

ZUR THEORIE DER LINEAREN GLEICHUNGEN.

VON

E. STUDY

in BONN.

Die Determinantentheorie liefert die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen nicht immer in zweckmässiger Form. Ein geläufiges Beispiel dafür bildet das Multiplikationstheorem der Quaternionen,

$$\alpha_0 \alpha'_0 - \alpha_1 \alpha'_1 - \alpha_2 \alpha'_2 - \alpha_3 \alpha'_3 = \alpha''_0,$$

$$\alpha_0 \alpha'_1 + \alpha_1 \alpha'_0 + \alpha_2 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_2 = \alpha''_1,$$

$$\alpha_0 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha'_0 + \alpha_3 \alpha'_1 - \alpha_1 \alpha'_3 = \alpha''_2,$$

$$\alpha_0 \alpha'_3 + \alpha_3 \alpha'_0 + \alpha_1 \alpha'_2 - \alpha_2 \alpha'_1 = \alpha''_3.$$

Fasst man dieses häufig auftretende Formelsystem als ein System von Gleichungen für die Unbekannten α'_k oder α_k , so wird die zugehörige Determinante in beiden Fällen das Quadrat eines Ausdrucks, der von den Koeffizienten der Unbekannten rational abhängt, nämlich das Quadrat der Norm der Quaternion α oder α' ,

$$N\alpha = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$N\alpha' = \alpha'^2_0 + \alpha'^2_1 + \alpha'^2_2 + \alpha'^2_3.$$

Ein Faktor $N\alpha$ oder $N\alpha'$ geht dann auch in die Zähler der Determinantenausdrücke für die Unbekannten ein, und erst nach Wegschaffung dieses überflüssigen und sehr störenden Faktors erhält man die Lösung, falls sie existiert, in brauchbarer Form — eben der, die in der Quaternionenrechnung überall angewendet wird.

Die Beseitigung des fremden Faktors bietet nun zwar in diesem Falle noch keine Schwierigkeit. Indessen sind Vorkommnisse derart sehr häufig, ja sie

bilden in der Lehre von den sogenannten höheren komplexen Grössen, d. h. in der Theorie gewisser Transformationsgruppen, die Regel. Man kennt aber keine praktikabele Methode, die Zerlegung einer beliebigen ganzen rationalen Funktion in ihre irreduzibelen Faktoren zu bewirken, oder die mehreren solchen Funktionen gemeinsamen Teiler zu bestimmen, und es ist auch nicht anzunehmen, dass es eine solche Methode gibt. Die Theorie des grössten gemeinsamen Teilers führt zu unüberwindlichen Schwierigkeiten wohl in allen Fällen, die ein selbständiges Interesse haben, nämlich nicht zur Erläuterung der Theorie schulmässig zurechtgeschnitten sind. Daher bedarf die Lehre von der Auflösung linearer Gleichungen einer Weiterbildung in besonderen Richtungen, wobei natürlich die Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten zu Beschränkungen nöthigen wird. Einige solche Fortsetzungen der allgemeinen Theorie liegen auch schon vor, so die Auflösungstheorie von Gleichungen mit schief-symmetrischer Determinante.

In der folgenden Untersuchung werden namentlich gewisse Systeme von $4m$ linearen Gleichungen mit $4m$ Unbekannten behandelt, Systeme die übrigens denselben Grad von Allgemeinheit haben wie irgend welche Systeme von $2m$ Gleichungen mit $2m$ Unbekannten. Die Gleichungen selbst, sowie ihre Koeffizienten und Unbekannten sind zu vierein zusammengefasst, derart, dass m »symbolische« Gleichungen der Form

$$\sum_k \alpha_{ik} x_k = \text{konst.}, \text{ oder } \sum_i \xi_i \alpha_{ik} = \text{konst.}$$

entstehen, in denen die Koeffizienten wie die Unbekannten *Quaternionen* oder *zweireihige Matrices* sind. Die Unbekannten stehen immer auf derselben Seite der Koeffizienten.

Gleichungen oder Gleichungssysteme ähnlicher Form kann man offenbar in jedem System höherer komplexer Grössen bilden; von einigen weniger lohnenden Beispielen abgesehen, ist es mir aber nur im bezeichneten Falle gelungen, eine brauchbare Lösungstheorie zu entwickeln. In dieser vertritt die Stelle der Determinante eine hier ∇ (*Nabla*) genannte Funktion, die Quadratwurzel aus der Determinante der $4m$ Gleichungen ist, die selbst als Determinante vom Grade $2m$ aufgefasst werden kann, *mit der aber auf ähnliche Weise gerechnet wird, wie mit Determinanten vom Grade m* . Im Falle $m = 1$ reduziert sich ∇ auf die Norm einer Quaternion, oder auf die Determinante einer zweireihigen Matrix. Homogene Gleichungen, sowie unvollständige und übervollständige Systeme von Gleichungen der bezeichneten Form, deren Theorie hier besondere Schwierigkeiten zu bieten scheint, jedenfalls ziemlich umfangreich ausfallen muss, sind ausser Betracht gelassen werden.

Meinem Kollegen I. SCHUR bin ich zu Dank verpflichtet für das Interesse, mit dem er die Entstehung der vorliegenden Untersuchung begleitet hat. Von ihm rührt der Satz her, dass (im genannten Falle der Quaternionen) die ∇ -Funktion nicht als Summe von Quadraten dargestellt werden kann.

Ich hoffe, dass das Folgende behaglich zu lesen sein wird. Durch gewisse Umstellungen verbunden mit einer Erhöhung des vom Leser zu fordernden Masses von Kenntnissen würde sich grössere Kürze haben erzielen lassen. Aber eine auf Kosten der Lesbarkeit zu erreichende Kürze ist schliesslich doch wohl der Güter höchstes nicht.

I.

Quaternionen und Matrices.

Die Regeln der Quaternionenrechnung, sowie das Rechnen mit Matrices (oder bilinearen Formen) setze ich als bekannt voraus, erkläre aber kurz die Bedeutung der Zeichen, die weiterhin gebraucht werden.

Eine Quaternion wird nach dem Schema

$$x = Sx + Vx,$$

$$Sx = x_0, \quad Vx = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

in einen skalaren (Sx) und einen vektoriellen Bestandteil (Vx) zerlegt. Die Konjugierte ($Sx - Vx$) zur Quaternion x wird gewöhnlich ebenfalls durch eine Art von Funktionszeichen, K , dargestellt (Kx). Da aber das Rechnen mit diesem Zeichen meistens sehr unbequem ist, und zu einer unübersichtlichen Schreibart der Formeln führt, brauche ich *daneben*, und zwar vorzugsweise, auch ein anderes, das an die übliche Bezeichnung für die Konjugierte zu einer gewöhnlichen komplexen Grösse erinnern soll. Ich schreibe nämlich

$$\tilde{x} = Kx = Sx - Vx = x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3,$$

und also

$$Sx = \frac{1}{2}\{x + \tilde{x}\}, \quad Vx = \frac{1}{2}\{x - \tilde{x}\}.$$

Die Norm einer Quaternion wird hiernach

$$Nx = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x\tilde{x} = \tilde{x}x.$$

Ist $Nx \neq 0$, was bei einer von Null verschiedenen *reellen* Quaternion (einer solchen mit reellen Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3) immer eintritt, so ist

$$x^{-1} = \frac{\tilde{x}}{Nx}.$$

Besonders in Erinnerung gebracht seien die im Folgenden viel benutzten Regeln:

$$K(xy) = Ky \cdot Kx = \tilde{y}\tilde{x}, \quad S(xy) = S(yx).$$

Nach der zweiten dieser Regeln können im skalaren Bestandteil irgend eines Quaternionenprodukts die Faktoren *zyklisch* vertauscht werden; z. B.

$$S(xyz) = S(yzx) = S(zxy).$$

Die Rechnung mit solchen Quaternionen, deren Koordinaten (gewöhnliche) *komplexe* Grössen sind, ist bekanntlich äquivalent dem Rechnen mit zweireihigen *Matrices*, deren Koeffizienten ebenfalls *komplexe* Grössen sind. Man erhält diesen schon von LAGUERRE (1867; CAYLEY 1879) gefundenen Zusammenhang durch Änderung der Quaternionenbasis, indem man nämlich an Stelle der Haupteinheit ($e_0 = 1$) und der Nebeneinheiten (e_1, e_2, e_3) der Quaternionen geeignete neue Einheiten einführt; wenn man (zum Beispiel)

$$e_0 = e_{11} + e_{22}, \quad e_1 = i(e_{12} + e_{21}), \quad e_2 = -(e_{12} - e_{21}), \quad e_3 = i(e_{11} - e_{22})$$

und also

$$2e_{11} = e_0 - ie_3, \quad 2e_{12} = -ie_1 - e_2, \quad 2e_{21} = -ie_1 + e_2, \quad 2e_{22} = e_0 + ie_3$$

setzt.

Die Multiplikationsregeln für die ursprünglichen Einheiten

$$\begin{aligned} e_0 e_1 &= e_1 e_0 = e_1, & e_0 e_2 &= e_2 e_0 = e_2, & e_0 e_3 &= e_3 e_0 = e_3, \\ e_0^2 &= e_0, & e_1^2 &= -e_0, & e_2^2 &= -e_0, & e_3^2 &= -e_0, \\ e_2 e_3 &= -e_3 e_2 = e_1, & e_3 e_1 &= -e_1 e_3 = e_2, & e_1 e_2 &= -e_2 e_1 = e_3 \end{aligned}$$

gehen dann über in die Regeln

$$e_{ij} e_{jk} = e_{ik}, \quad e_{ij} e_{kl} = 0 \quad (j \neq k),$$

d. h. in die Multiplikationsregeln der zweireihigen *Matrices*

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

oder auch der speziellen bilinearen Formen

$$\xi_1 \omega_1, \quad \xi_1 \omega_2, \quad \xi_2 \omega_1, \quad \xi_2 \omega_2;$$

das Eingangs aufgeführte Multiplikationstheorem für Quaternionen nimmt, wenn

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ &= \alpha_{11} e_{11} + \alpha_{12} e_{12} + \alpha_{21} e_{21} + \alpha_{22} e_{22} \quad (\text{u. s. w.}) \end{aligned}$$

gesetzt wird, die gewöhnlich in der symbolischen Gleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha''_{11} & \alpha''_{12} \\ \alpha''_{21} & \alpha''_{22} \end{pmatrix}$$

abgekürzte Form des Multiplikationstheorems der zweireihigen Matrices an,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \alpha'_{11} + \alpha_{12} \alpha'_{21} &= \alpha''_{11}, & \alpha_{11} \alpha'_{12} + \alpha_{12} \alpha'_{22} &= \alpha''_{12}, \\ \alpha_{21} \alpha'_{11} + \alpha_{22} \alpha'_{21} &= \alpha''_{21}, & \alpha_{21} \alpha'_{12} + \alpha_{22} \alpha'_{22} &= \alpha''_{22}; \end{aligned}$$

oder endlich, man erhält die Formel für die ebenfalls so genannte Multiplikation (Komposition) bilinearer Formen

$$\sum \alpha_{ik} \xi_i \omega_k \cdot \sum \alpha'_{ik} \xi_i \omega_k = \sum \alpha''_{ik} \xi_i \omega_k.$$

Ein unwesentlicher Unterschied zwischen beiden Theorien besteht insofern, als es in der Theorie der Matrices nicht allgemein üblich und in der Theorie der bilinearen Formen auch nicht überall angängig ist, die der Haupteinheit (e_0) der Quaternionen entsprechende *Einheitsmatrix* oder *Einheitsform*,

$$e_{11} + e_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2$$

mit der Einheit des gewöhnlichen Rechnens zu identifizieren (wie es in der Quaternionentheorie ziemlich allgemein geschieht).

Führt man auf die beschriebene Art, also durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} 2x_0 &= x_{11} + x_{22}, & 2x_1 &= -i(x_{12} + x_{21}), & 2x_2 &= -x_{12} + x_{21}, & 2x_3 &= -i(x_{11} - x_{22}), \\ x_0 + ix_3 &= x_{11}, & ix_1 - x_2 &= x_{12}, & ix_1 + x_2 &= x_{21}, & x_0 - ix_3 &= x_{22} \end{aligned}$$

den Übergang zu Matrices oder bilinearen Formen aus, so erhalten damit die Zeichen der Quaternionentheorie eine andere Bedeutung. Stellt x eine Matrix vor,

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

so wird

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix},$$

und (bei Unterdrückung der Einheitsmatrix)

$$Sx = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{22}), \quad Vx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_{11} - x_{22} & 2x_{12} \\ 2x_{21} & x_{22} - x_{11} \end{pmatrix},$$

$$x = Sx + Vx, \quad \tilde{x} = Sx - Vx,$$

ferner

$$Nx = x\tilde{x} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21},$$

und, zum Beispiel

$$x\tilde{y} = \begin{pmatrix} x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21} & -x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} \\ x_{21}y_{22} - x_{22}y_{21} & -x_{21}y_{12} + x_{22}y_{11} \end{pmatrix}.$$

Es gelten dieselben Regeln wie zuvor, zum Beispiel

$$S(xyz) = S(yzx) = S(zxy). \quad -$$

Die Quaternionenrechnung ist also, wie gesagt, dem Rechnen mit zweireihigen Matrices oder mit den entsprechenden bilinearen Formen äquivalent. Es ist aber wohl zu beachten, dass die lineare Transformation, die den Übergang vom einen Kalkül zum anderen vermittelt, ein imaginäres Koeffizientensystem hat, und zwar eines aus dem Rationalitätsbereich $\{\sqrt{-1}\}$. Daher findet ein vollkommenes Entsprechen nur im komplexen Gebiete statt. Die Norm einer nicht verschwindenden *reellen Quaternion* zum Beispiel ist stets positiv, während die Determinante $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ einer *reellen zweigliedrigen Matrix*, d. i. einer solchen mit reellen Elementen oder Koordinaten $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ positiv, Null, oder negativ sein kann. Eben hierauf beruht das eigenthümliche Interesse, *die Selbständigkeit der Quaternionentheorie*, gegenüber dem Rechnen mit zweireihigen Matrices, das besonders in gewissen Anwendungen (auf Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie) dem Bedürfnis nach einem sachgemässen analytischen Apparat keineswegs ebensogut gerecht werden kann, wie die Quaternionen.

Weiterhin kann, wo nicht das Gegenteil bemerkt ist, mit den vorkommenden Zeichen ebensowohl der Begriff zweireihiger Matrices wie der von Quaternionen verbunden werden.

Doppelindizes, die bisher zur Unterscheidung der vier Koordinaten oder Elemente einer zweireihigen Matrix gedient haben, werden fernerhin in anderem Sinne, nämlich zur Unterscheidung mehrerer Matrices oder Quaternionen gebraucht. Nachdem nämlich die Elemente der Theorie gegeben sind, ist es meistens nicht nöthig, und gewöhnlich auch nicht förderlich, eine Quaternion oder Matrix in ihre Bestandteile zu zerlegen. Vielmehr beruht, wie viel oder wenig an der auszuführenden Betrachtung Brauchbares sein mag, dieses gerade auf der Zusammenfassung von vier stets verbunden auftretenden Grössen durch Gebrauch eines einzigen Zeichens für sie alle, und auf der *ausschliesslichen* Verwendung einiger weniger Operationssymbole (S und K).

2.

Einseitige Quaternionengleichungen mit zwei Unbekannten.

Wir betrachten gleichzeitig die folgenden beiden Systeme linearer Gleichungen für Quaternionen, in denen die Unbekannten x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2 jedesmal auf derselben Seite eines Quaternionenprodukts stehen, und die deshalb *einseitige* Quaternionengleichungen genannt werden sollen:

$$(I') \quad \begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= x'_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= x'_2, \end{aligned}$$

$$(I'') \quad \begin{aligned} \xi'_1 &= \xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{21}, \\ \xi'_2 &= \xi_1\alpha_{12} + \xi_2\alpha_{22}. \end{aligned}$$

Jedes dieses Gleichungspaare ist eine Abkürzung oder Zusammenfassung eines Systems von acht gewöhnlichen linearen Gleichungen für acht Unbekannte, nämlich für die Koordinaten der Quaternionen x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2 , eines Gleichungssystems, das mit Hilfe des Multiplikationstheorems der Quaternionen sofort hingeschrieben werden kann. Man sieht daraus, dass beide Gleichungssysteme dieselbe Determinante D haben, und dass sie also beide zugleich eindeutig-auflösbar sind, oder nicht. Es würde aber, wie schon angedeutet, ein unglücklicher Gedanke sein, sich bei Behandlung eines solchen Gleichungssystems auf die Formeln der allgemeinen Theorie linearer Gleichungen versteifen zu wollen. Eine viel brauchbarere Methode liefert die Quaternionenrechnung selbst.

Wir werden uns hier auf die Hauptfrage beschränken, unter welchen Umständen die Gleichungen (I) *eindeutig* aufgelöst werden können, und wie dann diese

Lösung (x_1, x_2) oder (ξ_1, ξ_2) durch die Quaternionen α_{i*} und (x'_1, x'_2) oder (ξ'_1, ξ'_2) ausgedrückt werden kann.¹

Das nächstliegende Verfahren besteht darin, aus einer der Gleichungen die eine Unbekannte durch die andere auszudrücken, und dann, nach Substitution des gefundenen Ausdrucks in die andere Gleichung, die zweite Unbekannte zu berechnen. Man findet so zum Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_{11} - \alpha_{12} \alpha_{22}^{-1} \alpha_{21})^{-1} (x'_1 - \alpha_{12} \alpha_{22}^{-1} x'_2), \\ x_2 &= (\alpha_{21} - \alpha_{22} \alpha_{12}^{-1} \alpha_{11})^{-1} (x'_2 - \alpha_{22} \alpha_{12}^{-1} x'_1). \end{aligned}$$

Aber dieses Verfahren unterliegt, ausser anderen Bedenken, dem schwerwiegenden Einwand, dass es versagt, wenn die erforderlichen Divisionen nicht ausführbar sind, während vielleicht trotzdem eine Lösung (x_1, x_2) vorhanden ist.²

Wir führen die Elimination von einer der Veränderlichen zunächst etwas zweckmässiger so aus:

$$(2) \quad \begin{aligned} (\alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} \quad \alpha_{11} - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{12} \cdot \alpha_{21}) x_1 &= \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} x'_1 - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{12} \cdot x'_2, \\ (\alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22} \cdot \alpha_{11} - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21}) x_1 &= \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22} \cdot x'_1 - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} x'_2, \\ (\alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11} \quad \alpha_{12} - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{11} \cdot \alpha_{22}) x_2 &= \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11} x'_1 - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{11} \cdot x'_2, \\ (\alpha_{21} \tilde{\alpha}_{21} \cdot \alpha_{12} - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22}) x_2 &= \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{21} \cdot x'_1 - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \cdot x'_2. \end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Normen der Faktoren links, so findet sich, dass sie alle reduzibel sind und einen gemeinsamen Teiler haben. Setzen wir nämlich

$$(3) \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Bmatrix} = \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22} - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11} + \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{21},$$

so folgt

$$(4) \quad \begin{aligned} N(\alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11} \quad \alpha_{12} - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{11} \cdot \alpha_{22}) &= N \alpha_{11} \cdot \nabla, \\ N(\alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} \quad \alpha_{11} - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{12} \cdot \alpha_{21}) &= N \alpha_{12} \cdot \nabla, \\ N(\alpha_{21} \tilde{\alpha}_{21} \cdot \alpha_{12} - \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22}) &= N \alpha_{21} \cdot \nabla, \\ N(\alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22} \cdot \alpha_{11} - \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21}) &= N \alpha_{22} \cdot \nabla. \end{aligned}$$

¹ Eine eingehendere Untersuchung der Gleichungssysteme (1) wird man in einer in Vorbereitung begriffenen Schrift finden, in der auch eine geometrische Anwendung besprochen wird.

² So verhält es sich im Beispiel

$$2 \alpha_{11} = 2 \alpha_{22} = e_2 + i e_3,$$

$$2 \alpha_{21} = 2 \alpha_{12} = e_2 - i e_3.$$

Das Nicht-Verschwinden des skalaren Ausdrucks ∇ (Sprich: *Nabla*) wird also vermutlich die Bedingung für die Möglichkeit einer eindeutigen Auflösung der Gleichungen (1) sein. Dies bestätigt sich sofort, wenn wir bemerken, dass ∇ sich mit Hilfe der Multiplikatoren $-\tilde{\alpha}_{21}, \tilde{\alpha}_{11}$ und $-\tilde{\alpha}_{22}, \tilde{\alpha}_{12}$ aus den Koeffizienten von x_1, x_2 in obigen Ausdrücken zusammensetzen lässt. Wir erhalten dann, falls $\nabla \neq 0$ ist, die Auflösung unserer Gleichungen in den Formeln

$$(5) \quad \begin{aligned} &(\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22} \cdot \tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12}) x'_1 + (\tilde{\alpha}_{12} \alpha_{12} \cdot \tilde{\alpha}_{21} - \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22}) x'_2 = \nabla \cdot x_1 \\ &(\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{21} \cdot \tilde{\alpha}_{12} - \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11}) x'_1 + (\tilde{\alpha}_{11} \alpha_{11} \cdot \tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21}) x'_2 = \nabla \cdot x_2 \\ &\xi_1 \cdot \nabla = \xi'_1 (\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22} \cdot \tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12}) + \xi'_2 (\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{21} \cdot \tilde{\alpha}_{12} - \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11}), \\ &\xi_2 \cdot \nabla = \xi'_1 (\tilde{\alpha}_{12} \alpha_{12} \cdot \tilde{\alpha}_{21} - \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22}) + \xi'_2 (\tilde{\alpha}_{11} \alpha_{11} \cdot \tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21}). \end{aligned}$$

Es folgt natürlich auch, dass im Falle $\nabla \neq 0$ die Gleichungen (1) nicht noch andere Lösungen zulassen können, als die gefundenen (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2) .

Aus $\nabla \neq 0$ folgt also $D \neq 0$. Aber auch das Umgekehrte ist richtig. Gäbe es nämlich Wertsysteme der Koordinaten der Quaternionen $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{22}$, für die $D \neq 0$ aber $\nabla = 0$ wäre, so müsste es auch solche geben, für die $\nabla \neq 0$ aber $D = 0$ wäre, während wir soeben das Gegenteil bewiesen haben.

Die Ungleichung $\nabla \neq 0$ stellt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass die Gleichungen (1) eindeutig nach den Unbekannten x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2 aufgelöst werden können.

Weiter folgt noch, dass jede der Gleichungen $\nabla = 0, D = 0$ die andere nach sich zieht. Die Funktion ∇ aber ist eine irreduzible Funktion der sechzehn Koordinaten der Quaternionen $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{22}$. Man sieht das an dem Spezialfall

$$\begin{cases} \xi & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \eta \end{cases} = N \xi \cdot N \eta - 2 S(\xi \eta) + \mathbf{1}$$

der offenbar eine irreduzible Funktion vierten Grades darstellt. Auf Grund eines bekannten Satzes schliesst man hieraus, dass

$$(6) \quad D = \nabla^2$$

sein muss.

Die Lösung (5) der Gleichungen (1) ist also wesentlich einfacher als die, die eine Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen, wenigstens unmittelbar, geliefert haben würde; diese gibt (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2) mit dem Faktor ∇ in Zähler und Nenner, der bei der vorliegenden Behandlung des Gegenstandes gar nicht erst aufgetreten ist.

Ist $\nabla = 0$, so folgt, dass die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 = 0, & \quad 0 = \xi_1 \alpha_{11} + \xi_2 \alpha_{21}, \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 = 0, & \quad 0 = \xi_1 \alpha_{12} + \xi_2 \alpha_{22} \end{aligned}$$

von (0, 0) verschiedene Lösungen zulassen, und dass also die Gleichungen (1) entweder unendlich viele Lösungen haben, oder eine unerfüllbare Forderung enthalten. Wir gehen nicht weiter auf diesen Grenzfall ein, der übrigens keineswegs ohne Interesse ist.

Nunmehr kehren wir den bisher verfolgten Gedankengang um. Wir gehen jetzt von der Funktion ∇ , die eine homogene Funktion vierten Grades ihrer sechzehn Argumente ist, als dem Gegebenen aus, versuchen, ihr Bildungsgesetz aufzuklären und *aus diesem* zu erschliessen, dass sie zur Auflösung von Quaternionengleichungen des Typus (1) brauchbar ist.

Den Ausgangspunkt bildet hier die Bemerkung, dass der Ausdruck der Funktion ∇ in mannigfacher Weise variiert werden kann. Es ist ja

$$\alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} + \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11} = 2S(\alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12}) = 2S(\alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11}),$$

und in jedem der hinter den Zeichen S stehenden Quaternionenprodukte können die Faktoren zyklisch vertauscht werden. Daher lässt sich ∇ , nach Auszeichnung einer Zeile oder Kolonne in der Quaternionenmatrix $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, als eine Art von bilinearer Form darstellen, zum Beispiel

$$(8) \quad \nabla = \alpha_{11} (\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22}) \tilde{\alpha}_{11} - \alpha_{11} (\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22}) \tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12} (\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21}) \tilde{\alpha}_{11} + \alpha_{12} (\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{21}) \tilde{\alpha}_{12},$$

und daher auch, zum Beispiel, in der Form $\alpha_{11} \mathcal{A}_{11} + \alpha_{12} \mathcal{A}_{12}$. Wir führen die Abkürzungen

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22} \cdot \tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12}, & \mathcal{A}_{12} &= \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{21} \cdot \tilde{\alpha}_{12} - \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11}, \\ \mathcal{A}_{21} &= \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{12} \cdot \tilde{\alpha}_{21} - \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22}, & \mathcal{A}_{22} &= \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{11} \cdot \tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \end{aligned}$$

ein, und erhalten die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} \mathcal{A}_{11} + \alpha_{12} \mathcal{A}_{12} &= \nabla, & \alpha_{11} \mathcal{A}_{21} + \alpha_{12} \mathcal{A}_{22} &= 0, \\ \alpha_{21} \mathcal{A}_{11} + \alpha_{22} \mathcal{A}_{12} &= 0, & \alpha_{21} \mathcal{A}_{21} + \alpha_{22} \mathcal{A}_{22} &= \nabla, \\ \nabla &= \mathcal{A}_{11} \alpha_{11} + \mathcal{A}_{21} \alpha_{21}, & 0 &= \mathcal{A}_{12} \alpha_{11} + \mathcal{A}_{22} \alpha_{21}, \\ 0 &= \mathcal{A}_{11} \alpha_{12} + \mathcal{A}_{21} \alpha_{22}, & \nabla &= \mathcal{A}_{12} \alpha_{12} + \mathcal{A}_{22} \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Auf Formeln, die eine ganz ähnliche Struktur haben, wie die Gleichungs-

systeme (10), beruht nun die Auflösung der gewöhnlichen Systeme linearer Gleichungen mit Hilfe der Determinanten. Die gleiche Überlegung führt auch hier zum Ziele: Wir erhalten nun nochmals die Auflösung unserer Gleichungen (1), in den Formeln

$$(11) \quad \begin{aligned} A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 &= \nabla \cdot x_1, & \xi_1 \cdot \nabla &= \xi'_1 A_{11} + \xi'_2 A_{12}, \\ A_{12}x'_1 + A_{22}x'_2 &= \nabla \cdot x_2, & \xi_2 \cdot \nabla &= \xi'_1 A_{21} + \xi'_2 A_{22}. \end{aligned}$$

Zu einer sachgemässen Auflösung der Gleichungen (1) ist also nur nötig, dass man auf irgend einem Wege zu der Funktion ∇ gelangt ist.

Die Analogie unserer Funktion ∇ mit zweireihigen Determinanten, die hier zum Vorschein gekommen ist, geht nun noch viel weiter. Man darf in ihr die beiden Reihen und die beiden Spalten (Horizontal- und Vertikalreihen) vertauschen, doch ohne Vorzeichenwechsel (nicht aber auch Reihen mit Spalten). Ferner nimmt ∇ den Wert Null an, wenn die zwei Reihen oder die zwei Spalten mit einander identisch werden. Die Funktion ∇ ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein *vorderes* (*linkseitiges*) Multiplum der anderen Reihe, oder zu den Elementen einer Spalte ein *hinteres* (*rechtseitiges*) Multiplum der anderen Spalte addiert. Die Multiplikation der Elemente einer Reihe mit einem *vorn* (links) stehenden Faktor lässt die Norm dieses Faktors als Faktor vor ∇ treten, und Entsprechendes gilt, wenn man die Elemente einer Spalte *hinten* (rechts) mit einem Faktor versieht. Vor allem aber gilt auch noch eine umfassendere, dem Multiplikationstheorem zweireihiger Determinanten vollkommen analoge Identität.

Wir fassen jetzt die Gleichungen (1) als Gleichungen zweier *Transformationen* auf, die dem Quaternionenpaaren (x_1, x_2) oder (ξ_1, ξ_2) andere (x'_1, x'_2) oder (ξ'_1, ξ'_2) zuordnen. Wir erhalten dann zwei kontinuierliche *Gruppen* mit je sechzehn (komplexen) Parametern, deren Transformationen sich nach Regeln zusammensetzen, die vollkommen analog sind den Regeln für die Zusammensetzung oder Multiplikation zweireihiger *Matrices*. Diese Regeln, oder also die Formeln für die *Parametergruppen* unserer zwei Gruppen sind:

$$(12^f) \quad \begin{aligned} \alpha''_{11} &= \alpha'_{11} \alpha_{11} + \alpha'_{12} \alpha_{21}, & \alpha''_{12} &= \alpha'_{11} \alpha_{12} + \alpha'_{12} \alpha_{22}, \\ \alpha''_{21} &= \alpha'_{21} \alpha_{11} + \alpha'_{22} \alpha_{21}, & \alpha''_{22} &= \alpha'_{21} \alpha_{12} + \alpha'_{22} \alpha_{22}, \end{aligned}$$

wofür wir auch schreiben können

$$\begin{pmatrix} \alpha''_{11} & \alpha''_{12} \\ \alpha''_{21} & \alpha''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

ferner

$$(I2^r) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} \alpha_{11}^* + \alpha_{12} \alpha_{21}^* &= \alpha_{11}^{**}, & \alpha_{11} \alpha_{12}^* + \alpha_{12} \alpha_{22}^* &= \alpha_{12}^{**}, \\ \alpha_{21} \alpha_{11}^* + \alpha_{22} \alpha_{21}^* &= \alpha_{21}^{**}, & \alpha_{21} \alpha_{12}^* + \alpha_{22} \alpha_{22}^* &= \alpha_{22}^{**}, \end{aligned}$$

oder abgekürzt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{**} & \alpha_{12}^{**} \\ \alpha_{21}^{**} & \alpha_{22}^{**} \end{pmatrix}.$$

Nennen wir diese Transformationen S_l, S'_l, S''_l und S_r, S_r^*, S_r^{**} , so zeigen die folgenden Formeln, wie die Quaternionenpaare (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2) sich ihnen gegenüber verhalten:

$$(I3^l) \quad \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} S_l \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} S'_l \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} S''_l \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}; & S_l S'_l = S''_l, \\ \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \end{array}$$

$$(I3^r) \quad \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \xi_1^{**} \\ \xi_2^{**} \end{pmatrix} S_r^{**} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} S_r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; & S_r^{**} = S_r^* S_r. \\ \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} \end{array}$$

Sind nun ∇ und $\nabla' \neq 0$, so besteht zwischen dem Paar (x) und dem Paar (x') eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung, und ebenso zwischen dem Paar (x') und dem Paar (x'') , also auch zwischen dem Paar (x) und dem Paar (x'') . Wenn $\nabla \neq 0$, $\nabla' \neq 0$ ist, so folgt, dass auch $\nabla'' \neq 0$ sein muss, oder, dass zugleich mit den Transformationen S_l, S'_l auch die Transformation S''_l existiert. Ausserdem aber ergibt sich auch, dass sobald eine der Funktionen ∇, ∇' den Wert Null hat, sobald also eine der Zuordnungen $(x) \rightarrow (x')$, $(x') \rightarrow (x'')$ nicht umkehrbar ist, keine Transformation darstellt, dasselbe auch von der Zuordnung $(x) \rightarrow (x'')$ gelten muss, dass dann also ∇'' den Wert Null hat. Hieraus, und aus der Irreduzibilität von ∇ und ∇' ergibt sich, mit Hilfe einer zuvor schon angewendeten Schlussweise, die erste der Formeln

$$(I4) \quad \nabla \cdot \nabla' = \nabla'', \quad \nabla^{**} = \nabla^* \cdot \nabla.$$

Beide Gleichungen sagen, abgesehen von ihrer gruppentheoretischen Bedeutung, also rein formal betrachtet, dasselbe aus; sie haben die Form des Multiplikationstheorems zweireihiger Determinanten; sie werden daher passend in der folgenden Formel zusammengefasst, die wir als *Multiplikationsregel der Nablafunktion* bezeichnen dürfen:

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{12}\alpha_{21} & \beta_{11}\alpha_{12} + \beta_{12}\alpha_{22} \\ \beta_{21}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{21} & \beta_{21}\alpha_{12} + \beta_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Diese Regel, deren Richtigkeit natürlich auch durch Ausrechnung — durch eine freilich bereits etwas umständliche Rechnung — bestätigt werden kann, umfasst mehrere der zuvor angeführten Lehrsätze.

Wir wenden uns nochmals zu den Formeln (12), und bemerken, dass z. B. die Formeln (12') gar nichts anderes sind als wieder die Formeln (1^r), nur zweimal aufgestellt, nämlich für die Quaternionenpaare

$$(\xi_1, \xi_2) = (\alpha'_{11}, \alpha'_{21}), \quad (\xi_1, \xi_2) = (\alpha'_{12}, \alpha'_{22}).$$

Schreiben wir also die Gleichungen (12), mit veränderter Bezeichnung, nochmals auf

$$\begin{aligned}
 (16^l) \quad & x'_{11} = \lambda_{11} x_{11} + \lambda_{12} x_{21}, & x'_{12} &= \lambda_{11} x_{12} + \lambda_{12} x_{22}, \\
 & x'_{21} = \lambda_{21} x_{11} + \lambda_{22} x_{21}, & x'_{22} &= \lambda_{21} x_{12} + \lambda_{22} x_{22}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (16^r) \quad & x_{11} \varrho_{11} + x_{12} \varrho_{21} = x_{11}^*, & x_{11} \varrho_{12} + x_{12} \varrho_{22} &= x_{12}^*, \\
 & x_{21} \varrho_{11} + x_{22} \varrho_{21} = x_{21}^*, & x_{21} \varrho_{12} + x_{22} \varrho_{22} &= x_{22}^*,
 \end{aligned}$$

so haben wir, wenn die Nablafunktionen

$$\nabla(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \nabla(\varrho) = \begin{pmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} \end{pmatrix}$$

nicht Null sind, Transformationen zweier Gruppen Γ'_{16} und Γ''_{16} vor uns, deren Objekte irgend vier in Form einer Matrix angeordnete Quaternionen

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

sind. Das Multiplikationstheorem der Funktion ∇ sagt dann aus, dass

$$\nabla(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

eine (ganze rationale, relative) *Invariante* einer jeden dieser beiden Gruppen ist. Ausserdem ergibt sich noch, dass die numerischen Multipla der Potenzen von $\nabla(x)$ die *einzigsten* solchen Invarianten sind, und dass überdies jedes Quadrupel, für das $\nabla(x) \neq 0$ ist, in jedes andere derart gerade durch *eine* Transformation sowohl von Γ_{16}^l wie von Γ_{16}^r übergeführt werden kann.

Die Gruppen Γ_{16}^l und Γ_{16}^r , deren jede ihre eigene Parametergruppe ist, und die zusammen die beiden Parametergruppen der beiden Gruppen (I) bilden, sind, wie solche Paare von Parametergruppen überhaupt, vertauschbar; sie erzeugen zusammengesetzt — da sie die triviale Gruppe $x'_{ik} = \sigma x_{ik} = x_{ik} \sigma \{V\sigma = 0\}$ und nur diese, mit einander gemein haben — eine Gruppe Γ_{31} mit 31 wesentlichen complexen Parametern, deren allgemeine Transformation durch die Formel

$$(17) \quad \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} \\ x'_{21} & x'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Also auch für diese kontinuierliche Gruppe linearer Transformationen noch ist $\nabla(x)$ eine Invariante, und ausserdem (z. B.) für die Transformation

$$(18) \quad \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} \\ x'_{21} & x'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{21} \\ \tilde{x}_{12} & \tilde{x}_{22} \end{pmatrix}.$$

Die beiden Transformationenschaaren mit je 31 wesentlichen complexen Parametern, die aus der Gruppe (17) durch Hinzufügung der Transformation (18) entstehen, bilden die Gruppe aller linearen Transformationen der sechzehn Koordinaten von x_{11}, \dots, x_{22} , die ∇ als (relative) Invariante haben, oder die — was auf Dasselbe hinauskommt — das Bestehen der Gleichung $\nabla = 0$ nicht stören.

Wir erhalten diesen Lehrsatz als Korollar eines bekannten (und übrigens sehr leicht zu begründenden) Determinantensatzes, wenn wir, nach der in § 1 angegebenen Regel, die Quaternionenmatrix (α_{ik}) als eine *zweireihige Matrix aus zweireihigen Matrices* auffassen, und dieser zusammengesetzten Matrix eine *vierreihige gewöhnliche Matrix* zuordnen, in der statt der Quaternionenkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 , in sachgemässer Anordnung, die in § 1 beschriebenen Elemente oder Koordinaten $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ zweireihiger Matrices erscheinen. Setzen wir, um Unbequemlichkeiten des Drucks zu vermeiden, nunmehr:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{11}^{ik} e_{11} + \alpha_{12}^{ik} e_{12} + \alpha_{21}^{ik} e_{21} + \alpha_{22}^{ik} e_{22},$$

so wird

$$(19) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{11} & \alpha_{12}^{11} \\ \alpha_{21}^{11} & \alpha_{22}^{11} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{12} & \alpha_{12}^{12} \\ \alpha_{21}^{12} & \alpha_{22}^{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{21} & \alpha_{12}^{21} \\ \alpha_{21}^{21} & \alpha_{22}^{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{22} & \alpha_{12}^{22} \\ \alpha_{21}^{22} & \alpha_{22}^{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

und die zugeordnete vierreihige Matrix ist

$$(20) \quad \mathfrak{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha_{11}^{11} & \alpha_{12}^{11} & \alpha_{11}^{12} & \alpha_{12}^{12} \\ \alpha_{21}^{11} & \alpha_{22}^{11} & \alpha_{21}^{12} & \alpha_{22}^{12} \\ \alpha_{11}^{21} & \alpha_{12}^{21} & \alpha_{11}^{22} & \alpha_{12}^{22} \\ \alpha_{21}^{21} & \alpha_{22}^{21} & \alpha_{21}^{22} & \alpha_{22}^{22} \end{array} \right],$$

eine vierreihige gewöhnliche Matrix, die in keiner Weise spezialisiert ist, deren Elemente aber auf eine besondere Art bezeichnet sind — eine *Gittermatrix*, wie wir kurz sagen wollen. Die Multiplikationsregel der zweireihigen Quaternionenmatrices,

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} &= \gamma_{11}, & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} &= \gamma_{12} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} &= \gamma_{21}, & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} &= \gamma_{22} \end{aligned}$$

(vgl. Nr. 12), entpuppt sich damit als eine andere Form der Multiplikationsregel

$$(22) \quad \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

für vierreihige Matrices, deren sechzehn Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{11} \beta_{11}^{11} + \alpha_{12}^{11} \beta_{21}^{11} + \alpha_{11}^{12} \beta_{11}^{12} + \alpha_{12}^{12} \beta_{21}^{12} &= \gamma_{11}^{11}, \\ \alpha_{11}^{11} \beta_{12}^{11} + \alpha_{12}^{11} \beta_{22}^{11} + \alpha_{11}^{12} \beta_{12}^{12} + \alpha_{12}^{12} \beta_{22}^{12} &= \gamma_{12}^{11}, \\ \dots & \dots \\ \alpha_{21}^{21} \beta_{11}^{21} + \alpha_{22}^{21} \beta_{21}^{21} + \alpha_{21}^{22} \beta_{11}^{22} + \alpha_{22}^{22} \beta_{21}^{22} &= \gamma_{22}^{22}, \end{aligned}$$

lediglich in der Formel (21) zu vieren zusammengefasst sind.¹

Die Formel (17) ist ebenfalls eine Zusammenfassung von sechzehn Gleichungen in Gruppen von je vieren; dieselben sechzehn Gleichungen können alle nach dem Schema (22) in eine einzige Formel zusammengefasst und dann also etwa so abgekürzt werden:

¹ Eine solche Zusammenfassung ist gelegentlich auch sonst schon vorgenommen worden.

$$(23) \quad L X R = X^*.$$

Die Gruppe (23), die im komplexen Gebiete eben nur eine andere Schreibart der Gruppe (17) ist, hat nun aber, als — im Wesentlichen einzige — (relative) Invariante die Determinante der vierreihigen Matrix X ; auch diese ist, wie ∇ , irreduzibel, und vom vierten Grade in den Koordinaten der vier Quaternionen oder Matrices $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$. Unsere Funktion ∇ kann sich also von dieser Determinante höchstens um einen Zahlenfaktor unterscheiden, der sich sogleich als die Einheit herausstellt. Wir haben also die Gleichung

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} \ x_{12} \\ x_{21} \ x_{22} \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{cc|cc} x_{11}^1 & x_{12}^1 & x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 & x_{21}^2 & x_{22}^2 \\ \hline x_{11}^3 & x_{12}^3 & x_{11}^4 & x_{12}^4 \\ x_{21}^3 & x_{22}^3 & x_{21}^4 & x_{22}^4 \end{array} \right| = |X|.$$

Das Multiplikationstheorem der ∇ -Funktion ist hiernach im Grunde nichts Anderes als das Multiplikationstheorem vierreihiger Matrices, es entsprechen einander die Formeln

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \ \alpha_{22} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \beta_{11} \ \beta_{12} \\ \beta_{21} \ \beta_{22} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} \ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \ \gamma_{22} \end{array} \right\}$$

(vgl. Nr. 21) und

$$(26) \quad |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{C}|$$

(vgl. Nr. 22 und die beigegebene Erläuterung). Dabei hängen, nach § 1, die Koordinaten der Quaternionen x_{ik}, α_{ik} u. s. w. mit den Elementen oder Koordinaten der vierreihigen Matrices X, \mathfrak{A} u. s. w. wie folgt zusammen:

$$(27) \quad \begin{aligned} 2 x_0^{ik} &= x_{11}^{ik} + x_{22}^{ik}, & 2 x_1^{ik} &= -i(x_{12}^{ik} + x_{21}^{ik}), \\ 2 x_2^{ik} &= -x_{12}^{ik} + x_{21}^{ik}, & 2 x_3^{ik} &= -i(x_{11}^{ik} - x_{22}^{ik}), \end{aligned}$$

Bei alledem ist zu beachten, dass eine Äquivalenz unserer Quaternionenformeln mit denen für zweireihige Matrices nur im komplexen Gebiet stattfindet (nur im Bereich von $\sqrt{-1}$). Das Reelle hat auch seine Existenzberechtigung. Es würde daher verfehlt sein, die eine Theorie lediglich als ein Korollar zur anderen auffassen zu wollen. Berechtigt ist nur die schwächere Forderung, beide Theorien, die ja sehr ähnliche Prämissen haben, soweit es angeht, gemeinsam zu entwickeln; wie es auch im Vorhergehenden geschehen ist.

Der Unterschied zwischen unserer ∇ -Funktion und einer vierreihigen Determinante Δ ist derselbe, wie der Unterschied zwischen der Norm einer einzelnen

Quaternion und einer zweireihigen Determinante. Während bei reellen Argumenten von Δ die Gleichung $\Delta = 0$ durch ∞^{15} Matrices erfüllt wird, und das Gebiet der ∞^{16} Argumente in zwei Bereiche $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ zerlegt, hat bei reellen Argumenten (Quaternionenkoordinaten) die Gleichung $\nabla = 0$ nur ∞^{12} Lösungen, und es besteht die Ungleichung

$$(28) \quad \nabla \geq 0.$$

Man sieht das an den Formeln (4).

Aus dem Gesagten ergibt sich, wie eine Bemerkung zu beurteilen ist, die sich darbietet, wenn man die Gleichungen (1) von vorn herein als Gleichungen für *Matrices* auffasst, also etwa (1¹) ausführlich so schreibt:

$$(29) \quad \begin{aligned} (a_k) \quad & \alpha_{11}^{k1} x_{11}^{(1)} + \alpha_{12}^{k1} x_{21}^{(1)} + \alpha_{11}^{k2} x_{11}^{(2)} + \alpha_{12}^{k2} x_{21}^{(2)} = y_{11}^{(k)} \\ (b_k) \quad & \alpha_{11}^{k1} x_{12}^{(1)} + \alpha_{12}^{k1} x_{22}^{(1)} + \alpha_{11}^{k2} x_{12}^{(2)} + \alpha_{12}^{k2} x_{22}^{(2)} = y_{12}^{(k)} \\ (c_k) \quad & \alpha_{21}^{k1} x_{11}^{(1)} + \alpha_{22}^{k1} x_{21}^{(1)} + \alpha_{21}^{k2} x_{11}^{(2)} + \alpha_{22}^{k2} x_{21}^{(2)} = y_{21}^{(k)} \\ (d_k) \quad & \alpha_{21}^{k1} x_{12}^{(1)} + \alpha_{22}^{k1} x_{22}^{(1)} + \alpha_{21}^{k2} x_{12}^{(2)} + \alpha_{22}^{k2} x_{22}^{(2)} = y_{22}^{(k)} \end{aligned}$$

($k = 1, 2$).

Dieses System von acht Gleichungen zerfällt von selbst in zwei Systeme von je vier Gleichungen (a_1, c_1, a_2, c_2) und (b_1, d_1, b_2, d_2), deren jedes nur noch vier der Unbekannten enthält, und die überdies links dieselben Koeffizienten in gleicher Anordnung enthalten. Die Reduzibilität der Determinante D des Systems aller acht Gleichungen tritt hier ohne weiteres in Evidenz, und es wird der Gedanke nahe gelegt, statt des vorgetragenen besonderen Lösungsverfahrens die gewöhnliche Art der Lösung von vier Gleichungen mit vier Unbekannten anzuwenden. Damit würde aber in die ursprünglich vorgelegten Gleichungen (1) eine nicht unbedeutende formale Verwickelung eingeführt, und ausserdem würde so ein natürlicher Zusammenhang zerrissen werden. Die Zerlegung der zusammen auftretenden Quadrupel von Unbekannten entspricht besonders da nicht dem Wesen der Sache, wo sie in der Anwendung auf reelle Quadrupel $x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ (reelle Quaternionen) nur durch eine imaginäre Transformation bewirkt werden kann.¹

Indessen ergibt sich noch aus dem Gesagten, dass mehr als eine zufällige Übereinstimmung vorliegt, wenn in den Gleichungen (5) gewisse Quaternionen-

¹ Hierzu kommt noch, dass die entwickelte Theorie fast unverändert unter Umständen angewendet werden kann, in denen eine Äquivalenz der zu betrachtenden Grössenquadrupel mit zweireihigen Matrices überhaupt nicht vorhanden ist. Vgl. § 6.

ausdrücke *dritten* Grades auf ähnliche Weise auftreten, wie in der Lösung eines Systems von vier linearen Gleichungen mit vier Unbekannten Determinanten dritten Grades. In der Tat sind die sechszehn Koordinaten dieser vier Quaternionenverbindungen lineare Kombinationen der sechszehn Determinanten dritten Grades, die man der Matrix \mathfrak{H} entnehmen kann, und umgekehrt.

Bemerkt sei schliesslich noch, dass die Aufstellung der Gruppe (17, 18) die Aufgabe löst, *alle* Paare linearer Quaternionengleichungen der Form (1) hinzuschreiben, deren Lösung mit der Lösung der einen oder anderen der Gleichungen (1) selbst äquivalent ist. Es gibt in beiden Fällen zwei Kontinua solcher Gleichungssysteme mit je 31 wesentlichen Parametern, entsprechend den beiden Transformationsschaaren unserer Gruppe.

Insbesondere lässt sich das allgemeinste Paar linearer Gleichungen der Form (1') angeben, das durch *dieselben* Werte (Wertsysteme) x_1, x_2 der Unbekannten befriedigt wird, und dessen Auflösung überdies gleichbedeutend ist mit der Auflösung der Gleichungen (1') selbst:

$$(30) \quad (\lambda_{k1} \alpha_{11} + \lambda_{k2} \alpha_{21}) x_1 + (\lambda_{k1} \alpha_{12} + \lambda_{k2} \alpha_{22}) x_2 = \lambda_{k1} x'_1 + \lambda_{k2} x'_2$$

$$\left(k = 1, 2; \begin{cases} \lambda_{11} \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \lambda_{22} \end{cases} \neq 0, \begin{cases} \alpha_{11} \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \end{cases} \neq 0 \right).$$

Die übrigen Gleichungen der Form (1'), die mit den Gleichungen (1') selbst äquivalent sind, erhält man hieraus durch die Substitution

$$x_1 = \varrho_{11} y_1 + \varrho_{12} y_2, \quad x_2 = \varrho_{21} y_1 + \varrho_{22} y_2 \quad \left(\begin{cases} \varrho_{11} \varrho_{12} \\ \varrho_{21} \varrho_{22} \end{cases} \neq 0 \right).$$

Nach einem Satze des Verfassers, der von CARTAN auf alle sogenannten ursprünglichen Systeme komplexer Grössen ausgedehnt worden ist, bilden die Quaternionenregeln und die Regeln für die Multiplikation zweireihiger Matrices die beiden *einzigen* »Gestalten« eines bestimmten »Typus« der Multiplikation komplexer Grössen mit vier Einheiten.¹

Nach CARTAN hat *nur* zwei Gestalten auch das — ursprüngliche — System komplexer Grössen mit sechzehn Einheiten, dessen Multiplikationstheorem von den Formeln für die Zusammensetzung oder Multiplikation vierreihiger Matrices gebildet wird. Die eine der zwei Gestalten entspricht jenen Formeln unmittelbar. Sie ist dann dargestellt als sogenanntes Produkt der zweiten Gestalt des Quaternionensystems mit ihr selbst, kann aber auch, in anderer Schreibart, durch »Multiplikation« der ersten Gestalt des Quaternionensystems mit ihr selbst erhalten werden. Die andere Gestalt jenes Systems von sechzehn Einheiten wird gefunden, wenn man die beiden Gestalten der Quaternionen mit einander »multipliziert«. Diese zweite Gestalt wird, wenn man die α_{ik} als Zeichen für reelle *Quaternionen* auffasst, eben von den Formeln (12) gebildet, in denen, wie bei den Formeln der ersten Gestalt, ausschliesslich reelle Koeffizienten (0, ± 1) vorkommen. Die vier Koordinaten jeder einzelnen der Quater-

¹ Vgl. Math. Enc. Bd I, 1, S. 182. Französische Ausgabe I, 1, S. 435.

nionen α_{ik} folgen den gewöhnlichen Regeln des Quaternionenkalküls, während die Zusammensetzung (Multiplikation) der Quadrupel $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22})$ den Formeln für die Komposition (Multiplikation) zweireihiger Matrices folgt, also nach den Multiplikationsregeln der zweiten Gestalt der Quaternionen ausgeführt wird.

Die vorgetragene kleine Theorie ist demnach, wenn man von hier ausgeschlossenen Grenzfällen absieht (die bei anderer Gelegenheit behandelt werden sollen), in gewissem Sinne *erschöpfend*. Das Gleiche gilt von den folgenden Entwicklungen, die übrigens minder vollständig gehalten sind, da nach Analogie des ausführlich behandelten Falles anzustellende Überlegungen wohl grossenteils dem Leser überlassen bleiben dürfen.

3.

Die Nablafunktion von $4m^2$ Argumenten.

Die von uns bei zwei Gleichungen angewendete Methode der direkten Berechnung ist bereits im Falle von drei einseitigen Quaternionengleichungen so gut wie unbrauchbar. Wir haben aber in dem über den Fall $m = 2$ Gesagten schon genug Induktionsmaterial, um das Bildungsgesetz einer Function $\nabla(\alpha_{ik})$ von $4m^2$ Argumenten zu erraten, die zur Auflösung von m einseitigen Quaternionengleichungen dienen kann.

Im Falle $m = 1$ verstehen wir unter $\nabla(\alpha) = \{\alpha\}$ die Norm der Quaternion α , also das Produkt $\alpha\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\alpha$. Im Falle $m = 2$ verbinden wir mit dem Zeichen $\nabla(\alpha_{ik}) = \{\alpha_{ik}\}$ den im § 2 beschriebenen Begriff. Wie dann für unbestimmte Werte der Zahl m eine analoge Funktion erklärt werden kann, erkennen wir, wenn wir den Fall $m = 2$ nochmals, und jetzt aus dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerung, betrachten.

Wir werden auf die rechte Fährte durch die Bemerkung geleitet, dass die in § 2 erklärte Funktion sich auf das Quadrat einer zweireihigen Determinante reduziert, wenn die Quaternionen α_{ik} sämtlich skalar sind. Wir sehen dann, dass wir auch ohne solche Einschränkung das Bildungsgesetz von ∇ aus dem Bildungsgesetz der Determinanten ableiten können. Wir multiplizieren die beiden Determinanten

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}), \quad (\tilde{\alpha}_{11}\tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12}\tilde{\alpha}_{21})$$

zunächst nach den gewöhnlichen Regeln, mithin so, wie wenn α_{ik} das Zeichen, nicht für eine Quaternion, sondern für eine einzelne reelle oder komplexe Zahl wäre. In dem gefundenen Ausdruck schreiben wir dann die Glieder hinter einander, die im hinteren (rechten) Index übereinstimmen, bilden also die Produkte

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11}^1 &= \alpha_{11}\tilde{\alpha}_{11}, \quad \mathcal{G}_{12}^1 = \alpha_{11}\tilde{\alpha}_{21}, \quad \mathcal{G}_{21}^1 = \alpha_{21}\tilde{\alpha}_{11}, \quad \mathcal{G}_{22}^1 = \alpha_{21}\tilde{\alpha}_{21}, \\ \mathcal{G}_{11}^2 &= \alpha_{12}\tilde{\alpha}_{12}, \quad \mathcal{G}_{12}^2 = \alpha_{12}\tilde{\alpha}_{22}, \quad \mathcal{G}_{21}^2 = \alpha_{22}\tilde{\alpha}_{12}, \quad \mathcal{G}_{22}^2 = \alpha_{22}\tilde{\alpha}_{22}. \end{aligned}$$

Hierauf ordnen wir die im Determinantenprodukt vorkommenden Produkte dieser Produkte so, dass die *vorderen* (linken) Indices, also die unteren Indices der Quaternionen \mathcal{J}_{ik}^r , *Zyklen* bilden, nämlich eingliedrige Zyklen

$$\mathcal{J}_{11}^1, \mathcal{J}_{22}^1, \quad \mathcal{J}_{11}^2, \mathcal{J}_{22}^2,$$

und zweigliedrige Zyklen

$$\mathcal{J}_{12}^1, \mathcal{J}_{21}^1, \quad \mathcal{J}_{12}^2, \mathcal{J}_{21}^2.$$

Dabei achten wir darauf, dass die zweigliedrigen Zyklen paarweise konjugierte Quaternionenprodukte bilden. Wir lassen nämlich den zweiten der zweigliedrigen Zyklen aus dem ersten dadurch entstehen, dass wir die Reihenfolge der Faktoren und gleichzeitig die Reihenfolge der unteren Indices in jedem Faktor \mathcal{J}_{ik}^r umkehren. Haben wir das formell gebildete Determinantenprodukt auf diese Art geordnet, so wird

$$\begin{aligned} \nabla &= (\mathcal{J}_{11}^1 \cdot \mathcal{J}_{22}^2 - \mathcal{J}_{12}^1 \mathcal{J}_{21}^2) + (\mathcal{J}_{11}^2 \cdot \mathcal{J}_{22}^1 - \mathcal{J}_{12}^2 \mathcal{J}_{21}^1), \\ \nabla &= (\mathcal{J}_{11}^1 \cdot \mathcal{J}_{22}^2 - \mathcal{J}_{21}^1 \mathcal{J}_{12}^2) + (\mathcal{J}_{11}^2 \cdot \mathcal{J}_{22}^1 - \mathcal{J}_{21}^2 \mathcal{J}_{12}^1). \end{aligned}$$

∇ erscheint auf zwei Arten, der Form nach, als Summe zweier Determinanten, und zwar wird die eine von diesen aus der anderen dadurch erhalten, dass man die oberen Indices der Symbole \mathcal{J}_{ik}^r vertauscht.

In ähnlicher Weise erklären wir jetzt eine Funktion $\nabla(\alpha_{ik})$, die aus einer Quaternionenmatrix von m^2 Elementen

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} = (\alpha_{ik})$$

abgeleitet, und mit

$$(I) \quad \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \right\} = \{\alpha_{ik}\}$$

bezeichnet werden soll.

Wir multiplizieren zunächst die beiden Determinanten $|\alpha_{ik}|$ und $|\tilde{\alpha}_{ik}|$ for-

mell aus. In jedem der $(m!)^3$ Entwicklungsglieder lassen wir sodann die Quaternionen zusammentreten, die im hinteren Index übereinstimmen, wir bilden die Produkte

$$\mathcal{J}_{ik}^r = \alpha_{ir} \tilde{\alpha}_{kr}.$$

In den so entstehenden nur noch m -gliedrigen Produkten von Faktoren \mathcal{J}_{ik}^r ordnen wir die Faktoren, in Bezug auf die vorderen Indices, nach Zyklen an, z. B.

$$\mathcal{J}_{11}^r, \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{21}^s, \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{31}^t, \dots$$

Dabei lassen wir den einzelnen Zyklus mit *irgend* einem seiner Elemente beginnen, sorgen aber dafür, dass die benutzten Anordnungen paarweise konjugierte Quaternionenprodukte darstellen, z. B.

$$\mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{31}^t, \mathcal{J}_{13}^t \mathcal{J}_{32}^s \mathcal{J}_{21}^r.$$

Hierauf ordnen wir im einzelnen m -gliedrigen Produkt die vorkommenden Zyklen *beliebig*, aber *auf gleiche Art* in allen m -gliedrigen Produkten, deren Zyklen nur in ihren oberen Indices verschieden, oder doch zu solchen nur in den oberen Indices abweichenden Zyklen konjugiert sind. Z. B. sollen im Falle $m = 5$ unter anderen die folgenden Anordnungen *zugleich* vorkommen:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{31}^t \cdot \mathcal{J}_{45}^u \mathcal{J}_{54}^v, & \quad \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{31}^t \cdot \mathcal{J}_{45}^v \mathcal{J}_{54}^u, \\ \mathcal{J}_{13}^t \mathcal{J}_{32}^s \mathcal{J}_{21}^r \cdot \mathcal{J}_{45}^u \mathcal{J}_{54}^v, & \quad \mathcal{J}_{13}^t \mathcal{J}_{32}^s \mathcal{J}_{21}^r \cdot \mathcal{J}_{45}^v \mathcal{J}_{54}^u. \end{aligned}$$

Das Ergebniss unserer Summation ist dann, wie nunmehr gezeigt werden soll, eine *eindeutig* bestimmte skalare Quaternion — eben die zu erklärende Nablafunktion.

Wir haben zunächst eine Summe von Quaternionenprodukten vor uns, die zur Hälfte mit dem Faktor $\mathbf{1}$, zur Hälfte mit dem Faktor $-\mathbf{1}$ in die Summe eingehen. Jeder diesen Faktoren $\mathbf{1}$, $-\mathbf{1}$ ist das Produkt der Faktoren, mit denen die entsprechenden Entwicklungsglieder der beiden Determinanten $|\alpha_{ik}|$, $|\tilde{\alpha}_{ik}|$ behaftet sind. Diese Faktoren $\pm \mathbf{1}$ selbst lassen sich nach bekannter Regel bestimmen. Wir nennen π_i die Permutation der vorderen Indices der ersten Determinante und π_r die Permutation der hinteren Indices derselben Determinante, die in einem wie oben hingeschriebenen Entwicklungsglied vorkommt, und wir verwenden die entsprechenden Zeichen $\tilde{\pi}_i$, $\tilde{\pi}_r$ für die zweite Determinante. Setzen wir dann noch z. B. $(\pi_i) = \mathbf{1}$ oder $(\pi_i) = -\mathbf{1}$, je

nachdem π_l eine gerade oder eine ungerade Permutation der Indices $1, \dots, n$ ist, so wird

$$(\pi_l) \cdot (\pi_r) \cdot (\tilde{\pi}_l) \cdot (\tilde{\pi}_r) = (\pi_l) \cdot (\tilde{\pi}_l)$$

der gesuchte Faktor ± 1 .

Also nur von den *vorderen* Indices der Faktoren der Produkte $\alpha_{ir} \tilde{\alpha}_{kr}$ hängt das Vorzeichen eines jeden Entwicklungsgliedes von ∇ ab. Zyklen, die sich nur durch die Anordnung der *oberen* Indices unterscheiden, gehen in die Entwicklung von ∇ mit dem gleichen Vorzeichen ein, wenn nur die übrigen, das Produkt vervollständigenden Zyklen dieselben oder wenigstens gleichartig sind. Jedem Zyklus haftet ein bestimmter Faktor ± 1 an, 1 bei Zyklen mit einer ungeraden, -1 bei Zyklen mit einer geraden Anzahl von Gliedern; und das Produkt aller dieser Faktoren liefert den Faktor, oder also das Vorzeichen, des einzelnen Entwicklungsgliedes von ∇ .

Sind sodann in irgend einem Entwicklungsglied $\Phi_1 \dots \Phi_\mu$ die skalaren (eingliedrigen) Zyklen, $\Psi_1 \dots \Psi_\nu$ die übrigen, so folgt nunmehr, dass die erklärte Summe zugleich mit dem Produkt $\pm \Phi_1 \dots \Phi_\mu \Psi_1 \dots \Psi_\nu$ alle Produkte enthält, die in der Entwicklung von

$$\pm \Phi_1 \dots \Phi_\mu (\Psi_1 + \tilde{\Psi}_1) \dots (\Psi_\nu + \tilde{\Psi}_\nu)$$

auftreten. Hieraus geht aber sofort hervor, dass weder eine Umstellung der Zyklen $\Psi_1 \dots \Psi_\nu$, noch auch eine *zyklische* Umstellung der Faktoren irgend eines Zyklus Ψ_ν den Werth der erhaltenen Summe ändern kann. *Es ist also hiermit eine skalare Quaternion $\nabla(\alpha_{ik})$ eindeutig definiert.*

Das Bildungsgesetz von ∇ kann hiernach auch so beschrieben werden:

Man entwickle die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathcal{G}_{11}^r & \mathcal{G}_{12}^s & \mathcal{G}_{13}^t & \dots & \dots \\ \mathcal{G}_{21}^r & \mathcal{G}_{22}^s & \mathcal{G}_{23}^t & \dots & \dots \\ \mathcal{G}_{31}^r & \mathcal{G}_{32}^s & \mathcal{G}_{33}^t & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

nach der üblichen formalen Regel, ordne aber in jedem Entwicklungsglied die Faktoren so an, dass die unteren Indices sich in einem oder mehreren Zyklen an einander anschliessen. *Je zwei Zyklen, die dieselben unteren Indices enthalten, lasse man mit demselben Index beginnen und endigen, und in Produkten, die aus solchen gepaarten Zyklen bestehen, ordne man diese auch auf gleiche Weise.* Schliesslich

nehme man über alle diese Summen von je $m!$ Quaternionenprodukten wieder die Summe, indem man nunmehr die oberen Indices r, s, t, \dots auf alle $m!$ Arten unter einander vertauscht. Das Ergebnis ist dann eine skalare Quaternion, eine gewöhnliche reelle oder komplexe Zahl, eben die Funktion $\nabla(\alpha_{ik})$.

Schliesslich kann man noch, wenn man will, je zwei zusammengehörige (konjugierte) Zyklen zu einem *Ring*, einer skalaren Summe aus einem oder zwei Quaternionenprodukten zusammenfassen. Diese »Ringe« sind dann

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ii}^r &= \alpha_{ir} \tilde{\alpha}_{ir}, & 2S \mathcal{J}_{ih}^r \mathcal{J}_{hi}^s &= \alpha_{ir} \tilde{\alpha}_{hr} \alpha_{hs} \tilde{\alpha}_{is} + \alpha_{is} \tilde{\alpha}_{hs} \alpha_{hr} \tilde{\alpha}_{ir}, \\ 2S \mathcal{J}_{ih}^r \mathcal{J}_{kl}^s \mathcal{J}_{li}^t &= \alpha_{ir} \tilde{\alpha}_{kr} \alpha_{ks} \tilde{\alpha}_{ls} \alpha_{lt} \tilde{\alpha}_{it} + \alpha_{it} \tilde{\alpha}_{lt} \alpha_{ls} \tilde{\alpha}_{ks} \alpha_{kr} \tilde{\alpha}_{ir}, \end{aligned}$$

u. s. w. Aus Produkten solcher Ringe setzt sich dann die Funktion ∇ zusammen, deren skalarer Charakter bei dieser Schreibart ohne Weiteres augenscheinlich wird.

Man erhält z. B. die Entwicklung

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\} = \\ & = \sum \{ \mathcal{J}_{11}^r \cdot \mathcal{J}_{22}^s \cdot \mathcal{J}_{33}^t + 2S \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{31}^t - \\ & - \mathcal{J}_{11}^r \cdot 2S \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{32}^t - \mathcal{J}_{22}^s \cdot 2S \mathcal{J}_{31}^t \mathcal{J}_{13}^r - \mathcal{J}_{33}^t \cdot 2S \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{21}^s \}, \end{aligned}$$

worin die Summe über die sechs Permutationen der Indices r, s, t , d. h. 1, 2, 3 zu erstrecken ist. Da alle auf ähnliche Art gebildeten Summen hierin mit gleichem Vorzeichen zur Aufnahme kommen, so kann man noch kürzer, aber ebenfalls schon hinreichend deutlich, auch schreiben

$$\sum_{(6)} \mathcal{J}_{11}^r \cdot \mathcal{J}_{22}^s \cdot \mathcal{J}_{33}^t - \sum_{(6.3)} \mathcal{J}_{11}^r \cdot 2S \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{32}^t + \sum_{(6.2)} 2S \mathcal{J}_{12}^r \mathcal{J}_{23}^s \mathcal{J}_{31}^t;$$

die den Summenzeichen hinzugefügten Zahlen geben dann an, wie sich die $6 + 18 + 12 = 36$ Entwicklungsglieder von ∇ auf die drei vorkommenden Arten von Quaternionenprodukten verteilen. In gleicher Weise, wie die letzte Formel, ist die folgende zu lesen:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(24)} \mathcal{G}_{11}^r \cdot \mathcal{G}_{22}^s \cdot \mathcal{G}_{33}^t \cdot \mathcal{G}_{44}^u - \sum_{(24.6)} \mathcal{G}_{11}^r \cdot \mathcal{G}_{22}^s \cdot 2S \mathcal{G}_{34}^t \mathcal{G}_{43}^u + \\
&+ \sum_{(24.3)} 2S \mathcal{G}_{12}^r \mathcal{G}_{21}^s \cdot 2S \mathcal{G}_{34}^t \mathcal{G}_{43}^u + \sum_{(24.8)} \mathcal{G}_{11}^r \cdot 2S \mathcal{G}_{23}^s \mathcal{G}_{34}^t \mathcal{G}_{42}^u - \\
&\quad - \sum_{(24.6)} 2S \mathcal{G}_{12}^r \mathcal{G}_{23}^s \mathcal{G}_{34}^t \mathcal{G}_{41}^u.
\end{aligned}$$

Wir gehen jetzt dazu über, aus dem geschilderten Bildungsgesetz einige Eigenschaften der Funktion ∇ abzulesen.

1. In der Beschreibung von ∇ war keine Zeile und keine Spalte der Quaternionenmatrix (α_{ik}) vor den übrigen Zeilen oder Spalten ausgezeichnet worden. Eine Vertauschung von Zeilen oder von Spalten in der Matrix (α_{ik}) bewirkt aber die entsprechende Vertauschung von Zeilen oder Spalten in der Matrix $(\tilde{\alpha}_{ik})$. Es ergibt sich also:

∇ hängt (hierin ungleich einer Determinante von m^2 Elementen) *symmetrisch* ab von den Quaternionen- m -tupeln, die in parallelen Reihen oder Spalten der Matrix (α_{ik}) stehen. Was von der ersten Reihe oder Spalte ausgesagt werden kann, gilt von allen übrigen.

2. Vertauscht man die Reihen mit den Spalten, so erhält man zwar eine ∇ nahe verwandte, aber sobald $m > 1$, von ∇ verschiedene Funktion. Dagegen ist

$$(2) \quad \nabla(\alpha_{ik}) = \nabla(\tilde{\alpha}_{ki}).$$

Es gehen nämlich bei Ersetzung der Quaternionenmatrix (α_{ik}) durch $(\tilde{\alpha}_{ki})$ die in der Entwicklung von ∇ auftretenden skalaren Summen oder Ringe

$$\mathcal{G}_{11}^r, \quad 2S(\mathcal{G}_{12}^r \mathcal{G}_{21}^s), \quad 2S(\mathcal{G}_{12}^r \mathcal{G}_{23}^s \mathcal{G}_{31}^t), \dots$$

der Reihe nach über in ähnlich gebildete Summen oder Ringe

$$\mathcal{G}_{rr}^1, \quad 2S(\mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{G}_{sr}^1), \quad 2S(\mathcal{G}_{rs}^2 \mathcal{G}_{st}^3 \mathcal{G}_{tr}^1), \dots,$$

die in gleicher Weise wie die ersten in die Entwicklung von ∇ eingehen.

Daher kann man aus jeder Eigenschaft der Funktion ∇ , in der eine Aussage über Zeilen der Matrix (α_{ik}) vorkommt, eine solche ableiten, in der an Stelle der Zeilen Spalten treten und umgekehrt — wie bei den Determinanten. Nur sind solche zusammengehörige Aussagen im vorliegenden Falle nicht ganz gleichlautend.

3. ∇ lässt sich so schreiben, dass *jedes* Glied seiner Entwicklung mit

einem Element der Form α_{1r} beginnt und mit einem der Form $\tilde{\alpha}_{1s}$ endigt. Die Elemente der ersten Reihe kommen dann nur in Verbindungen des Typus

$$\alpha_{1r}(\dots)\tilde{\alpha}_{1s}$$

— ausserhalb der Klammer (...) — vor.

Zunächst nämlich ist klar, dass ∇ linear und homogen ist in bezug auf die m Quaternionen α_{1k} , wie auch in bezug auf die zu diesen konjugierten Quaternionen $\tilde{\alpha}_{1k}$. Kommt nun ein Element α_{1r} in einem Zyklus vor, so kann man den Zyklus mit diesem Element beginnen lassen. Er endigt dann notwendig mit einem Element der Form $\tilde{\alpha}_{1s}$. Ist in einem Entwicklungsglied von ∇ nur dieser eine Zyklus vorhanden, so ist damit die verlangte Form schon hergestellt, da der konjugierte (mit dem ersten gepaarte) Zyklus mit α_{1s} beginnt und mit $\tilde{\alpha}_{1r}$ endigt. Sind noch weitere Zyklen vorhanden, so sind sie entweder eingliedrig, oder sie treten (durch das Zeichen $2S$ zu Ringen zusammengefasst) paarweise auf. Jeder solche Ring kann aber, da er eine skalare Quaternion ist, in den ersten Zyklus an irgend einer Stelle eingeschoben werden, womit wieder die verlangte Form hergestellt ist.

Man kann also setzen

$$(3) \quad \nabla = \sum_{r,s} \alpha_{ir} \Theta_{rs}^i \tilde{\alpha}_{is} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

und zwar, wenn der Index i gegeben ist, im Wesentlichen *nur auf eine Art*; im Wesentlichen, das heisst, wenn man von lediglich formalen Umgestaltungen der Entwicklungskoeffizienten Θ_{rs}^i absieht. Da ∇ skalar ist, so folgt noch

$$(4) \quad \Theta_{sr}^i = \tilde{\Theta}_{rs}^i,$$

insbesondere $\Theta_{kk}^i = \tilde{\Theta}_{kk}^i$; der letzte Ausdruck ist offenbar nichts Anderes als die ∇ -Funktion von $(m-1)^2$ Elementen, die entsteht, wenn man in der Matrix (α_{ik}) die i^{te} Reihe und die k^{te} Spalte unterdrückt.

Man beachte die Analogie des Ausdrucks (3) mit einer HERMITE'schen Form.

4. Aus der Entwicklung (3) oder also aus der Formel

$$\nabla = \sum_{r,s} \alpha_{ks} \tilde{\Theta}_{rs}^k \tilde{\alpha}_{kr} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

erhält man, auf die unter 2. beschriebene Art, noch eine zweite, zu (3) analoge Entwicklung

$$(5) \quad \nabla = \sum_{r,s} \tilde{\alpha}_{sk} H_{sr}^k \alpha_{rk} \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$(6) \quad H_{sr}^k = \tilde{H}_{rs}^k,$$

wobei H_{sr}^k aus $\tilde{\Theta}_{rs}^k$ dadurch entsteht, dass man erstens in allen Quaternionenprodukten die unteren *Indices* der einzelnen Faktoren vertauscht, und zweitens jede so erhaltene Quaternion durch ihre Konjugierte ersetzt. $\tilde{\Theta}_{rs}^k$ aber ist aus Θ_{rs}^k dadurch entstanden, dass man die Reihenfolge aller *Faktoren* umgekehrt und jede Quaternion durch ihre Konjugierte ersetzt hat.

Der Entwicklungskoeffizient H_{sr}^k geht also aus Θ_{rs}^k dadurch hervor, dass man die Reihenfolge aller vorkommenden Quaternionenprodukte und zugleich für jeden einzelnen Faktor die Reihenfolge der beiden unteren *Indices* umkehrt.

Wir behaupten weiter, dass in beiden Entwicklungen von ∇ die Koeffizienten der Quaternion α_{ik} und ebenso die Koeffizienten der Quaternion $\tilde{\alpha}_{ik}$ übereinstimmen:

$$(7) \quad \sum_s \Theta_{ks}^i \tilde{\alpha}_{is} = \sum_s \tilde{\alpha}_{sk} H_{si}^k$$

$$(8) \quad \sum_r \alpha_{ir} \Theta_{rk}^i = \sum_r H_{ir}^k \alpha_{rk}$$

($i, k = 1, 2, \dots, m$).

Zunächst nämlich müssen, da beide Entwicklungen nur formale Umgestaltungen von einander sind, in ihnen die Glieder übereinstimmen, die überhaupt von dem Element α_{ik} abhängen. Nach dem Vorhergehenden genügt es, den Fall $i = k = 1$ zu betrachten. Wir erhalten dann, wenn wir noch den selbstverständlichen oberen Index 1 unterdrücken, die Identität

$$\alpha_{11} \cdot \Theta_{11} \cdot \tilde{\alpha}_{11} + \alpha_{11} \cdot \sum_2^m \Theta_{1s} \tilde{\alpha}_{1s} + \sum_2^m \alpha_{1s} \Theta_{s1} \cdot \tilde{\alpha}_{11} =$$

$$= \tilde{\alpha}_{11} \cdot H_{11} \cdot \alpha_{11} + \sum_2^m \tilde{\alpha}_{s1} H_{s1} \cdot \alpha_{11} + \tilde{\alpha}_{11} \cdot \sum_2^m H_{1s} \alpha_{s1},$$

die bestehen muss für *alle* Quaternionen α_{11} . Hieraus folgt zunächst, was wir schon wissen, dass Θ_{11} mit H_{11} identisch und ein Skalar ist; es ist ja $\Theta_{11} = \nabla(\alpha_{22}, \dots, \alpha_{mm}) = H_{11}$. Weiter hat man dann eine identische Quaternionengleichung der Form

$$za + b\tilde{z} = cz + \tilde{z}d$$

vor sich, die nur dann bestehen kann, wenn $a = c$ und $b = d$ (und überdies die Summe der vektoriiellen Bestandteile von $a = c$ und $b = d$ gleich Null) ist. Aus (4) folgt aber auch noch, dass die Ausdrücke (7) und (8) *konjugierte* Quaternionen sind. *Man kann also setzen*

$$(9) \quad A_{ik} = \sum_s \Theta_{ks}^i \tilde{\alpha}_{is} = \sum_s \tilde{\alpha}_{sk} H_{si}^k,$$

$$(10) \quad \tilde{A}_{ik} = \sum_s \alpha_{is} \Theta_{sk}^i = \sum_s H_{is}^k \alpha_{sk}.$$

Es gelten dann die Gleichungen

$$(11) \quad \begin{aligned} \nabla &= \sum_k \alpha_{ik} A_{ik} = \sum_k \tilde{A}_{ik} \tilde{\alpha}_{ik}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \nabla &= \sum_i A_{ik} \alpha_{ik} = \sum_i \tilde{\alpha}_{ik} \tilde{A}_{ik}, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

die an die Entwicklungen einer m -reihigen Determinante nach Zeilen und Spalten erinnern.

Im Falle $m = 3$ z. B. kann der erste Entwicklungskoeffizient A_{11} in die folgenden beiden Formen gesetzt werden:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \Theta_{11}^1 \tilde{\alpha}_{11} + \Theta_{12}^1 \tilde{\alpha}_{12} + \Theta_{13}^1 \tilde{\alpha}_{13} = \\ &= \{\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{33} - \alpha_{22} \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{32} - \tilde{\alpha}_{32} \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{23} \alpha_{22} + \tilde{\alpha}_{32} \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{23} \alpha_{23}\} \tilde{\alpha}_{11} + \\ &+ \{\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{32} - \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{33} - \tilde{\alpha}_{31} \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{23} \alpha_{23} + \tilde{\alpha}_{31} \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{23} \alpha_{12}\} \tilde{\alpha}_{12} + \\ &+ \{\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{33} - \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{32} \alpha_{32} - \tilde{\alpha}_{31} \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22} + \tilde{\alpha}_{31} \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{23}\} \tilde{\alpha}_{13}, \\ A_{11} &= \tilde{\alpha}_{11} H_{11}^1 + \tilde{\alpha}_{21} H_{21}^1 + \tilde{\alpha}_{31} H_{31}^1 = \\ &= \tilde{\alpha}_{11} \{\alpha_{33} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22} - \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{22} - \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{32} \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{23} + \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{32} \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{13}\} + \\ &+ \tilde{\alpha}_{21} \{\alpha_{23} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{33} \alpha_{22} \alpha_{12} - \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{32} \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{13} + \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{13}\} + \\ &+ \tilde{\alpha}_{31} \{\alpha_{33} \tilde{\alpha}_{23} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{23} \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{33} \tilde{\alpha}_{13} + \alpha_{32} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{23} \tilde{\alpha}_{13}\}. \end{aligned}$$

Durch zyklische Vertauschung der an erster und zweiter Stelle stehenden Indices erhält man daraus die übrigen Koeffizienten A_{ik} .

5. Neben den Gleichungen (11) bestehen der bilinearen Gleichungen

$$(12) \quad 0 = \sum_k \alpha_{jk} A_{ik}, \quad 0 = \sum_i A_{ik} \alpha_{ij} \quad (i \neq j, = 1, 2, \dots, m).$$

Dies ist wieder eine Eigenschaft, die einer solchen m -reihiger Determinanten analog ist. Multipliziert man z. B. die Quaternionen

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1m},$$

die nach Art von Unterdeterminanten den Elementen der ersten Zeile der Matrix (α_{ik}) zugeordnet sind, der Reihe nach *vorn* mit $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jm}$, so wird die Summe der Produkte ∇ oder Null, je nachdem $j = 1$ oder $j \neq 1$ ist.

Es genügt, die erste der Gleichungen (12) für den Fall $i = 1, j = 2$ zu erweisen. Wir verteilen dazu die in der Entwicklung von ∇ vorkommenden Index-Zyklen auf vier Gruppen. I möge alle Zyklen umfassen, die den Index 1, aber nicht den Index 2 enthalten. Analog erklären wir die Gruppe II, mit Vertauschung der Indices 1, 2. III umfasse alle Zyklen, die beide Indices 1, 2 enthalten, IV endlich die von beiden Indices freien Zyklen. Als uneigentlichen Zyklus rechnen wir zu IV noch die Einheit. Ferner lassen wir jeden Zyklus aus I oder III mit dem Index 1, jeden Zyklus aus II mit dem Index 2 beginnen.

Wir bemerken nun, dass die Glieder der Entwicklung von ∇ sich paarweise nach dem Schema

$$\pm \{I. II - III\}. IV$$

anordnen lassen. In der Tat erhalten wir aus jedem geordneten Produkt von zwei Zyklen der Typen I, II,

$$\mathcal{J}_{1r} \dots \mathcal{J}_{01} \cdot \mathcal{J}_{2s} \dots \mathcal{J}_{02}$$

durch Vertauschung der *ersten* Indices 1, 2 der Faktoren mit 2, 1 und Umstellung der Faktoren einen bestimmten Zyklus des Typus III,

$$\mathcal{J}_{1s} \dots \mathcal{J}_{02} \mathcal{J}_{2r} \dots \mathcal{J}_{01},$$

und offenbar tritt dieser Zyklus in die Entwicklung von ∇ mit dem Faktor ∓ 1 ein, wenn das Produkt der beiden ersten Zyklen mit dem Faktor ± 1 aufgetreten war. Auch kann man aus dem Zyklus des Typus III eindeutig wieder das Produkt des Typus I. II ableiten.

Ersetzt man nun in beiden Produkten I. II und III den ersten Index (1) durch den Index 2, so erhält man als Faktor des Aggregats IV, das von dieser Operation nicht betroffen wird, eine Differenz

$$\pm \{ \mathcal{J}_{2r} \dots \mathcal{J}_{01} \cdot (\mathcal{J}_{2s} \dots \mathcal{J}_{02}) - (\mathcal{J}_{2s} \dots \mathcal{J}_{02}) \cdot \mathcal{J}_{2r} \dots \mathcal{J}_{01} \},$$

in der Minuendus und Subtrahendus denselben Zyklus als Faktor enthalten, und in der auch die beiden anderen, vorn und hinten auftretenden Faktoren (die nicht Zyklen sind) übereinstimmen.

Bei der Summation über die oberen Indices der Quaternionen $\mathcal{J}_{\lambda\mu}$ müssen sich nun die Differenzen der bezeichneten Form paarweise zerstören, nach dem Schema

$$\begin{aligned} & \{ \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\rho_1} \cdot \vartheta_{2s}^t \dots \vartheta_{\sigma_2}^r - \vartheta_{2s}^t \dots \vartheta_{\sigma_2}^r \cdot \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\rho_1} \} + \\ & + \{ \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\rho_1} \cdot \vartheta_{2\sigma}^r \dots \vartheta_{s_2}^t - \vartheta_{2\sigma}^r \dots \vartheta_{s_2}^t \cdot \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\rho_1} \} = \\ & = 2S(\vartheta_{2s}^t \dots \vartheta_{\sigma_2}^r) \{ \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\rho_1} - \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\rho_1} \} = 0. \end{aligned}$$

Man wird z. B. im Falle $n = 5$, unter anderen, die folgenden vier Differenzen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & - \{ \vartheta_{1s}^t \vartheta_{s_1}^r \cdot \vartheta_{24}^u \vartheta_{45}^v \vartheta_{s_2}^s - \vartheta_{14}^u \vartheta_{45}^v \vartheta_{s_2}^s \vartheta_{2s}^t \vartheta_{s_1}^r \} - \\ & - \{ \vartheta_{1s}^t \vartheta_{s_1}^r \cdot \vartheta_{2s}^v \vartheta_{s_4}^u \vartheta_{4_2}^s - \vartheta_{1s}^v \vartheta_{s_4}^u \vartheta_{4_2}^s \vartheta_{2s}^t \vartheta_{s_1}^r \} - \\ & - \{ \vartheta_{1s}^t \vartheta_{s_1}^r \cdot \vartheta_{24}^s \vartheta_{45}^u \vartheta_{s_2}^v - \vartheta_{14}^s \vartheta_{45}^u \vartheta_{4_5}^v \vartheta_{2s}^t \vartheta_{s_1}^r \} - \\ & - \{ \vartheta_{1s}^t \vartheta_{s_1}^r \cdot \vartheta_{2s}^s \vartheta_{s_4}^v \vartheta_{4_2}^u - \vartheta_{1s}^s \vartheta_{s_4}^v \vartheta_{4_2}^u \vartheta_{2s}^t \vartheta_{s_1}^r \}. \end{aligned}$$

Hier sind aus der formalen Entwicklung der Determinante

$$| \vartheta_{11}^r \vartheta_{22}^s \vartheta_{33}^t \vartheta_{44}^u \vartheta_{55}^v |$$

zunächst ein zweigliedriger Zyklus des Typus I, dann ein dreigliedriger Zyklus des Typus II ausgewählt. Damit hat man die erste der vier Differenzen. Durch sie ist die zweite bestimmt, bei der der Zyklus II im umgekehrten Sinne durchlaufen wird. Die dritte Differenz ergibt sich dann aus der ersten durch Permutation der oberen Indices. Sie wird eindeutig bestimmt durch die Forderung, dass der dritte Zyklus des Typus II mit dem zweiten einen Ring bilden soll. Ebenso entsteht die vierte Differenz aus der zweiten, ihr Zyklus vom Typus II bildet einen Ring mit dem ersten dieser Zyklen. Ersetzt man dann ϑ_{1x}^t durch ϑ_{2x}^t , so erhält man eine Summe von vier neuen Differenzen, und in dieser zerstören sich das erste und vierte, sowie das zweite und dritte Glied. —

Die beschriebene Anordnung der Produkte $\vartheta_{\lambda\mu}$ mag noch für den Fall $n=4$ vollständig durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (41) & (42) & (43) & (44) \end{vmatrix} = \\ & = \{ (11) \cdot (22) - (12) (21) \} \cdot \{ (33) \cdot (44) - (34) (43) \} - \\ & - \{ (11) \cdot (23) (32) - (13) (32) (21) \} \cdot (44) - \\ & - \{ (11) \cdot (24) (42) - (14) (42) (21) \} \cdot (33) - \\ & + \{ (11) \cdot (23) (34) (42) - (13) (34) (42) (21) \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{(11) \cdot (24) (43) (32) - (14) (43) (32) (21)\} + \\
& - \{(13) (31) \cdot (22) - (12) (23) (31)\} \cdot (44) - \\
& - \{(14) (41) \cdot (22) - (12) (24) (41)\} \cdot (33) + \\
& + \{(13) (31) \cdot (24) (42) - (14) (42) (23) (31)\} + \\
& + \{(14) (41) \cdot (23) (32) - (13) (32) (24) (41)\} + \\
& + \{(13) (34) (41) \cdot (22) - (12) (23) (34) (41)\} + \\
& + \{(14) (43) (31) \cdot (22) - (12) (24) (43) (31)\}.
\end{aligned}$$

Das Ganze stellt eine Entwicklung von ∇ nach Art der LAPLACE'schen Determinantenentwicklung in bezug auf die Unterdeterminanten aus den beiden ersten Reihen dar. Behandelt man die Faktoren des Typus IV ebenfalls in der beschriebenen Weise, so erhält man eine auch in der Form völlig bestimmte Darstellung von ∇ , eben die im Beispiel $n=4$ angegebene.

Aus dem bewiesenen Satze ergeben sich noch einige Folgerungen analog Sätzen der Determinantentheorie; namentlich sieht man, dass eine ∇ -Funktion mit zwei gleichen Reihen oder Spalten den Wert Null hat.

6. Die verschwindenden Ausdrücke (12) sind einseitige lineare homogene Funktionen der Quaternionen $\tilde{\alpha}_{i1}, \dots, \tilde{\alpha}_{im}$ oder $\tilde{\alpha}_{1k}, \dots, \tilde{\alpha}_{1m}$. Diese aber können nicht identisch gleich Null sein, wenn nicht alle Koeffizienten dieser Quaternionen Null sind.

Es ist bequem, hier einen Wechsel der Bezeichnung eintreten zu lassen. Wir setzen

$$\Theta_{ks}^i = \Phi_{ik}^s, \quad H_{si}^k = \Psi_{ik}^s,$$

so dass

$$(13) \quad \tilde{\Phi}_{ik}^s = \Phi_{is}^k, \quad \tilde{\Psi}_{ik}^s = \Psi_{sk}^i$$

wird. Wir haben dann

$$(14) \quad A_{ik} = \sum_s \Phi_{ik}^s \tilde{\alpha}_{is} = \sum_s \tilde{\alpha}_{sk} \Psi_{ik}^s,$$

ferner

$$\begin{aligned}
(15) \quad \nabla &= \sum_k \alpha_{ik} A_{ik} = \sum_{k,s} \alpha_{ik} \Phi_{ik}^s \tilde{\alpha}_{is}, \\
\nabla &= \sum_{i,s} A_{ik} \alpha_{ik} = \sum_{i,s} \tilde{\alpha}_{sk} \Psi_{ik}^s \alpha_{ik},
\end{aligned}$$

und

$$0 = \sum_k \alpha_{jk} A_{ik} = \sum_{k,s} \alpha_{jk} \mathcal{O}_{ik}^s \tilde{\alpha}_{is} \quad (j \neq i),$$

$$0 = \sum_i A_{ik} \alpha_{il} = \sum_{i,s} \tilde{\alpha}_{sk} \Psi_{ik}^s \alpha_{il} \quad (l \neq k).$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern nun, wie gesagt, je n verschiedene Gleichungen,

$$(16) \quad \begin{aligned} 0 &= \sum_k \alpha_{jk} \mathcal{O}_{ik}^s & (j \neq i, s = 1, 2, \dots, m) \\ 0 &= \sum_i \Psi_{ik}^s \alpha_{il} & (l \neq k, i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

die wir mit den Gleichungen (14) zusammenstellen wollen:

$$(17) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_{ik} &= \sum_s \alpha_{is} \mathcal{O}_{is}^k, & \tilde{A}_{ik} &= \sum_s \Psi_{sk}^i \alpha_{sk}, \\ 0 &= \sum_s \alpha_{js} \mathcal{O}_{is}^k, & 0 &= \sum_s \Psi_{sk}^i \alpha_{sl}, \end{aligned}$$

$(j \neq i, k = 1, 2, \dots, m), \quad (l \neq k, i = 1, 2, \dots, m).$

In dem oben ausgeführten Beispiel $m = 3$ (S. 27) sind die Koeffizienten von $\tilde{\alpha}_{11}, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\alpha}_{13}$ die hier mit $\mathcal{O}_{11}^1, \mathcal{O}_{11}^2, \mathcal{O}_{11}^3$ bezeichneten Funktionen. Ersetzt man $\tilde{\alpha}_{11}, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\alpha}_{13}$ der Reihe nach durch $\tilde{\alpha}_{21}, \tilde{\alpha}_{22}, \tilde{\alpha}_{23}$, oder durch $\tilde{\alpha}_{31}, \tilde{\alpha}_{32}, \tilde{\alpha}_{33}$, so erhält man die Summe Null.

7. ∇ ist eine irreduzible Funktion der $4m^2$ Koordinaten der Quaternionen α_{ik} . Diese Behauptung, die ja in den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ zutrifft, muss für $m = n + 1$ richtig sein, wenn sie es für den Wert $m = n$ ist. Die $(n + 1)$ -reihige ∇ -Funktion geht nämlich in das Quadrat einer beliebigen $(n + 1)$ -reihigen Determinante, also in das Quadrat einer irreduzibeln Funktion $(n + 1)^{\text{ten}}$ Grades über, wenn alle Quaternionen α_{ik} skalar werden. Daher kann ein irreduzibler Teiler von ∇ nur den Grad $n + 1$ oder den Grad $2(n + 1)$ haben. Der erste Fall aber ist unmöglich, da die ∇ -Funktion $(2n + 2)^{\text{ten}}$ Grades

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{00}, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & \alpha_{11}, & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \alpha_{n1}, & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\} = \{\alpha_{00}\} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\}$$

einen Teiler vom Grade $2n$ hat, der selbst eine nicht-spezialisierte ∇ -Funktion ist.

4.

**Einseitige Quaternionengleichungen mit beliebig vielen Unbekannten.
Weitere Eigenschaften der Nablafunktion.**

Die Auflösung der Gleichungssysteme

$$(1^l) \quad \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{im} x_m = x'_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(1^r) \quad \xi'_k = \xi_1 \alpha_{1k} + \cdots + \xi_m \alpha_{mk} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

ergibt sich nun ohne Weiteres in allen Fällen, in denen überhaupt eine eindeutig bestimmte Lösung existiert, aus den Gleichungen (11) und (12) in § 3. Ist nämlich $\nabla(\alpha_{ik}) \neq 0$, so folgt

$$(2^l) \quad A_{1k} x'_1 + \cdots + A_{mk} x'_m = \nabla \cdot x_k \quad (k = 1 \dots m)$$

$$(2^r) \quad \xi'_i \cdot \nabla = \xi'_1 A_{i1} + \cdots + \xi'_m A_{im} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Wie schon im Falle $m = 2$ (und auch im Falle $m = 1$) ist eine eindeutig bestimmte Lösung immer dann und nur dann vorhanden, wenn $\nabla \neq 0$ ist. Zwischen ∇ und der Determinante D der in je $4m$ gewöhnliche lineare Gleichungen zerlegten Systeme (1) besteht die Beziehung

$$(3) \quad D = \nabla^2.$$

Ferner lassen sich die an den Fall $m = 2$ geknüpften gruppentheoretischen Überlegungen ohne sonderliche Änderung auf unbestimmte Werte der Zahl m ausdehnen. Namentlich ergibt sich auch *eine Multiplikationsregel für die ∇ -Funktion*. Wir erklären das Produkt zweier Quaternionenmatrices, unter der Annahme, dass der erste Index (i) die Reihen, der zweite (k) die Spalten einer solchen Matrix charakterisiert, nach der gewöhnlichen Regel: Wir schreiben

$$(\alpha_{ik})(\beta_{ik}) = (\gamma_{ik}),$$

wenn

$$\alpha_{i1} \beta_{1k} + \cdots + \alpha_{im} \beta_{mk} = \gamma_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, m)$$

ist. *Es wird dann*

$$(4) \quad \{\alpha_{ik}\} \cdot \{\beta_{ik}\} = \{\gamma_{ik}\}.$$

Ferner lässt sich die ∇ -Funktion, genau so wie im Falle $m = 2$, als $2m$ -reihige Determinante darstellen, deren Elemente beliebig, nur in der Bezeichnung zu m^2 zweireihigen Matrices (*als Gittermatrix*) angeordnet sind. Die ganze vorge-

tragene Theorie findet ohne Weiteres auf solche Matrices, und die zugehörigen Gleichungen — Gleichungen für Matrices — Anwendung.

Es versteht sich, dass von der Multiplikationsregel (4) ein ähnlicher Gebrauch gemacht werden kann, wie von der Multiplikationsregel für *m-reihige* Determinanten. Ich habe nicht die Absicht, in dieser Hinsicht Vollständigkeit anzustreben, will aber einen Lehrsatz ableiten, von dem wir sogleich Gebrauch zu machen haben werden.

Wir bilden zunächst das Produkt

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{array} \right\} = \nabla^{2m},$$

erhalten also

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{array} \right\} = \nabla^{2m-1};$$

hierauf bilden wir das Produkt

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{array} \right\} = \{A_{11}\} \cdot \nabla^{2m-2},$$

und erhalten

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{array} \right\} \cdot \nabla = \{A_{11}\} = N A_{11}.$$

Hieraus folgt allgemein der zuvor schon unter der Annahme $m = 2$ bewiesene Satz, dass ∇ *semidefinit* ist,

$$\nabla \geq 0,$$

wenn die $4m$ Koordinaten der Quaternionen α_{ik} reell sind¹ ($m > 1$).

¹ Siehe weiterhin S. 36.

In gleicher Weise liefert das Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{m2} \\ 0 & 0 & \nabla & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nabla \end{pmatrix}$$

die Formel

$$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \cdot \nabla^3 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix};$$

allgemein erhält man auf diese Art

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & \dots & \alpha_{k+1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m,k+1} & \dots & \alpha_{m,m} \end{pmatrix} \cdot \nabla^{2k-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}.$$

Anlass zur Verwertung der Formel (6) gibt uns das Gleichungssystem (17) in § 3. Hieraus folgt nämlich unmittelbar, dass man *in der Regel* die Lösung der Gleichungen (1) noch auf mannigfache andere Arten darstellen kann. Wir erhalten

$$(8^l) \quad \Psi_{1k}^i x'_1 + \dots + \Psi_{mk}^i x'_m = \tilde{A}_{ik} x_k \quad (i, k = 1, \dots, m)$$

$$(8^r) \quad \xi_i \tilde{A}_{ik} = \xi'_1 \Phi_{i1}^k + \dots + \xi'_m \Phi_{im}^k \quad (k, i = 1, \dots, m).$$

Es ist nicht ohne Interesse, diese Lösungen der Gleichungen (1), die wir vielleicht als *Nebenlösungen* bezeichnen dürfen, mit der *Hauptlösung* (2) zu vergleichen, die der Bequemlichkeit halber nochmals hergesetzt werden soll:

$$(9^l) \quad A_{1k} x'_1 + \dots + A_{mk} x'_m = \nabla \cdot x_k, \quad (k = 1, \dots, m)$$

$$(9^r) \quad \xi_i \cdot \nabla = \xi'_1 A_{i1} + \dots + \xi'_m A_{im} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Zunächst sehen wir:

Die Hauptlösung lässt sich in jedem der zwei Fälle (l, r) als lineare Kombination der m Nebenlösungen darstellen (deren Koeffizienten in den Koordinaten der

Quaternionen α_{st} Gradzahlen haben, die um je eine Einheit geringer sind als die Gradzahlen der entsprechenden Koeffizienten der Hauptlösung).

In der Tat bestehen nach Nr. (13), (15) und (17) in § 3 die Gleichungen

$$(10^d) \quad \sum_i \tilde{\alpha}_{ik} \Psi_{sk}^i = A_{sk}, \quad \sum_i \tilde{\alpha}_{ik} \tilde{A}_{ik} = \nabla \quad (k, s = 1, \dots, m),$$

$$(10^e) \quad \sum_k \Phi_{is}^k \tilde{\alpha}_{ik} = A_{is}, \quad \sum_k \tilde{A}_{ik} \tilde{\alpha}_{ik} = \nabla \quad (i, s = 1, \dots, m).$$

Ferner erhalten wir aus (6), oder aus der gleichbedeutenden Formel

$$(11) \quad N A_{ik} = \nabla \cdot \Phi_{ik}^k = \nabla \cdot \Psi_{ik}^i$$

die Formeln, die den Übergang von den einzelnen Nebenlösungen zur Hauptlösung vermitteln; multiplizieren wir nämlich beide Seiten der Gleichungen (8) mit A_{ik} , um auf diese Art zu Gleichungen mit skalarem Nenner überzugehen, so erhalten wir die Gleichungen (9) mit einem Faktor

$$\Phi_{ik}^k = \Psi_{ik}^i,$$

dessen Verschwinden also jene Nebenlösung unbrauchbar macht.

Endlich ergeben sich noch, wenn man die Produkte $\tilde{A}_{ik} x_k$ und $\nabla \cdot x_k$, $\xi_i \tilde{A}_{ik}$ und $\xi_i \cdot \nabla$ aus den Gleichungen (8) und (9) eliminiert, die merkwürdigen Formeln

$$(12) \quad \nabla \cdot \Phi_{ik}^s = A_{ik} \tilde{A}_{is}, \quad \nabla \cdot \Psi_{ik}^s = \tilde{A}_{sk} A_{ik}.$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, deren Substitution in einer Reihe zuvor entwickelter Gleichungen Identitäten entstehen lässt, dass die bilinearen Formen, die uns zur Darstellung von ∇ gedient haben,

$$\sum_{k,s} \alpha_{ik} \Phi_{ik}^s \tilde{\alpha}_{is} = \nabla = \sum_{i,s} \tilde{\alpha}_{sk} \Psi_{ik}^s \alpha_{ik}$$

sehr spezielle Koeffizientensysteme besitzen: Es bestehen die sämtlichen Gleichungen

$$(13) \quad \Phi_{ir}^s \Phi_{is}^t - \Phi_{is}^s \cdot \Phi_{ir}^t = 0, \quad \Psi_{rk}^s \Psi_{sk}^t - \Psi_{sk}^s \cdot \Psi_{rk}^t = 0,$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ik}^s \Phi_{ik}^t \\ \Phi_{il}^s \Phi_{il}^t \end{array} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ik}^s \Psi_{jk}^t \\ \Psi_{ik}^t \Psi_{jk}^s \end{array} \right\} = 0.^1$$

¹ Die Gleichungen (12) lassen noch erkennen, dass die Produkte

$$\Phi_{ik}^s = \theta_{ks}^i, \quad \Psi_{ik}^s = H_{si}^k$$

Zu beachten ist, dass die vorgetragene Lösungsmethode eben so wenig die Bedeutung eines Universalrezepts hat, wie die allgemeine Theorie der linearen Gleichungen. Es wird das durch den Fall erläutert, in dem alle Quaternionen oder Matrices α_{ik} skalar sind. ∇ wird dann das Quadrat der Determinante jener Grössen, und in den Nennern der sachgemäss gebildeten Ausdrücke für die Unbekannten erscheint nur diese Determinante an Stelle von ∇ .

Das zuvor über das Vorzeichen der ∇ -Funktion Gesagte wird ergänzt durch einen Satz von I. SCHUR:

Sind die Koordinaten der m^2 Quaternionen $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$ reell, so kann, wenn $m > 1$ ist, die zugehörige ∇ -Funktion nicht als Summe von Quadraten reeller ganzer rationaler Funktionen (homogener Formen) jener Koordinaten dargestellt werden.

Es genügt offenbar, den Beweis, den ich ebenfalls einer Mitteilung von I. SCHUR verdanke, für den Fall $m = 2$ zu führen.

Es wird dann

$$\begin{aligned} \nabla = \begin{Bmatrix} x & y \\ z & u \end{Bmatrix} = & \begin{Bmatrix} (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \\ (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - \\ - 2(x_0z_0 + x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)(u_0y_0 + u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3) + \\ + 2(x_0z_1 - x_1z_0 + x_2z_3 - x_3z_2)(u_0y_1 - u_1y_0 + u_2y_3 - u_3y_2) + \\ + 2(x_0z_2 - x_2z_0 + x_3z_1 - x_1z_3)(u_0y_2 - u_2y_0 + u_3y_1 - u_1y_3) + \\ + 2(x_0z_3 - x_3z_0 + x_1z_2 - x_2z_1)(u_0y_3 - u_3y_0 + u_1y_2 - u_2y_1). \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Wäre nun $\nabla = f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_{n-1}^2$, wo f_0, \dots, f_{n-1} reelle quadratische Formen der sechzehn Veränderlichen $x_0 \dots x_3$ bedeuten, so könnte man

$$f_\nu = x_0 U_{\nu 0} + x_1 U_{\nu 1} + x_2 U_{\nu 2} + x_3 U_{\nu 3} + z_0 Y_{\nu 0} + z_1 Y_{\nu 1} + z_2 Y_{\nu 2} + z_3 Y_{\nu 3}$$

setzen; $U_{\nu k}$ wäre dann eine lineare homogene Funktion (Form) von u_0, u_1, u_2, u_3 , und $Y_{\nu k}$ eine ebensolche Funktion von y_0, y_1, y_2, y_3 . Diese linearen Formen müssten unter Anderem den folgenden Bedingungen genügen:

für die Matrix (A_{ik}) eine ganz ähnliche Bedeutung haben, wie für die Matrix (a_{ik}) die Produkte

$$\vartheta_{ks}^i = a_{ki} \tilde{a}_{si}, \quad \eta_{si}^k = \tilde{a}_{ks} a_{ki},$$

von denen wir die ersten zur Beschreibung des Bildungsgesetzes der ∇ -Funktion benutzt hatten. — Natürlich würde sich das Bildungsgesetz der ∇ -Funktion auch mit Hilfe der Produkte η_{si}^k haben beschreiben lassen. —

$$(a) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 0}^2 = \sum_{\nu} U_{\nu 1}^2 = \sum_{\nu} U_{\nu 2}^2 = \sum_{\nu} U_{\nu 3}^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

$$(b) \quad \sum_{\nu} Y_{\nu 0}^2 = \sum_{\nu} Y_{\nu 1}^2 = \sum_{\nu} Y_{\nu 2}^2 = \sum_{\nu} Y_{\nu 3}^2 = y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

$$(c) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 0} Y_{\nu 0} = -u_0 y_0 - u_1 y_1 - u_2 y_2 - u_3 y_3,$$

$$(d_1) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 0} Y_{\nu 1} = u_0 y_1 - u_1 y_0 + u_2 y_3 - u_3 y_2,$$

$$(d_2) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 0} Y_{\nu 2} = u_0 y_2 - u_2 y_0 + u_3 y_1 - u_1 y_3,$$

$$(d_3) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 0} Y_{\nu 3} = u_0 y_3 - u_3 y_0 + u_1 y_2 - u_2 y_1,$$

$$(e_1) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 1} Y_{\nu 0} = -u_0 y_1 + u_1 y_0 - u_2 y_3 + u_3 y_2,$$

$$(e_2) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 2} Y_{\nu 0} = -u_0 y_2 + u_2 y_0 - u_3 y_1 + u_1 y_3,$$

$$(e_3) \quad \sum_{\nu} U_{\nu 3} Y_{\nu 0} = -u_0 y_3 + u_3 y_0 - u_1 y_2 + u_2 y_1.$$

Dem Beweise unserer Behauptung schicken wir voraus den folgenden *Hilfssatz*: »Genügen n reelle lineare Formen

$$y_{\nu} = a_{\nu 1} x_1 + \dots + a_{\nu m} x_m \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

der Gleichung

$$(f) \quad y_1^2 + \dots + y_n^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$$

(woraus $n \geq m$ folgt), so lässt sich eine reelle orthogonale Transformation

$$\begin{aligned} y'_1 &= p_{11} y_1 + \dots + p_{1n} y_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y'_m &= p_{m1} y_1 + \dots + p_{mn} y_n \end{aligned}$$

so bestimmen, dass

$$y'_1 = x_1, \dots, y'_m = x_m,$$

und ausserdem (wenn $n > m$ ist)

$$y'_{m+1} = 0, \dots, y'_n = 0$$

wird. »

Er handelt sich natürlich nur um den Fall $n > m$, und es kommt darauf an, zu zeigen, dass die verlangten Gleichungen auch dann durch eine *orthogonale* Transformation hergestellt werden können.

Die Gleichung (f) sagt lediglich aus, dass die m linearen Formen

$$v_\mu = a_{1\mu} u_1 + \cdots + a_{n\mu} u_n \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

(in denen $u_1 \dots u_n$ unabhängige Veränderliche bedeuten) ein System normiert-orthogonaler Formen bilden. Man bestimme nun (was bekanntlich immer möglich ist) $n - m$ weitere reelle Formen

$$v_k = a_{1k} u_1 + \cdots + a_{nk} u_n \quad (k = m + 1, \dots, n)$$

derart, dass v_1, \dots, v_n ein vollständiges System von normiert-orthogonalen Formen bilden. Setzt man hierauf

$$y'_k = a_{1k} y_1 + \cdots + a_{mk} y_m \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

so wird

$$y'_k = \sum_1^m x_\mu \sum_1^n a_{v\mu} a_{v\mu} = \begin{cases} = x_k & \text{für } k \leq m, \\ = 0 & \text{für } k > m. \end{cases}$$

Im Falle der ersten Gleichung unter (a),

$$\sum_0^{n-1} U_{v0}^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

muss $n \geq 4$ sein. Man kann dann, nach dem bewiesenen Hilfssatz, eine reelle orthogonale Transformation

$$U'_{k0} = p_{k0} U_{00} + \cdots + p_{k, n-1} U_{n-1, 0}$$

so bestimmen, dass

$$U'_{00} = u_0, \quad U'_{10} = u_1, \quad U'_{20} = u_2, \quad U'_{30} = u_3,$$

und ausserdem, wenn $n > 4$ ist,

$$U'_{40} = 0, \dots, U'_{n-1, 0} = 0$$

wird. Bildet man jetzt die Funktionen

$$f'_v = p_{v0} f_0 + \cdots + p_{v, n-1} f_{n-1} \quad (v = 0, 1, \dots, n-1),$$

so haben diese dieselbe Form wie die ursprünglichen Funktionen f_0, \dots, f_{n-1} , und

auch dieselbe Quadratsumme, an Stelle von U_{ν_0} erscheint aber jetzt U'_{ν_0} . Man darf daher annehmen, dass von vorn herein

$$U_{00} = u_0, U_{10} = u_1, U_{20} = u_2, U_{30} = u_3; U_{40} = \dots = 0$$

ist.

Aus (c) folgt nunmehr

$$Y_{00} = -y_0, Y_{10} = -y_1, Y_{20} = -y_2, Y_{30} = -y_3,$$

und aus (b) — da die Veränderlichen y_k alle reell sein sollen — $Y_{40} = \dots = 0$. Ebenso können wir aus (d) und (b) die linearen Formen $Y_{\nu_1}, Y_{\nu_2}, Y_{\nu_3}$ berechnen, und schliesslich, auf Grund der Gleichungen (e) und (a), auch die Formen $U_{\nu_1}, U_{\nu_2}, U_{\nu_3}$. Das Ergebnis ist, dass nur noch der Fall $n = 4$ in Betracht kommt, und dass man auch in diesem nur die eine Annahme

$$\begin{aligned} f_0 &= x_0 u_0 - x_1 u_1 - x_2 u_2 - x_3 u_3 - z_0 y_0 + z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3, \\ f_1 &= x_0 u_1 + x_1 u_0 + x_2 u_3 - x_3 u_2 - z_0 y_1 - z_1 y_0 - z_2 y_3 + z_3 y_2, \\ f_2 &= x_0 u_2 + x_2 u_0 + x_3 u_1 - x_1 u_3 - z_0 y_2 - z_2 y_0 - z_3 y_1 + z_1 y_3, \\ f_3 &= x_0 u_3 + x_3 u_0 + x_1 u_2 - x_2 u_1 - z_0 y_3 - z_3 y_0 - z_1 y_2 + z_2 y_1 \end{aligned}$$

zu untersuchen braucht. Diese Funktionen genügen aber nicht der Gleichung

$$\nabla = f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2,$$

denn in ihrer Quadratsumme ist z. B. der Koeffizient von $2x_2z_3$ verschieden von dem entsprechenden Koeffizienten in der Entwicklung von ∇ .¹

5.

Die allgemeine Nablafunktion.

Setzt man an Stelle der Quaternionen oder zweireihigen Matrices ein unbestimmtes System komplexer Grössen (solcher mit Haupteinheit), so wird es nicht leicht sein, die Theorie »einseitiger« linearer Gleichungen so weit durchzuführen, wie es in dem konkreten und dabei verhältnismässig sehr einfachen Beispiel der Quaternionen noch thunlich war. Indessen lässt sich doch einiges Allgemeines aussagen, das beim Studium anderer konkreter Fälle nützlich sein kann.

Wir betrachten zunächst das in der Form $\alpha\alpha' = \alpha''$ abgekürzte Multiplikationstheorem irgend eines Systems komplexer Grössen mit reellen oder gewöhn-

¹ Vgl. hierzu HILBERT, Math. Ann. Bd 32 (1888), S. 342, Acta Mathematica, Bd 17 (1893) S. 169. Archiv f. Math. (3), Bd 1 (1901), S. 224, und Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., 1909) Kap. VII, § 38.

lichen komplexen Koordinaten für die einzelnen Grössen des Systems, und bilden die Gleichungen

$$(1^l) \quad \alpha x = x',$$

$$(1^r) \quad \xi' = \xi \alpha,$$

in denen α, x', ξ' gegebene und x, ξ zu bestimmende Grössen des Systems bedeuten sollen. n sei die Zahl der linear-unabhängigen Grössen des Systems, also die Anzahl der in irgend einer *Basis* des Systems vorkommenden Einheiten, e_0 die Haupteinheit, die wir von der Einheit der gewöhnlichen reellen oder komplexen Grössen nicht unterscheiden ($e_0 = 1$). Die n Koordinaten von α , und ebenso die von x' und ξ' , sollen als *unabhängige Veränderliche* betrachtet werden. Zu den Gleichungen (1^l) und (1^r) gehören dann, wenn man sie explizite schreibt, d. h. durch ein System von n gewöhnlichen linearen Gleichungen ersetzt, zwei nicht notwendig übereinstimmende Determinanten D_l und D_r , die als (ganze homogene) Funktionen (n^{ten} Grades) der Koordinaten $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ bekanntlich dieselben irreduziblen Teiler haben. Wir nehmen an, dass diese Determinanten von Null verschieden sind.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich z. B. die Gleichung (1^l) eindeutig auflösen.

Dabei tritt die Determinante D_l in den Nenner des sich für x ergebenden Ausdrucks, und in den Zählern der Koordinaten von x erscheinen lineare Kombinationen der sämtlichen Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von D_l . Wir denken uns die Faktoren, die die Determinante D_l mit *allen* ihrer Unterdeterminanten gemein hat, weggehoben; in den Nennern bleibt dann eine Funktion ϱ^{ten} Grades $\nabla(\alpha)$ der Koordinaten $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ stehen, und diese wird eindeutig bestimmt sein, wenn wir festsetzen, dass $\nabla(1) = 1$ sein soll. Nennen wir noch $\tilde{\alpha}$ die dann ebenfalls eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $\alpha x = \nabla(\alpha)$, so erhalten wir die Lösungen *beider* Gleichungen (1^l) und (1^r) in der *reduzierten* Form

$$(2^l) \quad \nabla \cdot x = \tilde{\alpha} x',$$

$$(2^r) \quad \xi \cdot \nabla = \xi' \tilde{\alpha}.$$

Die hier eingeführte Zahl ϱ , der Grad des nach Möglichkeit reduzierten Nenners $\nabla(\alpha)$, ist die als Rang des betrachteten Systems bekannte Zahl. Sie ist der niedrigste Grad einer algebraischen Gleichung mit skalaren Koeffizienten, der eine unbestimmte (frei veränderliche) Grösse des betrachteten Systems genügt.¹ In der Tat, verstehen wir unter r eine skalare Grösse des Systems, d. i. ein Multiplum der Haupteinheit, so kann man schreiben

¹ TH. MOLLIER, Math. Ann. Bd 41 (1893), S. 113.

$$\nabla(r - \alpha) = r^e + a_1 r^{e-1} + \dots + a_e,$$

und es folgt

$$(3) \quad 0 = \alpha^e + a_1 \alpha^{e-1} + \dots + a_e;$$

dabei ist

$$(4) \quad a_e = \nabla(-\alpha) = (-1)^e \nabla(\alpha).$$

Gäbe es nun eine für alle α richtige Gleichung der Form

$$0 = a'_0 \alpha^{e'} + a'_1 \alpha^{e'-1} + \dots + a'_{e'},$$

mit ebenfalls skalaren Koeffizienten, so dass $e' < e$ wäre und zugleich einen möglichst kleinen Wert hätte, so müsste die Gleichung (3) eine Folge von ihr sein, was nur möglich ist, wenn a'_0 den Grad Null hat. Man kann dann von vorn herein $a'_0 = 1$ setzen.

Es müsste ferner $a'_{e'}$ von Null verschieden sein, da andernfalls

$$\alpha \{ \alpha^{e'-1} + a'_1 \alpha^{e'-2} + \dots + a'_{e'-1} \} = 0$$

wäre, unter der über die Zahl e' gemachten Annahme ein Widerspruch gegen die Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (2). Man hätte also schliesslich in dem Ausdruck

$$-(a'_{e'})^{-1} \{ \alpha^{e'-1} + a'_1 \alpha^{e'-2} + \dots + a'_{e'-1} \} = \alpha^*$$

eine Lösung der Gleichung $\alpha x = 1$, und damit hätte man auch eine Lösung der Gleichungen (2), in der $\nabla(\alpha)$ durch eine Funktion niedrigeren Grades, $a'_{e'}$, ersetzt wäre.

Es ergibt sich noch

$$(5) \quad \nabla(\alpha) = \alpha \tilde{\alpha}, \quad \tilde{\alpha} = (-1)^{e-1} \{ \alpha^{e-1} + a_1 \alpha^{e-2} + \dots + a_{e-1} \}.$$

Um die komplexe Grösse $\tilde{\alpha}$ und mit ihr den skalaren Ausdruck $\nabla(\alpha)$ zu bilden, hat man hiernach die skalaren Funktionen ersten bis $(e-1)$ ten Grades a_1, \dots, a_{e-1} der Koordinaten einer unbestimmten Grösse α des betrachteten Systems zu bilden. Hierzu ist aber nur nötig, dass man den ersten dieser Koeffizienten a_1 bilden kann. Bezeichnen wir nämlich mit r_1, \dots, r_e die Wurzeln der (zuvor schon gebildeten) *Ranggleichung* des betrachteten Systems,

$$(6) \quad \nabla(r - \alpha) = r^e + a_1 r^{e-1} + \dots + a_e = 0,$$

und setzen wir (nach Analogie des in der Quaternionentheorie Üblichen)

$$(7) \quad \mathfrak{S} \alpha = -\frac{1}{\varrho} \cdot a_1,$$

so folgt unmittelbar¹

$$(8) \quad r_1^\lambda + \dots + r_\varrho^\lambda = \varrho \cdot \mathfrak{S} \alpha^\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \dots, \varrho - 1, \dots);$$

es lassen sich aber die symmetrischen Funktionen a_1, \dots, a_ϱ der Wurzeln r_1, \dots, r_ϱ in bekannter Weise durch die Potenzsummen (8) ausdrücken. Man hat z. B.

$$\begin{aligned} a_1 &= -\varrho \mathfrak{S} \alpha, \quad 2! a_2 = \varrho^2 (\mathfrak{S} \alpha)^2 - \varrho \mathfrak{S} \alpha^2, \\ 3! a_3 &= -\varrho^3 (\mathfrak{S} \alpha)^3 + 3 \varrho^2 \mathfrak{S} \alpha \mathfrak{S} \alpha^2 - 2 \varrho \mathfrak{S} \alpha^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir ein System von m linearen Gleichungen der Form

$$(9^l) \quad \alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{im} x_m = x'_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

oder

$$(9^r) \quad \xi'_{ik} = \xi_1 \alpha_{1k} + \dots + \xi_m \alpha_{mk} \quad (k = 1, \dots, m),$$

in denen $\alpha_{11} \dots \alpha_{mm}$, $x'_1 \dots x'_m$, $\xi'_1 \dots \xi'_m$ wiederum Grössen des betrachteten Systems (α) sein sollen, und $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$ frei-veränderliche Grössen dieses Systems, nur beschränkt durch die Annahme, dass etwa die Gleichungen (9^l) eindeutig-auflösbar sein sollen. Die Lösungen dieser Gleichungen (9^l) denken wir uns in eine reduzierte Form gesetzt, derart, dass in allen Nennern von x_1, \dots, x_n eine gewisse notwendig homogene Funktion der nm^2 Koordinaten von $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$ erscheint, deren Grad nicht weiter hinabgedrückt werden kann. Diese nach Voraussetzung nicht verschwindende Funktion (*Nablafunktion*) bezeichnen wir durch das Symbol

$$(10) \quad \nabla(\alpha_{ik}) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{11} \dots \alpha_{1m} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mm} \end{array} \right\},$$

indem wir noch einen zunächst willkürlich bleibenden Zahlenfaktor aus der Forderung

¹ Vgl. etwa MOLIEN, a. a. O., S. 110.

$$(II) \quad I = \begin{pmatrix} I & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & I \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir behaupten:

Zu den Gleichungen (g') und (g'') gehört dieselbe Nablafunktion. Diese ist eine homogene Funktion des Grades $m\varrho$ der Koordinaten der Grössen $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$, und zwar ist sie homogen vom Grade ϱ in bezug auf die Koordinaten der Elemente irgend einer Zeile oder Spalte der Matrix (α_{ik}) , und sie erreicht überdies den Grad ϱ in bezug auf die Koordinaten eines jeden dieser Elemente α_{ik} .

Zunächst ergibt sich, dass $\nabla(\alpha_{ik})$ in irgend einem Grade ϱ' homogen sein muss in bezug auf die Elemente der ersten Zeile, da eine proportionale Änderung der Grössen $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, x'_1$ die Werte von x_1, \dots, x_m nicht ändern kann; auch leuchtet es ein, dass diese Gradzahl ϱ' für alle Zeilen dieselbe sein muss. Ferner ist sicher $\varrho' \geq \varrho$, da im Spezialfall $\alpha_{11}x_1 = x'_1, \dots, \alpha_{mm}x_m = x'_m$ dieser Grad tatsächlich erreicht wird. Es kann sodann der Schluss von m auf $m + 1$ angewendet werden, da der zu erweisende Satz für $m = 1$ richtig ist.

Wir betrachten zu diesem Zweck das weitere Gleichungssystem

$$(a) \quad \begin{aligned} \alpha_{00} X_0 + \alpha_{01} X_1 + \dots + \alpha_{0m} X_m &= X'_0, \\ \alpha_{10} X_0 + \alpha_{11} X_1 + \dots + \alpha_{1m} X_m &= X'_1, \\ \cdot & \dots \cdot \\ \alpha_{m0} X_0 + \alpha_{m1} X_1 + \dots + \alpha_{mm} X_m &= X'_m; \end{aligned}$$

in der zugehörigen Nablafunktion seien die Glieder zusammengefasst, die in bezug auf die Koordinaten von α_{00} denselben Grad haben,

$$(b) \quad \nabla(\alpha_{00}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}) = \psi^{\varrho'}(\alpha_{00}) + \psi^{\varrho'-1}(\alpha_{00}) + \dots$$

Lösen wir sodann die m letzten unter den Gleichungen (a) nach den Unbekannten X_1, \dots, X_m auf, so erhalten wir diese in Form von Quotienten, in denen Nennern die Nablafunktion (10) erscheint, während von den Zählern angenommen werden darf, dass sie alle in der Form $aX_0 + b$ geschrieben sind. Die Substitution dieser Ausdrücke in die erste Gleichung unter (a) liefert eine Gleichung von der Form (1'),

$$(c) \quad \{\nabla(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}) \cdot \alpha_{00} + A\} X_0 = B,$$

in der, nach Voraussetzung, der Faktor von α_{00} den Grad $m\varrho$ und A den Grad

$m\rho + 1$ hat. Die formale Auflösung von (c) nach der zuvor entwickelten Regel liefert dann für X_0 einen Quotienten, dessen Nenner eine homogene Funktion vom Grade ρ in bezug auf die Koordinaten von $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0m}$ ist, in dem ferner auch ein Glied ρ^{ten} Grades in bezug auf α_{00} vorkommt, nämlich das Produkt

$$\{\nabla(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm})\}^{\rho} \cdot \nabla(\alpha_{00}).$$

Wir sehen also, dass $\rho' = \rho$ ist, und dass die Funktion $\psi^{\rho}(\alpha_{00})$ das Produkt von $\nabla(\alpha_{00})$ mit einer (skalaren) Funktion der Koordinaten von $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$ sein muss. Diese letzte Funktion ist ferner ein Teiler vom Grade $m\rho$ der Funktion des Grades $m\rho^2$

$$\{\nabla(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm})\}^{\rho};$$

sie kann aber nichts anderes sein als $\nabla(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm})$ selbst, da sie im Falle $\alpha_{01} = 0, \dots, \alpha_{0m} = 0, \alpha_{10} = 0, \dots, \alpha_{m0} = 0$ von vorn herein diesen Wert hat.

Hiermit ist der aufgestellte Satz erwiesen, soweit er sich auf das Gleichungssystem (ρ') bezieht. Ausserdem hat sich auch ergeben, dass die auf der Bildung der Gleichung (c) beruhende Lösungsmethode der Gleichungen (a) den Ausdruck für X_0 mit dem fremden Faktor

$$\{\nabla(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm})\}^{\rho-1}$$

in Zähler und Nenner liefert, dass sie also nicht allgemein brauchbar ist.

Zu beweisen bleibt noch, dass die Nablafunktion sich nicht ändert, wenn man die Gleichungen (ρ') durch die Gleichungen (ρ'') ersetzt. Dies folgt daraus, dass die Gleichungen (a) im Grunde schon in Gleichungen des Typus (1) enthalten sind.

In der Tat, setzen wir an Stelle der m Gleichungen (ρ') oder (ρ'') je m solche Systeme, die links dieselben Koeffizienten haben,

$$(12^l) \quad \alpha_{i1} x_{1k} + \dots + \alpha_{im} x_{mk} = x'_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, m),$$

$$(12^r) \quad \xi'_{ik} = \xi_{i1} \alpha_{1k} + \dots + \xi_{im} \alpha_{mk} \quad (i, k = 1, \dots, m),$$

so werden die Lösungen dieser *speziellen* Gleichungen (12^l) noch denselben reduzierten Nenner $\nabla(\alpha_{ik})$ haben, wie die Lösungen der Gleichungen (ρ'). Wir bezeichnen diesen Nenner hier mit ∇_l , und nennen ∇_r die entsprechend aus (12^r) abgeleitete Funktion. Die Gleichungen (12) haben nun genau dieselbe Form wie die Definitionsgleichungen des Produkts von zwei gewöhnlichen Matrices,

$$(13^l) \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{11} & \dots & x'_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_{m1} & \dots & x'_{mm} \end{bmatrix},$$

$$(13^r) \quad \begin{bmatrix} \xi'_{11} & \dots & \xi'_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi'_{m1} & \dots & \xi'_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{m1} & \dots & \xi_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix},$$

nur dass die zu einer neuen Matrix komponierten Matrices zu Elementen nicht gerade gewöhnliche (reelle oder) komplexe Grössen, sondern solche aus dem beliebigen System (α) haben. Nichts hindert aber dann, den Inbegriff der m^2 komplexen Grössen $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$ selbst wieder als eine einzige komplexe Grösse A höherer Ordnung aufzufassen. Die Gleichungen (12) oder (13) werden dann subsumiert unter den Typus der Gleichungen (1),

$$(14^l) \quad AX = X';$$

$$(14^r) \quad \Xi' = \Xi A;$$

die Einheiten des neuen Systems (A) sind die Produkte der Einheiten des Systems (α) mit m^2 Einheiten e_{ik} , deren Multiplikationsregeln

$$e_{ij}e_{jk} = e_{ik}, \quad e_{ij}e_{kl} = 0 \quad (j \neq k)$$

die Multiplikationsregel gewöhnlicher Matrices liefern: *Das System (A) ist das sogenannte Produkt aus dem System (α) mit dem System, dessen Einheiten die e_{ik} sind.*

Der Rang des neu gebildeten Systems ist $m \cdot \rho$, für die durch (12) definierten Grössen A aber hat man, eben nach (12):

$$\nabla_i^m = \nabla(A) = \nabla_r^m.$$

Daher könnte sich ∇_r von ∇_i höchstens um einen Zahlenfaktor unterscheiden, dieser aber esweist sich als die Einheit: $\nabla_r = \nabla_i = \nabla(\alpha_{ik})$.

Unmittelbar einleuchtend ist nunmehr auch, dass die Nablafunktion an gewissen Eigenschaften der Determinanten teilnimmt. So ziehen die Gleichungen (13) die als *Multiplikationsregel der Nablafunktion* zu bezeichnenden Gleichungen

$$(15^l) \quad \nabla(\alpha_{ik}) \cdot \nabla(x_{ik}) = \nabla(x'_{ik}),$$

$$(15^r) \quad \nabla(\xi'_{ik}) = \nabla(\xi_{ik}) \cdot \nabla(\alpha_{ik})$$

nach sich. Hieraus, und aus den nachgewiesenen Homogenitätseigenschaften der Nablafunktion folgt dann ohne Weiteres: Die Nablafunktion ändert ihren Wert nicht, wenn man zu irgend einer Zeile (Spalte) der Matrix (α_{ik}) ein vorderes (hinteres) Multiplum einer anderen Zeile (Spalte) addiert. Sie verschwindet also, wenn zwei Zeilen (Spalten) einander gleich werden; was übrigens auch schon daraus hervorgeht, dass sie ein Teiler der Determinanten $D_l^{(m)}$ und $D_r^{(m)}$ der beiden Gleichungen (9) sein muss. Sie nimmt den Faktor $\nabla(\varrho)$ an, wenn man die Elemente einer Zeile (Spalte) vorn (hinten) mit ϱ multipliziert. Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so wird die Nablafunktion mit einem Faktor reproduziert, der eine Quadratwurzel aus der Einheit sein muss. Um diesen Faktor zu bestimmen, genügt es offenbar, eine zweireihige Nablafunktion, und auch diese im Falle eines Zahlenbeispiels zu betrachten. Es ist aber

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{\varrho} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ & 0 \end{Bmatrix};$$

die Nablafunktion wechselt also bei Vertauschung von zwei Zeilen oder Spalten ihr Vorzeichen, oder sie bleibt ungeändert, je nachdem $\varrho \equiv 1 \pmod{2}$ oder $\varrho \equiv 0 \pmod{2}$ ist. Endlich ist allgemein z. B.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\mu} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \dots & \alpha_{\mu\mu} & 0 \dots 0 \\ \alpha_{\mu+1,1} & \dots & \alpha_{\mu+1,\mu} & \alpha_{\mu+1,\mu+1} \dots \alpha_{\mu+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m\mu} & \alpha_{m,\mu+1} \dots \alpha_{mm} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\mu} \\ \dots \\ \alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu\mu} \\ \alpha_{\mu+1,\mu+1} \dots \alpha_{\mu+1,m} \\ \dots \\ \alpha_{m,\mu+1} \dots \alpha_{mm} \end{array} \right\},$$

u. A. m.

Hiermit haben wir also eine allgemein anwendbare Definition der Nablafunktion erlangt. Gelingt es, wie bei den Quaternionen, ihr Bildungsgesetz zu ermitteln, so darf man eine Verbesserung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen in solchen Fällen erwarten, in denen der Rang ϱ des Systems (α) kleiner ist als die Zahl n seiner Einheiten. Eine weitere Vereinfachung wird eintreten, wenn die komplexe Grösse A speziell gewählt ist und zu denen gehört, bei denen schon eine frühere Potenz als $A^{m\varrho}$ durch niedrigere Potenzen ausdrückbar ist.¹ Ist das System (α) reduzibel, so ist es auch seine

¹ Übrigens gibt es auch noch anders geartete Fälle, in denen eine weitere Reduktion möglich ist. Vgl. § 7.

Nablafunktion; sie ist das Produkt der Nablafunktionen, die zu den Teilsystemen gehören, in die das System (α) zerfällt. Dies tritt bekanntlich immer ein, wenn $\varrho = n$ ist, mit der einen Ausnahme eines Systems, dessen Multiplikationsregeln in der Form

$$(16) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i \varepsilon_k &= \varepsilon_{i+k} & (i+k \leq n-1) \\ \varepsilon_i \varepsilon_k &= 0 & (i+k > n-1) \end{aligned} \quad \{i, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

geschrieben werden können. Die Nablafunktion fällt dann zusammen mit der Determinante

$$(17) \quad \nabla(\alpha_{ik}) = D = \Delta^n = \begin{vmatrix} \alpha_{00}^{(0)} & \dots & \alpha_{0,m-1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-1,0}^{(0)} & \dots & \alpha_{m-1,m-1}^{(0)} \end{vmatrix}^n$$

der Gleichungen (9). Entspricht das System (α) selbst schon dem Multiplikationstheorem der (gewöhnlichen) Matrices,

$$(18) \quad \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = 0 \quad (j \neq k),$$

so dass $n = \varrho^2$ wird, so lässt sich die Nablafunktion als gewöhnliche Determinante (Gitterdeterminante) darstellen, analog dem, was wir im Falle $\varrho = 2$ gefunden hatten,

$$(19) \quad \nabla = \begin{vmatrix} (\alpha_{11}) & \dots & (\alpha_{1m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{m1}) & \dots & (\alpha_{mm}) \end{vmatrix}.$$

Bei allem Vorgetragenen ist nur auf solche Eigenschaften der betrachteten Systeme (α) Rücksicht genommen, die von der Wahl der Basis unabhängig sind. Bei spezieller Wahl der Basis können für einzelne Gruppen der Unbekannten sehr wohl weitere Reduktionen eintreten, wie es z. B. der Fall ist bei dem System (16).

6.

Beispiele.

Am leichtesten zugänglich sind, ausser gewissen in § 5 schon gelegentlich betrachteten Systemen mit kommutativer Multiplikation, die Systeme (α) , die den Rang 2 haben, bei denen also alle Grössen des Systems, wie im Falle der Quaternionen, einer Gleichung der Form

$$x^2 - 2 \mathfrak{S} x \cdot x^1 + \mathfrak{N} x \cdot x^0 = 0$$

mit skalaren Koeffizienten genügen. Man hat dann

$$\tilde{x} = {}_2\mathfrak{S}x - x, \quad \mathfrak{N}x = x\tilde{x} = \tilde{x}x,$$

und man kommt ganz ähnlich wie bei den Quaternionen oder den zweireihigen Matrices zur Auflösung eines Systems einseitiger linearer Gleichungen.

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 3$, in dem nur ein einziges System komplexer Grössen (*ein* Typus mit *einer* Gestalt) existiert, dessen Multiplikationsregel dem Kommutationsgesetz nicht gehorcht. Die Multiplikationstabelle dieses Systems, das übrigens als Unter- oder Teilsystem im System der zweireihigen Matrices enthalten ist, nehmen wir in der für die Rechnung bequemsten Form an:

$$\text{I.} \quad \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 & e_3 \\ e_2 & 0 & e_2 & 0 \\ e_3 & 0 & e_3 & 0 \end{array} \quad \{e_1 + e_2 = e_0 = \mathbf{1}\}.$$

Es findet sich, wenn

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1^{11} & \dots & \alpha_1^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m1} & \dots & \alpha_1^{mm} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2^{11} & \dots & \alpha_2^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{m1} & \dots & \alpha_2^{mm} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$D_l = \mathcal{A}_1^2 \cdot \mathcal{A}_2, \quad D_r = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2^2,$$

ferner

$$\begin{aligned} {}_2\mathfrak{S}x &= x_1 + x_2, & \mathfrak{N}x &= x_1 x_2, \\ \tilde{x} &= x_2 e_1 + x_1 e_2 - x_3 e_3. \end{aligned}$$

Die nach der früheren Vorschrift gebildete Funktion ∇ kann sich vom Produkt der irreduziblen Faktoren von D_l und D_r nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, der sich gleich der Einheit findet:

$$\nabla(\alpha_{ik}) = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2.$$

Im Übrigen kann nach Analogie der Quaternionen verfahren werden.

Ähnlich liegt die Sache bei dem der Annahme $n = 4$ entsprechenden System mit der Multiplikationstafel

$$\text{II.} \quad \begin{array}{c|ccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & 0 & 0 \end{array} \quad \{e_0 = \mathbf{1}\},$$

das als Grenzfall der Quaternionen in Anwendungen auftritt. Gleich den Quaternionen selbst hat auch dieser Typus von Systemen komplexer Grössen zwei reelle Gestalten, wir betrachten aber der Kürze halber nur diese eine. Man hat hier

$$\mathfrak{S} x_0 = x_0, \quad \mathfrak{N} x = x_0^2 + x_1^2, \quad \tilde{x} = x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3.$$

Wendet man in diesem Falle auf ein wie früher gegebenes System einseitiger Gleichungen die gewöhnliche Lösungsmethode an, indem man zunächst nur die Unbekannten $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}$, oder $\xi_0^{(k)}, \xi_1^{(k)}$ ($i, k = 1, \dots, m$) berechnet, so erhält man Ausdrücke, in deren Nenner eine sogenannte VOIGT'sche Determinante erscheint. Diese hat bereits den Grad $2m$, sie kann sich also von der ∇ -Funktion, die auch in den reduzierten Nennern der Unbekannten $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \xi_0^{(k)}, \xi_1^{(k)}$ erscheinen muss, höchstens um einen Faktor unterscheiden, der gleich der Einheit gefunden wird:

$$\nabla = \begin{vmatrix} \alpha_0^{11} - \alpha_1^{11} & \dots & \alpha_0^{1m} - \alpha_1^{1m} \\ \alpha_1^{11} & \alpha_0^{11} & \dots & \alpha_1^{1m} & \alpha_0^{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{m1} - \alpha_1^{m1} & \dots & \alpha_0^{mm} - \alpha_1^{mm} \\ \alpha_1^{m1} & \alpha_0^{m1} & \dots & \alpha_1^{mm} & \alpha_0^{mm} \end{vmatrix}.$$

Die ∇ -Funktion hängt hier nur von den Koordinaten $\alpha_0^{ik}, \alpha_1^{ik}$ ab. Ausserdem aber ist sie im komplexen Gebiet (bei der zweiten Gestalt schon im Reellen) reduzibel; setzt man

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_0^{11} + i \alpha_1^{11} & \dots & \alpha_0^{1m} + i \alpha_1^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{m1} + i \alpha_1^{m1} & \dots & \alpha_0^{mm} + i \alpha_1^{mm} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0^{11} - i \alpha_1^{11} & \dots & \alpha_0^{1m} - i \alpha_1^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{m1} - i \alpha_1^{m1} & \dots & \alpha_0^{mm} - i \alpha_1^{mm} \end{vmatrix},$$

so wird, wie bekannt,

$$\nabla = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2, \quad D = (\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^2.$$

Bei reellen Koordinaten α_j^{ik} ist also, wie im Falle der Quaternionen, $\nabla \geq 0$; ∇ ist aber hier als Summe von zwei Quadraten reeller Ausdrücke darstellbar. Im Falle $m = 2$ z. B. hat man

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} x & y \\ z & u \end{Bmatrix} = \\ & = (x_0^2 + x_1^2)(u_0^2 + u_1^2) + (y_0^2 + y_1^2)(z_0^2 + z_1^2) - \\ & \quad - 2(x_0 z_0 + x_1 z_1)(u_0 y_0 + u_1 y_1) + \\ & \quad + 2(x_0 z_1 - x_1 z_0)(u_0 y_1 - u_1 y_0) = \end{aligned}$$

$$= (x_0 u_0 - x_1 u_1 - y_0 z_0 + y_1 z_1)^2 + \\ + (x_0 u_1 + x_1 u_0 - y_0 z_1 - y_1 z_0)^2;$$

vgl. S. 36. Im Wesentlichen gilt jedoch die für den Fall der Quaternionen entwickelte Theorie auch hier.

Ähnlich wie das System II verhält sich auch das System

$$\text{III.} \quad \begin{array}{c|ccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \{e_0 = \mathbf{1}\},$$

das ebenfalls Ausartung der Quaternionen, und überdies Grenzfall von II ist, aber, abweichend von II, nur diese eine reelle Gestalt hat.

Hier erscheint in den Ausdrücken für die skalaren Bestandteile $x_0^{(k)}$ der komplexen Grössen x_k nur die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_0^{11} & \dots & \alpha_0^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{m1} & \dots & \alpha_0^{mm} \end{vmatrix}$$

der skalaren Bestandteile der Koeffizienten der Gleichungen (I), während in den reduzierten Ausdrücken für die übrigen Koordinaten $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ im Nenner das Quadrat eben dieser Determinante auftritt. Es folgt

$$\nabla = A^2, \quad D = A^4.$$

Ebenso verhält sich endlich die letzte Ausartung des Quaternionensystems, deren Multiplikationstafel

$$\text{IV.} \quad \begin{array}{c|ccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \{e_0 = \mathbf{1}\},$$

dem Kommutationsgesetz gehorcht.

Als letztes Beispiel betrachten wir, unter der Annahme $m = 2$, das System der *Nonionen*

$$\text{V.} \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jl} = \varepsilon_{il}, \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = 0 \quad \{i, j, k, l = 1, 2, 3; j \neq k\},$$

das der Annahme $\rho = 3$, $n = 9$ entspricht, und (für $m = 2$) zu einer Nablafunktion vom Grade sechs führen muss.

Um die Ableitung der zu entwickelnden Formeln kurz und übersichtlich zu gestalten, bediene ich mich, trotz ihrer Unbeliebtheit, der symbolischen Methode der Invariantentheorie.

Die Multiplikationsregeln der *Nonioneneinheiten* ε_{ik} sind nichts Anderes als die Regeln für die Multiplikation oder Komposition der speziellen ternären bilinearen Formen $x_i u_k$ (vgl. § 1). Wir können also Nonionen A, B, C, \dots symbolisch als Produkte ternärer linearer Formen darstellen,

$$A = (ax)(ua), \quad B = (bx)(u\beta), \quad \text{u. s. w.};$$

$$E = (ux)$$

ist die sogenannte Einheitsform, die im Rechnen mit den bilinearen Formen die Stelle der Einheit des gewöhnlichen Zahlenrechnens vertritt. Es wird, wenn

$$AB = (ax)(b\alpha)(u\beta)$$

gesetzt wird, $AE = EA = A$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{S}A$ den *skalaren Bestandteil* von A , d. i. die lineare Invariante von A (gegenüber kontragredienten linearen Transformationen von x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3), deren Zahlenkoeffizienten wir so normieren, dass $\mathfrak{S}E = 1$ wird. Wir setzen also (übereinstimmend mit der Bezeichnungsweise des § 5)

$$\mathfrak{S}A = \frac{1}{3}(a\alpha),$$

und folglich, bei Beziehung des Operationszeichens \mathfrak{S} auf das Ganze eines nachfolgenden Produkts,

$$\mathfrak{S}AB = \mathfrak{S}BA = \frac{1}{3}(a\beta)(b\alpha)$$

$$\mathfrak{S}ABC = \mathfrak{S}ACB = \dots = \frac{1}{3}(a\beta)(b\gamma)(c\alpha),$$

u. s. f. Ferner werde

$$(A|B) = (B|A) = \frac{1}{2}(\alpha\beta x)(abu) =$$

$$= \frac{1}{2}\{AB + BA - 3\mathfrak{S}A \cdot B - 3\mathfrak{S}B \cdot A -$$

$$- 3(\mathfrak{S}AB - 3\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}B) \cdot E\}$$

gesetzt, und analog

$$\begin{aligned}
 (A|B|C) &= (B|C|A) = (C|A|B) = \\
 &= (A|C|B) = (B|A|C) = (C|B|A) = \\
 &= \frac{I}{6} (abc) (\alpha\beta\gamma) = \\
 &= \frac{I}{2} \{ \mathfrak{S}ABC + \mathfrak{S}ACB - 3\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}BC - 3\mathfrak{S}B \cdot \mathfrak{S}CA \\
 &\quad - 3\mathfrak{S}C \cdot \mathfrak{S}AB + 9\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}B \cdot \mathfrak{S}C \}.
 \end{aligned}$$

Es folgt dann

$$(1) \quad (A|E) = \frac{I}{2} \{ 3\mathfrak{S}A \cdot E - A \}, \quad (E|E) = E$$

$$(2) \quad (A|B|E) = \mathfrak{S}(A|B) = \frac{I}{2} \{ 3\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}B \} - \mathfrak{S}AB$$

$$(3) \quad (A|E|E) = \mathfrak{S}A, \quad (E|E|E) = I,$$

ferner

$$(4) \quad (A|B|C) = \mathfrak{S}A(B|C) \quad (\text{u. s. w.}),$$

und

$$\begin{aligned}
 (5) \quad (A|B|C) \cdot E &= \\
 &= \frac{I}{3} \{ A(B|C) + B(C|A) + C(A|B) \} = \\
 &= \frac{I}{3} \{ (B|C)A + (C|A)B + (A|B)C \}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad |A| &= (A|A|A) = \\
 &= \frac{I}{2} \{ 2\mathfrak{S}A^3 - 9\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}A^2 + 9\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}A \}
 \end{aligned}$$

ist die *Determinante* der bilinearen Form oder Nonion A , oder die zugehörige *Nablafunktion*;

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \tilde{A} &= (A|A) = \frac{I}{2} (\alpha\alpha'x) (\alpha\alpha'u) = \\
 &= \frac{I}{2} \{ 2A^2 - 6\mathfrak{S}A \cdot A + 3(3\mathfrak{S}A \cdot \mathfrak{S}A - \mathfrak{S}A^2)E \}
 \end{aligned}$$

ist die zu A *adjungierte* bilineare Form oder Nonion; ist die Determinante $|A|$ von Null verschieden, so existiert die Form oder Nonion A^{-1} , und es ist

$$(8) \quad A^{-1} = |A|^{-1} \cdot \tilde{A} = |A|^{-1} \cdot \frac{1}{2} (\alpha\alpha'x)(aa'u)$$

die zu A *reziproke* Form oder Nonion. Man hat also

$$(9) \quad A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot E, \quad \tilde{\tilde{A}} = |A| \cdot A.$$

Die *charakteristische Gleichung* der Form A , die *Ranggleichung* des Nonionensystems, ist

$$(10) \quad A^3 - 3 \mathfrak{S} A \cdot A^2 + 3 \mathfrak{S} \tilde{A} \cdot A - |A| \cdot E = 0.$$

Schliesslich folgt noch

$$(11) \quad |A + B| = \tilde{A}A + 3 \mathfrak{S} \tilde{A}B + 3 \mathfrak{S} A\tilde{B} + B\tilde{B};$$

z. B., wenn \mathcal{A} eine Zahl, $\mathcal{A}E$ *skalar*, ein numerisches Multiplum von E ist,

$$(12) \quad |\mathcal{A}E - A| = \mathcal{A}^3 - 3 \mathfrak{S} \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^2 + 3 \mathfrak{S} \tilde{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} - |A|.$$

(Vgl. Nr. 10.)

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Gleichungen

$$(13^1) \quad \begin{aligned} \alpha x + \gamma y &= x', \\ \beta x + \delta y &= y', \end{aligned}$$

$$(13^r) \quad \begin{aligned} \xi' &= \xi\alpha + \eta\beta, \\ \eta' &= \xi\gamma + \eta\delta, \end{aligned}$$

in denen wir die Koeffizienten und die Unbekannten *Nonionen* bedeuten lassen.

Wie in § 2 kann man zunächst aus den Gleichungen (13) eine der zu suchenden Nonionen eliminieren. Die zu bestimmende Funktion ∇ ergibt sich dann als gemeinsamer Teiler der Determinanten gewisser Nonionen wie $\delta\tilde{\gamma}\alpha - \gamma\tilde{\gamma} \cdot \beta$ oder $\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\alpha - \tilde{\gamma}\gamma \cdot \tilde{\beta}\beta$. Nach kurzer Rechnung, bei der die Formeln (9) und (11) oder (12) zu benutzen sind, erhält man

$$(14) \quad \begin{aligned} \nabla &= \begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix} = \\ &= \alpha\tilde{\alpha} \cdot \delta\tilde{\delta} - 3 \mathfrak{S} (\tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}\beta) + 3 \mathfrak{S} (\alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}) - \beta\tilde{\beta} \cdot \gamma\tilde{\gamma}; \end{aligned}$$

$\nabla \neq 0$ ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichungen (13) eindeutig aufgelöst werden können, und zwischen ∇ und der Determinante $D_l = D_r$ oder D der Gleichungssysteme (13) besteht die Beziehung

$$(15) \quad D = \nabla^3.$$

Ferner ist ∇ als Determinante darstellbar,

$$(16) \quad \nabla = \left| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{array} \right|;$$

endlich hat sie ein Multiplikationstheorem gleich dem der *zweireihigen* Determinanten — alles wie im analogen Falle $m = 2$, $\rho = 2$ (§ 2, Nr. 15). Natürlich aber wechselt die vorliegende Funktion ihr Vorzeichen, wenn man in der entsprechenden zweireihigen Nonionenmatrix die beiden Zeilen oder beiden Spalten vertauscht (§ 5, S. 46).

Während die Formel (16) auf einer besonderen Gestalt (ε_{ik}) der Nonionengrundbasis beruht, ist (14) hiervon unabhängig, *dieselbe Formel gilt für jede Wahl der neun Einheiten*, falls man nur den skalaren Bestandteil und die Adjungierte einer Nonion gehörig erklärt hat. Und es gibt auch — was die Formel (16) jedenfalls nicht ohne Weiteres zeigen kann — eine Lösungsmethode der Gleichungen (13), die ebenfalls unabhängig ist von der Wahl der Basis, und *bei der die 4.9 Koordinaten α_{ik} , β_{ik} , γ_{ik} , δ_{ik} in den Nonionenkomplexen α , β , γ , δ belassen werden*. Es lassen sich nämlich explizite vier Nonionen A , B , C , D analog den Unterdeterminanten einer *zweireihigen* Determinante herstellen, die Gleichungen der Form

$$(17) \quad \begin{aligned} \alpha A + \gamma C &= \nabla, & \alpha B + \gamma D &= 0, \\ \beta A + \delta C &= 0, & \beta B + \delta D &= \nabla, \\ \nabla &= A\alpha + B\beta, & 0 &= C\alpha + D\beta, \\ 0 &= A\gamma + B\delta, & \nabla &= C\gamma + D\delta \end{aligned}$$

genügen; womit offenbar die Auflösung der Gleichungen (13) geleistet sein wird.

Es ist ausreichend, Folgendes zu beweisen:

1. ∇ lässt sich in die Form $\alpha A + \gamma C$ setzen, und es wird dann $\beta A + \delta C = 0$.
2. ∇ lässt sich auch in die Form $A^* \alpha + B^* \beta$ setzen, und es wird dann $A^* \gamma + B^* \delta = 0$.

3. Es ist $A = A^*$.

Man hat nun nach (4) und (5) z. B.

$$\begin{aligned} {}_3 \mathfrak{S} \alpha \tilde{\beta} \delta \tilde{\gamma} \cdot E &= {}_3 \mathfrak{S} \alpha \tilde{\beta} \delta (\gamma | \gamma) \cdot E = \\ &= {}_3 (\alpha \tilde{\beta} \delta | \gamma | \gamma) \cdot E = \alpha \tilde{\beta} \delta (\gamma | \gamma) + 2\gamma (\alpha \tilde{\beta} \delta | \gamma), \end{aligned}$$

also, wenn man das besondere Zeichen für die Einheitsform unterdrückt (wenn man die entsprechende Nonion mit der Einheit des gewöhnlichen Rechnens identifiziert),

$$\begin{aligned} {}_3\mathfrak{E}\alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} &= {}_3\mathfrak{E}\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\alpha = \\ &= \alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} + 2\gamma(\alpha\tilde{\beta}\delta|\gamma) = \\ &= \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\alpha + 2(\beta|\delta\tilde{\gamma}\alpha)\beta, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} {}_3\mathfrak{E}\tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}\beta &= {}_3\mathfrak{E}\gamma\tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} = \\ &= \gamma\tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} + 2\alpha(\gamma\tilde{\delta}\beta|\alpha) = \\ &= \tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}\beta + 2(\alpha|\gamma\tilde{\delta}\beta)\alpha. \end{aligned}$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned} \nabla &= \alpha\{\tilde{\delta}\delta.\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\gamma\tilde{\delta}\beta|\alpha)\} - \\ &\quad - \gamma\{\tilde{\beta}\beta.\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} - 2(\alpha\tilde{\beta}\delta|\gamma)\} = \\ &= \{\tilde{\delta}\delta.\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\alpha|\gamma\tilde{\delta}\beta)\}\alpha - \\ &\quad - \{\tilde{\gamma}\gamma.\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta} - 2(\beta|\delta\tilde{\gamma}\alpha)\}\beta. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Nonion α in diesen beiden Entwicklungen von ∇ sind einander gleich. Ausserdem aber wird behauptet, dass z. B.

$$\begin{aligned} 0 &= \beta\{\tilde{\delta}\delta.\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\gamma\tilde{\delta}\beta|\alpha)\} - \\ &\quad - \delta\{\tilde{\beta}\beta.\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} - 2(\alpha\tilde{\beta}\delta|\gamma)\}. \end{aligned}$$

ist, d. h.

$$\beta(\gamma\tilde{\delta}\beta|\alpha) = \delta(\alpha\tilde{\beta}\delta|\gamma),$$

oder, in der Formelsprache der bilinearen Formen, da $\gamma\tilde{\delta}\beta$ der bilinearen Form

$$\frac{1}{2}(cx)(\delta\delta'\gamma)(dd'b)(u\beta)$$

entspricht, dass die identische Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} (bx)(\alpha\beta'\beta)(\delta\delta'\gamma)(dd'b')(acu) &= \\ = (dx)(\gamma\delta'\delta)(\beta\beta'\alpha)(bb'd')(cau). \end{aligned}$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta\beta')(\gamma\delta\delta')(acu)\{(d'd'b')(bx) + (bb'd')(dx)\} = \\ & = \frac{1}{2}(\alpha\beta\beta')(\gamma\delta\delta')(acu)\{(d'd'b')(bx) - (dd'b')(b'x) + \\ & \quad + (bb'd)(dx) - (bb'd)(d'x)\} = 0. \end{aligned}$$

Es bestehen also wirklich Gleichungen der Form (17); und zwar ist

$$\begin{aligned} (18) \quad A &= \tilde{\delta}\delta \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\alpha|\gamma\tilde{\delta}\tilde{\beta}), \\ B &= -\tilde{\gamma}\gamma \cdot \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta} + 2(\beta|\delta\tilde{\gamma}\alpha), \\ C &= -\tilde{\beta}\beta \cdot \tilde{\gamma} - \tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} + 2(\gamma|\alpha\tilde{\beta}\delta), \\ D &= \tilde{\alpha}\alpha \cdot \tilde{\delta} + \tilde{\gamma}\alpha\tilde{\beta} - 2(\delta|\beta\tilde{\alpha}\gamma). \end{aligned}$$

Es ist klar, dass auch hier, wie im Falle $\varrho = 2$, diese Koeffizienten A, B, C, D der Gleichungen (17) nur auf eine Weise bestimmt werden können.

6.

Anhang: Gleichungen mit schief-symmetrischer Determinante. Pfaff'sche Aggregate.

Zu den Fällen, in denen die Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen kein ganz erfreuliches Ergebnis liefert, gehören, wie in der Einleitung schon erwähnt, die Systeme linearer Gleichungen mit schief-symmetrischer Determinante. Im wichtigsten Fall, in dem die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten gerade und die zugehörige Determinante nicht Null ist, hat JACOBI eine Lösungstheorie entwickelt, die kaum etwas zu wünschen übrig lässt, wenn man möglichst elementar zu Werke gehen will.¹ Aber diese Theorie, in deren Mittelpunkt die sogenannten PFAFF'schen Aggregate stehen, passt nicht ganz in den Rahmen, innerhalb dessen das genannte Problem aufzutreten pflegt. Die PFAFF'schen Aggregate sind (relative) *Invarianten* gegenüber beliebigen (kogredienten) linearen Transformationen, und das kann, soviel ich sehe, bei der üblichen Behandlung des Stoffs nur daraus erschlossen werden, dass ihre Quadrate Determinanten sind. Die symbolische Methode der Invariantentheorie liefert dagegen

¹ JACOBI's Ges. Werke, Bd IV, S. 25 u. ff. Neuere Darstellungen bei KOWALEWSKI, Determinanten, Leipzig 1909, Kap. 9, und E. v. WEBER, Pfaff'sches Problem, Leipzig 1900, Kap. I. Vgl. auch F. ENGEL in GRASSMANN'S Werken I, 2, S. 474 u. ff., Leipzig 1896.

für die PFAFF'schen Aggregate und für die damit zusammenhängenden Ausdrücke ein Bildungsgesetz, dem man die Invarianteneigenschaft auch ansieht. Es will mir scheinen, dass auch eine weniger elementare Behandlung des Gegenstandes nützlich sein kann, wenn sie zu einer vertieften Einsicht führt.

Es sei, in symbolischer Bezeichnung,

$$(1) \quad S = (ax)(by) = (a'x)(b'y) = \dots$$

eine alternierende bilineare Form mit n Paaren von Veränderlichen $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$, also eine Form, deren symmetrische lineare Kovariante

$$\frac{1}{2} \{(ax)(by) + (ay)(bx)\}$$

identisch verschwindet, so dass

$$S = \frac{1}{2} \{(ax)(by) - (ay)(bx)\}$$

gesetzt werden kann.

Mit Hülfe der üblichen (oder vielmehr früher einmal üblichen) Umformungen sieht man, dass im Falle eines ungeraden n jede Kovariante von S , die einen ganz mit Symbolen von S ausgefüllten Determinantenfaktor hat, identisch verschwindet, und dass bei geraden Werten ($n = 2m$) der Stufenzahl n jede solche Kovariante durch die Invariante $(a'b'a''b'' \dots a^{(m)}b^{(m)})$ teilbar sein muss, während die übrigen invarianten Bildungen im Wesentlichen die Kovarianten

$$\begin{aligned} &(a'b' \dots a^{(m-1)}b^{(m-1)}uv) \\ &(a'b' \dots a^{(m-2)}b^{(m-2)}uvu'v') \\ &\dots \end{aligned}$$

sind. Er gibt also bei ungerader Stufenzahl keine Invariante von S , und bei gerader Stufenzahl $n = 2m$ eine einzige irreduzible Invariante, nämlich, bei zweckmässiger Wahl des Zahlenfaktors, die Invariante

$$(2) \quad P = \frac{1}{2^m \cdot m!} (a'b'a''b'' \dots a^{(m)}b^{(m)}),$$

von deren Quadrat daher die Determinante der Form S ,

$$(3) \quad |S| = \frac{1}{n!} (a'a'' \dots a^{(m)})(b'b'' \dots b^{(m)})$$

sich höchstens um einen Zahlenfaktor unterscheiden kann. Das Beispiel

$$S = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1})$$

zeigt, dass

$$(4) \quad D = |S| = P^2$$

ist.

Betrachten wir jetzt die Kovariante

$$(a' b' a'' b'' \dots a^{(m-1)} b^{(m-1)} u v),$$

die wieder eine — eventuell identisch verschwindende — alternierende bilineare Form in den zu x, y kontragredienten Veränderlichen (Systemen von Veränderlichen) u, v ist, so folgt

$$\begin{aligned} (ax)(a' b' a'' b'' \dots a^{(m-1)} b^{(m-1)} b v) &= \\ &= -\frac{1}{n} (a b a' b' \dots a^{(m-1)} b^{(m-1)}) \cdot (vx) = \\ &= -2^{m-1} (m-1)! P \cdot (vx); \end{aligned}$$

es ist also, wenn $P \neq 0$ ist,

$$(5) \quad \begin{aligned} \Sigma = (ua)(v\beta) &= \frac{1}{2} \{ (ua)(v\beta) - (u\beta)(va) \} = \\ &= -\frac{1}{2^{m-1} (m-1)! P} (a' b' \dots a^{(m-1)} b^{(m-1)} u v) \end{aligned}$$

die gewöhnlich mit S^{-1} bezeichnete zu S reziproke Form, deren Komposition (Multiplikation) mit S die Einheitsform liefert,

$$(6) \quad (ax)(ba)(v\beta) = (vx), \quad (ua)(a\beta)(by) = (uy);$$

im angeführten Beispiel

$$\Sigma = -(u_1 v_2 - u_2 v_1) - (u_3 v_4 - u_4 v_3) - \cdots - (u_{n-1} v_n - u_n v_{n-1}).$$

Zwischen den Determinanten D, \mathcal{A} von S und Σ besteht die Beziehung $D \mathcal{A} = 1$, und daher zwischen den Invarianten P, Π beider Formen die Beziehung $P \cdot \Pi = \pm 1$. Tatsächlich ist, wie wieder das Beispiel zeigt,

$$(7) \quad P \cdot \Pi = (-1)^m.$$

Lassen wir jetzt die Form S einem System linearer Gleichungen mit derselben Koeffizientenmatrix entsprechen,

$$(8) \quad (ax) b_k = u_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

so haben wir in dem ebenso aus Σ abgeleiteten Gleichungssystem

$$(9) \quad (u\alpha) \beta_k = x_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

nach Nr (6) die Auflösung des Systems (8) vor uns; und zwar erhalten wir so die Lösung *in reduzierter Form*, mit der Invariante P im Nenner an Stelle von P^2 , das die Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen liefern würde.

Hiermit, oder vielmehr schon vorher durch die Gleichungen (6), ist die gestellte Aufgabe gelöst, da P sich sogleich als irreduzibel erweist. Es bleibt aber noch Einiges zu sagen über den Zusammenhang unserer Formeln mit den sonst üblichen, die ja anders aussehen. Wir geben also jetzt die symbolische Bezeichnung auf, und ersetzen die symbolischen Produkte durch reale (reelle oder komplexe) Zahlen,

$$a_i b_k = a'_i b'_k = \dots = p_{ik}, \quad \alpha_i \beta_k = \alpha'_i \beta'_k = \dots = \pi_{ik}.$$

Die Gleichungen (8) werden dann, ausführlich geschrieben, diese:

$$\begin{array}{rcl} * & p_{12} x_2 + p_{13} x_3 + \dots + p_{1n} x_n = & u_1, \\ p_{21} x_1 & * & + p_{23} x_3 + \dots + p_{2n} x_n = u_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + p_{n3} x_3 + \dots + & * & = u_n. \end{array}$$

Entwickelt man jetzt den Determinantenfaktor im Ausdruck (2), also die symbolische Determinante n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a'_1 b'_1 & | & a''_1 b''_1 & | & \dots & | & a^{(m)}_1 b^{(m)}_1 \\ a'_2 b'_2 & | & a''_2 b''_2 & | & \dots & | & a^{(m)}_2 b^{(m)}_2 \\ \dots & | & \dots & | & \dots & | & \dots \\ a'_m b'_m & | & a''_m b''_m & | & \dots & | & a^{(m)}_m b^{(m)}_m \end{vmatrix}$$

nach Spaltenpaaren unter Befolgung der LAPLACE'schen Regel, so erhält man eine Summe von Produkten von je m der Grössen p_{ik} , in deren Entwicklungs-

gliedern jeder der Indices i oder k gerade einmal vorkommt, und in die ausserdem jedes p_{ik} , wenn überall die Grössen p_{ik} mit $i > k$ eliminiert werden, mit dem Faktor $2 \cdot (-1)^{i+k-1}$ eingeht. Da immer $m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ dieser Produkte einander gleich sind, so kommen in der Entwicklung von P , nach Weghebung des Zahlenfaktors $2^m \cdot m!$ aus Zähler und Nenner, die einzelnen m -gliedrigen Produkte von Grössen $p_{ik} (i < k)$ nur noch mit Faktoren ± 1 vor; es entsteht ein aus $(n-1)(n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$ m -gliedrigen Produkten zusammengesetztes *Pfaff'sches Aggregat*, eine ganze Funktion der Grössen p_{ik} , die linear ist in bezug auf alle solchen Grössen, die einen vorgeschriebenen Index i oder k tragen. Im Falle $n=4$ z. B. entsteht der PLÜCKER'sche Ausdruck; schreibt man nur die Indices, setzt man also etwa $p_{ik} = (ik)$, so erhält man

$$\begin{aligned} & (12)(34) - (13)(24) + (14)(23) = \\ & = (12)(34) + (13)(42) + (14)(23). \end{aligned}$$

Wird sodann dieser Ausdruck wiederum durch ein analoges Symbol (1234) (das JACOBI'sche Symbol) bezeichnet, so lässt sich P im Falle $n=6$ einfach schreiben:

$$\begin{aligned} & (12)(3456) - (13)(2456) + (14)(2356) - \\ & - (15)(2346) + (16)(2345). \end{aligned}$$

Jedes Entwicklungsglied erscheint mit dem positiven Vorzeichen, wenn die entsprechende Permutation der Ziffern $1, \dots, 6$ gerade ist, und mit dem negativen, wenn sie ungerade ist. Andere äquivalente Ausdrücke erhält man, wenn man die Ziffern beliebig vertauscht und die erforderlichen Zeichenwechsel vornimmt.¹ In dieser Weise kann man fortfahren.

Allgemein ergibt sich, wenn nunmehr

$$(10) \quad P = (123 \dots n)$$

gesetzt wird, die Regel, dass P sein Vorzeichen wechselt, wenn man zwei der Zahlen $1, \dots, n$ im Symbol (10) vertauscht. Ferner folgt, dass P , als Summe von Faktoren geschrieben, deren erster immer den Index k trägt, die Form

$$(11) \quad P = p_{1k} P_{1k} + \dots + p_{nk} P_{nk}$$

hat, worin $P_{ik} = -P_{ki}$ wieder ein PFAFF'sches Aggregat mit einem Faktor ± 1 ist ($i \neq k$). Das Symbol dieses Aggregats entsteht aus dem von P dadurch, dass

¹ Von $n=8$ an kommen noch weitere Entwicklungen nach Art der LAPLACE'schen Determinantenformeln hinzu, z. B.

$$P = \frac{1}{3} \{(1234)(5678) \mp \dots\}.$$

man die Indices i und k unterdrückt, und sein Zahlenfaktor ist $(-1)^{i+k-1}$, wenn $i < k$, und $(-1)^{i+k}$, wenn $i > k$ ist. Weiter folgt

$$(12) \quad 0 = p_{1k} P_{1i} + \dots + p_{nk} P_{ni} \quad \{i \neq k\}.$$

Die Gleichungen (11) und (12) liefern wieder die Lösung der Gleichungen (8) in reduzierter Form. Stellt man diese Lösung neben die in den Gleichungen (9) enthaltene, sowie neben die von der allgemeinen Gleichungstheorie gelieferte Lösung in Determinantenform, so ergeben sich die bekannten Relationen zwischen Unterdeterminanten von D und PFAFF'schen Aggregaten. Wir nennen D_{ik} das algebraische Komplement des Elementes p_{ik} in der Entwicklung von D , so dass

$$D = p_{1k} D_{1k} + \dots + p_{nk} D_{nk},$$

$$0 = p_{1k} D_{1i} + \dots + p_{nk} D_{ni}$$

wird. Dann folgt

$$(13) \quad D_{ik} = P \cdot P_{ik} = P^2 \cdot \Pi_{ik}.$$

(Vgl. Nr 5.) Bezeichnen wir ferner noch die Koeffizienten von $p_{ij} p_{jk}$ in der Entwicklung von D mit D_{ik}^j oder D_{ki}^j , so dass

$$D = \sum_{(i,k)} p_{ij} D_{ik}^i p_{jk} = - \sum_{(i,k)} p_{ij} p_{jk} D_{ik}^j$$

wird, so folgt aus

$$D = P^2 = \sum_i p_{ij} P_{ij} \cdot \sum_k P_{jk} p_{jk} = - \sum_{(i,k)} p_{ij} p_{jk} P_{ij} P_{jk}$$

$$(14) \quad D_{ik}^j = P_{ij} \cdot P_{jk} \cdot -$$

Die Systeme linearer Gleichungen, mit denen wir es hier zu tun gehabt haben, unterscheiden sich von den zuvor betrachteten wesentlich dadurch, dass sie, als Transformationen gefasst, keine Gruppe bilden. Daher gibt es auch kein Multiplikationstheorem für PFAFF'sche Aggregate, das dem der Determinanten oder ∇ -Funktionen vergleichbar wäre. Aus eben diesem Grunde leistet auch der Satz BRIOSCHI's, wonach jede Determinante gerader Ordnung als PFAFF'sches Aggregat geschrieben werden kann, nicht das, was er auf den ersten Blick vielleicht zu versprechen scheint.

Eine bei der Korrektur ausgefallene Anmerkung soll hier nachgetragen werden: Die Determinantenformel auf Seite 22 hat, noch vor mir, auf einem anderen Wege auch Herr J. SCHUR abgeleitet, den ich von meiner Untersuchung in Kenntniss gesetzt hatte.

