employée peut être étendue au cas où l'on désire une expression asymptotique de γ_B^A telle que la différence entre cette expression et γ_B^A ait ses dérives finies jusqu'à un ordre donné quelconque. D'autre part la connaissance des valeurs de γ_B^A entraîne la connaissance de γ_B^A par l'application de la formule de GREEN. D'aillleurs les valeurs de γ_B^A sont seules importantes pour les applications. On peut donc dire que le mémoire de M. CISOTTI résout notre problème B, pour la fonction de NEUMANN.

[1] EUGENIO ELIA LEVI. *Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1908] et *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali* [Memorie della Societa italiana delle Scienze, 1909].

En publiant ma note des Comptes Rendus, et même en rédigeant le présent travail, j'ignorais les résultats de M. E. E. LEVI. Lorsque j'en ai eu connaissance, je n'ai pas supprimé la première partie de ce travail, qui pourtant ne contenait plus de résultats nouveaux que dans le chapitre IV. Il m'a semblé qu'elle était nécessaire dans un exposé complet de la question que j'étudiais, et d'ailleurs mon exposition est assez différente de celle de M. E. E. LEVI.

[2] UMBERTO CISOTTI. *Les comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno* [Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911, 1° semestre]. Il y a d'ailleurs une erreur dans la formule finale de ce travail. La formule qui doit être substituée à celle de M. CISOTTI sera indiquée à la fin du § 33.

La seconde partie du présent travail contient une solution du problème B pour les fonctions de GREEN et de NEUMANN. Cette solution est complètement différente de celle de M. CISOTTI. La nature de cette solution sera indiquée dès le § 2 de cette introduction.

Quant au problème A, il ne semble pas qu'on puisse en obtenir dans le cas de l'espace de solution satisfaisante. Il est facile, en considérant les expressions des fonctions de GREEN ou de NEUMANN qui résultent de la théorie des équations intégrales, de voir d'où provient la différence entre ce cas et celui du plan. Dans le cas du plan en effet, le noyau de l'équation intégrale qu'on a à considérer est une fonction holomorphe; il en est donc de même du noyau résolvant, et il en résulte que, si l'on cherche à simplifier la solution en négligeant les termes holomorphes, on peut obtenir un résultat très simple, que nous obtiendrons plus loin par une autre méthode. Dans le cas de l'espace au contraire, le noyau de l'équation intégrale est un noyau singulier; non seulement cette circonstance rend moins simples les formules par lesquelles on peut obtenir la solution, mais elle modifie la nature analytique de cette solution, au point qu'on ne peut plus obtenir de simplification en négligeant les termes holomorphes.

Les mêmes circonstances se présentent si l'on essaie d'employer des méthodes différentes. La méthode de ROBIN donne la fonction de NEUMANN sous la forme d'une série telle que, si on consent à faire une erreur dont les dérivées d'un ordre supérieur à un nombre donné p deviennent infinies, il suffit de considérer un nombre fini de termes de cette série. C'est sur cette remarque que repose la méthode de M. CISOTTI. Mais le nombre de termes à considérer augmentent indéfiniment avec p, de sorte qu'on n'obtient encore aucune solution acceptable du problème A.

§ 2. Les fonctions de GREEN et de NEUMANN sont telles que, si on les a obtenues sous une forme quelconque, il est généralement facile de *vérifier* que la fonction obtenue est bien la fonction de GREEN ou de NEUMANN. De même, si on a obtenu sous une forme quelconque une fonction φ_B^A résolvant un des problèmes A et B, il est facile de *vérifier* cette propriété de φ_B^A. C'est sur cette vérification que reposent les méthodes qui seront développées dans ce mémoire.

Le principe de cette vérification exige la connaissance de quelques théorèmes généraux sur la nature analytique des fonctions harmoniques définies par certaines conditions aux limites. Malgré le caractère intuitif de ces théorèmes, des démonstrations sont évidemment nécessaires, et ces démonstrations tiendront une place importante dans ce travail.

Ceux de ces théorèmes qui seront établis dans la première partie ont pour but d'établir que certaines fonctions sont holomorphes. Ce sont des généralisations de théorèmes de BRUNS[1] et de MM. SCHWARZ et HADAMARD.[2]

La généralisation, consistant seulement dans l'introduction d'un paramètre, n'introduisant pas de modification dans les raisonnements, il suffirait de renvoyer le lecteur au mémoire de M. HADAMARD. J'ai préféré consacrer le Chapitre I de la première partie à la démonstration de ces théorèmes, afin que ce mémoire se suffise à lui-même.

Les théorèmes généraux qui sont nécessaires dans la deuxième partie seront établis dans le Chapitre II de cette partie. Ils n'ont pas été démontrés antérieurement, du moins à ma connaissance.

Je démontrerai ces théorèmes généraux par la voie la plus simple et la plus naturelle qui repose sur l'emploi des équations intégrales, au sujet desquelles j'établirai dans le Chapitre I de la deuxième partie quelques résultats nouveaux. Il serait assez facile, pour les théorèmes de la première partie, de ne pas utiliser la théorie de ces équations, mais cela allongerait un peu l'exposition. Ce serait au contraire plus difficile pour les théorèmes généraux de la deuxième partie.

Une fois ces théorèmes obtenus, il m'a paru intéressant d'éviter une nouvelle application de la théorie des équations intégrales, et de chercher systématiquement tout ce qu'on pouvait déduire de la méthode de vérification à laquelle j'ai déjà fait allusion, et dont le principe découle très simplement des théoremes généraux.

Cette méthode oblige à introduire *a priori* des fonctions harmoniques ayant des singularités convenables. L'étude de ces fonctions sera l'objet d'un chapitre spécial. Les expressions asymptotiques cherchées des fonctions de GREEN et de NEUMANN s'obtiennent ensuite sous forme de séries formées avec ces fonctions harmoniques et dont il est facile de déterminer successivement les coefficients.

---

[1] H. BRUNS. — *Ueber einen Satz aus der Potentialtheorie* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 81 (1876)]. Voir aussi l'élégant exposé de M. ERHARD SCHMIDT: *Bemerkung zur Potentialtheorie* [Mathematische Annalen, Band 68 (1910)].

[2] JACQUES HADAMARD. — *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t. XXXIII (1908)]. V. pp. 23—27.

Première partie.

Le problème A pour le plan.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques.

§ 3. Etablissons d'abord le théorème suivant, que nous appellerons dans la suite *théorème de* Bruns, bien qu'en réalité il généralise un peu un théorème de Bruns.

C étant une courbe analytique régulière fermée, $\mu(s, \lambda)$ étant une fonction de l'arc s et d'un paramètre λ, holomorphe sur toute la courbe C et pour $\lambda < \Lambda$, les potentiels de simple couche et de double couche de densité $\mu(s, \lambda)$ sont dans toute la région intérieure à C et pour $\lambda < \Lambda$ des fonctions holomorphes de λ et des coordonnées du point attiré. Ces fonctions sont prolongeables à l'extérieur de C et restent holomorphes tant que la distance du point attiré a C ne dépasse pas une valeur convenablement déterminée.

Désignons par M le point du contour C défini par la valeur s de l'arc, et par ϱ la distance de ce point au point attiré A. Les potentiels considérés dans l'énoncé sont définis à l'intérieur de C par les formules

$$U_1(A, \lambda) = \int\limits_C \mu(s, \lambda) \log \frac{1}{\varrho} ds,$$

$$U_2(A, \lambda) = \int\limits_C \mu(s, \lambda) \frac{d \log \frac{1}{\varrho}}{dn} ds.$$

Formons les deux fonctions harmoniques de A, $f_1(A, \lambda)$ et $f_2(A, \lambda)$ définies par les conditions de Cauchy

$$f_1(M, \lambda) = \mu(s, \lambda), \quad \frac{d f_1(M, \lambda)}{dn} = 0;$$

$$f_2(M, \lambda) = 0, \quad \frac{d f_2(M, \lambda)}{dn} = \mu(s, \lambda).$$

Ces fonctions existent, d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, et sont holomorphes tant que $\lambda < \Lambda$ et que la distance du point A au contour ne dépasse pas une valeur convenablement déterminée ε'. Nous prendrons pour ε un nombre quelconque inférieur à ε'.

Les potentiels U_1 et U_2 étant holomorphes en tout point intérieur à C, il suffit de démontrer que ces potentiels ou leurs prolongements sont holomorphes en tout point A_1 dont la distance à C ne dépasse pas ε. Or un pareil point peut être entouré d'un contour Γ, coupant C en deux points, et tel que les fonctions f_1 et f_2 soient holomorphes à l'intérieur de Γ et sur ce contour. Appelons C_1 l'arc de C intérieur à Γ et Γ_1 l'arc de Γ extérieur à C. Appliquons la formule de GREEN au contour fermé constitué par C_1 et Γ_1, et d'une part aux fonctions f_2 et $\log\varrho$, d'autre part aux fonctions f_1 et $\log\varrho$, ϱ étant la distance du point M qui décrit le contour à un point fixe A intérieur à C. En comptant les normales positivement dans un sens convenable, il vient

$$\int\limits_{C_1} \mu(s, \lambda) \log\varrho\, ds = \int\limits_{\Gamma_1} \left[f_2(M, \lambda)\frac{d\log\varrho}{dn} - \log\varrho\frac{df_2(M, \lambda)}{dn}\right] ds,$$

$$\int\limits_{C_1} \mu(s, \lambda)\frac{d\log\varrho}{dn} ds = \int\limits_{\Gamma_1} \left[\log\varrho\frac{df_1(M, \lambda)}{dn} - f_1(M, \lambda)\frac{d\log\varrho}{dn}\right] ds.$$

A l'aide de ces formules, on peut transformer les expressions de U_1 et U_2 de manière à représenter ces fonctions par des potentiels de simple couche et de double couche situées sur l'arc de C extérieur à Γ et sur Γ_1, et dont les densités sont fonctions holomorphes de λ. Ces fonctions sont donc prolongeables dans toute la région intérieure à Γ et sont, en tout point intérieur à ce contour, et en particulier au point considéré A_1, des fonctions holomorphes des coordonnées du point attiré et de λ. Le théorème énoncé est donc démontré.

On peut aisément, comme l'a fait observer M. HADAMARD, le généraliser en remplaçant $\log\varrho$ par la solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles quelconque du type elliptique. La formule de GREEN, sur laquelle repose le raisonnement, doit être remplacée par la formule de réciprocité relative à cette équation.

§ 4. Dans un autre ordre d'idées, nous aurons besoin du théorème suivant, presque évident, mais assez important par la suite pour qu'il soit utile d'insister sur sa démonstration.

Lorsque le point attiré A vient en un point α du contour, la fonction $\dfrac{d\log\varrho}{dn}$ *se réduit à une fonction holomorphe de α et de M.*

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que si une fonction $h(s, \sigma)$ est holomorphe, et si le quotient $\dfrac{h(s, \sigma)}{(s-\sigma)^2}$ est fini, il est holomorphe. En effet, en posant

$$s + \sigma = \xi, \quad s - \sigma = \eta,$$

$h(s, \sigma)$ se réduit à une fonction holomorphe de ξ et η,

$$H(\xi, \eta) = H_0(\xi) + \eta H_1(\xi) + \eta^2 H_2(\xi) + \cdots;$$

l'hypothèse que $\dfrac{h(s, \sigma)}{(s-\sigma)^2} = \dfrac{H(\xi, \eta)}{\eta^2}$ reste fini entraîne $H_0(\xi) = H_1(\xi) = 0$, et par suite ce quotient est holomorphe.

Désignons maintenant par s et σ les longueurs d'arc déterminant les positions des points M et α, et par p la distance du point α à la tangente au contour C en M. La fonction étudiée $\dfrac{d \log \varrho}{d n}$ est (au signe près, si p et dn sont comptés positivement dans le même sens) égale à $\dfrac{p}{\varrho^2}$. Or p et ϱ^2 sont des fonctions holomorphes de s et σ (par définition du contour régulier les coordonnées de M et α sont des fonctions holomorphes de s et σ, et il suffit de former les expressions de p et ϱ^2 pour vérifier que ces fonctions sont holomorphes). Les quotients $\dfrac{p}{(s-\sigma)^2}$ et $\dfrac{\varrho^2}{(s-\sigma)^2}$ étant finis, représentent des fonctions holomorphes. Ce dernier ne s'annulant pas, puisque pour $\varrho = 0$ sa valeur est 1, leur quotient $\dfrac{p}{\varrho^2}$ est bien holomorphe.

§ 5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental de MM. SCHWARZ et HADAMARD, que nous énoncerons de la manière suivante.

Si une fonction harmonique du point A et d'un paramètre λ se réduit, quand A décrit un contour régulier C, à une fonction holomorphe de ce point et de λ, cette fonction est une fonction holomorphe de A et de λ, non seulement à l'intérieur de C, mais aussi à l'extérieur, tant que la distance du point A au contour C ne dépasse pas une valeur convenablement déterminée.

Appelons $f(A, \lambda)$ la fonction considérée, et $f(s, \lambda)$ sa valeur en un point M de C, défini par la valeur s de la longueur d'arc. Cette fonction peut être représentée à l'intérieur de C, d'après NEUMANN et M. FREDHOLM, par un potentiel de double couche de densité $\mu(s, \lambda)$, et il suffit, d'après le théorème de BRUNS, de démontrer que $\mu(s, \lambda)$ est une fonction holomorphe de s et de λ. Or la densité $\mu(s, \lambda)$ est définie, en conservant les notations du § 4, par l'équation intégrale

$$\pi \mu(\sigma, \lambda) + \int_C \frac{d \log \frac{1}{\varrho}}{d n} \mu(s, \lambda) \, d s = f(\sigma, \lambda)$$

dont le *noyau* $\dfrac{d \log \frac{1}{\varrho}}{d n}$ est une fonction holomorphe de s et σ. Alors, d'après les formules de M. FREDHOLM, le noyau résolvant est aussi une fonction holomorphe, et il en est de même de la fonction inconnue $\mu(s, \lambda)$.

Ce théorème est susceptible de généralisations indiquées par M. HADAMARD. Ainsi il s'applique si la fonction $f(A, \lambda)$ au lieu d'être définie par la suite de ses valeurs sur C, était définie par la suite des valeurs de sa dérivée normale. Seulement, comme elle ne serait définie qu'à une constante additive près, qui pourrait dépendre de λ, il faut ajouter une hypothèse supplémentaire, par exemple que

$$\int\limits_C f(s, \lambda)\, ds$$

soit une fonction holomorphe de λ. D'autres généralisations s'obtiennent en remplaçant l'équation de LAPLACE par l'équation $\Delta\Delta u = 0$. Dans ce cas (en considérant le problème aux limites correspondant au cas des plaques élastiques encastrées), il faut faire à la fois les deux hypothèses que la fonction considérée et sa dérivée normale soient fonctions holomorphes de s et λ. Enfin, si au lieu d'un paramètre λ, on introduisait plusieurs paramètres, les théorèmes considérés resteraient exacts.

CHAPITRE II.

La fonction de Green pour le plan.

§ 6. La fonction de GREEN, que nous désignerons par g_B^A, est définie par les conditions qu'elle s'annule quand A est sur le contour C, et que la différence $g_B^A - \log \frac{1}{r}$ (r désignant la distance AB) soit à l'intérieur de C une fonction harmonique du point A. Il est bien connu que c'est une fonction symétrique de A et B, et que la connaissance de cette fonction permet de résoudre le problème de DIRICHLET par la formule

$$f(A) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{d g_M^A}{d n} f(M)\, ds, \tag{1}$$

ds étant toujours l'élément d'arc décrit par le point M, et la dérivée normale étant comptée positivement vers l'intérieur.

Nous ne considérerons que des contours réguliers. Le théorème de M. HADAMARD (loc. cit., p. 27), d'après lequel la singularité de la fonction de GREEN dans le voisinage d'un point du contour dépend seulement de la partie du contour voisine de ce point, permettrait aisément d'obtenir des généralisations relatives aux contours dont une partie seulement est régulière.

Introduisons une fonction qui jouera un rôle important tant dans la suite de ce Chapitre que dans les suivants. C'est la fonction définie, lorsque A et B sont intérieurs à C, par la formule

$$I_B^A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{d(\log\varrho\log\varrho')}{dn}ds,$$

ϱ et ϱ' désignant les distances respectives de A et B au point M.

La formule de GREEN appliquée aux fonctions $\log\varrho$ et $\log\varrho'$ donne

$$\int\limits_C \log\varrho\frac{d\log\varrho'}{dn}ds = \int\limits_C \log\varrho'\frac{d\log\varrho}{dn}ds,$$

de sorte que I_B^A peut encore s'écrire sous les deux formes

$$I_B^A = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log\varrho\frac{d\log\varrho'}{dn}ds, \tag{2}$$

$$I_B^A = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log\varrho'\frac{d\log\varrho}{dn}ds. \tag{2'}$$

Etudions ce que deviennent cette fonction et sa dérivée normale quand A vient en un point a du contour. La formule (2'), d'après les propriétés connues des potentiels de double couche, donne à la limite

$$I_B^a = -\log r + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log\varrho'\frac{d\log\varrho}{dn}ds,$$

en conservant les notations r et ϱ quand A vient en a. Cette dernière intégrale, considérée comme fonction de B, est un potentiel de simple couche, dont la densité $\dfrac{d\log\varrho}{dn}$ est une fonction holomorphe des points M et a. Ce potentiel, d'après le théorème de BRUNS, est lui-même une fonction holomorphe des points a et B. Donc I_B^a *est la somme de* $\log \frac{1}{r}$ *et d'une fonction holomorphe.*

De même la formule (2) donne, d'après les propriétés de la dérivée normale des potentiels de simple couche, en désignant par $\frac{d}{d n_a}$ une dérivée normale au point a,

$$\frac{d I_B^a}{d n} = \frac{d \log r}{d n_a} + \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log \varrho}{d n_a} \frac{d \log \varrho'}{d n} d s.$$

Cette intégrale, considérée comme fonction de B, est un potentiel de double couche dont la densité $\frac{d \log \varrho}{d n_a}$ (qui se déduit de $\frac{d \log \varrho}{d n}$ en échangeant les rôles des points M et a) est holomorphe. D'après le théorème de BRUNS, c'est une fonction holomorphe des points a et B. *Donc la dérivée normale de* $I_B^A + \log \frac{1}{r}$, *A venant en un point a du contour est une fonction holomorphe des points a et B.*

§ 7. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui constitue le résultat essentiel de ce Chapitre, et qui est le suivant.

La fonction de GREEN g_B^A *est la somme de* $\log \frac{1}{r} - I_B^A$ *et d'une fonction holomorphe des points A et B.*

Commençons par observer que $g_B^A + \log r + I_B^A$, considéré comme fonction de A, le point paramétrique B étant intérieur au contour, est une fonction harmonique. En effet la somme des deux premiers termes est harmonique, d'après la définition de la fonction de GREEN, et l'intégrale I_B^A qui est un potentiel d'une simple ou d'une double couche [d'après (2) ou (2')] est harmonique.

D'après le théorème fondamental du § 5, il suffit donc de *vérifier* que $g_B^A + \log r + I_B^A$ se réduit sur le contour à une fonction holomorphe de a et B. Or le premier terme s'annule, par définition de la fonction de GREEN, et la somme des deux derniers se réduit bien à une fonction holomorphe, d'après les propriétés de I_B^A que nous venons d'établir.

Ce théorème étant établi, en formant la dérivée normale de la fonction holomorphe $g_B^A + \log r + I_B^A$, et en utilisant ce que nous savons sur la dérivée normale de I_B^A, nous obtenons le résultat suivant, relatif à la fonction qui intervient dans la formule (1):

La fonction $\frac{dg_B^a}{dn_a}$ *est la somme de* $2\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn_a}$ *et d'une fonction holomorphe.*[1]

§ 8. Il est à remarquer que, dans les raisonnements précédents nous n'avons utilisé aucune autre propriété de la fonction de GREEN, que celles qui constituent sa définition.

Dans l'application des théorèmes de BRUNS et de M. HADAMARD, nous n'avons pas utilisé le fait que les fonctions considérées dans ces théorèmes peuvent être prolongées extérieurement à C. En reprenant à ce point de vue les raisonnements précédents, on constate que les fonctions I_B^A et g_B^A sont prolongeables à l'extérieur de C, et que les fonctions $g_B^A + \log r + I_B^A$ et $\frac{d}{dn_a}(g_B^a + 2\log r)$ sont holomorphes tant que A et B ne s'éloignent pas, extérieurement à C, à une distance de ce contour supérieur à une valeur convenablement déterminée.

Les résultats du § 7 peuvent être appliqués à la détermination de la fonction de GREEN, par la méthode d'approximations successives indiquée dans ma thèse.[2] Il faut en effet, pour appliquer cette méthode, prendre comme première approximation une fonction différant de g_B^A par une fonction holomorphe. On voit que, contrairement à ce que je pensais en exposant cette méthode, une telle fonction peut être obtenue bien simplement.

CHAPITRE III.

La fonction de Neumann pour le plan.

§ 9. La fonction de NEUMANN relative au contour C et aux points A et B, que nous désignerons par γ_B^A, est définie par les conditions que, si on la considère comme fonction du point A, la différence $\gamma_B^A - \log\frac{1}{r}$ soit harmonique à l'intérieur de C, que sa dérivée normale sur le contour ait la valeur constante $\frac{2\pi}{L}$ (L désignant la longueur du contour), enfin que sa valeur moyenne sur le

[1] La méthode du texte est une méthode de vérification. Le lecteur obtiendra aisément, en s'inspirant de celle qui sera appliquée à l'étude de la fonction de GREEN dans l'espace, une méthode permettant d'arriver aux mêmes résultats sans introduire *a priori* la fonction I_B^A.

[2] PAUL LÉVY. — *Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1911 et Journal de l'Ecole Polytechnique, 1913). V. § 31.

contour soit nulle. Il est bien connu que c'est une fonction symétrique des points A et B, et que son introduction permet de résoudre le problème de NEUMANN par la formule

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \gamma_M^A \frac{df(M)}{dn} ds. \tag{3}$$

En introduisant toujours la fonction I_B^A étudiée § 6, nous allons démontrer le théorème suivant:

La fonction de NEUMANN γ_B^A *est la somme de* $\log\frac{1}{r} + I_B^A$ *et d'une fonction holomorphe des points A et B.*

La différence $\gamma_B^A - \left(\log\frac{1}{r} + I_B^A\right)$ étant, d'après les définitions des fonctions γ_B^A et I_B^A une fonction harmonique de A, il suffit, d'après les théorèmes généraux de § 5, de *vérifier* que sa dérivée normale sur le contour est une fonction holomorphe du point considéré du contour et de B, et que sa valeur moyenne sur le contour est une fonction holomorphe de B.

Or la dérivée normale de la différence considérée est bien une fonction holomorphe, puisque celle du premier terme a, par définition de γ_B^A, une valeur constante, et que celle du second terme est holomorphe, d'après les résultats du § 6.

D'autre part la valeur moyenne de cette différence sur le contour est bien une fonction holomorphe de B. En effet on peut négliger γ_B^A dont, encore par définition, la valeur moyenne est nulle. D'après les résultats du § 6, la différence considérée devient, sur le contour la somme de $2\log r$ et d'une fonction holomorphe de B et de a. La valeur moyenne de cette fonction sur le contour est évidemment une fonction holomorphe de B, et celle de $2\log r$ l'est aussi d'après le théorème de BRUNS. Le théorème énoncé est donc établi.

Les valeurs de la fonction de NEUMANN quand un des points vient sur le contour sont particulièrement importantes à cause du rôle qu'elles jouent dans la formule (3). Le point A venant en un point a du contour, le théorème précédent devient, d'après ce que nous avons établi sur I_B^a:

La fonction γ_B^a est la somme de $2\log\frac{1}{r}$ et d'une fonction holomorphe des points a et B.

Les remarques du § 8 relatives à la fonction de GREEN, s'appliquent à la fonction de NEUMANN.

CHAPITRE IV.

La fonction de Green d'ordre deux pour le plan.

§ 10. Considérons la fonction de Green d'ordre deux, G_B^A. Elle est définie de la manière suivante: considérée comme fonction de A, elle est la somme de $r^2 \log \frac{1}{r}$ et d'une fonction biharmonique et elle s'annule sur le contour ainsi que sa dérivée normale.

J'ai démontré dans ma thèse[1] que la différence $G_B^A - r^2 g_B^A$ est holomorphe. Par suite:

La fonction G_B^A est la somme de $r^2 \log \frac{1}{r} - r^2 I_B^A$ et d'une fonction holomorphe des points A et B.

Voici une démonstration directe de ce résultat.

Observons d'abord que l'expression $G_B^A - r^2 \log \frac{1}{r} + r^2 I_B^A$ est une fonction biharmonique de A; en effet $G_B^A - r^2 \log \frac{1}{r}$ l'est par définition de G_B^A, et $r^2 I_B^A$ l'est en vertu de ce théorème, dont la vérification est immédiate, que le produit de r^2 par une fonction harmonique est une fonction biharmonique.

Il suffit donc, d'après les théorèmes généraux du § 5, de vérifier que cette expression se réduit, quand A vient en un point a du contour, à une fonction holomorphe de a et de B, et qu'il en est de même de sa dérivée normale.

Pour la fonction elle-même, c'est évident, puisque G_B^A s'annule par définition et que $I_B^A - \log \frac{1}{r}$ devient sur le contour une fonction holomorphe de a et B, d'après le § 6.

Quant à la dérivée normale, celle de G_B^A s'annulant, d'après la définition de cette fonction, elle s'écrit

$$r^2 \frac{d}{d n_a}(I_B^A - \log r) + 2 r \frac{d r}{d n_a}(I_B^A + \log r) + 2 r \frac{d r}{d n_a}.$$

Elle est donc également holomorphe, d'après les résultats du § 6, et parce que $r \frac{d r}{d n_a}$, qui est au signe près la distance du point B à la tangente au contour en a, est également holomorphe. La résultat énoncé est donc établi.

[1] *Loc. cit.* § 35. — Les notations employées dans le travail cité étant différentes de celles du travail actuel, le résultat rappelé dans le texte était énoncé sous une forme un peu différente.

Il est intéressant de connaître aussi les valeurs, quand A vient en a, de $\Delta_A G_B^A$ et de sa dérivée normale, ces quantités jouant dans le problème de détermination d'une fonction biharmonique par ses valeurs au contour et celles de sa dérivée normale le même rôle que $\frac{d}{d n_a} g_B^a$ pour le problème de DIRICHLET ou γ_B^a pour le problème de NEUMANN.

Pour cela partons de l'expression $u = r^2 g_B^A$ qui ne diffère de G_B^A que par une fonction holomorphe. En prenant des axes de coordonnées passant par B, et parallèles à la tangente et à la normale au contour C au point a vers lequel nous voulons faire tendre A, et appelant x et y les coordonnées de A, il vient

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_A u = 4 g_B^A + 4x \dfrac{\partial g_B^A}{\partial x} + 4y \dfrac{\partial g_B^A}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \Delta_A u = 8 \dfrac{\partial g_B^A}{\partial y} + 4x \dfrac{\partial^2 g_B^A}{\partial x \partial y} + 4y \dfrac{\partial^2 g_B^A}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Quand A vient en a, ces formules deviennent, en vertu des propriétés élémentaires de la fonction de GREEN,

$$\Delta_a u = 4y \frac{d g_B^a}{d n_a},$$

$$\frac{d}{d n_a} \Delta_a u = 8 \frac{d g_B^a}{d n_a} + 4x \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{d g_B^a}{d n_a} + 4ky \frac{d g_B^a}{d n_a},$$

k désignant la courbure du contour C au point a et σ la valeur de s en ce point. Or, d'après le § 7, $\frac{d g_B^a}{d n_a}$ ne diffère que par une fonction holomorphe de $2 \frac{d \log \frac{1}{r}}{d n_a}$, c'est-à-dire de $-\frac{2y}{r^2}$. Donc, en négligeant des termes holomorphes, les expressions (4) deviennent

$$-8 \frac{y^2}{r^2},$$

$$-16 \frac{y}{r^2} + 16 \frac{x^2 y}{r^4} - 8k \frac{y^2}{r^2} = -16 \frac{y^3}{r^4} - 8k \frac{y^2}{r^2},$$

ou enfin, en appelant p la distance du point B à la tangente au contour C en a, et en observant que $y = -p$,

$$-8 \frac{p^2}{r^2}, \quad 16 \frac{p^3}{r^4} - 8k \frac{p^2}{r^2}.$$

Comme u ne diffère pas de G_B^A que par une fonction holomorphe nous obtenons les résultats suivants:

L'expression $\Delta_a G_B^a$ *est la somme de* $-8\frac{p^2}{r^2}$ *et d'une fonction holomorphe des points* a *et* B.

L'expression $\frac{d}{dn_a}\Delta_a G_B^a$ *est la somme de* $16\frac{p^3}{r^4}-8k\frac{p^2}{r^2}$ *et d'une fonction holomorphe des points* A *et* B.

§ 11. On peut évidemment concevoir d'autres applications des principes qui précèdent. Toutefois le champ des généralisations n'est pas aussi vaste qu'un examen superficiel pourrait le faire penser.

On a en effet observé le rôle essentiel que jouait cette circonstance que $\frac{d\log r}{dn}$ est sur le contour une fonction holomorphe des deux points dont dépend cette expression. Cette expression étant le noyau de l'équation intégrale dont dépend la résolution du problème de Dirichlet, on voit qu'il ne faut s'attendre à pouvoir généraliser nos résultats que dans les questions dépendant d'équations intégrales à noyaux holomorphes. Or la plupart des problèmes aux limites relatifs à des équations du type elliptique autres que l'équation de Laplace conduisent à des équations à noyaux non holomorphes. Tel est le cas par exemple pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation

$$\Delta u+ku=0.$$

Dans le cas de l'espace, on rencontre la même difficulté, comme nous l'avons déjà observé. S'il n'est pas possible d'étendre au cas de l'espace nos résultats essentiels, on pourrait se demander si l'on peut généraliser du moins les relations simples qui existent entre les fonctions g_B^A, γ_B^A et G_B^A. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

D'après les résultats des § 7 et 9, la fonction $g_B^A+\gamma_B^A-2\log\frac{1}{r}$ est holomorphe. On doit donc se demander, dans le cas de l'espace, si la fonction $g_B^A+\gamma_B^A-\frac{2}{r}$ est holomorphe. Or s'il en était ainsi, il en serait de même, A et B venant en deux points a et b de la surface, de l'expression

$$\frac{d}{dn_a}\left(g_b^a+\gamma_b^a-\frac{2}{r}\right),$$

qui ne diffère que par une constante de $-2\frac{d}{dn_a}\frac{1}{r}=-\frac{2p}{r^3}$, p étant la distance de b au plan tangent à la surface considérée en a. Or cette expression n'est manifestement holomorphe pour aucune autre surface que le plan.

On peut aussi se demander si le fait que $G_B^A - r^2 g_B^A$ soit holomorphe est exact dans le cas de l'espace. Or, s'il en était ainsi, l'expression

$$\frac{d}{d n_a}(G_B^a - r^2 g_B^a) = -r^2 \frac{d}{d n_a} g_B^a \tag{5}$$

serait holomorphe. Or nous verrons plus loin que $\frac{d}{d n_a} g_B^a$ est la somme de $\frac{2p}{r^3}$ et d'une expression qui est au plus de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$, quand B est voisin de a. Il en résulte que l'expression (5) est la somme de $-\frac{2p}{r}$ et d'une quantité infiniment petite. La valeur limite de $\frac{p}{r}$ dépendant de la manière dont B tend vers a, cette expression ne peut pas être holomorphe.

Deuxième partie.

Le problème B pour l'espace.

CHAPITRE I.

Sur la composition des fonctions singulières.

§ 12. Avant d'établir les théorèmes généraux dont il a été question dans l'introduction et qui feront l'objet du Chapitre II, il faut établir quelques résultats préliminaires sur certaines équations intégrales à noyaux singuliers et sur la composition de ces noyaux. Avant même d'établir ces résultats, nous établirons quelques lemmes relatifs aux fonctions singulières que nous aurons à considérer.

Voici les notations que nous emploierons dans tout ce chapitre.

Nous considérerons deux points A et B fixes dans une aire plane S, et un point M mobile dans cette aire. Nous appellerons dS l'élément d'aire décrit par le point M, ξ et η ses coordonnées, x et y celles de A, x' et y' celles de B, ϱ, ϱ' et r les distances MA, MB et AB, Σ la portion de l'aire S intérieure à une circonférence de rayon r ayant pour centre le milieu de AB, Σ' la portion de l'aire S extérieure à cette circonférence, et Σ_1 et Σ_2 les portions de l'aire Σ situées respectiviment, par rapport à la droite $\varrho = \varrho'$ (perpendiculaire à AB en son milieu), du côté de A et du côté de B. Enfin K représentera toujours un nombre indépendant des points A et B, qui d'ailleurs ne sera pas le même dans les différents énoncés qui vont suivre, ou même dans les différentes parties d'une même démonstration.

Lemme I.[1] — *L'intégrale*

$$I = \iint_{\Sigma'} \frac{dS}{\varrho^\alpha \varrho'^\beta}$$

admet une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}$ *si* $\alpha+\beta > 2$, *de la forme* $K \log \frac{1}{r}$ *si* $\alpha+\beta = 2$, *et de la forme* K *si* $\alpha+\beta < 2$.

En effet, ϱ' étant $\geq \frac{\varrho}{3}$ dans la région Σ', nous augmentons I en remplaçant $\frac{1}{\varrho'}$ par $\frac{3}{\varrho}$. Nous augmentons encore cette intégrale en remplaçant le champ d'intégration Σ' par la couronne circulaire $\frac{r}{2} < \varrho < l$, l désignant la plus grande distance de deux points de l'aire S. La nouvelle intégrale obtenue,

$$3^\beta 2\pi \int_{\frac{r}{2}}^{l} \frac{d\varrho}{\varrho^{\alpha+\beta-1}}$$

admet évidemment les limites supérieures indiquées dans l'énoncé.

Lemme II. — *Si* $\alpha < 2$, *l'intégrale*

$$I_1 = \iint_{\Sigma'} \frac{dS}{\varrho^\alpha \varrho'^\beta}$$

admet une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}$.

---

[1] Ce lemme et le suivant, que l'on présente en général sous une forme un peu différente, sont ceux sur lesquels repose la théorie classique de l'itération des noyaux singuliers des équations intégrales. Ayant besoin de compléter cette théorie au point de vue de l'étude des dérivées des noyaux itérées, nous ferons un fréquent usage de ces lemmes.

En effet, nous augmentons I_1 en remplaçant $\frac{1}{\varrho'}$ par son maximum $\frac{2}{r}$ dans la région Σ_1, puis en remplaçant cette région par le cercle $\varrho < 2r$. La nouvelle intégrale obtenue s'écrit

$$\left(\frac{2}{r}\right)^{\beta} 2\pi \int_0^{2r} \frac{d\varrho}{\varrho^{\alpha-1}} = \frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}.$$

On aurait de même une limite supérieure de l'intégrale analogue à la précédente mais prise dans le champ Σ_2. Nous savons donc limiter supérieurement, dans les différentes portions de l'aire S, les intégrales de fonctions ayant une limite supérieure de la forme $\frac{K}{\varrho^{\alpha}\varrho'^{\beta}}$, pourvu que, dans les régions considérées, l'intégrale de cette limite supérieure ait un sens.

§ 13. Considérons une fonction $f(A,B)$ qui soit finie et continue dans la région S ainsi que toutes ses dérivées tant que les points A et B sont distincts. Supposons qu'un nombre h soit tel que, dans toute région S' intérieure à S et sans point commun avec son contour, et même si A et B sont très voisins, la fonction $f(A,B)$ soit finie si $h \leq 0$ et infinie au plus comme $\frac{1}{r^h}$ si $h > 0$, et que de plus, quel que soit l'entier positif i, toutes les dérivées d'ordre i de $f(A,B)$ soient finies si $h+i \leq 0$ et infinies au plus comme $\frac{1}{r^{h+i}}$ si $h+i > 0$. Supposons enfin que, si $h < 2$, quelle que soit la fonction holomorphe $\omega(A)$, les fonctions

$$(1) \qquad \iint_S f(A,M)\,\omega(M)\,dS, \quad \iint_S f(M,A)\,\omega(M)\,dS,$$

soient holomorphes.[1] Nous dirons qu'une fonction vérifiant toutes ces conditions est *singulière d'ordre* $\leq h$.

Si de plus le module de $f(A,B)$ admet une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^h}$, et que, quel que soit l'entier positif i, les modules de toutes les dérivées d'ordre i de $f(A,B)$ admettent une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{h+i}}$ nous dirons que cette fonction est *singulière d'ordre* $\leq h$ *au sens strict*. Cette définition n'est

[1] Cette dernière hypothèse est peut-être une conséquence nécessaire des précédentes, au moins de certaines hypothèses moins restrictives en apparence. Mais il serait plus long de résoudre cette question que de vérifier directement, dans les applications que nous avons en vue, que cette hypothèse est bien réalisée.

évidemment plus restrictive que la précédente que si $h < 0$. Si $h \geq 0$, les deux définitions sont identiques.

Une fonction $f(A, B)$ sera dite *singulière d'ordre* (h) ou *régulière d'ordre* $(-h)$, (au sens strict ou non), si, quelque petit que soit ε, elle est singulière d'ordre $\leq h+\varepsilon$, mais non d'ordre $\leq h-\varepsilon$.[1]

Si une fonction $f(A, B)$ est singulière d'ordre (h), une quelconque de ses dérivées d'ordre i est singulière d'ordre $(h+i)$ au plus. Nous allons même établir qu'elle est d'ordre $(h+i)$ exactement. Il suffit d'établir ce résultat pour $i=1$ et pour la dérivée $\frac{\partial f(A, B)}{\partial x}$. Pour cela nous supposerons cette dérivée d'ordre $(k+1)$ et nous établirons que $k=h$.

Considérons à cet effet une circonférence γ de centre B et de rayon fini indépendant de B. Par le point A, supposé voisin de B, menons une parallèle à l'axe des x, qui coupe γ en deux points; soit A_1 celui de ces deux points qui est le plus voisin de A. En désignant par D un symbole de dérivation quelconque, d'ordre j, on a

$$D f(A, B)=D f(A_1, B)+\int_{A_1 A} D \frac{\partial f(A, B)}{\partial x} d x .$$

Or $D f(A_1, B)$ est fini sur tout le cercle γ. Par hypothèse, $D \frac{\partial f(A, B)}{\partial x}$ est fini si $k+j+1<0$, et dans le cas contraire, devient infinie moins vite que $\frac{1}{r^{k+j+1+\varepsilon}}$, quelque petit que soit ε. On déduit alors de la formule précédente, par un calcul facile, que $D f(A, B)$ est fini si $k+j<0$, et dans le cas contraire devient infini moins vite que $\frac{1}{r^{k+j+\varepsilon}}$, quelque petit que soit ε. Donc $f(A, B)$ est une fonction singulière d'ordre (k), et on a bien $k=h$.

Considérons maintenant une fonction $f(A, B)$, régulière d'ordre (h), c'est-à-dire singulière d'ordre $(-h)$, h étant positif. Soit i le plus grand entier inférieur

[1] On pourrait introduire une notion plus précise, en appelant *fonction singulière d'ordre* h une fonction singulière d'ordre $\leq h$ dont au moins une dérivée d'indice assez élevé i devienne effectivement infinie comme $\frac{1}{r^{h+i}}$. Mais, pour tirer de cette notion un parti utile, il faudrait modifier un peu nos premières définitions. Ainsi, dans la définition des fonctions singulières au sens strict, il faudrait remplacer $\frac{K}{r^{h+i}}$, dans le cas où $h+i \leq 0$, par $\frac{K}{r^{h+i}} \log \frac{1}{r}$. Comme dans la suite de ce chapitre, la notion de fonction singulière d'ordre (h) nous suffira, il est inutile d'introduire des termes logarithmiques dans nos définitions. Dans le chapitre III, nous donnerons dans le même ordre d'idées des définitions un peu différentes.

à h $(h > i \geq h - 1)$. La fonction $f(A, B)$ et ses dérivées d'ordre $\leq i$ par rapport à x et y sont finies. On peut donc trouver un polynôme $P(A, B)$ d'ordre i en x et y, à coefficients fonctions de B, et tel que la différence

$$f_1(A, B) = f(A, B) - P(A, B)$$

s'annule quand A est en B ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre i par rapport à x et y. Or toutes les dérivées d'ordre $i + 1$ de $f_1(A, B)$ par rapport à x et y, qui sont les mêmes que celles de $f(A, B)$ sont inférieures en module à $\frac{K}{r^{i+1-h+\varepsilon}}$, quelque petit que soit ε. Les dériviées d'ordre i de $f_1(A, B)$ peuvent alors être obtenues en intégrant les précédentes le long de la droite BA, et on trouve qu'elles sont inférieures en module à $r^{h-i-\varepsilon}$, quelque petit que soit ε. On limite de même successivement les dérivées d'ordres $i - 1$, $i - 2, \ldots$, 1 de $f_1(A, B)$ et cette fonction elle-même, et on constate ainsi qu'elle est régulière d'ordre (h), au sens strict. Nous avons donc établi le résultat suivant:

Toute fonction régulière d'ordre (h) est la somme d'une fonction régulière d'ordre (h) au sens strict, et d'un polynôme en x et y de degré inférieur à h dont les coefficients sont des fonctions finies et continues de B.

On peut évidemment dans cet énoncé échanger les rôles des points A et B.

§ 14. Dans la théorie des équations intégrales, on appelle *composition* l'opération qui consiste, étant données deux fonctions $f(A, B)$ et $\varphi(A, B)$, à former la fonction

$$F(A, B) = \iint_S f(A, M)\varphi(M, B)\,dS. \tag{2}$$

Les fonctions singulières que nous considérons sont par définition telles qu'en les composant avec une fonction holomorphe dépendant d'un seul des points A et B, on obtienne toujours une fonction holomorphe. Bien entendu ces fonctions doivent être singulières d'ordre inférieur à 2 pour que l'opération de composition ait un sens.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, relatif à la composition des fonctions qui sont toutes les deux singulières.

Si les fonctions $f(A, B)$ et $\varphi(A, B)$ sont singulières d'ordres respectifs (h) et (k) inférieurs à 2, la fonction

$$F(A, B) = \iint_S f(A, M)\varphi(M, B)\,dS$$

est singulière d'ordre $(h + k - 2)$ au plus.

Vérifions d'abord que les intégrales analogues aux intégrales (1) formées avec $F(A,B)$ sont holomorphes, si $\omega(A)$ est holomorphe. Considérons l'une d'elles, par exemple

$$\Omega(A) = \iint_S F(A,M)\,\omega(M)\,dS. \tag{3}$$

En posant

$$\omega_1(A) = \iint_S \varphi(A,M)\,\omega(M)\,dS,$$

elle s'écrit

$$\Omega(A) = \iint_S f(A,M)\,\omega_1(M)\,dS.$$

Puisque par hypothèse les intègrales du type (1) formées avec $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$ sont holomorphes, la fonction $\omega_1(A)$ et par suite la fonction $\Omega(A)$ sont holomorphes.

Il faut maintenant établir l'existence des dérivées de $F(A,B)$ et trouver des limites supérieures de leurs modules. Etudions dans ce but une des dérivées, que nous représenterons par

$$D\mathfrak{D}F(A,B), \tag{4}$$

D étant un symbole de dérivation d'ordre i par rapport à x et y, coordonnées de A, et $\mathfrak{D}$ un symbole de dérivation d'ordre j par rapport à x' et y', coordonnées de B. La limite supérieure que nous cherchons doit être finie si $h+k+i+j-2<0$, et dans le cas contraire de la forme $\frac{K}{r^{h+k+i+j-2+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut. Plusieurs cas sont à distinguer suivant les valeurs de i et j.

Premier cas. $h+i<2$, $k+j<2$.

On peut écrire dans ce cas

$$D\mathfrak{D}F(A,B) = \iint_S Df(A,M)\,\mathfrak{D}\varphi(M,B)\,dS, \tag{4'}$$

la dérivation étant légitime, puisque l'intégrale obtenue est absolument et uniformément convergente. La fonction $Df(A,M)$ admet en module une limite supérieure de la forme $\frac{K}{\varrho^{h+i+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut, si $h+i\geq 0$, et est finie si $h+i<0$. De même $\mathfrak{D}\varphi(M,B)$ admet en module une limite supérieure de la forme $\frac{K}{\varrho'^{k+j+\varepsilon}}$, si $k+j\geq 0$, et est finie si $k+j<0$. Les lemmes I et II nous montrent alors que l'expression ($4'$), dans le cas où $h+k+i+j-2\geq 0$ (ce qui n'est possible que si $h+i>0$, $k+j>0$), est inférieure en module à $\frac{K}{r^{h+k+i+j-2+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut et K convenablement choisi. Dans le cas contraire elle est finie. C'est bien la limitation que nous voulions obtenir.

Deuxième cas. $h+i\geq 2$, $k+j<2$.

La dérivée étudiée (4) peut dans ce cas s'écrire

$$(4'')\qquad D\mathfrak{D}F(A,B)=D\iint\limits_S f(A,M)\,\varphi_1(M,B)\,dS,$$

la fonction $\varphi_1(A,B)=\mathfrak{D}\varphi(A,B)$ étant singulière d'ordre $(k+j)$.

Montrons d'abord que nous pouvons supposer cette fonction singulière d'ordre $(k+j)$ au sens strict, si $k+j<0$. En effet le cas général se ramène à ce cas en ajoutant à $\varphi_1(M,B)$ des termes de la forme

$$\psi(B)\,\xi^\alpha\,\eta^\beta,$$

les fonctions ψ(B) étant finies. Cela revient à ajouter à l'expression ($4''$) des termes de la forme

$$\psi(B)\,D\iint\limits_S f(A,M)\,\xi^\alpha\,\eta^\beta\,dS,$$

qui sont finis, puisque la fonction sur laquelle on effectue l'opération D est holomorphe comme étant de la forme (1). Nous voyons donc bien que pour trouver une limite supérieure de l'expression ($4''$), il suffit de la trouver dans le cas où $\varphi_1(A,B)$ est une fonction singulière d'ordre $(k+j)$ au sens strict.

Décomposons maintenant le champ d'intégration S en deux champs, $\Sigma_2+\Sigma'$ et Σ_1. Bien entendu, bien que la définition de ces champs (§ 12) montre qu'ils dépendent de A, nous pouvons les considérer comme fixes lorsque nous effectuons la dérivation D.

L'expression ($4''$) se présente alors comme la somme de deux termes. Le premier terme

$$\iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma'} Df(A,M)\,\mathfrak{D}\varphi(M,B)\,dS$$

est inférieur en module à

$$\iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma'} \frac{k}{\varrho^{h+i+\varepsilon}\,\varrho'^{\,k+j+\varepsilon}}\,dS,$$

et les lemmes I et II nous en donnent une limite supérieure qui est bien de la forme voulue.

Il reste à étudier le terme

$$D\iint\limits_{\Sigma_1} f(A,M)\,\varphi_1(M,B)\,dS. \tag{5}$$

Posons $i = i_1 + i_2$, i_1 étant le nombre entier tel que $1 \leq h + i_1 < 2$. Remplaçons $\varphi_1(M,B)$ par son développement en série de TAYLOR limité aux termes de degré i_2 autour d'un point A_0, de coordonnées x_0 et y_0. Nous supposerons que A_0 coïncide avec A, mais nous écrirons tout de même A_0, pour indiquer qu'en effectuant la dérivaton D on n'a pas à tenir compte des termes qui contiennent A_0.

Nous avons donc de nouveau deux sortes de termes à distinguer, les premiers termes de ce développement, et le reste. Considérons d'abord les premiers termes, de la forme

$$X(A_0,B)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}, \quad (\alpha + \beta \leq i_2 - 1), \tag{6}$$

$X(A_0,B)$ étant une fonction singulière d'ordre $(k + j + \alpha + \beta)$ au sens strict. Les termes correspondant de (5) peuvent s'écrire

$$X(A_0,B)\,D\iint\limits_{S} f(A,M)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}\,dS \tag{7}$$

$$- X(A_0,B)\iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma'} Df(A,M)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}\,dS.$$

L'intégrale prise dans le champ S, étant de la forme (1), a ses dérivées finies. Le produit de sa dérivée par $X(A_0,B)$ est donc infini au plus comme une fonction singulière d'ordre $(k + j + \alpha + \beta)$, et si on observe que

$$k + j + \alpha + \beta \leq k + j + i_2 - 1 + h + i_1 - 1 = h + k + i + j - 2,$$

on voit qu'on a bien pour ce terme la limitation voulue. Dans l'autre intégrale de la formule (7), la fonction intégrée a son module inférieur à $\frac{K}{\varrho^{h+i-\alpha-\beta-\varepsilon}}$. L'intégrale, en vertu des lemmes I et II, et de ce que $h + i - \alpha - \beta \geq 2$ est donc infinie au plus comme $\frac{K}{r^{h+i-\alpha-\beta-2+\varepsilon}}$. Son produit par $X(A_0,B)$ est donc infini au plus comme une foncton d'ordre $(h + k + i + j - 2)$. Nous avons donc pour tous les termes de l'expression (7) la limitation voulue.

Considérons maintenant le reste de la série de TAYLOR. Il est la somme de $i_2 + 1$ termes de la forme

$$X(M,A_0,B)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}, \quad (\alpha + \beta = i_2),$$

la fonction $X(M,A_0,B)$ étant inférieure au module maximum des dérivées d'ordre i_2 de $\varphi_1(M,B)$ quand M décrit la région Σ_1, c'est-à-dire ayant une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{k+j+i_2+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut. Les termes correspondant de (5) s'écrivent

$$\iint\limits_{\Sigma_1} X(M,A_0,B)\, Df(A,M)\,(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta} dS,$$

cette intégrale ayant bien un sens, puisque la fonction intégrée est infinie en A d'ordre $(h + i - \alpha - \beta = h + i_1 < 2)$. Le lemme II nous donne alors de cette intégrale une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{h+k+i+j-2+\varepsilon}}$. Nous avons donc finalement obtenu la limite supérieure cherchée pour tous les termes qui constituent l'expression (4'').

Troisième cas. $h + i < 2$, $k + j \geq 2$.

Ce cas se traite évidemment comme le précédent, en échangeant les rôles des points A et B.

Quatrième cas. $h + i \geq 2$, $k + j \geq 2$.

Ce cas se traite aisément par les mêmes procédés que le second. On décompose le champ S en trois champs Σ', Σ_1 et Σ_2. Pour l'intégrale relative au champ Σ', le lemme I nous donne sans difficulté la limitation cherchée. Les deux autres intégrales se déduisant l'une de l'autre par l'échange des points A et B, il suffit d'étudier l'une d'elles, par exemple celle qui est étendue au champ Σ_1. Le procédé employé pour l'étude du deuxième cas s'applique dans ce but sans modification, car il ne tenait aucun compte de l'hypothèse $k + j < 2$.

Ayant obtenu dans tous les cas la limite supérieure cherchée, nous avons démontré le théorème énoncé.

§ 15. Les resultats précédents se prêtent à quelques généralisations. On peut observer que, pour limiter supérieurement une dérivée de $F(A,B)$ d'ordre $n = i + j$ nous n'avons introduit à aucun moment dans les calculs des dérivées de $f(A,B)$ et de $\varphi(A,B)$ d'ordre supérieur à n. Donc:

Si les fonctions $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n admettent en module les limitations indiquées pour des fonctions singulières d'ordres respectifs

(h) et (k) inférieurs à 2 et leurs dérivées, si de plus ces fonctions vérifient la condition auxiliaire relative aux intégrales du type (1), *la fonction*

$$F(A,B)=\iint_S f(A,M)\,\varphi(M,B)\,dS$$

et ses dérivées jusqu'à l'ordre n admettent en module les limitations indiquées pour une fonction singulière d'ordre $(h+k-2)$, et de plus cette fonction vérifie la condition auxiliaire relative aux intégrales du type (1).

Il n'est pas même nécessaire de supposer *l'existence* des dérivées d'ordre $n+1$ de $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$.

On peut observer encore, d'après les raisonnements du § 14, que si l'on veut une limitation des dérivées d'ordre n de $F(A,B)$ par rapport aux coordonnées de A seulement, il suffit de connaître les limitations des dérivées de $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$ jusqu'à l'ordre n et par rapport aux coordonnées de A seulement.

On peut aussi remplacer les hypothèses relatives aux intégrales (1) par des hypothèses moins restrictives, et cela de deux manières différentes.

D'une part, si on veut étudier les dérivées de $F(A,B)$ par rapport aux coordonnées de A seulement, il suffit de faire des hypothèses sur la première de ces intégrales,

$$\iint_S f(A,M)\,\omega(M)\,dS,$$

qui dans ce cas intervient seule dans les raisonnements du § 14. D'autre part, l'hypothèse relative à ces intégrales peut, si l'on veut étudier seulement les dérivées de $F(A,B)$ jusqu'à l'ordre n, être remplacée par l'hypothèse moins restrictive que ces intégrales admettent des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n. Il suffit même de supposer qu'il en est ainsi lorsque $\omega(A)$ est un polynôme de degré $n-1$.

Cela suffit pour qu'il en soit de même lorsque $\omega(A)$ est une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n, et même lorsque c'est une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, et que ses dérivées d'ordre $n-1$ sont *uniformément continues à la* Lipschitz, avec un exposant $\alpha > h-1$. [Nous disons qu'une fonction $\Omega(A)$ est uniformément continue à la Lipschitz avec un exposant α lorsqu'on a

$$|\Omega(B)-\Omega(A)| < K r^{\alpha}, \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

K étant indépendant de A et B.] Si, en effet, $\omega(A)$ vérifie ces conditions, $\omega(M)$ peut être regardée comme la somme d'un polynôme en ξ, η de degré $n-1$ et d'une fonction admettant une limite supérieure de la forme $K\varrho^{n-1+\alpha}$. Chaque intégrale (1) est alors la somme de deux termes: pour le premier, les dérivées d'ordre n existent par hypothèse: pour le second on peut les former par la règle de LEIBNIZ. D'ailleurs ces dérivées sont bien des fonctions continues.

§ 16. Nous pouvons maintenant appliquer les résultats précédents aux équations intégrales. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Soit $\varphi(A)$ une fonction ayant des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n. Soit $f(A,B)$ une fonction admettant, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n par rapport aux coordonnées de A les limitations indiquées pour une fonction singulière d'ordre (h) inférieur à 2 et ses dérivées. On suppose de plus que l'intégrale

$$\iint\limits_S f(A,M)\,\omega(M)\,dS \tag{8}$$

soit finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n lorsque la fonction $\omega(M)$ est holomorphe. On suppose enfin que l'équation intégrale

$$\psi(A)+\iint\limits_S f(A,M)\,\psi(M)\,dS=\varphi(A) \tag{9}$$

admette une solution et une seule. Cette solution admet des dérivées jusqu'à l'ordre n finies et continues.

On sait, en effet, que l'équation (9) peut être remplacée pour la détermination de la fonction inconnue $\psi(A)$ par une quelconque des équations

$$\psi(A)+\iint\limits_S f_i(A,M)\,\psi(M)\,dS=\varphi_i(A) \qquad i=1,2,\ldots.), \tag{10}$$

où

$$f_0(A,B)=f(A,B),\quad f_i(A,B)=-\iint\limits_S f_{i-1}(A,M)\,f(M,B)\,dS,$$

$$\varphi_0(A)=\varphi(A),\quad \varphi_i(A)=\varphi_{i-1}(A)-\iint\limits_S f(A,M)\,\varphi_{i-1}(M)\,dS.$$

D'après le théorème du § 15, les fonctions $f_i(A,B)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n admettent les limitations indiquées pour les fonctions singulières d'ordre

$(h+ih-2i)$. Donc pour i assez grand (si par exemple $h=1$ pour $i=n+2$) toutes ces dérivées seront finies. Mais alors d'après les formules de M. FREDHOLM, le noyau résolvant $F_i(A,B)$ de l'equation (10) admet aussi des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n.

D'autre part, d'après les hypothèses relatives à l'intégrale (8) et d'après les remarques finales du § 15, les fonctions $\varphi_i(A)$ sont finies et continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n. Il en est alors de même de la fonction $\psi(A)$, définie par la formule

$$\psi(A)=\varphi_i(A)+\iint_S F_i(A,M)\varphi_i(M)dS,$$

C. Q. F. D.

On verrait de même, d'après les remarques finales du § 15, que si les dérivées de $\varphi(A)$ sont finies et continues jusqu'à l'ordre $n-1$ seulement, et si les dérivées d'ordre $n-1$ sont uniformément continues à la LIPSCHITZ avec un exposant $\alpha>h-1$, il en est de même pour les fonctions $\varphi_i(A)$ et par suite pour $\psi(A)$; la différence $\psi(A)-\varphi(A)$ a même des dérivées d'ordre n.

Il est aisé de généraliser le théorème précédent en remplaçant les intégrales doubles par des intégrales de surface; c'est sous cette forme que nous aurons à l'appliquer.

On peut encore généraliser tous les résultats de ce chapitre en remplaçant les intégrales doubles par des intégrales multiples d'ordre p (ou par des intégrales simples). La condition $h<2$, qui a joué un rôle essentiel doit être alors remplacée par la condition $h<p$ (ou $h<1$ dans le cas des intégrales simples).

§ 17. Voici enfin une extension dans un autre ordre d'idées. Si $\varphi(A)$ est holomorphe et si $f(A,B)$ est une fonction singulière d'ordre (h), $(h<2)$ au sens du § 13, il résulte de ce qui précède que la fonction $\psi(A)$ définie par l'équation (9) a toutes ses dérivées finies et continues. Mais est-elle holomorphe?

Pour résoudre cette question, nous allons montrer que tous les résultats qui précèdent restent exacts lorsque les coordonnées des points A et B peuvent prendre des valeurs imaginaires. Il en résultera bien que $\psi(A)$, fonction de deux variables complexes dont les dérivées sont finies et continues est holomorphe.

Nous définirons un point imaginaire A par les intersections A_1 et A_2 des droites isotropes passant par ce point avec la partie réelle du plan. Il faut que A puisse décrire l'aire S et une portion voisine du plan imaginaire. Cela revient à dire qu'on peut prendre pour A_1 et A_2 tous les systèmes de deux points intérieurs à S, tels du moins que la distance $A_1 A_2$ ne soit pas trop grande. Le point B sera défini de même par deux points réels B_1 et B_2. M sera bien entendu réel.

En appelant toujours r, ϱ, ϱ' les distances AB, MA, MB, on a

$$|r^2| = A_1 B_1 \times A_2 B_2, |\varrho^2| = MA_1 \times MA_2, |\varrho'^2| = MB_1 \times MB_2.$$

Il faut d'abord généraliser les lemmes I et II. L'intégrale considérée dans ces lemmes,

$$\iint \frac{dS}{\varrho^\alpha \varrho'^\beta},$$

est inférieure en module, d'après l'inégalité de SCHWARZ, à

$$\sqrt{\iint \frac{dS}{MA_1^\alpha \times MB_1^\beta} \iint \frac{dS}{MA_2^\alpha \times MB_2^\beta}}.$$

Considérons par exemple le cas où $\alpha < 2, \beta < 2, \alpha + \beta > 2$. Dans ce cas, les lemmes I et II, tels que nous les avons établis au point de vue réel, nous donnent pour l'expression précédente, l'intégration étant étendue à toute l'aire S, la limite supérieure

$$K \sqrt{\frac{1}{A_1 B_1^{\alpha+\beta-2} \times A_1 B_2^{\alpha+\beta-2}}} = \frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}.$$

On étudierait de même les autres cas. La seule complication mais qui n'introduit aucune difficulté réelle, est que la division de S en trois aires, Σ', Σ_1 et Σ_2, ne suffit plus, et qu'il faut diviser S en un plus grand nombre d'aires partielles. Mais dans chaque cas on aura sans peine la limitation dont on aura besoin.

Les raisonnements des § 14 à 16, malgré cette complication, restent applicables au cas actuel. Le résultat que nous avons en vue est donc établi lorsque les dérivées d'ordre i du noyau $f(A, B)$ admettent des limites supérieures de la forme $\frac{K}{r^{h+i}}$, et lorsque ce noyau vérifie la condition auxiliaire relative à l'intégrale (8).

Une remarque doit être faite au point de vue de l'application de ce résultat. Supposons qu'on veuille l'appliquer au cas où on remplace l'aire S par une aire qui ne soit pas plane. Pour transformer les intégrales de surface que l'on aura à considérer en intégrales doubles, il faut représenter l'aire S sur une aire plane (S). Les points A et B, dont la distance est r, sont ainsi représentés par des points (A) et (B), dont la distance est (r). Pour les points réels, r et (r) s'annullent en même temps et sont du même ordre de grandeur. Il n'en est plus de même au point de vue imaginaire. Il ne peut même en être de même pour aucune représentation plane de S, car il n'existe pas en général de courbe tracée sur S telle que la distance de deux points quelconques de cette courbe soit nulle. Donc l'existence d'une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^a}$ n'entraîne pas l'existence d'une limite supérieure de la forme $\frac{K}{(r)^a}$. Nous ne pouvons pas appliquer le résultat précédent.

Mais nous pouvons le généraliser. En effet, comme nous l'avons fait pour le plan, nous pouvons définir un point imaginaire A de S par deux points réels A_1 et A_2 dont la distance à A soit nulle. Nous pouvons de même définir B par deux points réels B_1 et B_2. La formule

$$|r^2| = A_1 B_1 \times A_2 B_2$$

relative au plan n'est plus exacte, mais les deux membres restent du même ordre de grandeur, ce qui suffit pour que tous nos raisonnements s'appliquent.

On peut de même remplacer r^2 par une fonction de A et B qui soit le produit de deux facteurs holomorphes imaginaires conjugués s'annulant sans que leurs dérivées premières s'annulent quand A et B sont confondus; en d'autres termes on peut remplacer r^2 par une fonction holomorphe de A et B qui s'annule, ainsi que ses dérivées premières, sans que ses dérivées secondes s'annulent, quand A et B sont confondus, et qui soit réelle et positive quand A et B sont réels.

CHAPITRE II.

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques.

§ 18. Le théorème de Bruns demontré dans la première partie s'étend sans difficulté au cas de l'espace. Le mémoire de M. E. Schmidt (cité en note, § 2) est d'ailleurs relatif au cas de l'espace. Au contraire l'extension des résultats de M. Hadamard exposés § 5 ne peut se faire qu'en utilisant les résultats du § 17, et en observant que la condition auxiliaire relative à l'intégrale (8) se trouve bien vérifiée, en vertu du théorème de Bruns, dans l'application qu'on a à faire de ces résultats. Grâce à ces résultats, ceux de M. Hadamard peuvent aussi s'étendre au cas d'équations aux dérivées partielles du type elliptique les plus générales.

J'établirai dans ce chapitre des résultats d'une nature un peu différente. Il s'agira simplement de limiter supérieurement les modules des dérivées, jusqu'à un ordre fini, de fonctions harmoniques définies par certaines conditions aux limites.

La suite des idées sera la même que dans le chapitre I de la première partie. Je commencerai par établir des propriétés du potentiel. J'en déduirai les propriétés cherchées par l'emploi des équations intégrales et des théorèmes du chapitre précédent.

Considérons une surface fermée S ayant en chaque point un plan tangent déterminé, et telle que les coordonnées d'un point M de cette surface soient des fonctions de deux paramètres u et v, ayant toutes leurs dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $p+1$, p étant >0. Appelons $\mu(M)$ ou simplement μ une fonction de u et v finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p. Appelons r la distance AM.[1] Nous allons établir le théorème suivant:

Le potentiel

$$U=\iint\limits_S \frac{\mu}{r}\,dS$$

(dS désignant l'élément d'aire décrit par M sur la surface S) *et ses dérivées jusqu'à l'ordre p, ont en valeur absolue des limites supérieures finies.*

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour les points voisins de S, car il est évident pour les autres.

Considérons donc un point A voisin de S sur une normale PA à cette surface en un point P. Considérons un cylindre de révolution d'axe PA et de rayon R assez petit pour que toute parallèle à PA intérieur à ce cylindre coupe S en un point voisin de P et un seul; ce rayon R, pourvu qu'il soit assez petit, peut être supposé indépendant du point P de la surface.

Appelons Σ la partie de S voisine de P et intérieure à ce cylindre. Posons

$$V=\iint\limits_\Sigma \frac{\mu}{r}\,dS.$$

Il est évident que $U-V$ et toutes ses dérivées admettent des limites supérieures indépendantes des points P et A. Il suffit donc de limiter supérieurement V et ses dérivées.

Prenons le point P comme origine d'un système de coordonnées rectangulaires, l'axe des z étant PA. Appelons ξ, η, ζ les coordonnées de M, z l'ordonnée de A. D'après les hypothèses faites sur S, ζ admet des dérivées par rapport à ξ et η,

[1] Les notations ne sont pas identiques à celles du chapitre précédent. Il n'était pas facile d'employer dans tout ce travail un système unique de notations.

finies et continues, jusqu'à l'ordre $p+1$. On peut donc déterminer un polynôme ζ_1 en ξ et η, de degré p, tel que l'on ait

$$|\zeta-\zeta_1|<K\varrho^{p+1},$$

en posant $\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, et K étant un nombre convenablement déterminé, qu'on peut supposer indépendant de P, pourvu qu'il soit assez grand. De même on peut déterminer un polynôme μ_1 en ξ et η, de degré $p-1$, et tel que

$$|\mu-\mu_1|<K\varrho^{p}.$$

Appelons Σ_1 l'aire décrite par le point M_1 de coordonnées ξ,η,ζ_1, quand M décrit l'aire Σ, dS_1 l'élément de cette aire, et r_1 la distance AM_1. Posons

$$V_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mu_1}{r_1}dS_1.$$

D'après le théorème de Bruns, V_1 est holomorphe, dans le voisinage de AP, de chaque côté de P, et par suite toutes ses dérivées par rapport aux coordonnées de A sont finies. On peut donc leur assigner des limites supérieures, qui sont des fonctions continues des coefficients des polynômes ζ_1 et μ_1, tant que ces coefficients sont finis. Or ils ont des limites supérieures indépendantes du point P. On peut donc limiter supérieurement toutes les dérivées de V_1, et nous n'avons plus qu'à étudier la différence $V-V_1$.

Or cette différence peut s'écrire

$$(11)\qquad V-V_1=\iint\frac{\mu}{r}(f-f_1)\,d\xi\,d\eta+\iint\frac{\mu-\mu_1}{r}f_1\,d\xi\,d\eta+\iint\mu_1 f_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\xi\,d\eta,$$

en posant

$$f=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2},\qquad f_1=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta}\right)^2},$$

et les intégrales doubles étant étendues dans le champ

$$\xi^2+\eta^2<R^2.$$

Nous voulons limiter supérieurement les dérivées d'ordre $\leq p$ de l'expression (11). On n'a pas évidemment, en calculant une telle dérivée, à tenir compte de ce que le point P dépend de A. Donc on peut l'écrire, D désignant une opération de dérivation,

$$(12) \qquad D(V-V_1)=\iint \mu(f-f_1)\,D\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta+\iint(\mu-\mu_1)\,f_1\,D\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta+ \\ +\iint \mu_1 f_1\left(D\frac{1}{r}-D\frac{1}{r_1}\right)d\xi\,d\eta.$$

Il est facile d'obtenir des limitations de toutes les quantités qui interviennent dans cette formule. On a d'abord aisément, en vertu des hypothèses faites, et pourvu que R soit assez petit et K assez grand

$$|\mu|<K, \quad |\mu_1|<K, \quad |\mu-\mu_1|<K\varrho^p,$$

$$|f|<K, \quad |f_1|<K, \quad |f-f_1|<K\varrho^p,$$

$$\left|D\frac{1}{r}\right|<\frac{K}{r^{p+1}}\leq\frac{K}{\varrho^{p+1}}.$$

Il reste à limiter $D\frac{1}{r}-D\frac{1}{r_1}$. Posons

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}D\frac{1}{r}=\varphi(A,M);$$

on a, par le théorème de la moyenne,

$$D\frac{1}{r}-D\frac{1}{r_1}=(\zeta-\zeta_1)\,\varphi(A,M'),$$

M' étant compris entre M et M_1. r' désignant la distance AM', $\varphi(A,M')$ est une dérivée de $\frac{1}{r'}$ d'ordre $p+1$, de sorte que

$$|\varphi(A,M')|<\frac{K}{r'^{p+2}}\leq\frac{K}{\varrho^{p+2}},$$

et par suite

$$\left|D\frac{1}{r}-D\frac{1}{r_1}\right|<\frac{K}{\varrho}.$$

Nous avons donc ainsi une limitation pour chacune des quantités qui interviennent dans la formule (12). De ces limitati ns résulte que

$$|D(V-V_1)|<K\iint\frac{d\xi\,d\eta}{\varrho}=2\pi KR.$$

Cette formule achève de démontrer le théorème énoncé.

§ 19. On peut généraliser de diverses manières le résultat précédent.

On peut d'abord restreindre les hypothèses faites. On peut remplacer l'hypothèse de l'existence des dérivées d'ordre $p+1$ de ζ et des dérivées d'ordre p de de μ par l'hypothèse moins restrictive que les dérivées d'ordre p de ζ et les dérivées d'ordre $p-1$ de μ sont uniformément continues à la LIPSCHITZ, (au sens indiqué § 15), avec un exposant quelconque positif et ≤ 1.

§ 20. On peut aussi remplacer le potentiel de simple couche par un potentiel de double couche. Mais les dérivées de ce potentiel ne seront certainement finies que jusqu'à l'ordre $p-1$. Cela tient à ce que $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ est une fonction singulière d'ordre (2), au sens du § 13, tandis que $\frac{1}{r}$ était une fonction singulière d'ordre (1); en d'autres termes, au lieu de

$$\left|D\frac{1}{r}\right| < \frac{K}{r^{p+1}},$$

on a seulement

$$\left|D\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right| < \frac{K}{r^{p+2}}.$$

Si le point attiré A est en un point α de la surface S, le potentiel de double couche W a une valeur W_s, tandis que les limites de W quand A tend vers α d'un côté ou de l'autre de S sont des quantités W_e et W_i différentes de W_s, les différences étant $\pm 2\pi\mu(\alpha)$. W_s est une intégrale où la fonction intégrée est singulière d'ordre (1) seulement. Il en résulte que, les hypothèses du § 18 étant vérifiées, W_s admet des dérivées finies jusqu'à l'ordre p. C'est aussi une conséquence des théorèmes des §§ 14 et 15. Il en résulte qu'il en est de même de W_e et W_i, puisque μ (α) a des dérivées d'ordre n finies et que W_e et W_i ont les valeurs $W_s \pm 2\pi\mu(\alpha)$.

Si on remplace les hypothèses du § 18 par les hypothèses moins restrictives du § 19, W_s a bien encore des dérivées d'ordre n finies et continues, tandis que W_e et W_i n'en ont évidemment plus.

Des remarques analogues s'appliquent aux dérivées normales du potentiel de simple couche.

Il est évident que les résultats précédents peuvent s'étendre au cas où on remplace $\frac{1}{r}$ par la solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles quelconque du type elliptique. En effet, le théorème de BRUNS reste applicable, et la solution fondamentale considérée est bien encore singulière d'ordre (1).

Ces résultats sont également vrais dans le cas du plan, les solutions fondamentales considérées étant alors des fonctions singulières d'ordre (o).

Ils se généralisent aisément dans le cas où les hypothèses des §§ 18 et 19 sont vérifiées sur une partie seulement de la surface S.

Enfin, on peut supposer que μ dépende d'un paramètre λ. Les dérivées considérées peuvent alors être prises par rapport à λ, et les ordres qui figurent dans les différents énoncés indiquent dans ce cas le nombre total des dérivations effectuées par rapport à λ et les autres variables.

§ 21. Considérons maintenant une fonction harmonique $f(A)$, définie par les valeurs $f(M)$ qu'elle prend sur la surface S. Nous allons établir le théorème suivant:

Si on connaît une limite supérieure des valeurs absolues de $f(M)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p, on peut en déduire à l'intérieur de S une limite supérieure des modules de $f(A)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$.

Si nous formons $f(A)$ par la méthode de M. Fredholm, il suffit d'après le théorème du § 18, d'établir que la densité $\mu(M)$ du potentiel de double couche qui représente $f(A)$ a des dérivées finies jusqu'à l'ordre p.

Or, cette densité est définie par l'équation

$$2\pi\mu(\alpha)+\iint\limits_{S}\mu(M)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}dS=f(\alpha),$$

r désignant la distance αM, et la dérivée $\frac{d}{dn}$ étant relative au point M.

Le résultat cherché nous sera alors donné par le théorème du § 16, pourvu que nous démontrions que la fonction $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ vérifie bien les conditions imposées à $f(A,B)$ dans l'énoncé de ce théorème.

Ces conditions sont de deux sortes. Il y a d'abord les conditions relatives à l'ordre de grandeur de $f(A,B)$ et de ses dérivées par rapport aux coordonnées de A. Si la surface S est analytique, les dérivées de tous les ordres de $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{P}{r^3}$, P étant la distance de α au plan tangent en M, vérifient ces conditions. Si les coordonnées de α ont seulement des dérivées finies jusqu'à l'ordre p, les dérivées de $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ jusqu'à l'ordre p vérifient bien encore ces conditions. Les hypothèses du § 19 sont donc suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Il faut enfin vérifier que la fonction $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ vérifie l'hypothèse auxiliaire relative à l'intégrale (8) c'est-à-dire que l'intégrale

$$\iint\limits_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\mu(M)\,dS$$

a des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre p, le point attiré étant sur S; il en est bien ainsi, cette intégrale n'étant autre que le potentiel W_s considéré § 20.

Le théorème énoncé est donc démontré.

§ 22. Terminons ce chapitre par la généralisation du résultat précédent.

On peut remplacer l'hypothèse faite sur $f(M)$ par l'hypothèse moins restrictive que cette fonction admette des dérivées d'ordre $p-1$, uniformément continues à la LIPSCHITZ avec un exposant ≤ 1.

On peut remplacer l'hypothèse relative à $f(M)$ par l'hypothèse analogue relative à $\dfrac{df(M)}{dn}$ (c'est-à-dire remplacer le problème de DIRICHLET par celui de NEUMANN). La méthode s'applique. Au lieu du potentiel de double couche, nous devons introduire un potentiel de simple couche. Donc $f(A)$ a ses dérivées finies jusqu'à l'ordre p.

Nos résultats s'étendent au cas d'une équation aux dérivées partielles quelconque du type elliptique, car le principe de la méthode de M. FREDHOLM reste le même, le caractère analytique du noyau reste le même également, enfin les résultats du § 20 subsistent.

Nos résultats s'étendent aussi au cas du plan.

Enfin on peut supposer que $f(A)$ dépend d'un paramètre λ. Si on connaît une limite supérieure des dérivées de $f(M)$ jusqu'à l'ordre total p par rapport à λ et aux variables dont dépend M, on peut en déduire une limite supérieure des dérivées de $f(A)$ jusqu'à l'ordre total $p-1$ par rapport à λ et aux coordonnées de A.

CHAPITRE III.

Sur une famille de fonctions harmoniques.

§ 22. Nous allons étudier dans ce chapitre une famille de fonctions harmoniques, à l'aide desquelles nous obtiendrons ensuite aisément la solution du problème B de l'introduction.

La fonction $\frac{1}{r}$, r désignant la distance du point x, y, z à l'origine, est harmonique. En l'intégrant par rapport à z, on obtient successivement les fonctions également harmoniques

$$u_0 = \log \frac{r+z}{a},$$

$$u_1 = z \log \frac{r+z}{a} - r,$$

$$u_2 = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{\varrho^2}{4}\right) \log \frac{r+z}{a} - \frac{3}{4} rz + \frac{1}{4}\varrho^2,$$

$$u_3 = \left(\frac{z^3}{6} - \frac{\varrho^2 z}{4}\right) \log \frac{r+z}{a} - \left(\frac{11}{36} z^2 - \frac{\varrho^2}{9}\right) r + \frac{1}{4}\varrho^2 z,$$

en posant

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2,$$

et a étant une constante arbitraire introduite pour rendre les formules homogènes, mais qu'on peut supposer égale à 1.

Nous allons montrer qu'en continuant ainsi, on obtient une infinité de fonctions harmoniques, dont la forme générale est

$$(13) \qquad u_p = f_p\,(\varrho, z) \log \frac{r+z}{a} + r g_{p-1}\,(\varrho, z) + h_p\,(\varrho, z),$$

en désignant par f_p, g_{p-1}, h_p des polynômes homogènes en ϱ et z de degrés égaux à leurs indices respectifs, et où ne figurent que des puissances paires de ϱ.[1]

[1] On peut observer que la partie algébrique de u_p est un polynôme homogène en z et r. C'est sous cette forme que j'avais défini u_p dans ma note citée des Comptes Rendus. Il est préférable, pour une étude plus détaillée, de séparer les termes rationnels et les autres, et de mettre en évidence ρ^2 au lieu de r^2. Il nous arrivera, pour simplifier l'écriture, de ne pas écrire les arguments des fonctions f_p, g_p, h_p, lorsque ces arguments seront ρ et z.

Supposons obtenue la fonction u_{p-1}; nous allons former u_p. Deux cas sont à distinguer suivant la parité de p.

Premier cas: p pair. Posons

$$f_p(\varrho, z) = A_0 z^p + A_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + A_p \varrho^p,$$
$$g_{p-1}(\varrho, z) = B_0 z^{p-1} + B_2 \varrho^2 z^{p-3} + \cdots + B_{p-2} \varrho^{p-2} z,$$
$$h_p(\varrho, z) = C_0 z^p + C_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + C_p \varrho^p.$$

En identifiant $\frac{\partial u_p}{\partial z}$ et

$$u_{p-1} = f_{p-1}(\varrho, z) \log \frac{r+z}{a} + r g_{p-2}(\varrho, z) + h_{p-1}(\varrho, z), \tag{14}$$

on voit d'abord, en égalant les termes non algébriques, que

$$f_{p-1}(\varrho, z) = \frac{\partial f_p(\varrho, z)}{\partial z}, \tag{15}$$

ce qui détermine $A_0, A_2, \ldots, A_{p-2}$ mais pas A_p. Il vient alors

$$\frac{\partial u_p}{\partial z} = f_{p-1} \log \frac{r+z}{a} + \frac{1}{r}\left[f_p + z g_{p-1} + (\varrho^2 + z^2) \frac{\partial g_{p-1}}{\partial z}\right] + \frac{\partial h_p}{\partial z}.$$

Il reste à identifier les termes algébriques de cette expression et ceux de l'expression (14). Identifions d'abord les termes qui ne sont pas rationnels en z, qui sont le produit de $\frac{1}{r}$ par un polynôme, il vient

$$(\varrho^2 + z^2) g_{p-2} = f_p + z g_{p-1} + (\varrho^2 + z^2) \frac{\partial g_{p-1}}{\partial z}, \tag{16}$$

et en égalant les coefficients des termes correspondants des deux membres, en commençant par ceux du plus haut degré en z, on obtient successivement B_0, $B_2, \ldots, B_{p-2}$ et A_p. Pour achever l'identification, il reste à écrire que

$$h_{p-1} = \frac{\partial h_p}{\partial z}, \tag{17}$$

ce qui détermine $C_0, C_2, \ldots, C_{p-2}$. Le coefficient C_p reste indéterminé.

Il reste à écrire que u_p est une fonction harmonique. Or nous pouvons déjà affirmer que

$$\frac{\partial \Delta u_p}{\partial z} = \Delta u_{p-1} = 0,$$

c'est-à-dire que Δu_p est indépendant de z. Or on a

$$\Delta u_p = \log \frac{r+z}{a} \Delta f_p + \varphi_{p-2}, \tag{18}$$

Δf_p et φ_{p-2} étant algébriques, homogènes, de degré $p-2$. Il en résulte que

$$\Delta f_p = 0$$

et que φ_{p-2} ne dépend pas de z. Pour le calculer nous pouvons faire $z = 0$, donc $r = \varrho$, et φ_{p-2} étant homogène et ne contenant pas a est de la forme

$$\Delta u_p = \varphi_{p-2} = K \varrho^{p-2},$$

K étant une constante.

Or K contient le coefficient indéterminé C_p. Il en résulte que la formule précédente est de la forme

$$\Delta u_p = (K' + p^2 C_p) \varrho^{p-2},$$

K' étant bien déterminé. Nous pouvons donc, p étant > 0, déterminer C_p de manière à annuler Δu_p.

Deuxième cas: p impair. Posons

$$f_p(\varrho, z) = A_0 z^p + A_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + A_{p-1} \varrho^{p-1} z,$$
$$g_{p-1}(\varrho, z) = B_0 z^{p-1} + B_2 \varrho^2 z^{p-3} + \cdots + B_{p-1} \varrho^{p-1},$$
$$h_p(\varrho, z) = C_0 z^p + C_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + C_{p-1} \varrho^{p-1} z.$$

Le calcul est analogue au précédent. Toutes les formules où les coefficients A, B, C n'interviennent pas *explicitement* restent exactes. La formule (15) détermine cette fois tous les coefficients A. La formule (16) détermine tous les coefficients B. La formule (17) détermine tous les coefficients C. Il n'y a donc cette fois aucun coefficient indéterminé lorsqu'on a écrit que u_p a pour dérivée u_{p-1}.

Il faut établir que u_p est harmonique. Comme dans le cas précédent, Δu_p ne dépend pas de z. La formule (18) montre alors que f_p est harmonique, et que φ_{p-2} est de la forme $K \varrho^{p-2}$; cette fois K est bien déterminé. Nous avons donc, quel qui soit z,

$$\Delta u_p = K \varrho^{p-2}.$$

Mais u_p ne contenant pas d'autre radical que r, il est impossible que Δu_p contienne le radical ϱ à une puissance impaire. (Pour préciser ce raisonnement, nous n'avons qu'à remarquer que u_p est holomorphe pour $r = 0$, $z > 0$, et que ϱ^{p-2} n'est pas holomorphe dans ces conditions.) La formule précédente montre donc que $K = 0$, et par suite u_p est harmonique.

Nous avons donc établi pour toutes les valeurs entières ≥ 0 *de* p *l'existence de fonctions harmoniques de la forme* (13). *Ces fonctions sont telles que*

$$\frac{\partial u_p}{\partial z} = u_{p-1}. \tag{19}$$

Les polynômes f_p *sont aussi des fonctions harmoniques.*

Il faut observer que u_p n'est bien déterminé que si l'on tient compte de la formule (19). La condition $\Delta u_p = 0$ ne détermine en effet une fonction hormonique de la forme (13) qu'à un facteur constant près et à un multiple près de f_p.

§ 24. Il est nécessaire pour la suite d'étudier particulièrement l'allure de ces fonctions pour $z = 0$. Elles se réduisent, si p est pair, à

$$u_p(x, y, 0) = A \varrho^p \log \frac{\varrho}{a} + C \varrho^p, \tag{20}$$

et si p est impair, à

$$u_p(x, y, 0) = B \varrho^p \tag{21}$$

(en supprimant les indices des symboles A_p, B_{p-1} et C_p).

Je dis que *si* p *est pair,* A *n'est pas nul, et si* p *est impair,* B *n'est pas nul.*

Cette propriété étant vérifiée pour u_0 et u_1 dont les valeurs ont été écrites plus haut, nous pouvons la supposer vraie pour u_{p-2}, de sorte que, si p est pair,

$$u_{p-2}(x, y, 0) = \alpha \varrho^{p-2} \log \frac{\varrho}{a} + \gamma \varrho^{p-2}, \qquad (\alpha \neq 0),$$

et si p est impair,

$$u_{p-2}(x, y, 0) = \beta \varrho^{p-2}, \qquad (\beta \neq 0).$$

La formule

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_p}{\partial z^2} = -u_{p-2}$$

donne, quand on annule z,

$$p^2 A = -\alpha,$$

si p est pair et

$$p^2 B = -\beta$$

si p est impair. Ces formules établissent le résultat énoncé.

§ 25. Pour les fonctions u_p, l'origine n'est pas un point singulier isolé, puisque, pour $r+z=0$, c'est-à-dire pour la partie négative de l'axe des z, ces fonctions sont singulières. Mais si nous considérons une surface fermée Σ, passant à l'origine et n'ayant aucun point commun avec la partie négative de l'axe des z, l'origine est le seul point singulier à l'intérieur de Σ ou sur cette surface.

De plus, si l'axe des z n'est pas tangent à l'origine à la surface Σ, ce que nous supposerons, on a, à l'intérieur de Σ,

$$r+z > kr, \tag{22}$$

k étant un nombre positif suffisamment petit, mais bien déterminé. Il en résulte qu'à l'intérieur de Σ, la fonction u_p et ses dérivées admettent en valeur absolue les limitations suivantes, analogues à celles des fonctions régulières d'ordre (p) au sens strict considérées § 13:

1° La fonction u_p admet en valeur absolue une limite supérieure de la forme $Kr^p \log \frac{1}{r}$, K étant un nombre convenablement déterminé.

2° Quel que soit l'entier positif i, les dérivées d'ordre i de u_p admettent en valeur absolue une limite supérieure de la forme $Kr^{p-i} \log \frac{1}{r}$, si $i \leq p$, et de la forme $\frac{K}{r^{i-p}}$ si $i > p$.

On s'en assure en observant que le coefficient de $\log \frac{r+z}{a}$ dans u_p étant un polynôme d'ordre p, la partie non algébrique ne subsiste que dans les dérivées d'ordre $\leq p$. Cette partie non algébrique étant le produit de $\log \frac{r+z}{a}$ par un polynôme *homogène* de degré $p-i$ en x, y et z, admet, à cause de l'inégalité (22), la limitation indiquée. La partie algébrique qui est rationnelle et homogène de degré $p-i$ en x, y et r et qui n'admet au dénominateur que les facteurs r et $r+z$ admet aussi, quel que soit i, la limitation indiquée.

Modifiant un peu les définitions du § 13 nous dirons qu'une fonction qui admet à l'intérieur de Σ, ainsi que ses dérivées, les limites supérieures indiquées pour u_p, est régulière d'ordre p, au sens strict (ou singulière d'ordre $-p$).[1]

Si ces limitations sont valables, dans le cas où les limites supérieures indiquées sont infinies, et si celles des limites supérieures indiquées qui sont infiniment petites peuvent être remplacées par des quantités finies, la fonction considérée sera dite régulière d'ordre p, au sens large.

Nous appliquerons aussi ces définitions à des fonctions d'un point de la surface Σ, c'est-à-dire de deux variables seulement.

Une dérivée d'ordre i d'une fonction régulière d'ordre p est une fonction régulière d'ordre $p-i$.

Toutes les dérivées des fonctions u_p sont des fonctions régulières, au sens strict, d'un ordre (positif, nul ou négatif) égal à leur degré d'homogénéité.

§ 26. *Théorème. Etant donnés deux entiers positifs ou nuls α et α' et un entier β positif, nul ou négatif, et tel que le nombre $n=\alpha+\alpha'+\beta$ soit ≥ -1, on peut, par une combinaison de fonctions u_p en nombre fini et de leurs dérivées, former une fonction harmonique, régulière d'ordre n au sens strict, et se réduisant à $x^\alpha y^{\alpha'} \varrho^\beta$ pour $z=0$.*

En posant $x+iy=\xi$, $x-iy=\eta$, on est ramené à démontrer le même théorème pour $\xi^\alpha \eta^{\alpha'} \varrho^\beta$, les conditions imposées aux exposants α, α' et β restant les mêmes. En remplaçant $\xi\eta$ par ϱ^2 un nombre suffisant de fois, on peut annuler un des coefficients α ou α'. Supposons que ce soit α'. On est donc ramené à $\xi^\alpha \varrho^\beta$ avec $\alpha \geq 0$, $\alpha+\beta \geq -1$.

Distinguons maintenant plusieurs cas.

Premier cas. β impair. Alors le nombre $p=\beta+2\alpha$ ne peut avoir la valeur -1 que pour $\alpha=0$, $\beta=-1$, et dans ce cas la solution est donnée par la fonction $\frac{1}{r}$. En dehors de ce cas p est un nombre positif impair, et il résulte de la formule (21) que la solution est donnée, à un facteur constant près, par la fonction $\frac{\partial^\alpha u_p}{\partial \eta^\alpha}$.

Deuxième cas. β pair ≥ 0. Alors $p=\beta+2\alpha$ est un nombre pair ≥ 0. La fonction f_p se réduisant dans ce cas pour $z=0$ à $A\varrho^p$, la solution est donnée, à un facteur constant près, par la fonction $\frac{\partial^\alpha f_p}{\partial \eta^\alpha}$.

---

[1] Ces définitions diffèrent de celles du chapitre I, d'une part parce que nous avons remplacé la notion de fonction singulière d'ordre (h) par la notion plus précise de fonction singulière d'ordre h, d'autre part parce que la condition auxiliaire relative aux intégrales (1) ne joue plus aucun rôle, enfin parce que le point singulier est sur la frontière de la région dans laquelle les fonctions sont régulières, sauf en ce point.

Troisième cas. β *pair* < 0. Alors $p = \beta + 2\alpha$ est un nombre pair positif. En posant $p = 2p'$ la formule (20) donne

$$u_p(x, y, 0) = \frac{A}{2} \xi^{p'} \eta^{p'} \left(\log \frac{\xi}{a} + \log \frac{\eta}{a}\right) + C \xi^{p'} \eta^{p'}.$$

Observant que $\alpha > p'$, on voit que la solution est donnée, à un facteur constant près, par $\frac{\partial^\alpha u_p}{\partial \eta^\alpha}$.

Le théorème énoncé est donc établi dans tous les cas.

Théorème. Etant donnés trois entiers positifs ou nuls α, α' et β dont le dernier est pair, on peut, par une combinaison de fonctions u_p en nombre fini et de leurs dérivées, former une fonction qui soit harmonique, régulière d'ordre $n = \alpha + \alpha' + \beta$ au sens strict, et se réduise à $x^\alpha y^{\alpha'} \varrho^\beta \log \varrho$ pour $z = 0$.

Par le même changement de variables que précédemment, on est ramené à démontrer le même théorème pour $\xi^\alpha \varrho^\beta \log \varrho$. En posant toujours $p = \beta + 2\alpha$, la solution est donnée par une combinaison linéaire convenable des fonctions $\frac{\partial^\alpha u_p}{\partial \eta^\alpha}$ et $\frac{\partial^\alpha f_p}{\partial \eta^\alpha}$.

§ 27. Nous allons appliquer les résultats précédents à un problème de développement en série.

Considérons une surface S, passant à l'origine des coordonnées et qui soit tangente au plan $z = 0$. Nous la supposerons d'abord pour simplifier analytique au voisinage de l'origine, et ne coupant pas la partie négative de l'axe des z, et nous prendrons comme axes des x et des y les directions principales de cette surface. On a alors sur S au voisinage de l'origine

$$z = \frac{1}{2}(a_1 x^2 + a_2 y^2) + \frac{1}{6}(b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3 y^3) + \cdots \tag{23}$$

On sait le rôle que joue dans la théorie des fonctions harmoniques la fonction, déjà considérée dans le chapitre précédent,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{z}{r^3},$$

la dérivée $\frac{d}{dn}$ étant relative à l'origine et comptée positivement vers l'intérieur de S. Quand le point A, de coordonnées x, y, z vient sur S, cette fonction se réduit à une fonction de x et y singulière d'ordre 1 seulement. *On peut donc penser qu'il existe une fonction singulière d'ordre 1 seulement, harmonique, et égale sur S à $\frac{z}{r^3}$. Nous allons montrer qu'elle existe en effet, et la représenter par un développement en série de fonctions régulières d'ordres croissants.*

La fonction $\frac{z}{r^3}$ a pour valeur principale sur S au voisinage de l'origine

$$\frac{1}{2}\frac{a_1 x^2 + a_2 y^2}{\varrho^3}.$$

D'après le § 26, on peut former une fonction harmonique, régulière d'ordre -1 à l'intérieur de S, égale à la précédente pour $z = 0$. Cette fonction est

$$U_{-1} = \frac{a_1 + a_2}{4}\frac{1}{r} + \frac{a_1 - a_2}{4}\frac{x^2 - y^2}{r(r+z)^2}.$$

Posons

$$R_{-1} = \frac{z}{r^3} - U_{-1}.$$

Cetta fonction se réduit sur S à une fonction de x et y régulière d'ordre 0. Elle diffère infiniment peu sur S et à l'origine, de la fonction

$$\frac{a_1^2 - a_2^2}{8}\frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{8}\frac{(x^2 - y^2)^2}{\varrho^4} + \frac{1}{6}\frac{b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3}{\varrho^3}.$$

D'après le § 26, on peut former une fonction harmonique, élémentaire, régulière d'ordre 0 à l'intérieur de S, égale à la précédente pour $z = 0$. Soit U_0 cette fonction.[1] Posons

$$R_0 = R_{-1} - U_0 = \frac{z}{r^3} U_{-1} - U_0.$$

Cette fois R_0 sera infiniment petit sur S au voisinage de l'origine. On formera sa valeur principale,[2] et on cherchera à former une fonction U_1 qui n'en diffère que par des infiniment petits d'ordre supérieur au premier. On continuera de même indéfiniment.

[1] Cette fonction est algébrique, car la partie non algébrique, si elle existait, serait nécessairement, étant donnée la forme des fonctions u_p, de la forme $\alpha \log (r+z)$, α étant une constante, et deviendrait infinie. Or elle doit prendre sur S der valeurs finies.

[2] Nous devons entendre ici par valeur principale d'une expression infiniment petite une expression plus simple qui n'en diffère que par des infiniment petits d'un ordre supérieur au moins d'une unité. Ainsi nous ne pouvons pas négliger x devant $x \log \rho$.

Je dis que toutes les fonctions U_p ainsi définies sont des fonctions régulières d'ordre p, au sens strict, formées par des combinaisons linéaires des fonctions u_p étudiées § 28 et de leurs dérivées en nombre fini. Je dis de plus que la différence

$$R_p = \frac{z}{r^3} - (U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p)$$

se réduit sur la surface S à une fonction de x et y régulière d'ordre $p+1$ au sens strict.

Comme il en est bien ainsi pour $p = -1$, nous pouvons supposer que ce soit vrai pour $p-1$. La fonction R_{p-1} se réduit donc au voisinage de l'origine sur la surface S à une fonction de x et y très petite comme $r^p \log \frac{1}{r}$. De plus elle est la somme de $\frac{z}{r^3}$ et d'un nombre fini de fonctions u_p et de leurs dérivées. Elle est alors de la forme

$$P(x, y, z) \log \frac{r+z}{a} + \frac{P_1(x, y, z, r)}{r^\alpha (r+z)^\beta},$$

P et P_1 étant des polynômes, car dans toutes les fonctions u_p et dans leurs dérivées, le coefficient de $\log \frac{r+z}{a}$ est un polynôme en x, y et z et la partie algébrique est rationnelle en x, y et r, et ne peut contenir au dénominateur d'autres facteurs que r et $r+z$. Remplaçons maintenant z par sa valeur (23). Etant donné que l'expression précédente est de l'ordre de grandeur de $r^p \log \frac{1}{r}$, sa valeur principale (au sens indiqué ci-dessus, en note) est

$$P_2(x, y) \log \frac{r+z}{a} + \frac{P_3(x, y, r)}{r^\alpha (r+z)^\beta},$$

P_2 et P_3 étant des polynômes homogènes de degrés respectifs p et $p+\alpha+\beta$. On peut encore l'écrire,

$$P_2(x, y) \log \frac{\varrho}{a} + \frac{P_3(x, y, \varrho)}{\varrho^{\alpha+\beta}}, \tag{24}$$

en négligeant des termes de l'ordre de grandeur de ϱ^{p+1}.

Il reste alors, d'après le § 26, une fonction harmonique, régulière d'ordre p au sens strict, égale à l'expression précédente pour $z = 0$, formée avec les fonctions u_p et f_p et leurs dérivées en nombre fini. Soit U_p cette fonction.

Considérons la différence

$$R_p = R_{p-1} - U_p = \frac{z}{r^3}(U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p),$$

et étudions ses valeurs sur la surface S; elle peut s'écrire

$$R_{p-1} - U_p(x, y, 0) - z \frac{\partial}{\partial \zeta} U_p(x, y, \zeta),$$

où ζ est compris entre 0 et z. Or $R_{p-1} - U_p(x, y, 0)$, par la manière même dont la fonction U_p a été formée, est au plus de l'ordre de grandeur de $\varrho^{p+1} \log \frac{1}{\varrho}$. Il en est de même de l'autre terme, puisque z est de l'ordre de ϱ^2 et que $\frac{\partial U_p}{\partial z}$ est de l'ordre de $\varrho^{p-1} \log \frac{1}{\varrho}$ au plus. Donc R_p est de l'ordre de grandeur de $\varrho^{p+1} \log \frac{1}{\varrho}$ ou très petit par rapport à cette expression.

D'autre part, en remplaçant z par son développement (23) dans

$$R_p = \frac{z}{r^3} - (U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p),$$

cette fonction se présente sous la forme d'une série d'expressions de la forme (24), homogènes et de degrés croissants. La première de ces expressions doit être de degré $p + 1$, d'après ce que nous savons sur l'ordre de grandeur de R_p. En dérivant R_p sous cette forme, on obtient aisément des limites supérieures de ses dérivées, et on constate que R_p se réduit sur la surface S à une fonction de x et y régulière d'ordre $p + 1$ au sens strict. En particulier les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre p sont infiniment petites à l'origine.

Ces valeurs de R_p sur la surface S étant finies, il existe une fonction harmonique R_p égale à R_p sur S. La fonction

$$\varphi(A) = U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p + R_p$$

est, par la manière même dont R_p est défini, harmonique, égale sur S à $\frac{z}{r^3}$, et indépendante de p.

Il reste à montrer qu'elle est bien singulière d'ordre 1, c'est-à-dire que ses dérivées d'ordre i sont infinies au plus comme $\frac{1}{r^{i+1}}$. Cela résulte de la formule (25) écrite pour $p = i + 1$, où les fonctions U sont singulières d'ordre ≤ 1, tandis que R_p, fonction harmonique égale sur S à R_p, c'est-à-dire à une fonction de

x et y ayant ses dérivées finies jusqu'à l'ordre p, a, d'après le § 21, des dérivées finies jusqu'à l'ordre $p-1=i$.

Comme U_p a aussi ses dérivées jusqu'à l'ordre i finies et continues, on voit que, pour avoir une expression asymptotique de $\varphi(A)$ telle que l'erreur ait ses dérivées jusqu'à l'ordre i finies et continues, il suffit de former la somme

$$U_{-1}+U_0+U_1+\cdots+U_i. \tag{26}$$

Cette somme, d'après la forme des fonctions u_p, comprend une partie non algébrique qui est le produit de $\log\frac{r+z}{a}$ par un polynôme en x, y et z, et une partie algébrique, qui se compose uniquement de termes rationnels en x, y, z et r, les dénominateurs ne pouvant pas contenir d'autres facteurs que r et $r+z$. On peut évidemment, en la calculant négliger tous les termes holomorphes qui figurent dans les fonctions U, et par suite négliger les polynômes h_p qui figurent dans la définition des fonctions u_p et négliger aussi les polynômes f_p introduits dans la démonstration des théorèmes du § 26.

Nous avons jusqu'ici supposé la surface S analytique au voisinage de l'origine, en d'autres termes que z est une fonction holomorphe de x et y. Mais, pour que le résultat précédent subsiste, il suffit que z admette les dérivées jusqu'à l'ordre $i+3$ finies et continues, et que les dérivées d'ordre $i+3$ soient continues à la LIPSCHITZ à l'origine, c'est-à-dire telles que, en désignant par Dz une quelconque de ces dérivées, on ait

$$|Dz|<K\varrho^{\alpha}, \qquad (0<\alpha<1).$$

§ 28. Nous allons appliquer les mêmes principes au problème suivant: *former, par un développement en série analogue à celui qui vient d'être obtenu, une fonction $\psi(A)$, harmonique, singulière d'ordre* 0, *ayant sur la surface S la même dérivée normale que $\frac{1}{r}$, à une constante près.*

Si on représente le développement de z par

$$z=z_2+z_3+\cdots+z_p+\cdots$$

z_p étant un polynôme homogène de degré p en x et y, la fonction considérée § 27 était

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r}=\frac{z}{r^3}=\frac{z_2+z_3+\cdots+z_p+\cdots}{r^3}$$

La dérivée normale que nous considérons maintenant est

$$(27)\qquad \frac{d}{dn_A}\frac{1}{r}=\frac{\frac{x}{r^3}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{r^3}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{r^3}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

$$=\frac{z_2+2z_3+\cdots+(p-1)z_p+\cdots}{r^3\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}.$$

Le principe du développement en série étant le même que celui du § 27, nous n'avons qu'à insister sur la différence essentielle qui consiste dans le remplacement du problème traité § 26 par le suivant:

étant donnée une fonction $w(x, y)$, somme de termes de la forme

$$b\,x^\alpha y^{\alpha'} \varrho^\beta \log\frac{r+z}{a}+c\,x^\gamma y^{\gamma'} \varrho^\delta,$$

où $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ sont des entiers positifs ou nuls, β un entier pair positif ou nul, δ un entier quelconque, et où

$$\alpha+\alpha'+\beta=\gamma+\gamma'+\delta=n,$$

former une fonction harmonique, régulière d'ordre $n+1$, et dont la dérivée normale sur S diffère de $w(x, y)$ par des termes qui sont au plus de l'ordre de grandeur de $\varrho^{n+1}\log\frac{1}{\varrho}$.

Nous savons, par le § 26, trouver un fonction harmonique, régulière d'ordre n, égale à $w(x, y)$ pour $z=0$. Soit $v(x, y, z)$ cette fonction. Comme elle est fonction linéaire des fonctions u_p et f_p et de leurs dérivées en nombre fini, nous pouvons remplacer dans son expression chaque fonction u_p ou f_p par la fonction ayant un indice plus élevé d'une unité, et nous obtenons une fonction $V(x, y, z)$ harmonique, régulière d'ordre $n+1$, et telle que

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}=v(x, y, z),$$

de sorte que

$$\left[\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}\right]_{z=0}=w(x, y).$$

La dérivée normale de V sur S peut alors s'écrire

$$\frac{dV}{dn_A}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}-1\right]-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Comme $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{\partial V}{\partial z}$ sont au plus de l'ordre de grandeur de r^n *log* $\frac{1}{r}$, on voit qu'elle diffère de $\frac{\partial V}{\partial z} = v$ par des termes qui sont au plus de l'ordre de grandeur de $r^{n+1} \log \frac{1}{r}$, c'est-à-dire de $\varrho^{n+1} \log \frac{1}{\varrho}$. D'autre part la fonction $v(x,y,z)$ diffère elle même de $w(x,y)$ par l'expression

$$z \frac{\partial v(x,y,\zeta)}{\partial \zeta}$$

(ζ étant compris entre o et z), qui est aussi du même ordre de grandeur. Donc la fonction V répond à la question.

Nous pouvons alors former $\psi(A)$ par son développement en série. La partie principale de l'expression (27) étant

$$\frac{1}{2} \frac{a_1 x^2 + a_2 y^2}{r^3},$$

si nous la prenons pour fonction w, nous obtenons, par la méthode qui vient d'être indiquée, la fonction

$$V_0 = \frac{a_1 + a_2}{4} \log \frac{r+z}{a} - \frac{a_1 - a_2}{8} \frac{x^2 - y^2}{(r+z)^2},$$

qui est harmonique, singulière d'ordre o, et telle que

$$\frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{r} - V_0\right)$$

se réduise sur S à une fonction de x et y singulière d'ordre o. Prenant la valeur principale de cette fonction comme fonction w on formera V_1, et ainsi de suite.

Posons

$$\frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{r} - V_0 - V_1 - \cdots - V_p\right) = R_p.$$

La fonction R_p, qui est bien définie sur la surface S, est, par la formation même des fonctions V une fonction de x et y régulière d'ordre p. Il existe donc une fonction R_p harmonique à l'intérieur de S et telle que sur la surface on ait

$$\frac{dR_p}{dn_A} = R_p + \text{const.}$$

Cette fonction est définie à une constante près. R_p ayant ses dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $p-1$, il en est de même de R_p, d'après le § 22. La formule

$$R_p = V_{p+1} + R_{p+1} + \text{const.}$$

montre alors que R_p a même des dérivées d'ordre p finies et continues.

Il est alors évident que la fonction

$$\psi(A) = V_0 + V_1 + \cdots + V_p + R_p$$

vérifie bien les conditions imposées à $\psi(A)$, et que, pour en avoir une expression asymptotique telle que l'erreur reste finie ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p, il suffit de former la somme

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_p.$$

Les remarques faites sur l'expression (26) s'appliquent à cette somme.

CHAPITRE IV.

La fonction de Green pour l'espace.

§ 29. La fonction de GREEN g_B^A relative à une surface fermée S et aux points A et B est définie par les conditions qu'elle s'annule quand A est sur S et que la différence $g_B^A - \frac{1}{r}$ (r désignant la distance des points A et B), soit à l'intérieur de S une fonction harmonique de A. On sait que c'est une fonction symétrique des points A et B et que son introduction permet de résoudre le problème de DIRICHLET par la formule

$$f(A) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\, dS, \tag{28}$$

dS étant l'élément de S décrit par le point M et la normale étant comptée positivement vers l'intérieur.

Nous allons exprimer $\frac{dg_M^A}{dn}$ à l'aide de la fonction $\varphi(A)$ étudiée dans le chapitre précédent (§ 27). Cette fonction dépendait non seulement de (A), mais du point M de la surface pris comme origine de coordonnées. Nous devons donc maintenant la répresenter par $\varphi(A, M)$. Elle n'a été définie que si la normale extérieure à S en M peut être prolongée jusqu'à l'infini sans rencontrer à nouveau la surface S. Mais cela ne diminue en rien la généralité des résultats que nous obtiendrons dans ce chapitre, car on sait, d'après M. HADAMARD, que la singularité de g_B^A dans le voisinage d'un point M ne dépend que de la partie S voisine de M. Il suffit donc, si la condition indiquée n'est pas vérifiée, de remplacer S par une autre surface, vérifiant cette condition, et coïncidant avec S dans le vosinage du point M.

Considérons l'intégrale

$$\iint_S \varphi(A,M) f(M) dS.$$

La fonction $\varphi(A,M)$ étant singulière d'ordre 1 seulement, cette intégrale est absolument et uniformément convergente, et par suite continue quand A vient sur la surface, comme il arrive pour un potentiel de simple couche.

Il en résulte que l'intégrale

$$\iint_S \left[\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho} - \varphi(A,M)\right] dS,$$

où ϱ désigne la distance AM, représente une fonction hormonique de A, égale quand A vient en un point α de S à

$$2\pi f(\alpha) + \iint_S \left[\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho} - \varphi(\alpha,M)\right] dS = 2\pi f(\alpha).$$

En comparant la solution du problème de DIRICHLET qui résulte de cette remarque à celle qui est donnée par la formule (28), il vient

$$\frac{dg_M^A}{dn} = 2\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn} - 2\varphi(A,M). \tag{29}$$

Cette formule ramène l'étude asymptotique de $\frac{dg_M^A}{dn}$ à celle de $\varphi(A,M)$, qui a fait l'objet du § 27. Nous voyons en particulier que, avec une erreur finie, $\frac{dg_M^A}{dn}$ peut être représenté par

$$2\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn} - 2U_{-1} = \frac{2z}{\varrho^3} - \frac{a_1+a_2}{2}\frac{1}{\varrho} - \frac{a_1-a_2}{2}\frac{x^2-y^2}{\varrho(\varrho+z)^2},$$

l'axe des z étant normal à S en M, les axes des x et y étant tangents aux lignes de courbure, a_1 et a_2 désignant les courbures principales de la surface S en M. (ϱ remplace la lettre r des formules du § 27, car nous appelons maintenant ϱ la distance AM.)

§ 30. La fonction $\frac{dg_M^A}{dn}$ étant connue, g_B^A est donné par la formule

$$g_B^A = \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{dg_M^A}{dn}\frac{1}{\varrho'}dS,$$

ϱ' désignant la distance BM. Elle s'écrit d'après (29)

$$g_B^A = \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn}\frac{1}{\varrho'}dS + \frac{1}{2\pi}\iint_S \varphi(A,M)\frac{1}{\varrho'}dS,$$

ou encore

$$g_B^A = \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho\varrho'}dS + \frac{1}{2\pi}\iint_S \varphi(A,M)\frac{1}{\varrho'}dS, \tag{30}$$

puisque, d'après la formule de GREEN,

$$\iint_S \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho'}\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho}\right)dS = 0.$$

On est donc ramené à l'étude d'un potentiel de simple couche de densité $\varphi(A,M)$. Si on remplace $\varphi(A,M)$ par sa valeur asymptotique U_{-1}, l'erreur faite sur $\varphi(A,M)$ est finie, et il en est de même, d'après le § 18, de l'erreur faite sur g_B^A.

Que pouvons-nous dire maintenant de l'erreur faite quand on remplace $\varphi(A,M)$ par la valeur asymptotique plus précise

$$\varphi(A,M) - R_p = U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p,$$

obtenue § 27? On voit aisément que ce qui a été dit § 27 sur l'ordre de grandeur des dérivées des fonctions U_p et R_p par rapport aux coordonnées de A s'applique aux dérivées par rapport aux paramètres dont dépend M sur la surface S. En effet une dérivation par rapport à ces paramètres introduit deux sortes de termes; d'une part ceux qui proviennent de ce que les coefficients du développement (23) de z en série de TAYLOR dépendent du point M; ces termes, moyennant des hypothèses convenables sur la régularité de la surface S, ne peuvent avoir un ordre de singularité plus élevé que ceux dont ils proviennent. D'autre part nous avons des termes provenant de ce que les axes de coordonnées, et par conséquent les quantités x, y, z et r qui interviennent dans l'expression des fonctions u_p^{r} et par suite des fonctions U_p, dépendent du point M et du plan tangent en M; ces termes peuvent être d'un ordre de singularité supérieur d'une unité à l'ordre des termes donc ils proviennent. Donc, chaque dérivation augmentant au plus l'ordre de singularité d'une unité, U_{p+1} et R_p ont leurs dérivées d'ordre p finies, et leurs dérivées d'ordre $p+1$ inférieures en module à $K \log \frac{1}{\varrho}$, K étant indépendant des points A et M.

Considérons une dérivée d'ordre p de R_p; désignons la par $D R_p(A,M)$. Du fait que ses dérivées premières soient inférieures en module à $\log \frac{1}{\varrho}$ résulte aisément que

$$|D R_p(A,M) - D R_p(A,M_1)| < K d \log \frac{1}{d} < K d^{\alpha},$$

d désignant la distance MM_1, α un exposant arbitraire entre 0 et 1, et K un nombre indépendant des points A, M et M_1. Les dérivées d'ordre p de R_p, tant par rapport aux coordonnées de A que par rapport aux paramètres dont dépend M sont donc uniformément continues à la Lipschitz au sens du § 15.

Il résulte alors des § 18, 19, et de la remarque finale du § 20, que l'erreur

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S R_p \frac{1}{\varrho'} dS$$

faite sur g_B^A, a ses dérivées d'ordres $p+1$ tant par rapport aux coordonnées de A que par rapport à celles de B, finies et continues.

Nous avons ainsi complètement résolu le problème B de l'introduction pour la fonction de Green.

§ 31. On peut se demander s'il est possible de trouver des expressions asymptotiques en termes finis des intégrales qui figurent dans les expressions obtenues.

Cette question peut d'ailleurs être envisagée de deux manières différentes.

1° Nous pouvons considérer un point P de S et chercher l'expression asymptotique de g_B^A au voisinage de P. Une pareille expression ne peut être obtenue en *termes finis* que pour des surfaces particulières. En effet une expression en termes finis ne peut contenir qu'un nombre fini de paramètres caractérisant la forme de la surface S au voisinage de P. Il y aura donc nécessairement une surface S_1 distincte de S pour laquelle elle ait la même valeur. Prenons B voisin de P, situé sur une des surfaces S et S_1 et intérieure à l'autre, et faisons tendre A vers B. La valeur de g_B^A relative à une de ces surfaces est nulle tandis que la valeur relative à l'autre surface devient infinie. La même expression asymptotique ne peut donc convenir à ces deux fonctions.

Une expression asymptotique de la nature indiquée peut seulement être obtenue si les distances des points A et B entre eux et à la surface S ne sont pas simultanément très petites par rapport à leur distance au point P.

2° On peut supposer que le point P dépende d'au moins un des points A et B; l'expression asymptotique peut alors être obtenue en termes finis. Mais il faut observer que le fait que P dépende d'un des points A et B rend une telle expression très peu apte à être utilisés dans les calculs, et que ce ne sera une fonction harmonique que d'un des points A et B au plus.

Il semble donc préférable de s'en tenir à l'expression asymptotique obtenue sous forme d'intégrale définie, qui est une fonction harmonique des points A et B et semble bien être dans la nature des choses.

§ 32. A défaut d'une expression asymptotique de g_B^A en termes finis, on peut donner une limite supérieure des dérivées de cette fonction. Il est facile d'en obtenir contenant à la fois r et les distances des points A et B à la surface S. Ce qui est surtout intéressant est d'en avoir une qui ne dépende que de r. Dans le plan, la représentation conforme donne aisément ce résultat. Dans l'espace il faut avoir recours à des considérations différentes.

Nous allons démontrer que, $D g_B^A$ *étant une dérivée d'ordre p de la fonction de* GREEN, *on a*

$$\left|D g_B^A\right| < \frac{K}{r^{p+1}}, \tag{31}$$

K étant un nombre indépendant des points A et B.

Bien entendu, si A et B sont voisins d'un même point de la surface, il faut que la surface soit *suffisamment régulière* au voisinage de ce point. Il suffit certainement que l'une des coordonnées d'un point de la surface ait par rapport aux autres des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $p+2$.

Démontrons d'abord le résultat énoncé lorsque B est en un point M de la surface. g_B^A étant fonction harmonique de B et s'annulant quand B est sur la surface, la valeur de $D g_B^A$ en M est fonction linéaire de $\dfrac{d g_M^A}{dn}$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ au plus. D'après la formule (29) et ce que nous savons sur $\varphi(A, M)$, la limitation indiquée est exacte en M, et l'on a

$$\left|D g_M^A\right| < \frac{K}{\varrho^{p+1}},$$

ou encore

$$(32) \qquad \left|D h_M^A\right| < \frac{K}{\varrho^{p+1}},$$

en posant $h_B^A = g_B^A - \dfrac{1}{r}$.

Considérons maintenant $D h_B^A$ comme une fonction harmonique de B. Son module maximum est atteint sur la surface, et la formule (32) donne

$$\left|D h_B^A\right| < \frac{K}{d^{p+1}},$$

d étant la distance de A à la surface. Si alors d n'est pas petit par rapport à r, si par exemple $r < 10\,d$, on a bien

$$\left|D g_B^A\right| < \left|D h_B^A\right| + \left|D \frac{1}{r}\right| < \frac{K}{r^{p+1}}.$$

La formule (31) s'établit de même si la distance d_1 de B à la surface S n'est pas très petite par rapport à r.

Il reste à traiter le cas ou d et d_1 sont très petits par rapport à r. La limitation cherchée étant exacte pour les dérivées de $\dfrac{1}{r}$ il suffit de l'établir pour les dérivées de

$$h_B^A = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{d g_M^A}{dn} \frac{1}{\varrho'} dS.$$

Si A et B étaient sur la surface cette intégrale serait analogue aux intégrales singulières étudiées § 14 et 15. Or dans le cas général les mêmes procédés s'appliquent sans modification essentielle. On se rappelle en effet que ces procédés consistaient dans une transformation de l'intégrale étudiée en une somme de plusieurs termes. Pour les uns, la dérivée que l'on voulait former était finie, car ces termes étaient des intégrales du type (1). Pour les autres on pouvait former la dérivée en question par la règle de LEIBNIZ et l'intégrale obtenue étant absolument et uniformément convergente, les lemmes du § 12 fournissaient la limitation cherchée.

Or ici, le même procédé de décomposition de l'intégrale en plusieurs termes s'applique, les rôles des points singuliers dans le champ d'intégration étant joués par les pieds a et b des perpendiculaires abaissées de A et B sur S.

Pour les termes de la première catégorie, le même procédé s'applique encore. En effet l'hypothèse relative aux intégrales (1) est bien vérifiée. Elle revient à dire que le potentiel

$$\iint_S \frac{f(M)}{\varrho'} dS$$

et l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\, dS$$

qui n'est autre que la fonction harmonique égale à $f(A)$ sur le contour, ont des dérivées finies jusqu'à l'ordre p à l'intérieur de S si $f(M)$ a des dérivées finies jusqu'à l'ordre $p+1$. Il en est bien ainsi d'après le chapitre II.

Quant aux dérivées calculées par la règle de LEIBNIZ, si elles sont absolument convergentes quand A et B sont en a et b, elles le sont *a fortiori* dans le cas général. On ne peut en effet que les augmenter en remplaçant respectivement les quantités ϱ et ϱ' qui figurent aux dénominateurs des fonctions intégrées par les distances de M aux droites Aa et Bb, ou, ce qui revient au même au point de vue de l'ordre de grandeur, par les distances de M à a et b. La limite supérieure fournie par les lemmes du § 12 est alors de la forme

$$\frac{K}{r_1^{p+1}},$$

r_1 désignant la distance ab. Mais d et d_1 étant très petits par rapport à r, $\frac{r_1}{r}$ est très voisin de 1, et on obtient une limite de la forme

$$\frac{K}{r^{p+1}}.$$

La formule (31) est donc établie dans tous les cas. Observons que de cette formule, si on l'avait établie par un procédé différent de celui employé ici, il serait aisé de déduire une nouvelle démonstration très simple du théorème du § 21. Mais ici cela constituerait un cercle vicieux.

CHAPITRE V.

La fonction de Neumann pour l'espace.

§ 33. La fonction de NEUMANN Y_B^A relative à la surface S et aux points A et B est définie par les conditions que, si on la considère comme fonction de A, la différence $Y_B^A - \frac{1}{r}$ soit harmonique à l'intérieur de S, que sa dérivée normale sur la surface ait une valeur constante (nécessairement égale à $\frac{4\pi}{S}$, la quantité désignée par S étant l'aire de S), enfin que sa valeur moyenne sur la surface soit nulle. On sait que c'est une fonction symétrique des points A et B et que son introduction permet de résoudre le problème de NEUMANN par la formule

$$f(A) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S Y_M^A \frac{d f(M)}{d n} d S, \tag{33}$$

lorsque les valeurs de $\frac{d f(M)}{d n}$ données sur la surface vérifient la condition nécessaire

$$\iint\limits_S \frac{d f(M)}{d n} d S = 0. \tag{34}$$

Nous allons exprimer Y_M^A à l'aide de la fonction $\psi(A)$ définie et étudiée dans le chapitre précédent (§ 28). D'après une remarque déjà faite pour la fonction de GREEN, cela ne restreint en rien la généralité des résultats que nous obtiendrons de supposer que la surface S vérifie les hypothèses faites dans le chapitre précédent pour les définitions des fonctions $\varphi(A)$ et $\psi(A)$. Nous n'avons défini $\psi(A)$ qu'à une constante près, nous définirons cette constante par la condition que la fonction $\psi(A) - \frac{1}{\varrho}$, ϱ étant la distance de A au point M de la surface pris comme origine pour la définition de $\psi(A)$, ait une valeur moyenne nulle quand A décrit la surface S, M restant fixe. Enfin comme $\psi(A)$ dépend du choix du point M, nous représenterons cette fonction par $\psi(A, M)$.

Considérons l'intégrale

$$\iint\limits_S \psi(A,M)\frac{df(M)}{dn}dS. \tag{35}$$

La fonction $\psi(A,M)$ étant singulière d'ordre 0, ses dérivées par rapport aux coordonnées de A sont singulières d'ordre 1, et par suite infinies au plus comme $\frac{1}{\varrho}$. Donc la fonction répresentée par l'intégrale (35) et ses dérivées premières sont continues quand A traverse la surface S, comme il arrive pour un potentiel de simple couche (mais non pas pour ses dérivées).

Considérons alors l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{\varrho}-\psi(A,M)\right]\frac{df(M)}{dn}dS.$$

Elle représente une fonction harmonique du point A. Sa dérivée normale, quand A vient sur le contour, prend la valeur $\frac{df(M)}{dn}$. Enfin sa valeur moyenne sur la surface S est nulle. Cette fonction est donc égale à $f(A)$.

En comparant cette expression à celle de $f(A)$ qui résulte de la formule (33), il vient:

$$Y_M^A = \frac{2}{\varrho} - 2\psi(A,M) + \psi_1(A).$$

La fonction $\psi_1(A)$ est une fonction harmonique; elle ne peut devenir infinie qu'en M, et comme elle ne dépend pas de M, elle est finie à l'intérieur S et sur S; il en est de même de ses dérivées premières. Sa dérivée normale sur la surface est nulle et enfin sa valeur moyenne sur la surface est également nulle. Elle est donc nulle, et on a

$$Y_M^A = \frac{2}{\varrho} - 2\psi(A,M). \tag{36}$$

Cette formule ramène l'étude asymptotique de Y_M^A à celle de $\psi(A,M)$, qui a fait l'objet du § 28. Ainsi nous voyons qu'avec une erreur finie, Y_M^A peut être représenté par

$$\frac{2}{\varrho}-2V_0=\frac{2}{\varrho}-\frac{a_1+a_2}{2}\log(\varrho+z)+\frac{a_1-a_2}{4}\frac{x^2-y^2}{(\varrho+z)^2}. \tag{37}$$

Si on veut obtenir une expression asymptotique telle que l'erreur ait ses dérivées du premier ordre finies, il faut d'après les résultats du § 28, former

$$\frac{2}{\varrho}-V_0-2V,$$

et par suite calculer v_1. Mais nous pouvons, dans ce calcul, négliger les termes algébriques. En effet la partie algébrique de V_1 est une fraction rationnelle homogène du premier degré en x, y, z et ϱ dont le dénominateur est de la forme $\varrho^\alpha(\varrho+z)^\beta$, α et β étant des exposants convenables. Ses dérivées sont alors de la même forme, mais homogènes et de degré 0; elles sont donc finies. Nous n'avons donc à calculer dans V_1 que le coefficient de $\log(\varrho+z)$, qui est nécessairement, d'après ce que nous savons sur les fonctions V, un polynôme homogène du premier degré en x, y, z.

D'après le § 28, il faut donc calculer la valeur principale de

$$\frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{\varrho}-V_0\right)$$

quand A est voisin de M. En faisant le calcul, on trouve

$$\frac{a_1 a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\frac{(x^2-y^2)(a_1x^2+a_2y^2)}{\varrho^4}+2\frac{z_3}{\varrho^3}, \tag{38}$$

z_3 désignant l'ensemble des termes du troisième degré dans le développement de z en série de Taylor.

Il faut maintenant, à chacun des termes de cette expression, faire correspondre une fonction harmonique régulière d'ordre 1, formée à l'aide des fonctions u_p et f_p et dont la dérivée normale ait pour valeur principale le terme considéré. A 1 correspond ainsi la fonction harmonique z. A $\frac{x^4}{\varrho^4}$ correspond la fonction

$$-4\frac{\partial^4 u_5}{\partial x^4}-6\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}-\frac{3}{2}u_1+\frac{9}{8}f_1,$$

dans laquelle la partie non algébrique

$$\left(-4\frac{\partial^4 f_5}{\partial x^4}-6\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}-\frac{3}{2}f_1\right)\log(\varrho+z)$$

est nulle, comme on le vérifie aisément, les valeurs de f_1, f_3, f_5 étant

$$f_1 = z,$$

$$f_3 = \frac{z^3}{6} - \frac{z}{4}(x^2 + y^2),$$

$$f_5 = \frac{z^5}{120} - \frac{z^3}{24}(x^2 + y^2) + \frac{z}{64}(z^2 + y^2)^2.$$

De même à $\frac{y^4}{\varrho^4}$ correspond une fonction harmonique algébrique, et il est de même pour $\frac{x^2 y^2}{\varrho^4}$ qui a une même valeur principale que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{y^4}{\varrho^4}\right)$. Nous pouvons donc négliger tous ces termes, puisque nous ne cherchons que la partie non algébrique de V_1 et l'expression (38) se réduit à

$$2\frac{z_3}{\varrho^3} = \frac{1}{3}\frac{b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3 y^3}{\varrho^3}.$$

La fonction harmonique, dont la dérivée normale est équivalente à cette expression est

$$(3 b_2 - b_0)\frac{\partial^3 u_4}{\partial x^3} + (2 b_2 - b_0)\frac{\partial u_2}{\partial x} + (3 b_1 - b_3)\frac{\partial^3 u_4}{\partial y^3} + (2 b_1 - b_3)\frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Il nous faut former la partie non algébrique de cette expression, qui est la même que celle de V_1. Les valeurs de f_2 et f_4 étant

$$f_2 = \frac{z^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{64},$$

$$f_4 = \frac{z^4}{24} - \frac{z^2(x^2 + y^2)}{8} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64}$$

on trouve que cette partie non algébrique est

$$\frac{(b_0 + b_2)x + (b_1 + b_3)y}{8}\log(\varrho + z).$$

Donc finalement, avec une erreur dont les dérivées premières sont finies, on peut représenter Y_M^4 par l'expression

$$\frac{2}{\varrho} - \frac{a_1 + a_2}{2}\log(\varrho + z) + \frac{a_1 - a_2}{4}\frac{x^2 - y^2}{(\varrho + z)^2} - \left(\frac{b_0 + b_2}{4}x + \frac{b_1 + b_3}{4}y\right)\log(\varrho + z).$$

On peut transformer un peu cette expression en observant que, si on appelle C la somme des courbures principales de la surface S, on a en M

$$C = a_1 + a_2, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = b_0 + b_2, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = b_1 + b_3.$$

En posant aussi $a_1 - a_2 = E$, l'expression asymptotique de Y_M^A devient[1]

$$\frac{2}{\varrho} - \frac{C}{2} \log(\varrho + z) + \frac{E}{4} \frac{x^2 - y^2}{(\varrho + z)^2} - \frac{1}{4}\left(x \frac{\partial C}{\partial x} + y \frac{\partial C}{\partial y}\right) \log(\varrho + z).$$

§ 34. Ayant étudié Y_M^A, on peut définir Y_B^A par la formule

$$Y_B^A = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S Y_M^A \frac{d\frac{1}{\varrho'}}{dn} dS - \frac{1}{S} \iint\limits_S \frac{1}{\varrho'} dS,$$

qui permet d'étudier la singularité de la fonction de Neumann. Cette formule peut encore s'écrire, d'après la formule (36)

$$(39) \qquad Y_B^A = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{d}{dn} \frac{1}{\varrho\varrho'} dS - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \psi(A, M) \frac{d}{dn} \frac{1}{\varrho'} dS - \frac{1}{S} \iint\limits_S \frac{1}{\varrho'} dS.$$

On peut, pour l'étude asymptotique de Y_B^A, négliger la dernière intégrale, qui est holomorphe.

Par des raisonnements analogues à ceux qui ont été exposés pour la fonction de Green, on verrait que, si dans la formule (39) on remplace $\psi(A, M)$ par son expression asymptotique

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_p,$$

l'erreur qui en résulte a ses dérivées jusqu'à l'ordre p finies et continues.

Enfin le procédé par lequel nous avons limité supérieurement les dérivées de la fonction de Green s'applique au cas actuel, et on trouve que la formule (31) est exacte sans modification pour la fonction de Neumann.

---

[1] C'est cette formule qui doit remplacer celle du travail cité de M. Cisotti, qui contenait, en outre, des termes qui, avec nos notations, s'écriraient

$$-\frac{EC}{24} \frac{x^2 - y^2}{(r + z)^2} (2r + z) \log r - \frac{E^2}{16} z \log r.$$

D'après cette formule, la dérivée normale de Y_M^A ne resterait pas finie. Nous savons d'ailleurs que, quel que soit le nombre de fonctions V que l'on calcule, la partie non algébrique de l'expression obtenue est le produit de $\log(r + z)$ par un polynôme en x, y, z. L'expression de M. Cisotti n'est pas réductible à une pareille forme.

Table des matières.