SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION RELATIVE À L'ÉQUILIBRE DES PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES.[1]

PAR

GIUSEPPE LAURICELLA.

à CATANIA.

Dans ce travail je substitue, à l'équation différentielle en U relative à l'équilibre des plaques $\Delta^4 U = f(x, y)$, un système Γ de deux équations différentielles où les fonctions inconnues u, v sont les dérivées partielles du premier ordre de la fonction U; on doit alors intégrer le système Γ en supposant u et v données sur le contour.

Pour cela je développe d'abord pour le système Γ une théorie[2] généralisant, dans ses points essentiels, celle du *potentiel newtonien*, qui me permettra de suivre ici une voie analogue à celle de FREDHOLM pour le *problème de Dirichlet*, et que j'ai suivie autrefois pour le problème de l'équilibre des corps élastiques isotropes.[3]

Outre au problème de l'intégration du système Γ pour une aire finie (*problème intérieur*), je traite ici le même problème pour une aire infinie (*problème extérieur*); et dans tous les deux problèmes je suppose que les coordonnées des points du contour, considérées comme fonctions de l'arc, sont finies et continues ainsi que leurs dérivées des trois premiers ordres.

Le cas du rectangle, comme de tout contour ayant des pointes, échappe à l'analyse générale que je développe, de même qu'il échappe à l'analyse de FRED-

[1] Ce Mémoire est antérieur à ma Note: *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$ (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei; vol. XVI, 2:o sem., Settembre 1907); il a été envoyé à l'Académie des Sciences de Paris le Décembre du 1906.

[2] Ici, l'introduction de deux expressions, généralisant la dérivée normale et analogues aux tensions de la théorie de l'élasticité, nous guide à considérer un problème analogue au *problème dérivé de Dirichlet*. Dans ce travail je ne traite pas ce problème, qui pourra se resoudre en utilisant les resultats du Chapitre III.

[3] LAURICELLA; *Alcune applicazioni della teoria della equazioni funzionali alla fisica-matematica* Nuovo Cimento, Serie V, Vol. XIII, 1907).

HOLM pour le *problème de Dirichlet.* M. COIALOWITCH[1] a traité, il y a quelques années, directement ce cas, en faisant des importantes applications numériques. Néamoins je ne crois pas sans intérêt de donner ici pour le cas du rectangle une autre solution directe, qui est aussi susceptible d'applications numériques.

CHAPITRE I.

1. Soit C une courbe plane fermée dépourvue de tout point de rencontre avec soi-même et douée de tangente déterminée en chaque point — exception faite, au surplus, pour un nombre fini de points, où nous supposerons toutefois que la courbe C ait, des deux côtés de chacun d'eux, *deux* tangentes déterminées, au lieu qu'une seule.

Rapportons les points du plan de la courbe C à un système de deux axes cartésiens ortogonaux x, y; et désignons par σ l'aire plane finie, qui est renfermée par C, par σ' la portion infinie du plan, qui est limitée par C, et par r le rayon vecteur, qui joint deux points quelconques du plan, dont les coordonnées soient (x, y), (ξ, η).

Le sens positif de la normale n à la courbe C sera toujours celui qui est dirigé vers l'intérieur de l'aire σ; et le sens positif de la tangente celui qui peut se porter en coïncidence avec le sens positif de l'axe des x par un glissement du plan sur soi-même, qui entraîne la superposition des deux sens positifs de la normale n et de l'axe des y.

Ensuite nous désignons par s l'arc de la courbe C rapporté à une origine, que l'on pourra choisir arbitrairement sur C, et mesuré toujours dans la direction positive, déjà fixée, sur la tangente en chaque point de la courbe. De ces hypothèses on déduit, pour tout point (x, y) de C, les rélations connues:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn}, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn}.$$

[1] *Sur une équation aux dérivées partielles du 4:e ordre* (en russe) (St. Pétersbourg. — Imprimerie de l'Académie impériale des sciences. — 1902).

Théorèmes de transformation.

2. Soit $U(x, y)$ intégrale des équations suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma) & \Delta^4 U = \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 U}{\partial y^4} = f(x, y), \\[2ex] \text{(sur la courbe } C) & U = a(s), \quad \dfrac{dU}{dn} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{dy}{dn} = b(s), \end{cases}$$

où nous supposons que la fonction donnée $f(x, y)$, des points de σ, soit finie, continue et telle qu'on peut écrire la *formule de Poisson:*[1]

$$(2)\qquad \Delta^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_\sigma f(\xi, \eta)\log r\, d\sigma\right) = f(x, y);$$

et où nous supposons encore que la fonction $a(s)$ des points de la courbe C ait la dérivée du premier ordre finie et intégrable, et que la fonction $b(s)$ de C soit elle-même finie et intégrable.

Posons:

$$(3)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = v,$$

$$(4)\qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta^2 U.$$

Les (1), (3), (4) nous donnent:

$$(5)\qquad \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma) & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2\theta = f(x, y), \\[2ex] \text{(sur la courbe } C) & u = b(s)\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{da}{ds}\dfrac{dy}{dn} = a_1(s), \quad v = b(s)\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{da}{ds}\dfrac{dx}{dn} = b_1(s), \end{cases}$$

où $a_1(s)$, $b_1(s)$ sont des fonctions des points de C finies et intégrables.

Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ intégrales des équations (5). En vertu de l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

---

[1] Pour la validité de cette formule on trouvera des conditions beaucoup générales dans une Note de M. T. J. I'A. Bromwich (Proceedings of the London math. society; S. 2:a, T. 3, Parte 5).

on peut écrire:

(3)' $$u = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial U}{\partial y};$$

et, ensuite,

(4)' $$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta^2 U.$$

En vertu de l'équation:

$$\Delta^2 \theta = f(x, y)$$

on aura encore:

(dans l'aire σ) $$\Delta^4 U = f(x, y).$$

Les deux dernières des équations (5) nous donnent, ensuite,

(6) (sur la courbe C) $$U = \int_0^s \{a_1(s)dx + b_1(s)dy\} + B = \int_0^s \frac{da}{ds} ds + B,$$

(sur la courbe C) $$\frac{dU}{dn} = a_1(s)\frac{dx}{dn} + b_1(s)\frac{dy}{dn} = b(s),$$

où B est une constante arbitraire.

La détermination de la fonction U dépende des équations (3)'. Elles la déterminent à une constante près, et nous pouvons choisir cette constante de sorte qu'en résulte:

(sur la courbe C) $$U = a(s).$$

En concluant, nous pouvons énoncer le théorème suivant: *l'intégration des équations* (1) *peut se ramener toujours à l'intégration des équations* (5), *et réciproquement.*

3. Posons:

$$U_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{r^2 \log r}{4} f(\xi, \eta) d\sigma, \qquad V(x, y) = U(x, y) - U_1(x, y).$$

Il vient, en dérivant sous le signe d'intégral,

$$\Delta^2 U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (\log r + 1) f(\xi, \eta) d\sigma;$$

et, d'après l'équation (2),

(dans l'aire σ) $$\Delta^4 U_1 = f(x, y).$$

On en conclut donc pour la fonction $V(x, y)$:

$$(1)' \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma) & \Delta^4 V = 0, \\ \text{(sur la courbe } C) & V = a(s) - U_1(s) = a_2(s), \quad \dfrac{dV}{dn} = b(s) - \dfrac{dU_1}{dn} = b_2(s), \end{cases}$$

où $a_2(s)$ est une fonction des points de C, qui admette la dérivée du premier ordre finie et intégrable, et où $b_2(s)$ est finie et intégrable sur C. Par conséquent, nous pouvons énoncer le théorème suivant: *l'intégration des équations* (1) *peut se réduire toujours à l'intégration des équations* (1)'.

De ce théorème en résulte, en vertu du théorème du § 2, le corollaire suivant: *l'intégration des équations* (5) *peut se réduire toujours à l'intégration des équations*:

$$(5)' \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma) & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \Delta^2 \theta_1 = \Delta^2 \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0, \\ \text{(sur la courbe } C) & u_1 = a_3(s), \quad v_1 = b_3(s), \end{cases}$$

où les fonctions $a_3(s)$, $b_3(s)$, des points de C, sont finies et intégrables.

Remarque I. — La fonction $U_1(x, y)$ a ses dérivées des deux premiers ordres finies et continues dans l'aire σ (les points de la courbe C inclus); par conséquent nous aurons le résultat suivant: *dans le cas particulier où l'on a: $a(s) = b(s) = 0$, si les coordonnées des points de C ont les dérivées des deux premiers ordres finies et continues, la fonction $a_2(s)$ aura ses dérivées des deux premiers ordres finies et continues, la fonction $b_2(s)$ sera finie et continue, ainsi que sa dérivée première; l'intégration des équations* (1) *peut se réduire toujours à l'intégration des équations* (5)', *où les fonctions $a_3(s)$, $b_3(s)$ sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.*

Remarque II. — Les résultats qui précédent sont aussi valables, si au lieu de l'aire finie σ nous considérons l'aire infinie σ', et si, en désignant par ϱ la distance du point variable à l'origine des axes, pour ϱ suffisamment grand, $f(x, y)$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{\varphi(x, y)}{\varrho^{4+\varepsilon}}$, $\varphi(x, y)$ restant en valeur absolue inférieur à une quantité fixe, ε étant une constante positive.

Il faut observer encore que, dans le cas de l'aire finie σ, l'équation:

$$(5)_1 \qquad \text{(dans l'aire } \sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

porte à la condition:

$$(7) \qquad \int_C \{u\cos(ny) - v\cos(nx)\}ds = \int_C \{a_1(s)dx + b_1(s)dy\} = 0,$$

pendant que, dans le cas de l'aire infinie σ', de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

on ne peut pas déduire la condition (7). Alors, dans le cas de l'aire infinie σ', si l'on veut que la fonction U, déterminée par les $(3)'$, soit monodrome, il faut admettre [voir la (6)] que les fonctions $a_1(s)$, $b_1(s)$ satisfaient à la condition (7).

Théorèmes de détermination unique.

4. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ deux fonctions finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, dans l'aire σ (les points de la courbe C inclus pour les fonctions u, v et pour leurs dérivées du premier ordre). Supposons que u, v satisfaient aux équations:

$$(5)'' \qquad \text{(dans l'aire } \sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2\theta = \Delta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Soit χ la fonction *associée* de θ, c'est à dire la fonction déterminée par les équations:

$$(8) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

De ces équations et de la première de $(5)''$ on aura:

$$(9) \qquad \text{(dans l'aire } \sigma) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$0 = \int_\sigma \left[u\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} + v\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\right] d\sigma.$$

Cette formule nous donne, au moyen d'intégrations par parties,

$$0=\int_\sigma\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\chi\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\chi\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}d\sigma+$$

$$+\int_C\left[u\left\{2\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)-\chi\cos(ny)-\frac{\partial v}{\partial y}\cos(nx)\right\}+\right.$$

$$\left.+v\left\{2\frac{\partial v}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial y}\cos(ny)+\chi\cos(nx)-\frac{\partial u}{\partial x}\cos(ny)\right\}\right]ds;$$

et, en vertu des (5)″,

$$(10)\qquad 0=2\int_\sigma\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}d\sigma+2\int_C(uX_s+vY_s)ds,$$

où l'on a posé:

$$(11)\qquad \begin{cases} X_s=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(nx)+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{2}\chi\right)\cos(ny),\\[2ex] Y_s=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\chi\right)\cos(nx)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(ny).\end{cases}$$

La formule (10) est aussi valable si, n'étant pas surs de l'existence et de la continuité des dérivées du premier ordre de u et de v sur la courbe C, on sait que les expressions X_s, Y_s, calculées dans les points d'une courbe C' parallèle à C et intérieure à σ, tendent vers des limites déterminées et finies, lorsque la courbe C' s'approche indéfiniment à C.

1° *Supposons avoir*:

$$(12)\qquad \text{(sur la courbe } C)\qquad u=v=0.$$

La formule (10) nous donne:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};$$

et, par suite,

$$u=hx+k,\qquad v=hy+j,$$

où h, k, j sont des constantes. D'après cela, eu égard à l'hypothèse (12), *on aura:*

$$(12)'\qquad \text{(dans l'aire } \sigma)\qquad u=v=0.$$

2°. *Supposons avoir:*

$$(13)\qquad \text{(sur la courbe } C)\quad X_s=-\delta\cos(ny),\qquad Y_s=\delta\cos(nx),$$

où δ est une constante donnée.

Dans ce cas la (10) dévient:

$$0=2\int_\sigma\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}d\sigma-2\delta\int_C\{u\cos(ny)-v\cos(nx)\}ds;$$

dont, en vertu de la (7), qui est une conséquence de la première des (5)'', *en résulte:*

(13)' (dans l'aire σ) $u=hx+k,\qquad v=hy+j,$

où h, k, j sont des constantes arbitraires.

5. *Supposons avoir:*

(5)''' (dans l'aire σ') $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x},\qquad \Delta^2\theta=0,$

et supposons encore que, pour ϱ suffisamment grand, les fonctions u, v puissent se mettre sous la forme $\dfrac{\varphi(x,y)}{\varrho}$ et leurs dérivées du premier ordre sous la forme $\dfrac{\varphi(x,y)}{\varrho^2}$, $\varphi(x,y)$ restant en valeur absolue inférieur à une quantité fixe.

En se servant de la formule (10), on démontrera, à l'aide de raisonnements bien connus,

(10)' $$0=2\int_{\sigma'}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}d\sigma'-2\int_C(uX_s+vY_s)ds.$$

3° *On ait*:

(14) (sur la courbe C) $u=v=0.$

De la (10)', par un raisonnement analogue à celui employé au paragraphe précédent, *on déduit:*

(14)' (dans l'aire σ') $u=v=0.$

4° *On ait:*

(15) (sur la courbe C) $X_s=Y_s=0.$

On trouve, à cause de la (10)',

(dans l'aire σ') $u=hx+k,\qquad v=hy+j,$

où h, k, j sont des constantes; et, par conséquent, en se rappelant que u, v s'annulent à l'infini, *on aura:*

(15)' (dans l'aire σ') $u = v = 0$.

6. Des résultats 1° et 3°, que nous avons établis précédemment, on deduit les deux théorèmes suivants:

a) *Si les équations* (5), *où les fonctions* $a_1(s)$, $b_1(s)$ *sont arbitraires, mais assujetties à la condition:*

$$\int_C \{a_1 \cos(ny) - b_1 \cos(nx)\} ds = 0,$$

admettent une solution, celle-ci sera unique.

b) *Si les équations* (5), *où l'on remplace* σ *par* σ' *et où les fonctions* $a_1(s)$, $b_1(s)$ *sont absolument arbitraires, admettent une solution* u, v, *telle que, pour* ϱ *suffisamment grand, les* u, v *peuvent se mettre sous la forme* $\frac{\varphi(x, y)}{\varrho}$ *et leurs dérivées du premier ordre sous la forme* $\frac{\varphi(x, y)}{\varrho^2}$, $\varphi(x, y)$ *restant en valeur absolue inférieure à une quantité fixe, il n'y a aucune autre solution, qui jouit des mêmes propriétés à l'infini.*

Extension des formules de Green.

7. Soient u, v; u', v' deux solutions des équations:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0; \tag{16}$$

et supposons que les fonctions u, v; u', v' soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, dans l'aire σ, les points du contour C (formé par une ou plusieurs courbes fermées) inclus pour les u, v, u', v' et pour leurs dérivées du premier ordre.

On aura, à l'aide d'intégrations par parties et en vertu des équations (16):

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = \int_\sigma \Bigg[u' \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} + \\ + v' \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\Bigg] d\sigma \\ - \int_\sigma \Bigg[u \left\{\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}\right)\right\} + \end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &+ v\left\{\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+\frac{\partial \chi'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\right\}\Bigg]d\sigma = \\ &= -\int\limits_C (u' X_s + v' Y_s) ds + \int\limits_C (u X'_s + v Y'_s) ds, \end{aligned}\right.$$

où l'on a désigné par X'_s, Y'_s les expressions (11) calculées pour les fonctions u', v'.

Soit $p \equiv (\xi, \eta)$ un point arbitraire de l'aire σ, éloigné du contour C. Décrivons autour de p une courbe C', intérieure à σ, et désignons par σ_1 l'aire finie limitée par C et C'.

Les fonctions:

$$(18)\qquad u' = \log r + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2, \qquad v' = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y},$$

où $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, satisfont dans l'aire σ_1 aux équations (16) et obéissent aux conditions de continuité et de dérivabilité imposées aux fonctions u', v', qui apparissent dans la formule (17). Pour la fonction harmonipue θ' et pour son associée χ' on a:

$$\theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 2\frac{\partial \log r}{\partial x}, \qquad \chi' = -2\frac{\partial \log r}{\partial y};$$

et ensuite:

$$(19)\qquad X'_s = 2\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn}, \qquad Y'_s = -2\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d \log r}{dn}.$$

Nous pouvons appliquer la formule (17) au cas de l'aire σ_1, et nous aurons:

$$0 = \int\limits_C (X_s u' + Y_s v' - X'_s u - Y'_s v) ds - \int\limits_{C'} (X_s u' + Y_s v' - X'_s u - Y'_s v) ds'.$$

Mais la courbe C' est arbitraire et nous pouvons la varier de sorte que l'aire $\sigma - \sigma_1$ soit aussi petite que l'on veut. Ainsi, on trouvera, par des considérations bien connues,

$$(20)\qquad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C (X_s u' + Y_s v' - X'_s u - Y'_s v) ds.$$

De même, en introduisant les fonctions

$$(18)'\qquad u'' = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad v'' = \log r + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2,$$

on aura:

$$(19)' \qquad X''_s = -2\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\log r}{dn}, \qquad Y''_s = 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r}{dn};$$

et, par suite,

$$(20)' \qquad v(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C (X_s u'' + Y_s v'' - X''_s u - Y''_s v)ds.$$

8. Les formules (20), (20)' sont parfaitement analogues à la *formule de Green*, bien connue. Elles sont aussi valables, si au lieu de l'aire finie σ on considère l'aire infinie σ' et si, pour ϱ suffisamment grand, les fonctions u, v, qu'elles doivent représenter, peuvent se mettre sous la forme $\frac{\varphi(x,y)}{\varrho}$ et leurs dérivées du premier ordre sous la forme $\frac{\varphi(x,y)}{\varrho^2}$, $\varphi(x,y)$ restant en valeur absolue inférieur à une quantité fixe.

Les formules (20), (20)' sont aussi valables si, n'étant pas surs de l'existence et de la continuité des derivées du premier ordre des fonctions u, v sur la courbe C, on sait que les expressions X_s, Y_s, calculées dans les points d'une courbe C' parallèle à C et intérieure à σ (ou à σ'), tendent vers des limites déterminées et finies, lorsque la courbe C' s'approche indéfiniment à C.

9. Faisons quelque application des formules (20), (20)'.

Nous avons trouvé au § 4 (2°) que les fonctions:

$$u_1 = hx + k, \qquad v_1 = hy + j,$$

où h, k, j sont des constantes arbitraires, forment une solution des équations (16), et qu'on a pour les valeurs des expressions (11), qu'y correspondent,

$$(21) \qquad X_s^{(1)} = -\delta\cos(ny), \qquad Y_s^{(1)} = \delta\cos(nx),$$

où δ est une certaine constante. Cette solution obéit aux conditions, que nous avons posées, pour la validité des formules (20), (20)'; de sorte que nous pourrons écrire:

$$h\xi + k = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X'_s + (hy+j)Y'_s\}ds - \frac{\delta}{2\pi}\int_C \{u'\cos(ny) - v'\cos(nx)\}ds,$$

$$h\eta + j = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X''_s + (hy+j)Y''_s\}ds - \frac{\delta}{2\pi}\int_C \{u''\cos(ny) - v''\cos(nx)\}ds.$$

Remarquons que les solutions u', v' et u'', v'' des équations (16), données par les (18) et (18)', satisfont à la condition (7)[1]; par conséquent, nous pouvons écrire encore:

$$h\xi + k = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X'_s + (hy+j)Y'_s\}\, ds.$$

$$h\eta + j = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X''_s + (hy+j)Y''_s\}\, ds.$$

Obsérvant que les constantes h, k, j sont arbitraires, on obtient:

(22)
$$\begin{cases} \xi = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C (xX'_s + yY'_s)\, ds, \\[2ex] \eta = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C (xX''_s + yY''_s)\, ds; \end{cases}$$

(23)
$$\begin{cases} 1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C X'_s ds, \qquad 1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C Y''_s ds, \\[2ex] 0 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C Y'_s ds = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C X''_s ds, \end{cases}$$

où x, y représentent les coordonnées des points de C; ξ, η représentent les coordonnées d'un point quelconque de l'intérieur de σ.

10. Désignons par u, v une solution quelconque des équations (16), considerées dans l'aire finie σ. L'application de la formule (17) aux deux solutions u, v; u_1, v_1 des équations (16), nous donne:

$$\int_C (u_1 X_s + v_1 Y_s)\, ds = \int_C (uX_s^{(1)} + vY_s^{(1)})\, ds = -\delta\int_C \{u\cos(ny) - v\cos(nx)\}\, ds,$$

d'où résulte, en tenant compte de la condition (7),

$$\int_C (u_1 X_s + v_1 Y_s)\, ds = 0.$$

[1] Pour s'en assurer il suffit d'observer que au point p les fonctions u', v'' deviennent infinies comme $\log r$, et que les fonctions v', u'' sont partout finies.

Enfin observant que les constantes h, k, j, qui apparissent dans les fonctions u_1, v_1, sont arbitraires, on parvient aux formules:

$$\int\limits_C X_s ds = \int\limits_C Y_s ds = \int\limits_C (xX_s + yY_s) ds = 0 .$$

CHAPITRE II.

Extension des théorèmes sur les doubles couches.

1. Supposons que la courbe fermée C admette une tangente déterminée en chacun de ses points. Désignons par m le nombre maximum des points d'intersection d'une droite quelconque du plan avec la courbe C; par x, y les coordonnées des points de C; et par ξ, η les coordonnées d'un point quelconque du plan de C. Posons, comme au Chapitre I, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, si le point (ξ, η) n'appartient pas à C, pendant que nous poserons $r' = \sqrt{(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2}$, si le point (ξ', η') appartient à C. Et encore, désignons par p le point de coordonnées ξ, η, s'il appartient à l'intérieur de l'aire finie σ, désignons-le par p', s'il appartient à l'intérieur de l'aire infinie σ'.

On a, comme il est bien connu,

$$(1) \qquad \int\limits_C \left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r'}{dn} ds = \int\limits_C \left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r'}{dn} ds = -\frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_C \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d \log r'}{dn} ds = 0;$$

et encore, pour les points p[1]:

$$(2) \qquad \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = -\pi, \qquad \int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d \log r}{dn} ds = 0;$$

pour les points p':

$$(2)' \qquad \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = \int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d \log r}{dn} ds = 0 .$$

Enfin on aura pour toutes positions du point (ξ, η) sur le plan de C,

[1] Comparer avec les formules (23) du Chapitre I.

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \left|\frac{d\log r}{dn}\right| ds \leq 2\pi m, \quad \int_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \left|\frac{d\log r}{dn}\right| ds \leq 2\pi m, \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad\qquad \int_C \left|\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn}\right| ds \leq 2\pi m. \end{cases}$$

2. *Soient $u(s)$, $v(s)$ deux fonctions finies et continues des points de la courbe C, données arbitrairement.* Considérons les intégrales:

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle U(\xi,\eta) = -\frac{1}{\pi}\int_C (X'_s u + Y'_s v) ds, \\ \displaystyle V(\xi,\eta) = -\frac{1}{\pi}\int_C (X''_s u + Y''_s v) ds, \end{cases}$$

où X'_s, Y'_s, X''_s, Y''_s sont les expressions données par les formules (19), (19)' du Chapitre I.

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit. En vertu de la continuité de u et de v, nous pouvons déterminer, pour un point quelconque $s_0 \equiv (\xi', \eta')$ de C, une portion C_1 de C, ayant le point s_0 dans son intérieur, et tel qu'on ait, pour tous ses points s,

$$|u(s) - u(s_0)| < \varepsilon, \qquad |v(s) - v(s_0)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, à cause des formules (3), on peut écrire:

$$(5)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int_{C_1} [X'_s\{u(s) - u(s_0)\} + Y'_s\{v(s) - v(s_0)\}] ds\right| \leq 8m\varepsilon,$$

quel que soit le point (ξ, η) du plan (les points de C inclus).

On a identiquement:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle U(\xi,\eta) = -\frac{u(s_0)}{\pi}\int_C X'_s ds - \frac{v(s_0)}{\pi}\int_C Y'_s ds - \\ \displaystyle\qquad - \frac{1}{\pi}\int_C [X'_s\{u(s) - u(s_0)\} + Y'_s\{v(s) - v(s_0)\}] ds = \\ \displaystyle = -\frac{u(s_0)}{\pi}\int_C X'_s ds - \frac{v(s_0)}{\pi}\int_C Y'_s ds - \end{cases}$$

$$(6)\quad\left|\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{C-C_1}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds- \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{C_1}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds. \end{array}\right.$$

Posons:

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l} \alpha(s,s_0)=2\left(\dfrac{\partial r'}{\partial y}\right)^2\dfrac{d\log r'}{dn}, \qquad \beta'(s,s_0)=2\left(\dfrac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\dfrac{d\log r'}{dn}, \\ \beta(s,s_0)=\alpha'(s,s_0)=-2\dfrac{\partial r'}{\partial x}\dfrac{\partial r'}{\partial y}\dfrac{d\log r'}{dn}, \end{array}\right.$$

et observons qu'on peut décrire sur le plan de C, de s_0 comme centre, avec un rayon suffisamment petit, un cercle, qui ne contient aucun point de $C-C_1$ dans son intérieur et tel qu'on ait pour un point quelconque p ou p' de son intérieur:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{C-C_1}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int\limits_{C-C_1}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds\right|<\varepsilon.$$

On aura donc, à cause de la (5),

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{C}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int\limits_{C}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds\right|<\varepsilon+16\,m\varepsilon;$$

et, par conséquent,

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{p=s_0}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{C}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds= \\ \qquad=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{C}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds, \\ \lim\limits_{p'=s_0}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{C}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds= \\ \qquad=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{C}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]\,ds. \end{array}\right.$$

Les (1), (2), (2)' nous donnent:

$$-\frac{1}{\pi}\int_C \alpha(s, s_0)\,ds = 1, \qquad -\frac{1}{\pi}\int_C X'_s(p)\,ds = 2, \qquad -\frac{1}{\pi}\int_C X'_s(p')\,ds = 0,$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_C \beta(s, s_0)\,ds = 0, \qquad -\frac{1}{\pi}\int_C Y'_s(p)\,ds = 0, \qquad -\frac{1}{\pi}\int_C Y'_s(p')\,ds = 0;$$

par suite, on aura des (6), (8):

$$(9)\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=s_0} U(\xi,\eta) = 2\,u(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C [\alpha(s, s_0)\{u(s) - u(s_0)\} + \beta(s, s_0)\{v(s) - v(s_0)\}]\,ds = \\ \qquad = u(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\,u(s) + \beta(s, s_0)\,v(s)\}\,ds, \\ \lim\limits_{p'=s_0} U(\xi,\eta) = -u(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\,u(s) + \beta(s, s_0)\,v(s)\}\,ds. \end{cases}$$

De même, on obtient:

$$(9)'\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=s_0} V(\xi,\eta) = v(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\,u(s) + \beta'(s, s_0)\,v(s)\}\,ds, \\ \lim\limits_{p'=s_0} V(\xi,\eta) = -v(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\,u(s) + \beta'(s, s_0)\,v(s)\}\,ds. \end{cases}$$

Les formules (9), (9)' sont parfaitement analogues à la *formule de discontinuité d'une double couche.*

3. On vérifie aisément les relations suivantes:

$$(10)\qquad \frac{\partial X'_s}{\partial\eta} = \frac{\partial Y'_s}{\partial\xi} = \frac{\partial X''_s}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial Y'_s}{\partial\eta} = \frac{\partial X''_s}{\partial\eta} = \frac{\partial Y''_s}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial X'_s}{\partial\xi} + \frac{\partial X''_s}{\partial\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{d\log r}{dn}, \qquad \frac{\partial Y'_s}{\partial\xi} + \frac{\partial Y''_s}{\partial\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{d\log r}{dn},$$

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\eta} = -\frac{2}{\pi}\int_C \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{d\log r}{dn}\,u(s) + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{d\log r}{dn}\,v(s)\right\}ds,$$

dont il résulte que *les fonctions* $U(\xi, \eta)$, $V(\xi, \eta)$ *sont intégrales des équations:*

$$(11) \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad \Delta^2 \Theta = 0.$$

La fonction associée de Θ, c'est à dire la fonction X déterminée par les équations:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = -\frac{\partial X}{\partial \xi},$$

pourra s'écrire:

$$X(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_C \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{d \log r}{dn} u(s) - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d \log r}{dn} v(s) \right\} ds.$$

Désignons par n_0 la normale au point s_0 de la courbe C; supposons le point (ξ, η) éloigné de C; et posons:

$$P(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) \cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} X\right) \cos(n_0 y),$$

$$Q(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{2} X\right) \cos(n_0 x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \cos(n_0 y).$$

On a:

$$P(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{1}{2}\Theta - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) \cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} X\right) \cos(n_0 y) =$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} \int\limits_C \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d \log r}{dn} u + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{d \log r}{dn} v \right\} ds + \frac{1}{\pi} \int\limits_C \left(\frac{\partial X''_s}{\partial \eta} u + \frac{\partial Y''_s}{\partial \eta} v \right) ds \right] \cos(n_0 x) +$$

$$+ \left[-\frac{1}{\pi} \int\limits_C \left(\frac{\partial X'_s}{\partial \eta} u + \frac{\partial Y'_s}{\partial \eta} v \right) ds - \frac{1}{\pi} \int\limits_C \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{d \log r}{dn} u - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d \log r}{dn} v \right\} ds \right] \cos(n_0 y).$$

À cause des formules (10) et des rélations:

$$\cos(n_0 x) = \left(\frac{dx}{dn}\right)_{s=s_0} = -\left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=s_0} = -\cos(s_0 y),$$

$$\cos(n_0 y) = \left(\frac{dy}{dn}\right)_{s=s_0} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_{s=s_0} = \cos(s_0 x),$$

et en introduisant les notations:

$$\frac{d}{dn_0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cos(n_0 x) + \frac{\partial}{\partial \eta}\cos(n_0 y), \qquad \frac{d}{ds_0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cos(s_0 x) + \frac{\partial}{\partial \eta}\cos(s_0 y),$$

on a encore:

$$P(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} u\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} v\,ds -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_C \left\{\frac{\partial X''_s}{\partial \eta}\cos(s_0 y) + \frac{\partial Y'_s}{\partial \xi}\cos(s_0 x)\right\} u\,ds -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_C \left\{\frac{\partial Y''_s}{\partial \eta}\cos(s_0 y) + \frac{\partial Y''_s}{\partial \xi}\cos(s_0 x)\right\} v\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} u\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} v\,ds +$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn} u\,ds - \frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn} v\,ds.$$

Pareillement on aura:

$$Q(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} v\,ds - \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} u\,ds -$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn} v\,ds + \frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn} u\,ds.$$

4. On vérifie aisément les identitées suivantes:

$$\frac{d}{dn_0}\frac{d\log r}{dn} = -\frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{ds}, \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{dn} = \frac{d}{dn_0}\frac{d\log r}{ds},$$

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn}\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{ds}\frac{d\log r}{dn_0} + \frac{d\log r}{dn_0}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn_0}\right),$$

$$\frac{d}{ds_0}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r}{dn}\right\} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\,2\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d}{ds}\frac{d\log r}{dn_0} + \frac{d\log r}{dn_0}\, 2\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\right\},$$

$$\frac{d}{ds_0}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn}\right\} = \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\right\}.$$

Par suite, on peut écrire:

$$P(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{ds}\, u\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{ds}\, v\,ds +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_C \frac{d}{ds}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn_0}\right\} u\,ds - \frac{2}{\pi}\int_C \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\right\} v\,ds;$$

et, si l'on admette que *les fonctions* $u(s)$, $v(s)$, *des points de la courbe* C, *aient les dérivées du premier ordre* $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ *partout finies et continues*, en résultera, à l'aide d'intégrations par parties,

$$P(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \log r\,\frac{du}{ds}\,ds - \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \log r\,\frac{dv}{ds}\,ds -$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn_0}\frac{du}{ds}\,ds + \frac{2}{\pi}\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\frac{dv}{ds}\,ds;$$

et ensuite:

$$P(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d\log r}{ds}\cdot\frac{du}{ds}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{dv}{ds}\,ds +$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{du}{ds}\,ds - \frac{2}{\pi}\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn}\frac{dv}{ds}\,ds -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(rs)-\cos(rs_0)}{r}\,ds - \frac{1}{\pi}\int_C \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds -$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds + \frac{2}{\pi}\int_C \frac{dv}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds,$$

où:

$$\cos(rs) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(sx) + \frac{\partial r}{\partial y}\cos(sy), \qquad \cos(rs_0) = -\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos(s_0x) - \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos(s_0y),$$

$$\cos(rn) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial r}{\partial y}\cos(ny), \qquad \cos(rn_0) = -\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos(n_0 x) - \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos(n_0 y).$$

Il ne sera pas inutile de rappeler que le point (ξ, η) est supposé toujours éloigné de C.

5. Supposons maintenant que *les coordonnées des points de C, considérées comme fonctions de s, soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres.* Alors, à cause de la continuité des fonctions $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, on peut affirmer que *les expressions:*

$$\int_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(rs)-\cos(rs_0)}{r}ds, \quad \int_C \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds,$$

$$\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds, \quad \int_C \frac{dv}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds,$$

tendent uniformément vers des limites déterminées et finies, lorsque le point (ξ, η), toujours éloigné de C, s'approche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque.

En effet, remarquons d'abord que l'on a:

$$\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r} = \frac{2\sin\frac{(rn)+(rn_0)}{2}\cdot\sin\frac{(nn_0)}{2}}{r'}\cdot\frac{r'}{r} = \frac{\sin\frac{(nn_0)}{2}}{\frac{r'}{2}}\cdot\sin\frac{(rn)+(rn_0)}{2}\cdot\frac{r'}{r};$$

et, si nous supposons, pour le moment, que le point p (ou p') soit sur la normale n_0, on pourra écrire:

$$\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r} = \frac{\sin\frac{(nn_0)}{2}}{\frac{r'}{2}}\cdot\sin\frac{(rn)+(rn_0)}{2}\cdot\frac{\sin(rn_0)}{\sin(r'n_0)}.$$

Des propriétés admises pour la courbe C, en résulte, qu'on peut fixer un nombre positif A tel que l'on ait, indépendamment de la position de s_0 sur C,

$$\left|\frac{\sin\frac{(nn_0)}{2}}{\frac{r'}{2}}\right| < A.$$

En outre, si l'on donne un nombre positif τ inférieur à l'unité et un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, un segment δ tel que, pour la portion C_1 de C, dont les points ont de n_0 une distance non supérieure à δ, on ait:

$$|\sin(r' n_0)| \geq \tau, \qquad \frac{A \cdot M}{\tau} \int_{C_1} ds < \frac{\varepsilon}{3},$$

où M est le maximum des valeurs absolues de $\frac{dv}{ds}$. Alors nous pourrons écrire:

$$\left| \int_{C_1} \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left| \int_{C_1} \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(r'n) - \cos(r'n_0)}{r'} ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En dépendance du segment δ, déjà fixé, et indépendamment de la position de s_0 sur C, on peut fixer, ensuite, un autre segment δ' tel que pour $\overline{ps_0} < \delta'$ (ou pour $\overline{p's_0} < \delta'$) l'on ait:

$$\left| \int_{C-C_1} \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds - \int_{C-C_1} \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(r'n) - \cos(r'n_0)}{r'} ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire, pour p (ou p') sur n_0 et pour $\overline{ps_0} < \delta'$, (ou pour $\overline{p's_0} < \delta'$):

$$\left| \int_{C} \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds - \int_{C} \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(r'n) - \cos(r'n_0)}{r'} ds \right| < \varepsilon.$$

Eu égard à l'indépendance du segment δ' de la position de s_0 sur C, cette formule nous porte à conclure que *l'on a:*

$$\lim_{p=s_0} \int_C \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds = \lim_{p'=s_0} \int_C \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds =$$

$$= \int_C \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(r'n) - \cos(r'n_0)}{r'} ds,$$

lorsque le point p (ou p') se rapproche vers de s_0, suivant une direction quelconque. De même l'on aura:

$$\lim_{p=s_0} \int\limits_C \frac{du}{ds} \cdot \frac{\cos(rs) - \cos(rs_0)}{r} ds = \lim_{p'=s_0} \int\limits_C \frac{du}{ds} \cdot \frac{\cos(rs) - \cos(rs_0)}{r} ds =$$

$$= \int\limits_C \frac{du}{ds} \cdot \frac{\cos(r's) - \cos(r's_0)}{r'} ds,$$

$$\lim_{p=s_0} \int\limits_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds = \lim_{p'=s_0} \int\limits_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds =$$

$$= \int\limits_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y} \cdot \frac{\cos(r'n) - \cos(r'n_0)}{r'} ds,$$

. . . .

6. Introduisant la notation:

$$A(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{ds} \cdot \frac{\cos(rs) - \cos(rs_0)}{r} ds - \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds -$$

$$- \frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds + \frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{dv}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds,$$

on peut écrire:

$$\lim_{p=s_0} A(\xi, \eta)_0 - \lim_{p'=s_0} A(\xi, \eta)_0 = 0. \tag{12}$$

En outre, si dans les $(9)'$ nous remplaçons les u, v respectivement par $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, et si ensuite nous retranchons, on déduit:

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{p=s_0}\left\{\frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{d\log r}{dn} \cdot \frac{du}{ds} ds - \frac{2}{\pi}\int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn} \cdot \frac{dv}{ds} ds\right\} - \\ &- \lim_{p'=s_0}\left\{\frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{d\log r}{dn} \cdot \frac{du}{ds} ds - \frac{2}{\pi}\int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn} \cdot \frac{dv}{ds} ds\right\} = 2\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s=s_0} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

On a encore, comme il est bien connu,

$$\lim_{p=s_0} \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{dv}{ds}\frac{d\log r}{dn} ds - \lim_{p'=s_0} \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{dv}{ds}\frac{d\log r}{dn} ds = -2\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s=s_0}. \tag{14}$$

Enfin, si l'on fait la supposition que *la fonction $u(s)$ ait la dérivée du deuxième ordre finie et intégrable*, on obtiendra, au moyen d'une intégration par parties,

$$\int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds = -\int\limits_C \log r \frac{d^2 u}{ds^2} ds;$$

et, par conséquent:

$$\lim_{p=s_0} \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds - \lim_{p'=s_0} \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds = 0. \tag{15}$$

Des (12), (13), (14), (15) en résultera:

$$\lim_{p=s_0} P(\xi, \eta)_0 - \lim_{p'=s_0} P(\xi, \eta)_0 = 0. \tag{16}$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Pareillement, si l'on suppose que *la fonction $v(s)$ ait la dérivée du deuxième ordre finie et intégrable*, on aura:

$$\lim_{p=s_0} Q(\xi, \eta)_0 - \lim_{p'=s_0} Q(\xi, \eta)_0 = 0. \tag{16$'$}$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème: *si les coordonnées des points de C, considerées comme fonctions de s, sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, si les fonctions $u(s)$, $v(s)$ ont les dérivées du deuxième ordre finies et intégrables, on aura que les expressions $P(\xi, \eta)_0$, $Q(\xi, \eta)_0$ tendent uniformément vers des limites déterminées et finies, lorsque le point (ξ, η), toujours éloigné de C, se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque; et les limites qu'on obtient, lorsque le point variable (ξ, η) appartient à σ, sont égaux aux limites qu'on obtient, lorsque le point variable (ξ, η) appartient à σ'.*

Ce théorème est parfaitement analogue au *théorème sur la continuité de la dérivée normale d'une double couche.*

7. Il faut observer que la condition de l'existance et de l'intégrabilité des dérivées du deuxième ordre de $u(s)$ et de $v(s)$ sur C, a été introduite pour établir la (15); pendant que pour établir les (12), (13), (14) il suffisait supposer que les dérivées premières de $u(s)$ et de $v(s)$ fussent finies et continues. Par suite, si l'on suppose que les dérivées du premier ordre de $u(s)$, $v(s)$ soient finies et continues sur C, on pourra démontrer pour les expressions:

$$P(\xi, \eta)_0 - \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds, \quad Q(\xi, \eta)_0 - \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} ds \tag{17}$$

le même théorème énoncé plus haut pour les expressions $P(\xi,\eta)_0$, $Q(\xi,\eta)_0$. *À fortior* nous pouvons énoncer le résultat suivant: *si les fonctions $u(s)$, $v(s)$ des points de la courbe C sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, et si les expressions* (17) *admettent des limites finies, lorsque le point (ξ,η) de σ (ou de σ') se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque, ces expressions admettront les mêmes limites, lorsque le point (ξ,η) de σ' (ou de σ) se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque.*

8. Ce théorème vaut aussi pour l'expression:

$$B = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d\log r}{ds}\cdot\frac{du}{ds}\,ds.$$

En effet, supposons, pour le moment, que le point p soit sur la normale n_0; et prenons pour origine des axes le point s_0, pour axe des x la tangente au point s_0 de C et pour axe de y la normale n_0.

Observons, avant tout, qu'on peut fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, un segment δ tel que, pour les points de C, qui ont de n_0 une distance non supérieure à δ, on ait:

$$y = (a+\varepsilon)x^2, \qquad \cos(ys) = (b+\varepsilon')x,$$

où a et b sont des constantes finies, et où ε, ε' sont des infiniments petits par rapport à x.

Ensuite, ayant donné un nombre positif α, aussi petit qu'on veut, on peut fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, une portion C_1 de C, qui contient le point s_0 dans son intérieur, et telle que la distance de ses points de n_0 soit non supérieure à δ et que l'on ait:

$$\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\left|\frac{du}{ds}\right|ds < \alpha.$$

En posant:

$$r_0^2 = x^2 + \eta^2,$$

on aura:

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{x^2+\eta^2}{x^2+\eta^2+y^2-2y\eta} \leq 1 + \frac{|2y\eta - y^2|}{r^2} = 1 + \frac{|2y(\eta-y)+y^2|}{r^2}$$

$$\leq 1 + 2\left|\frac{y}{x}\right| + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(1+\left|\frac{y}{x}\right|\right)^2;$$

et, par conséquent, pour tous les points de C_1,

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \{1 + \theta \,|\, (a+\varepsilon) x \,|\}^2,$$

où θ est une quantité qui dépende de x et qui est comprise entre -1 et 1. On pourra donc écrire:

$$B_1(p) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \left\{\frac{x}{r^2}\cos(sx) + \frac{y-\eta}{r^2}\cos(sy)\right\}\frac{du}{ds} ds = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \frac{x}{r_0^2}\cos(sx)\frac{du}{ds} ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \left\{\frac{x}{r_0^2}(2\theta \,|\, (a+\varepsilon) x \,| + \theta^2 (a+\varepsilon)^2 x^2)\cos(sx) + \frac{y-\eta}{r^2}(b+\varepsilon')x\right\}\frac{du}{ds} ds.$$

Par suite, ayant donné un nombre positif β arbitrairement petit, nous pouvons fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, une portion C_1 de C, qui contient s_0 dans son intérieur, et telle que l'on ait:

$$B_1(p) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \frac{x}{r_0^2}\cos(sx)\frac{du}{ds} ds + \theta_1 c \beta,$$

où c est une constante finie et positive, et où θ_1 est compris entre -1 et 1.

De même on aura pour le point p', si l'on suppose $p' \equiv (0, -\eta)$,

$$B_1(p') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} \frac{x}{r_0^2}\cos(sx)\frac{du}{ds} ds + \theta'_1 c \beta,$$

où θ'_1 est compris entre -1 et 1. On a donc:

$$B_1(p) - B_1(p') = (\theta_1 - \theta'_1) c \beta.$$

Ayant posé:

$$B_2 = \int\limits_{C-C_1} \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds,$$

on peut fixer, en dépendance du segment δ, fixé plus haut, et indépendamment de la position de s_0 sur C, un autre segment δ' tel que, pour $|\eta| < \delta'$, l'on ait:

$$|B_2(p) - B_2(p')| < \beta.$$

En concluant, nous pouvons écrire pour $|\eta| < \delta'$:

$$|B(p) - B(p')| < (2c + 1)\beta.$$

Eu égard à l'indépendance du segment δ' de la position de s_0 sur C, cette formule nous porte à conclure, comme nous voulions l'établir, que si l'expression B admet une limite déterminée et finie, lorsque le point (ξ, η) de σ (ou de σ') se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque, elle admettra la même limite, lorsque le point (ξ, η) de σ' (ou de σ) se rapproche pareillement indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque.

Ce résultat-ci et celui du numéro précédent nous donnent le théorème suivant: *si les fonctions $u(s)$, $v(s)$ des points de la courbe C sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, et s'il existe une des limites qui apparaissent dans la formule* (16) [*ou dans la formule* (16)'], *existera l'autre limite, qui apparaît dans la même formule, et les deux limites seront égaux.*

Avec des considérations plus compliquées, nous pourrions démontrer le même théorème par des conditions moins restrictives sur la nature des fonctions $u(s)$, $v(s)$.[1]

Extension des théorèmes sur les simples couches.

9. Soient $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ deux fonctions finies et continues des points de la courbe C. Formons avec ces deux fonctions les expressions:

$$(18)\qquad \begin{cases} u_1(\xi, \eta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \left[\left\{\log r + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\varphi_1(s) + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\psi_1(s)\right] ds, \\ v_1(\xi, \eta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \left[\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\varphi_1(s) + \left\{\log r + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}\psi_1(s)\right] ds. \end{cases}$$

Les fonctions $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$ sont finies et continues dans tous les points du plan de C, dont les coordonnées ξ, η sont finies; lorsque le point variable (ξ, η) s'éloigne indéfiniment sur le plan, elles se comportent, en général, comme $\log \varrho$.[2]

On peut vérifier aisément que les fonctions $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$ satisfont aux équations:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \qquad \Delta^2 \theta_1 = \Delta^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) = 0,$$

et que la fonction *associée* de θ_1 est:

[1] On peut voir: Liapounoff. — *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. 5^{a}, t. IX, 1898).

[2] Rappelons qu'on a désigné par ρ la distance du point (ξ, η) à l'origine des axes.

$$\chi_1(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_C \left(\frac{\partial \log r}{\partial \eta} \varphi_1 - \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \psi_1 \right) ds.$$

10. Considérons les expressions:

$$(19) \qquad \begin{cases} U_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) \cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \chi_1 \right) \cos(n_0 y), \\ V_1(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \chi_1 \right) \cos(n_0 x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) \cos(n_0 y). \end{cases}$$

En posant:

$$X'(\xi, \eta)_0 = 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \cos(n_0 x) + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \cos(n_0 y) \right\},$$

$$Y'(\xi, \eta)_0 = X''(\xi, \eta)_0 = -2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \cos(n_0 x) + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \cos(n_0 y) \right\},$$

$$Y''(\xi, \eta)_0 = 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \cos(n_0 x) + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \cos(n_0 y) \right\},$$

on trouve:

$$U_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi} \int_C \{ X'(\xi, \eta)_0 \varphi_1 + Y'(\xi, \eta)_0 \psi_1 \} ds,$$

$$V_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi} \int_C \{ X''(\xi, \eta)_0 \varphi_1 + Y''(\xi, \eta)_0 \psi_1 \} ds,$$

ou encore:

$$U_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{\pi} \int_C (X'_s \varphi_1 + Y'_s \psi_1) ds - \\ - \frac{1}{\pi} \int_C [\{ X'_s + X'(\xi, \eta)_0 \} \varphi_1 + \{ Y'_s + Y'(\xi, \eta)_0 \} \psi_1] ds,$$

$$V_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{\pi} \int_C (X''_s \varphi_1 + Y''_s \psi_1) ds - \\ - \frac{1}{\pi} \int_C [\{ X''_s + X''(\xi, \eta)_0 \} \varphi_1 + \{ Y''_s + Y''(\xi, \eta)_0 \} \psi_1] ds.$$

Les intégrales:

$$A'_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi} \int_C [\{ X'_s + X'(\xi, \eta)_0 \} \varphi_1 + \{ Y'_s + Y'(\xi, \eta)_0 \} \psi_1] ds,$$

$$B'_1(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C [\{X''_s + X''(\xi,\eta)_0\}\varphi_1 + \{Y''_s + Y''(\xi,\eta)_0\}\psi_1]\,ds$$

sont de la même nature que l'expression $A(\xi,\eta)_0$ du § 6; par conséquent, si nous supposons que la courbe C satisfait aux mêmes conditions du § 5, on aura:

$$\lim_{p=s_0} A'_1(\xi,\eta)_0 = \lim_{p'=s_0} A'_1(\xi,\eta)_0 = A'_1(s_0),$$

$$\lim_{p=s_0} B'_1(\xi,\eta)_0 = \lim_{p'=s_0} B'_1(\xi,\eta)_0 = B'_1(s_0),$$

où $A'_1(s_0)$, $B'_1(s_0)$ désignent ce que les expressions $A'_1(\xi,\eta)_0$, $B'_1(\xi,\eta)_0$ diviennent au point $s_0 \equiv (\xi',\eta')$ de C.

On vérifie aisément que les valeurs des expressions $X'(\xi,\eta)_0$, $Y'(\xi,\eta)_0$, $X''(\xi,\eta)_0$, $Y''(\xi,\eta)_0$ au point $s_0 \equiv (\xi',\eta')$, quel que ce soit, sont respectivement égaux à ce que déviennent les expressions $\alpha(s,s_0)$, $\beta(s,s_0)$, $\alpha'(s,s_0)$, $\beta'(s,s_0)$, lorsque l'on échange s avec s_0. Par conséquent, si l'on désigne par $U_1(s_0)$, $V_1(s_0)$ ce que déviennent respectivement les expressions $U_1(\xi,\eta)_0$, $V_1(\xi,\eta)_0$ au point s_0 de C, on pourra écrire:

$$(20)\qquad \begin{cases} U_1(s_0) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_C \{\alpha(s_0,s)\varphi_1 + \beta(s_0,s)\psi_1\}\,ds, \\[2ex] V_1(s_0) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_C \{\alpha'(s_0,s)\varphi_1 + \beta'(s_0,s)\psi_1\}\,ds; \end{cases}$$

$$A'_1(s_0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C [\{\alpha(s,s_0) + \alpha(s_0,s)\}\varphi_1 + \{\beta(s,s_0) + \beta(s_0,s)\}\psi_1]\,ds,$$

$$B'_1(s_0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C [\{\alpha'(s,s_0) + \alpha'(s_0,s)\}\varphi_1 + \{\beta'(s,s_0) + \beta'(s_0,s)\}\psi_1]\,ds;$$

et encore, en vertu des formules (9), (9'),

$$(21)\quad \lim_{p=s_0} U_1(\xi,\eta)_0 = -\varphi_1(s_0) + U_1(s_0), \qquad \lim_{p=s_0} V_1(\xi,\eta)_0 = -\psi_1(s_0) + V_1(s_0);$$

$$(21)'\quad \lim_{p'=s_0} U_1(\xi,\eta)_0 = \varphi_1(s_0) + U_1(s_0), \qquad \lim_{p'=s_0} V_1(\xi,\eta)_0 = \psi_1(s_0) + V_1(s_0).$$

Ces formules sont parfaitement analogues à la *formule de discontinuité de la dérivée normale d'une simple couche.*

CHAPITRE III.

Résolution du problème intérieur.

1. Écrivons les équations:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0;$$

et rappelons qu'on a posé au Chapitre précédent (§ 2):

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha(s, s_0) = 2\left(\dfrac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \dfrac{d \log r'}{dn}, \qquad \beta'(s, s_0) = 2\left(\dfrac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \dfrac{d \log r'}{dn}, \\ \beta(s, s_0) = \alpha'(s, s_0) = -2\dfrac{\partial r'}{\partial x}\dfrac{\partial r'}{\partial y}\dfrac{d \log r'}{dn}. \end{cases}$$

Supposons que *les coordonnées des points de la courbe C, considérées comme fonctions de s, soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées des trois premiers ordres.* Alors les fonctions $\alpha(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, $\alpha'(s, s_0) = \beta(s, s_0)$ des variables indépendantes s, s_0 seront finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à s_0, pour tous les valeurs de s et de s_0, qui correspondent aux points de la courbe C.

Soient $u(s)$, $v(s)$ deux fonctions arbitraires des points de C finies et continues, et assujetties à la condition:

$$(3) \qquad \int\limits_C \{u(s)\cos(sx) + v(s)\cos(sy)\}\, ds = 0.$$

Cette condition est nécessaire, si l'on veut que $u(s)$, $v(s)$ puissent représenter les valeurs aux points de C, d'une solution des équations (1), considerées dans l'aire finie σ.

Considérons le système d'équations fonctionnelles:

$$(4) \qquad \begin{cases} u(s_0) = \varphi(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_C \{\alpha(s, s_0)\varphi(s) + \beta(s, s_0)\psi(s)\}\, ds, \\ v(s_0) = \psi(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\}\, ds, \end{cases}$$

et le système d'équations homogènes:

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta(s, s_0)\psi_1(s)\} ds, \\ 0 = \psi_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\psi_1(s)\} ds. \end{cases}$$

Posons:

$$(2)'\quad \begin{cases} X'(s_0, s)_0 = 2\left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r'}{d n_0}, \qquad Y''(s_0, s)_0 = 2\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r'}{d n_0}, \\ Y'(s_0, s)_0 = X''(s_0, s)_0 = -2\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d \log r'}{d n_0}, \end{cases}$$

et remarquons, comme au Chapitre précédent (§ 10), que nous pouvons obtenir les fonctions $X'_s(s_0, s)$, $Y''_s(s_0, s)$, $Y'_s(s_0, s) = X''_s(s_0, s)$ respectivement des fonctions $\alpha(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, $\beta(s, s_0) = \alpha'(s, s_0)$ en échangeant, dans ces dernières fonctions, la s avec la s_0, et inversement.

Ceci posé, considérons encore le système d'équations fonctionnelles homogènes:

$$(5)'\quad \begin{cases} 0 = \varphi'_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha(s_0, s)\varphi'_1(s) + \beta(s_0, s)\psi'_1(s)\} ds, \\ 0 = \psi'_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha'(s_0, s)\varphi'_1(s) + \beta'(s_0, s)\psi'_1(s)\} ds, \end{cases}$$

que l'on peut obtenir du système (5) en échangeant dans les fonctions $\alpha(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, $\beta(s, s_0) = \alpha'(s, s_0)$, qui contiennent, la s avec la s_0. Nous appelerons les équations (5), (5)': *équations fonctionnelles associées.*

Puisque les fonctions (2), (2)' des variables s, s_0 sont toujours finies et continues, on pourra énoncer, en vertu des résultats, bien connus, de M. FREDHOLM,[1] les théorèmes suivants:

1:o) *si les équations* (4) *admettent une solution, celle-ci sera finie et continue;*

2:o) *si les équations* (5) *ou* (5)' *admettent des solutions différentes de zéro, ces solutions seront finies et continues;*

3:o) *si les équations* (5) *admettent m solutions linéairement indépendantes, on aura que les équations associées* (5)' *admettront aussi m solutions linéairement indépendantes; et réciproquement.*

---

[1] *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* — Acta mathematica, t. 27.

2. Les équations $(5)'$ admettent la solution différente de zéro:

$$\varphi'_1(s) = \cos(ny), \qquad \psi'_1(s) = -\cos(nx). \tag{6}$$

En effet, on a:

$$\frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s_0, s)\cos(ny) - \beta(s_0, s)\cos(nx)\}\,ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_C \left\{\left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r'}{dn_0}\cos(ny) + \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn_0}\cos(nx)\right\} ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn_0}\frac{dr'}{dn}\,ds = \frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{dr'}{dn_0}\frac{d\log r'}{dn}\,ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn}\left\{\frac{\partial r'}{\partial \xi'}\cos(n_0 x) + \frac{\partial r'}{\partial \eta'}\cos(n_0 y)\right\} ds =$$

$$= -\frac{2\cos(n_0 x)}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn}\,ds - \frac{2\cos(n_0 y)}{\pi}\int_C \left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r'}{dn}\,ds = \cos(n_0 y),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s_0, s)\cos(ny) - \beta'(s_0, s)\cos(nx)\}\,ds = -\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{d\log r'}{dn_0}\frac{dr'}{dn}\,ds = -\cos(n_0 x).$$

On aura donc, en vertu du théorème 3:o), que *les équations* (5) *admettent, au moins, une solution différente de zéro.*

3. Désignons par $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ cette solution, et considérons les fonctions:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi}\int_C \{X'_s\,\varphi_1(s) + Y'_s\,\psi_1(s)\}\,ds,$$

$$\Psi_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi}\int_C \{X''_s\,\varphi_1(s) + Y''_s\,\psi_1(s)\}\,ds,$$

formées avec les $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$.

On vérifie aisément que les fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ satisfont toujours aux équations (1). On aura encore, en vertu de la continuité (théorème 2:o) des fonctions $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ et en vertu des formules (9), $(9)'$ du Chapitre précédent et des équations (5),

$$\lim_{p=s_0} \Phi_1(\xi, \eta) = \varphi_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)\,\varphi_1(s) + \beta(s, s_0)\,\psi_1(s)\}\,ds = 0,$$

$$\lim_{p=s_0} \Psi_1(\xi,\eta) = \psi_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s,s_0)\psi_1(s)\}ds = 0;$$

$$(7)\quad \begin{cases} \lim_{p'=s_0} \Phi_1(\xi,\eta) = -\varphi_1(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta(s,s_0)\psi_1(s)\}ds = -2\varphi_1(s_0), \\ \lim_{p'=s_0} \Psi_1(\xi,\eta) = -\psi_1(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s,s_0)\psi_1(s)\}ds = -2\psi_1(s_0). \end{cases}$$

Les deux premières de ces formules nous donnent, en vertu du résultat 1° établi au § 4 du Chapitre I,

(dans l'aire σ) $\qquad \Phi_1(\xi,\eta) = \Psi_1(\xi,\eta) = 0;$

et, par conséquent, l'on aura encore, quel que ce soit le point (ξ,η) de l'aire σ,

$$\Theta_1(\xi,\eta) = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial\eta} = 0.$$

4. Les équations:
$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial\xi} = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\Theta_1}{\partial\eta} = -\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}$$

nous donnent, pour la fonction associée de $\Theta_1(\xi,\eta)$,

(dans l'aire σ) $\qquad \Gamma_1(\xi,\eta) = \text{const.}$

On aura donc, quel que ce soit le point $p \equiv (\xi,\eta)$ de σ et quel que ce soit le point $s_0 \equiv (\xi',\eta')$ de C,

$$P_1(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial\eta}\right)\cos(n_0x) + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\Gamma_1\right)\cos(n_0y) = -\frac{1}{2}\Gamma_1\cos(n_0y),$$

$$Q_1(\xi,\eta)_0 = \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\Gamma_1\right)\cos(n_0x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\eta} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}\right)\cos(n_0y) = \frac{1}{2}\Gamma_1\cos(n_0x).$$

En vertu de ce que l'on a remarqué au § 4 du Chapitre I, après avoir écrit les (11), et au § 8 du même Chapitre, nous pouvons prendre pour les valeurs, aux points de C, des expressions $X_s^{(1)}$, $Y_s^{(1)}$ correspondantes aux intégrales $\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Psi_1(\xi,\eta)$ des équations (1), c'est à dire pour les valeurs des expressions (11) du Chapitre I, correspondantes aux fonctions $\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Psi_1(\xi,\eta)$, les limites suivantes:

$$\overline{X}_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} P_1(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1\cos(n_0y), \qquad \overline{Y}_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} Q_1(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1\cos(n_0x).$$

Puisque, comme l'on a remarqué au § 1, les fonctions $\alpha(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, $\alpha'(s, s_0) = \beta(s, s_0)$ ont leurs derivées du premier ordre finies et continues, on aura des (5), en dérivant, que les fonctions $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ admettent les dérivées du premier ordre, qui seront finies et continues sur C. Alors nous pouvons appliquer aux expressions $P_1(\xi, \eta)_0$, $Q_1(\xi, \eta)_0$ le théorème du § 8 du Chapitre précédent, et ainsi nous aurons pour les expressions $\overline{\overline{X}}_s^{(1)}$, $\overline{\overline{Y}}_s^{(1)}$ [les (11) du Chapitre I], correspondantes aux intégrales $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ des équations (1), considérées dans l'aire infinie σ',

$$\overline{\overline{X}}_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} P_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad \overline{\overline{Y}}_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} Q_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x),$$

où Γ_1 est une constante.

5. Remarquons que la constante Γ_1 doit être différente de zéro. En effet, admettons qu'il soit $\Gamma_1 = 0$. On aura:

$$\text{(sur la courbe } C) \qquad \overline{\overline{X}}_s^{(1)} = \overline{\overline{Y}}_s^{(1)} = 0.$$

Alors, en observant que les intégrales $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ des équations (1) se comportent aux points à l'infini du plan de C comme la fonction ϱ, on pourra appliquer le resultat 4°, établi au § 5 du Chapitre I. Ainsi l'on aura:

$$\text{(dans l'aire } \sigma') \qquad \Phi_1(\xi, \eta) = \Psi_1(\xi, \eta) = 0;$$

et, en vertu des (7),

$$\text{(sur la courbe } C) \qquad \varphi_1(s) = \psi_1(s) = 0,$$

pendant que, par hypothèse, la solution $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ des équations (5) est différente de zéro.

6. Cela posé, supposons que les équations (5) admettent une autre solution $\varphi_2(s)$, $\psi_2(s)$, différente de zéro.

Formons avec cette solution $\varphi_2(s)$, $\psi_2(s)$ les fonctions $\Phi_2(\xi, \eta)$, $\Psi_2(\xi, \eta)$; $\Theta_2(\xi, \eta)$, $\Gamma_2(\xi, \eta)$; $P_2(\xi, \eta)_0$, $Q_2(\xi, \eta)_0$; $\overline{X}_s^{(2)}$, $\overline{Y}_s^{(2)}$; $\overline{\overline{X}}_s^{(2)}$, $\overline{\overline{Y}}_s^{(2)}$, analogues aux fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$; $\Theta_1(\xi, \eta)$, $\Gamma_1(\xi, \eta)$; $P_1(\xi, \eta)_0$, $Q_1(\xi, \eta)_0$; $\overline{X}_s^{(1)}$, $\overline{Y}_s^{(1)}$; $\overline{\overline{X}}_s^{(1)}$, $\overline{\overline{Y}}_s^{(1)}$, formées, précédemment, avec la solution $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$. On aura, comme au § 4,

$$\overline{\overline{X}}_s^{(2)} = \lim_{p'=s_0} P_2(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_2 \cos(n_0 y), \qquad \overline{\overline{Y}}_s^{(2)} = \lim_{p'=s_0} Q_2(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_2 \cos(n_0 x),$$

où Γ_2 est une constante différente de zéro.

Déterminons maintenant une constante b, telle que l'on ait:

(8) $$\Gamma_1 + b\,\Gamma_2 = 0;$$

et envisageons les fonctions:

(9) $$\varphi_3(s) = \varphi_1(s) + b\,\varphi_2(s), \qquad \psi_3(s) = \psi_1(s) + b\,\psi_2(s).$$

Évidemment ces fonctions forment une solution des équations (5); et si nous formons avec cette solution $\varphi_3(s)$, $\psi_3(s)$ les fonctions $\Phi_3(\xi, \eta)$, $\Psi_3(\xi, \eta)$; $\Theta_3(\xi, \eta)$, $\Gamma_3(\xi, \eta)$; $P_3(\xi, \eta)_0$, $Q_3(\xi, \eta)_0$; $\overline{X}_s^{(3)}$, $\overline{Y}_s^{(3)}$; $\overline{\overline{X}}_s^{(3)}$, $\overline{\overline{Y}}_s^{(3)}$, analogues aux fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$; . . . . ., on aura encore:

$$\overline{\overline{X}}_s^{(3)} = \lim_{p'=s_0} P_3(\xi, \eta)_0 = \lim_{p'=s_0} P_1(\xi, \eta)_0 + b \lim_{p'=s_0} P_2(\xi, \eta)_0 =$$

$$= -\frac{1}{2}(\Gamma_1 + b\,\Gamma_2)\cos(n_0 y) = -\frac{1}{2}\Gamma_3 \cos(n_0 y),$$

$$\overline{\overline{Y}}_s^{(3)} = \lim_{p'=s_0} Q_3(\xi, \eta)_0 = \lim_{p'=s_0} Q_1(\xi, \eta)_0 + b \lim_{p'=s_0} Q_2(\xi, \eta)_0 =$$

$$= \frac{1}{2}(\Gamma_1 + b\,\Gamma_2)\cos(n_0 x) = \frac{1}{2}\Gamma_3 \cos(n_0 x);$$

et, d'après l'équation (8),

$$\Gamma_3 = 0.$$

De cela on déduit, comme au § 5,

(sur la courbe C) $$\varphi_3(s) = \psi_3(s) = 0,$$

c'est à dire:

$$\varphi_1(s) + b\,\varphi_2(s) = 0, \qquad \psi_1(s) + b\,\psi_2(s) = 0.$$

On a donc le résultat suivant: *une solution quelconque $\varphi_2(s)$, $\psi_2(s)$ des équations* (5) *est toujours égale à la solution $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ multipliée par une même convenable constante;* en d'autres termes, si l'on considère comme différentes entre eux, ces solutions qui sont linéairement indépendantes, on peut dire que *les équations* (5) *admettent une solution seulement différente de zéro.*

7. À cause de ce résultat et en vertu d'un théorème sur les équations fonctionnelles[1], on a: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$ des équations fonctionnelles* (4), *c'est que les fonctions données $u(s)$, $v(s)$ vérifient la condition:*

---

[1] Fredholm; l. c., § 2, n. 9.

$$0 = \int_C \{u(s)\varphi'_1(s) + v(s)\psi'_1(s)\} ds = \int_C \{u(s) \cos (ny) - v(s) \cos (nx)\} ds =$$

$$= \int_C \{u(s) \cos (sx) + v(s) \cos (sy)\} ds.$$

Or, en vertu de l'hypothèse (3), cette condition est vérifiée; on en conclut, par suite, que *les équations* (4) *admettent une solution* $\varphi(s)$, $\psi(s)$.

Cela posé, formons avec cette solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$ les fonctions:

$$(10) \quad \begin{cases} u(\xi, \eta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{X'_s\varphi(s) + Y'_s\psi(s)\} ds, \\ v(\xi, \eta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{X''_s\varphi(s) + Y''_s\psi(s)\} ds. \end{cases}$$

On vérifie tout de suite que ces fonctions satisfont aux équations (1). En vertu de la continuité des fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ (théorème 1:0), des formules (9), (9)' du Chapitre II et des équations (4), on a ensuite:

$$\lim_{p=s_0} u(\xi, \eta) = \varphi(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi(s) + \beta(s, s_0)\psi(s)\} ds = u(s_0),$$

$$\lim_{p=s_0} v(\xi, \eta) = \psi(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\} ds = v(s_0).$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer le résultat suivant: *les fonctions* $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, *données par les formules* (10), *considérées dans l'aire finie* σ, *satisfont aux équations* (1), *et, sur* C, *elles se réduisent aux fonctions données* $u(s)$, $v(s)$.

Ainsi nous avons résolu le problème de l'intégration des équations (5)' du Chapitre I (*problème intérieur*).

Résolution du problème extérieur.

8. *Soient données deux fonctions quelconques* $u(s)$, $v(s)$, *des points de* C, *finies et continues.* Envisageons le système d'équations fonctionnelles:

$$
(11) \qquad \begin{cases} u(s_0) = \varphi(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi(s) + \beta(s, s_0)\psi(s)\}\, ds, \\[2ex] v(s_0) = \psi(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\}\, ds; \end{cases}
$$

et le système d'équations homogènes:

$$
(12) \qquad \begin{cases} 0 = \varphi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta(s, s_0)\psi_1(s)\}\, ds, \\[2ex] 0 = \psi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\psi_1(s)\}\, ds. \end{cases}
$$

Les équations (12) *admettent les trois solutions différentes de zéro:*

$$
(13) \qquad \varphi_{11} = x(s), \quad \psi_{11} = y(s); \quad \varphi_{12} = k, \quad \psi_{12} = 0; \quad \varphi_{13} = 0, \quad \psi_{13} = j,
$$

où $x(s)$, $y(s)$ désignent les coordonnées variables des points de C, et où k, j désignent deux constantes arbitraires.

En effet, les formules (22) du Chapitre I nous donnent:

$$
\xi' = x(s_0) = \lim_{p=s_0}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_C (xX'_s + y\,Y'_s)\, ds\right\},
$$

$$
\eta' = y(s_0) = \lim_{p=s_0}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_C (xX''_s + y\,Y''_s) ds\right\};
$$

et, en vertu des (9), (9)' du Chapitre II, on aura:

$$
x(s_0) = \frac{1}{2}\left[x(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{x(s)\,\alpha\,(s, s_0) + y(s)\,\beta\,(s, s_0)\}\, ds\right],
$$

$$
y(s_0) = \frac{1}{2}\left[y(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{x(s)\,\alpha'(s, s_0) + y(s)\,\beta'(s, s_0)\}\, ds\right],
$$

ou bien:

$$
0 = x(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha\,(s, s_0)x(s) + \beta\,(s, s_0)y(s)\}\, ds,
$$

$$
0 = y(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)x(s) + \beta'(s, s_0)y(s)\}\, ds.
$$

De même, des (23) du Chapitre I, l'on aura:

$$0 = k + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)k + \beta(s, s_0)0\} ds,$$

$$0 = \quad \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)k + \beta'(s, s_0)0\} ds;$$

$$0 = \quad \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)0 + \beta(s, s_0)j\} ds,$$

$$0 = j + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)0 + \beta'(s, s_0)j\} ds.$$

La proposition est donc établie.

9. Maintenant nous voulons démontrer que le système d'équations homogènes (12) n'admette d'autres solutions, que les trois solutions signalées φ_{11}, ψ_{11}; φ_{12}, ψ_{12}; φ_{13}, ψ_{13}. En d'autres termes, nous voulons démontrer qu'*une solution quelconque du système d'équations fonctionnelles* (12) *a toujours la forme:*

$$h'x(s) + k', \qquad h'y(s) + j',$$

où h', k', j' sont des constantes.

En effet, soit $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ une solution des équations (12). Formons avec les fonctions $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$, les expressions:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_C \{X'_s\, \varphi_1(s) + Y'_s\, \psi_1(s)\} ds,$$

$$\Psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_C \{X''_s \varphi_1(s) + Y''_s \psi_1(s)\} ds.$$

En vertu des (9), (9)' du Chapitre II et des équations (12), l'on a:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{p=s_0} \Phi_1(\xi, \eta) = -\varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha\,(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta\,(s, s_0)\psi_1(s)\} ds = -2\,\varphi_1(s_0), \\ &\lim_{p=s_0} \Psi_1(\xi, \eta) = -\psi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\psi_1(s)\} ds = -2\,\psi_1(s_0); \end{aligned} \right.$$

$$(14)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{p'=s_0} \Phi_1(\xi,\eta) = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta(s,s_0)\psi_1(s)\} ds = 0, \\ &\lim_{p'=s_0} \Psi_1(\xi,\eta) = \psi_1(s) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s,s_0)\psi_1(s)\} ds = 0. \end{aligned} \right.$$

Les expressions $\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Psi_1(\xi,\eta)$, considérées comme fonctions des points (ξ,η) de l'aire infinie σ', satisfont aux équations (1) et aux points à l'infini du plan de C se comportent comme la fonction $\frac{1}{\varrho}$; par conséquent on aura, à cause des $(14)'$ et du résultat 3°, établi au § 5 du Chapitre I,

(dans l'aire σ') $\qquad \Phi_1(\xi,\eta) = \Psi_1(\xi,\eta) = 0.$

De cela l'on déduit, en introduisant, comme aux §§ 3 et 4, les expressions $\Theta_1(\xi,\eta)$, $\Gamma_1(\xi,\eta)$; $P_1(\xi,\eta)_0$, $Q_1(\xi,\eta)_0$; $\overline{X}_s^{(1)}$, $\overline{Y}_s^{(1)}$; $\overline{\overline{X}}_s^{(1)}$, $\overline{\overline{Y}}_s^{(1)}$, et en raisonnant comme au § 4,

$$\overline{\overline{X}}_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} P_1(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad \overline{\overline{Y}}_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} Q_1(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x),$$

où Γ_1 est une constante; et, par conséquent,

$$(15) \quad \overline{X}_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} P_1(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad \overline{Y}_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} Q_1(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x).$$

Remarquons que les fonctions $\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Psi_1(\xi,\eta)$, considérées dans l'aire finie σ, satisfont aux équations (1), et sur la courbe C satisfont aux équations (15). Alors, en vertu du résultat 2°, établi au § 4 du Chapitre I, l'on aura:

(dans l'aire σ) $\qquad \Phi_1(\xi,\eta) = h\xi + k, \qquad \Psi_1(\xi,\eta) = h\eta + j,$

où h, k, j sont des constantes; et, par conséquent, à cause des (14),

$$\varphi_1(s) = -\frac{1}{2}\{hx(s) + k\}, \qquad \psi_1(s) = -\frac{1}{2}\{hy(s) + j\}.$$

En posant:

$$h' = -\frac{1}{2}h, \qquad k' = -\frac{1}{2}k, \qquad j' = -\frac{1}{2}j,$$

on peut écrire encore:

$$\varphi_1(s) = h'x(s) + k', \qquad \psi_1(s) = h'y(s) + j'.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

10. Ceci posé, écrivons les équations fonctionnelles:

$$(12)' \quad \begin{cases} 0 = \varphi'_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s_0, s)\varphi'_1(s) + \beta(s_0, s)\psi'_1(s)\} ds, \\ 0 = \psi'_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s_0, s)\varphi'_1(s) + \beta'(s_0, s)\psi'_1(s)\} ds, \end{cases}$$

associées aux équations (12), et observons que les théorèmes 1:0), 2:0) et 3:0), énoncés au § 1 pour les équations fonctionnelles (4), (5), (5)', vont aussi pour les équations analogues (11), (12), (12)'. Nous aurons alors: *les équations* (12)' *admettent trois solutions différentes de zéro, et trois seulement.*

Ajoutons que, en vertu d'un théorème de M. PLEMELJ,[1] *on peut toujours déterminer ces trois solutions* $\varphi'_{11}(s)$, $\psi'_{11}(s)$; $\varphi'_{12}(s)$, $\psi'_{12}(s)$; $\varphi'_{13}(s)$, $\psi'_{13}(s)$ *de manière à satisfaire aux conditions:*[2]

$$(16) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_C \{x(s)\varphi'_{11}(s) + y(s)\psi'_{11}(s)\} ds = 1, \quad \int_C \varphi'_{11}(s) ds = 0, \quad \int_C \psi'_{11}(s) ds = 0; \\ \displaystyle\int_C \{x(s)\varphi'_{12}(s) + y(s)\psi'_{12}(s)\} ds = 0, \quad \int_C \varphi'_{12}(s) ds = 1, \quad \int_C \psi'_{12}(s) ds = 0; \\ \displaystyle\int_C \{x(s)\varphi'_{13}(s) + y(s)\psi'_{13}(s)\} ds = 0, \quad \int_C \varphi'_{13}(s) ds = 0, \quad \int_C \psi'_{13}(s) ds = 1. \end{cases}$$

Alors, à cause d'un théorème sur les équations fonctionnelles,[3] dont nous avons fait usage au § 7, on aura: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution* $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *des équations* (11), *c'est que les fonctions données* $u(s)$, $v(s)$ *vérifient les trois conditions:*

$$(17) \quad \left\{ \int_C \{u(s)\varphi'_{11}(s) + v(s)\psi'_{11}(s)\} ds = 0, \right.$$

[1] *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung* (Monatshefte für Mathematik und Physik; XV. Jahrg.; Seite 115).

[2] On peut aussi déduire ce résultat indépendamment du théorème de M. PLEMELJ.

[3] FREDHOLM; l. c., § 2, n. 9.

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\limits_C \{u(s)\varphi'_{12}(s) + v(s)\psi'_{12}(s)\}\,ds = 0,\\ &\int\limits_C \{u(s)\varphi'_{13}(s) + v(s)\psi'_{13}(s)\}\,ds = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose auparavant que les fonctions $u(s)$, $v(s)$ vérifient les conditions (17), on aura que les équations (11) admettent une solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$. Formons avec cette solution les expressions:

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{X'_s\,\varphi(s) + Y'_s\,\psi(s)\}\,ds,\\ v(\xi,\eta) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{X''_s\varphi(s) + Y''_s\psi(s)\}\,ds. \end{aligned}\right.$$

Celles-ci, considérées dans l'aire σ', satisfont aux équations (1); et, en vertu de la continuité des fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ (théorème 1:o) et des formules (9), (9)' du Chapitre précédent, elles nous donnent:

$$\lim_{p'=s_0} u(\xi,\eta) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha(s,s_0)\varphi(s) + \beta(s,s_0)\psi(s)\}\,ds = u(s_0),$$

$$\lim_{p'=s_0} v(\xi,\eta) = \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi(s) + \beta'(s,s_0)\psi(s)\}\,ds = v(s_0).$$

On aura donc: *les fonctions* $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$ *des points de l'aire infinie* σ', *données par les formules* (18), *satisfont aux équations* (1), *et, sur* C, *elles se réduisent aux fonctions données* $u(s)$, $v(s)$. Ainsi nous avons résolu le problème de l'intégration des équations, que l'on obtient des équations (5)' du Chapitre I en remplaçant σ par σ', dans le cas particulier où les valeurs des fonctions inconnues vérifient les conditions (17).

11. Dans le cas où les fonctions données sur C ne vérifient pas les conditions (17), déterminons trois constantes h', k', j' de manière que, ayant posé:

$$(19)\qquad \bar{u}(s) = u(s) - h'x(s) - k', \qquad \bar{v}(s) = v(s) - h'y(s) - j'.$$

en résulte:

$$(17)' \quad \begin{cases} 0 = \int\limits_C \{\bar{u}(s)\varphi'_{11}(s) + \bar{v}(s)\psi'_{11}(s)\} ds, \\ 0 = \int\limits_C \{\bar{u}(s)\varphi'_{12}(s) + \bar{v}(s)\psi'_{12}(s)\} ds, \\ 0 = \int\limits_C \{\bar{u}(s)\varphi'_{13}(s) + \bar{v}(s)\psi'_{13}(s)\} ds. \end{cases}$$

Faisant usage des (16) et des (19), ces équations deviennent:

$$(17)'' \quad \begin{cases} 0 = \int\limits_C \{u(s)\varphi'_{11}(s) + v(s)\psi'_{11}(s)\} ds - h', \\ 0 = \int\limits_C \{u(s)\varphi'_{12}(s) + v(s)\psi'_{12}(s)\} ds - k', \\ 0 = \int\limits_C \{u(s)\varphi'_{13}(s) + v(s)\psi'_{13}(s)\} ds - j'. \end{cases}$$

Ainsi déterminées les constantes h', k', j', considérons les équations fonctionnelles:

$$(11)' \quad \begin{cases} \bar{u}(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha(s, s_0)\varphi(s) + \beta(s, s_0)\psi(s)\} ds, \\ \bar{v}(s_0) = \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\} ds. \end{cases}$$

En vertu des $(17)''$, la condition nécessaire et suffisante, pour qu'il existe une solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$ des équations fonctionnelles précédentes $(11)'$, est vérifiée.

Formons, avec cette solution, les fonctions:

$$(20) \quad \begin{cases} u(\xi, \eta) = h'\xi + k' + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{X'_s\,\varphi(s) + Y'_s\,\psi(s)\} ds, \\ v(\xi, \eta) = h'\eta + j' + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{X''_s\varphi(s) + Y''_s\psi(s)\} ds. \end{cases}$$

Celles-ci satisfont partout aux équations (1); et, en vertu de la continuité des fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ (théorème 1:0), en faisant usage des formules (9), (9)' du Chapitre II et des équations (11)', (19), elles nous donnent:

$$\lim_{p'=s_0} u(\xi,\eta) = h'x(s_0) + k' + \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s,s_0)\varphi(s) + \beta(s,s_0)\psi(s)\} ds =$$
$$= h'x(s_0) + k' + \bar{u}(s_0) = u(s_0),$$

$$\lim_{p'=s_0} v(\xi,\eta) = h'y(s_0) + j' + \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi(s) + \beta'(s,s_0)\psi(s)\} ds =$$
$$= h'y(s_0) + j' + \bar{v}(s_0) = v(s_0).$$

On aura donc: *les fonctions $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$ des points de l'aire infinie σ', données par les formules* (20), *satisfont aux équations* (1), *et, sur C, elles se réduisent aux fonctions données $u(s)$, $v(s)$.* Ainsi nous avons résolu, en toute sa généralité, le problème de l'intégration des équations, que l'on obtient des équations (5)' du Chapitre I en remplaçant σ par σ' (*problème extérieur*).

CHAPITRE IV.

Problème intérieur pour le cas d'un contour rectangulaire.

1. Dans le cas où le contour C est rectangulaire nous ne pouvons pas affirmer que la démonstration de l'existence des intégrales des équations (5)' du Chapitre I (résolution du *problème intérieur*), que nous avons donnée au Chapitre précédent, soit acceptable; puisque, dans ce cas, les expressions (2), du Chapitre III, ont des points de singularité. En effet, elles, en chaque sommet du rectangle, ou prennent la valeur zéro, ou se comportent comme la fonction $\frac{1}{r}$, suivant que les variables s, s_0 s'approchent des valeurs correspondantes à ce sommet en variant sur le même côté ou sur deux côtés consécutifs.

Nous résoudrons ici le problème intérieur relatif au rectangle, en utilisant les idées qui ont amené MATHIEU (*Théorie de l'élasticité des corps solides;* seconde partie, Chapitre X) à résoudre un problème d'élasticité relatif au prisme rectangle; et, comme on le verra, nous ferons aussi souvent usage des mêmes calculs de MATHIEU.

Écrivons les équations (5)' du Chapitre I sous la forme:

(1) (dans l'aire σ) $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0;$

(2) (sur le contour C) $\quad u = u(s), \qquad v = v(s);$

et supposons que *les fonctions données $u(s)$, $v(s)$, des points de C, soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, exception faite, au surplus, de la continuité de ces dérivées pour les sommets du rectangle* (voir, à ce propos, la *Remarque I* au § 3 du Chapitre I).

2. Soient:

$$x = \frac{a}{2}, \quad x = -\frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad y = -\frac{b}{2}$$

les équations des lignes droites, qui contiennent les côtés du rectangle.

La condition (7) du Chapitre I, qui doit être nécessairement remplie par les fonctions données $u(s)$, $v(s)$, divient:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v\left(\frac{a}{2}, y\right) dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u\left(x, \frac{b}{2}\right) dx + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v\left(-\frac{a}{2}, y\right) dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u\left(x, -\frac{b}{2}\right) dx = 0.$$

Déterminons une constante h de manière qu'on ait:

(3) $$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[v\left(\frac{a}{2}, y\right) + h\right] dy = 0;$$

et remplaçons les (2) par les autres:

(2)' (sur le contour C) $\quad u = u(s) + h, \qquad v = v(s) + h.$

Les conditions (2)' coincident avec les (2) si $h = 0$, c'est à dire, si l'on a:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v\left(\frac{a}{2}, y\right) dy = 0.$$

Remarquons que, lorsqu'on a effectué, d'une manière quelconque, l'intégration des équations (1), (2)', on aura aussitôt les intégrales des équations proposées (1), (2); de sorte que nous nous bornerons à l'integration des équations (1), (2)'.

Remarquons encore que, en vertu de la linéarité des équations (1), (2)', ce dernier problème peut se partager en les deux suivants:

1° intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(2)'' \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = v(s) + h, \quad u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = \\ \qquad = v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0: \end{cases}$$

2° intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(2)''' \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \text{(dans les autres points de } C) \ v = v(s) + h, \\ \qquad \text{(sur tout le contour } C) \ u = u(s) + h. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que ce dernier problème se divise en sept autres et tous semblables au premier; par conséquent le problème proposé peut se partager en huit problèmes de la nature du 1°. Mais il convient partager encore ce dernier problème en deux autres: l'un, A, intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(4) \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \quad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = u\left(\frac{a}{2}, y\right) = \\ \qquad = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0; \end{cases}$$

l'autre, B, intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(5) \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \quad v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = -f(y), \quad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = \\ \qquad = u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

où l'on a fait:

$$f(y) = \frac{1}{2}\{v(s) + h\}.$$

En ajoutant les deux solutions des deux problèmes A et B, on obtiendra celle du problème 1°. Nous allons résoudre successivement les deux problèmes A et B.

Résolution du problème A. — Introduction de séries.

3. Pour ne pas trop compliquer la question, nous supposerons que $f(y)$ est une fonction impaire; mais la solution s'obtiendrait exactement de la même manière si la fonction $f(y)$ était paire; et $f(y)$, dans tous les cas, peut se partager en une fonction paire et une fonction impaire.

Ceci posé, supposons que la fonction impaire $f(y)$ soit développable en *série de Fourier* uniformément convergente, et que soit aussi uniformément convergente la série des dérivées du premier ordre. Alors on pourra écrire:

$$f(y) = \Sigma_n R_n \sin ny, \qquad f'(y) = \Sigma_n n R_n \cos ny,$$

avec

$$n = \frac{2q\pi}{b},$$

q étant les nombres entiers positifs 1, 2, 3, 4, ... et le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les valeurs de q.

En posant:

$$nR_n = A_n,$$

nous aurons:

$$f(y) = \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny, \tag{6}$$

et la série:

$$f'(y) = \Sigma_n A_n \cos ny$$

sera uniformément convergente.

Introduisons les notations:

$$\sinh x = \mathfrak{E}(x), \qquad \cosh x = E(x),$$

et posons:

$$m = \frac{2p\pi}{a},$$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} F = {} & x\Sigma_n \frac{1}{n} B_n \mathfrak{E}(nx) \cos ny + \Sigma_n H_n E(nx) \cos ny + \\ & + y\Sigma_m \frac{1}{m} \mathfrak{B}_m \mathfrak{E}(my) \cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m E(my) \cos mx \end{aligned} \right.$$

où p prend toutes les valeurs entières et positives $1, 2, 3, 4, \ldots$, et où les signes sommatoires Σ s'étendent à toutes les valeurs de p ou de q. Les coefficients B_n, H_n, $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{H}_m$ sont supposés, pour le moment, indéterminés.

Si l'on admet la légitimité des dérivations terme à terme des séries qui composent F, on pourra écrire:

$$
(8)\quad \begin{cases}
u = \dfrac{\partial F}{\partial x} = \Sigma_n B_n \left\{\dfrac{1}{n}\mathfrak{E}(nx) + xE(nx)\right\}\cos ny + \Sigma_n H_n n\,\mathfrak{E}(nx)\cos ny - \\
\qquad - \Sigma_m \mathfrak{B}_m y\,\mathfrak{E}(my)\sin mx - \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,E(my)\sin mx, \\
v = \dfrac{\partial F}{\partial y} = \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{\dfrac{1}{m}\mathfrak{E}(my) + yE(my)\right\}\cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,\mathfrak{E}(my)\cos mx - \\
\qquad - \Sigma_n B_n x\,\mathfrak{E}(nx)\sin ny - \Sigma_n H_n n\,E(nx)\sin ny.
\end{cases}
$$

Élimination des coefficients H_n et $\mathfrak{H}_m$.

4. Ayant égard aux conditions:

$$u\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0, \qquad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0,$$

et aux relations:

$$\sin\frac{ma}{2} = 0, \qquad \sin\frac{nb}{2} = 0,$$

les formules (8) nous donnent:

$$\Sigma_n B_n \left\{\frac{1}{n}\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{a}{2}E\left(\frac{na}{2}\right)\right\}\cos ny + \Sigma_n H_n n\,\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)\cos ny = 0,$$

$$\Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{\frac{1}{m}\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{b}{2}E\left(\frac{mb}{2}\right)\right\}\cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\cos mx = 0,$$

d'où l'on obtient:

$$H_n = -B_n \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n}\frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}\right\}, \qquad \mathfrak{H}_m = -\mathfrak{B}_m \left\{\frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m}\frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right\}.$$

Substituons, dans les formules (7), (8), les expressions précédentes de H_n et de $\mathfrak{H}_m$, et nous obtiendrons, en simplifiant,

$$(7)' \quad F = \Sigma_n B_n \left[\frac{x}{n} \mathfrak{E}(nx) - \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n} \frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} E(nx) \right] \cos ny +$$

$$+ \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[\frac{y}{m} \mathfrak{E}(my) - \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\} E(my) \right] \cos mx,$$

$$(8)' \quad \begin{cases} u = \Sigma_n B_n \left[x E(nx) - \frac{a}{2} \frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \mathfrak{E}(nx) \right] \cos ny - \\ \qquad - \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[y \mathfrak{E}(my) - \left\{ \frac{1}{m} + \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\} E(my) \right] \sin mx, \\ v = \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[y E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \cos mx - \\ \qquad - \Sigma_n B_n \left[x \mathfrak{E}(nx) - \left\{ \frac{1}{n} + \frac{a}{2} \frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} E(nx) \right] \sin ny. \end{cases}$$

On vérifie, aisément, que les fonctions précédentes u, v satisfont aux conditions:

$$u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = 0, \qquad v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Ainsi, en résumé, les fonctions u, v, données par les équations (8)', satisfont aux conditions:

$$(9) \qquad u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Détermination des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$.

5. À cause des conditions:

$$v\left(\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \qquad u\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0 \tag{10}$$

et de l'équation:

$$E^2(x) - \mathfrak{E}^2(x) = 1,$$

on aura:

$$(10)' \left\{ \begin{aligned} \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny = \Sigma_m \mathfrak{B}_m & \left[y\, E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \cos \frac{ma}{2} + \\ & + \Sigma_n B_n \frac{1}{n} \left[E\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{na}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \right] \sin ny, \\ 0 = \Sigma_n B_n & \left[x\, E(nx) - \frac{a}{2} \frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \mathfrak{E}(nx) \right] \cos \frac{nb}{2} + \\ & + \Sigma_m \mathfrak{B}_m \frac{1}{m} \left[E\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{mb}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right] \sin mx. \end{aligned} \right.$$

Multiplions la première de ces équations par $\sin ny . dy$ et intégrons de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$. Si l'on admet la légitimité des intégrations terme à terme des séries, que nous voyons dans les formules (10)', eu égard aux formules:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin^2 ny\, dy = \frac{b}{2}, \qquad \int \mathfrak{E}(my) \sin ny\, dy = \frac{m\, E(my) \sin ny - n\, \mathfrak{E}(my) \cos ny}{m^2 + n^2},$$

$$\int y\, E(my) \sin ny\, dy = y \frac{m\, \mathfrak{E}(my) \sin ny - n\, E(my) \cos ny}{m^2 + n^2} + \\ + \frac{(n^2 - m^2)\, E(my) \sin ny + 2mn\, \mathfrak{E}(my) \cos ny}{(m^2 + n^2)^2},$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathfrak{E}(my)\sin ny\,dy = -\frac{2n\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2}\cos\frac{nb}{2},$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y\,E(my)\sin ny\,dy = \left\{-\frac{nb\,E\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2} + \frac{4mn\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}{(m^2+n^2)^2}\right\}\cos\frac{nb}{2},$$

on obtiendra:

$$\frac{b}{2n}A_n = \frac{b}{2n}B_n\left[E\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{na}{2}\,\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}\right] -$$

$$-\Sigma_m \mathfrak{B}_m\left[\frac{nb\,E\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2} - \frac{4mn\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}{(m^2+n^2)^2} - \frac{nb\,E\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2}\right]\cos\frac{nb}{2}\cos\frac{ma}{2},$$

ou bien:

$$(11)\qquad B_n b\left[E\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{na}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}\right] = b\,A_n - 8\cos\frac{nb}{2}\Sigma_m \mathfrak{B}_m \frac{n^2 m}{(n^2+m^2)^2}\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\cos\frac{ma}{2}.$$

On déduit de même de la seconde des équations $(10)'$:

$$(12)\qquad \mathfrak{B}_m a\left[E\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{mb}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right] = -8\cos\frac{ma}{2}\Sigma_n B_n \frac{m^2 n}{(m^2+n^2)^2}\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)\cos\frac{nb}{2}.$$

Remarque. — Si l'on multiplie la première des équations $(10)'$ par dy et qu'on intègre de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$, on trouvera, en conformité de la supposition (3), l'identité:

$$0 = 0.$$

On déduira la même identité de la seconde des équations $(10)'$.

6. Observons que nous pouvons obtenir les équations (11), (12), en faisant $\lambda = 0$, $\mu = 1$ dans les équations à la page 149 de l'ouvrage, déjà cité, de Mathieu; par conséquent, nous pourrons déduire les valeurs de nos coefficients B_n et $\mathfrak{B}_m$, faisant $\lambda = 0$, $\mu = 1$ dans les expressions, trouvées par Mathieu (loc. cit. page 154), pour les valeurs des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$, qu'il a aussi introduit. Nous ne rapportons pas ici les expressions qui donnent les valeurs de nos coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$; parce qu'elles contiennent des notations, qu'il faudrait expliquer et qui, d'ailleurs, sont étudiées en tous leurs détails dans l'ouvrage de MATHIEU. Dans cet ouvrage sont aussi données (loc. cit. pages 161, 162, 163) des valeurs numériques (avec cinq décimals), qui servent à calculer les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ dans le cas d'un carré ($a = b$).

Convergence des séries qui représentent F, u, v.

7. Les expressions $(8)'$ de u, v sont formées au moyens des séries suivantes:

$$(13)\quad \begin{cases} \Sigma_n B_n E(nx)\cos ny, \quad \Sigma_m \mathfrak{B}_m \mathfrak{E}(my)\sin mx, \\ \qquad \Sigma_n B_n \mathfrak{E}(nx)\sin ny, \quad \Sigma_n B_n \dfrac{E\left(\dfrac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\dfrac{na}{2}\right)}\mathfrak{E}(nx)\cos ny, \ldots \end{cases}$$

Ces séries sont de la même nature que la série:

$$\Sigma_m \mathfrak{B}_m E(my)\cos mx,$$

qui a été étudiée par MATHIEU (pages 157, 158); et l'on pourra démontrer leur convergence uniforme, et, par conséquent, la légitimité des intégrations terme à terme, admise au § 5, faisant usage des considérations de MATHIEU.

À fortior en résulte la convergence uniforme des séries, qui forment l'expression $(7)'$ de F, et la légitimité des dérivations, admise au § 3.

Lemme.

8. *Soit une série uniformément convergente:*

$$(14)\qquad w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

de fonctions harmoniques dans l'aire σ, limitée par un contour C. S'il existe la onction de Green pour le contour C, on pourra appliquer à cette série la dérivation terme à terme en tous les points de l'intérieur de l'aire σ.

En effet, désignons par G la *fonction de Green* relative à la courbe C.

On aura:

$$w_i = \int\limits_C w_i \frac{dG}{dn} ds, \quad w = \int\limits_C w \frac{dG}{dn} ds;$$

et, par conséquent,[1]

[1] Pour la légitimité des dérivations, voir: LAURICELLA; *Sull' integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, §§ 1, 2 et 3 (Annali di Matematica, t. XI, s. 3a).

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \int_C w_i \frac{\partial}{\partial x}\frac{dG}{dn}\,ds, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \int_C w \frac{\partial}{\partial x}\frac{dG}{dn}\,ds.$$

Alors, en vertu de l'intégrabilité terme à terme de la série (14), on pourra écrire, pour un point quelconque intérieur à σ,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_C w \frac{\partial}{\partial x}\frac{dG}{dn}\,ds = \int_C \sum_1^\infty {}_i\, w_i \frac{\partial}{\partial x}\frac{dG}{dn}\,ds = \sum_1^\infty {}_i \int_C w_i \frac{\partial}{\partial x}\frac{dG}{dn}\,ds = \sum_1^\infty {}_i \frac{\partial w_i}{\partial x}.$$

De même l'on aura:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_1^\infty {}_i \frac{\partial w_i}{\partial y}.$$

Le lemme est donc établi.

Vérifications.

9. Ce lemme est valable en particulier pour les séries (13), qui forment les fonctions u, v; et alors, puisque l'on a (§§ 3 et 7):

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y},$$

en résultera, pour un point quelconque de l'intérieur de σ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta^2 F = 2\,\Sigma_n B_n\, E\,(nx) \cos ny + 2\,\Sigma_m \mathfrak{B}_m\, \mathfrak{E}\,(my) \cos mx;$$

et encore:

(dans l'aire σ) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \theta = 0.$$

Observons, enfin, que les expressions (8)' de u et de v, qui vérifient les conditions (9), (10), vérifient aussi, en vertu des équations (10)', les autres conditions:

$$v\left(-\frac{a}{2},\, y\right) = f(y), \qquad u\left(x,\, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

En concluant, *les fonctions u, v, données par les formules* (8)', *satisfont aux équations* (1) *et aux conditions* (4) *au contour C;* par conséquent, *elles résoudrent le problème A.*

Remarquons que la fonction F, donnée par la formule (7)', représente, à une constante près, la solution des équations (1)' du Chapitre I, qui correspondent au problème A.

Résolution du problème B. — Introduction de séries.

10. Faisons sur la fonction $f(y)$ les mêmes hypothèses que nous avons faites au § 3. On aura alors:

$$f(y) = \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny,$$

avec

$$n = \frac{2q\pi}{b}, \quad (q = 1, 2, 3, 4, \ldots);$$

et la série

$$f'(y) = \Sigma_n A_n \cos ny$$

sera uniformément convergente.

Posons:

$$(15) \begin{cases} F = Dx + \frac{1}{3} D' x^3 + x \Sigma_n \frac{1}{n} B_n E(nx) \cos ny + \Sigma_n H_n \mathfrak{E}(nx) \cos ny + \\ \qquad + y \Sigma_m \frac{1}{m} \mathfrak{B}_m \mathfrak{E}(my) \sin mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m E(my) \sin mx, \end{cases}$$

avec

$$m = \frac{(2j+1)\pi}{a}, \quad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Si l'on admet la légitimité des dérivations terme à terme des séries, qui composent la fonction F, nous pourrons écrire:

$$(16) \begin{cases} u = \frac{\partial F}{\partial x} = D + D' x^2 + \Sigma_n B_n \left\{ \frac{1}{n} E(nx) + x \mathfrak{E}(nx) \right\} \cos ny + \\ \qquad + \Sigma_n H_n n E(nx) \cos ny + \Sigma_m \mathfrak{B}_m y \mathfrak{E}(my) \cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m E(my) \cos mx, \\ v = \frac{\partial F}{\partial y} = \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{ \frac{1}{m} \mathfrak{E}(my) + y E(my) \right\} \sin mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m \mathfrak{E}(my) \sin mx - \\ \qquad - \Sigma_n B_n x E(nx) \sin ny - \Sigma_n H_n n \mathfrak{E}(nx) \sin ny. \end{cases}$$

Élimination des coefficients H_n et $\mathfrak{H}_m$.

11. Faisant usage des conditions:

$$u\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0,$$

et des relations:

$$\cos\frac{ma}{2} = 0, \qquad \sin\frac{nb}{2} = 0,$$

on aura, des expressions (16) de u et de v,

$$D + \frac{1}{4}D'a^2 + \Sigma_n B_n \left\{\frac{1}{n} E\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{a}{2}\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)\right\}\cos ny + \Sigma_n H_n n E\left(\frac{na}{2}\right)\cos ny = 0,$$

$$\Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{\frac{1}{m}\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{b}{2}E\left(\frac{mb}{2}\right)\right\}\sin mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\sin mx = 0,$$

d'où l'on tire:

$$D' = -\frac{4}{a^2}D, \qquad H_n = -B_n\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n}\frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)}\right\}, \qquad \mathfrak{H}_m = -\mathfrak{B}_m\left\{\frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m}\frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right\}.$$

Substituons les expressions précédentes de H_n, $\mathfrak{H}_m$ dans les formules (15), (16), et nous obtiendrons, en simplifiant,

$$(15)' \quad F = Dx - \frac{4}{3a^2}Dx^3 + \Sigma_n B_n\left[\frac{x}{n}E(nx) - \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n}\cdot\frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)}\right\}\mathfrak{E}(nx)\right]\cos ny + \Sigma_m \mathfrak{B}_m\left[\frac{y}{m}\mathfrak{E}(my) - \left\{\frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m}\cdot\frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right\}E(my)\right]\sin mx,$$

$$(16)' \quad \begin{cases} u = D - \frac{4}{a^2}Dx^2 + \Sigma_n B_n\left[x\,\mathfrak{E}(nx) - \frac{a}{2}\cdot\frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)}E(nx)\right]\cos ny + \\ \qquad + \Sigma_m \mathfrak{B}_m\left[y\,\mathfrak{E}(my) - \left\{\frac{1}{m} + \frac{b}{2}\cdot\frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right\}E(my)\right]\cos mx, \end{cases}$$

$$(16)' \quad \left\{ \begin{aligned} v = \Sigma_m \mathfrak{B}_m & \left[y\, E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \sin mx - \\ & - \Sigma_n B_n \left[x\, E(nx) - \left\{ \frac{1}{n} + \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} \mathfrak{E}(nx) \right] \sin ny. \end{aligned} \right.$$

On vérifie, aisément, que les expressions précédentes de u et de v satisfont aux conditions:

$$u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = 0, \qquad v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

En résumé, les fonctions u, v, données par les équations (16)′, vérifient les conditions:

$$(17) \qquad u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Détermination des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$.

12. Des conditions:

$$(18) \qquad v\left(\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \qquad u\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0$$

on déduit, faisant usage des expressions (16)′ de u et de v,

$$(18)' \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny = \Sigma_m \mathfrak{B}_m & \left[y\, E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \sin \frac{ma}{2} + \\ & + \Sigma_n B_n \frac{1}{n} \left[\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right) - \frac{na}{2} \cdot \frac{1}{E\left(\frac{na}{2}\right)} \right] \sin ny, \\ D\left(\frac{4}{a^2} x^2 - 1\right) = \Sigma_n B_n & \left[x\, \mathfrak{E}(nx) - \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} E(nx) \right] \cos \frac{nb}{2} - \\ & - \Sigma_m \mathfrak{B}_m \frac{1}{m} \left[E\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{mb}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right] \cos mx. \end{aligned} \right.$$

Si nous opérons sur ces équations, comme l'on a opéré au § 5 sur les équations (10)', nous obtiendrons:

$$(19)\quad B_n b\left[\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)-\frac{na}{2}\cdot\frac{1}{E\left(\frac{na}{2}\right)}\right]=bA_n-8\cos\frac{nb}{2}\Sigma_m\mathfrak{B}_m\frac{mn^2}{(m^2+n^2)^2}\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\sin\frac{ma}{2},$$

$$(20)\quad \mathfrak{B}_m a\left[E\left(\frac{mb}{2}\right)+\frac{mb}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right]-\frac{32}{a^2}\cdot\frac{D}{m^2}\sin\frac{ma}{2}=$$

$$=-8\sin\frac{ma}{2}\Sigma_n B_n\frac{m^2n}{(m^2+n^2)^2}E\left(\frac{na}{2}\right)\cos\frac{nb}{2}.$$

De la seconde des (18)' on a aussi:

$$(21)\qquad D=\frac{a}{2}\Sigma_n B_n\frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)}\cos\frac{nb}{2}+\Sigma_m\mathfrak{B}_m\frac{1}{m}\left[E\left(\frac{mb}{2}\right)+\frac{mb}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right].$$

Il est aisé de voir que, lorsqu'on a déterminé les coefficients D, B_n, $\mathfrak{B}_m$ de manière que les équations (19), (20), (21) soient satisfaites, et, par conséquent, que soient satisfaites les équations (18)', les fonctions u, v, qu'on obtient en substituant ces valeurs de D, B_n, $\mathfrak{B}_m$ dans les formules (16)', satisferont aux autres conditions:

$$v\left(-\frac{a}{2},\, y\right)=-f(y),\qquad u\left(x,\, -\frac{b}{2}\right)=0.$$

13. Observons que nous pouvons obtenir les équations (19), (20), en faisant

$$\lambda=-\frac{8}{a^2},\qquad \mu=1+\frac{8}{a^2}$$

dans les équations (β'), (γ') à la page 167 de l'ouvrage de MATHIEU; par conséquent, nous pourrons obtenir les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$, exprimés par le coefficient

$$A_0=\left(a+\frac{4}{a}\right)D$$

et par les autres coefficients A_1, A_2, A_3, ..., en faisant:

$$\lambda=-\frac{8}{a^2},\qquad \mu=1+\frac{8}{a^2}$$

dans les formules de résolution, données par MATHIEU (loc. cit. page 175).

Il faut remarquer que, dans les dites formules de MATHIEU, le coefficient A_0 est donné, comme tous les coefficients A_n, par le développement en série de la fonction $f(y)$, pendant que notre coefficient A_0 (ou bien notre coefficient D) est inconnu comme les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$. Or nous pouvons éliminer les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ de l'expression (21) de notre D (ou A_0).

En effet, substituons dans la formule (21) les valeurs de B_n, $\mathfrak{B}_m$, qu'on peut obtenir, comme l'on a dit plus haut, exprimées par les coefficients $A_0 = \left(a + \frac{4}{a}\right) D$, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Il en résulte une équation du premier degré en D (ou en A_0), d'où on peut tirer la valeur de D (ou de A_0) en fonction des coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Ensuite, il suffira de substituer la valeur de D (ou de A_0), ainsi obtenue, dans les formules qui donnent B_n et $\mathfrak{B}_m$, exprimées par $A_0 = \left(a + \frac{4}{a}\right) D, A_1, A_2, A_3, \ldots$, pour avoir les valeurs des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ en fonction de $A_1, A_2, A_3, \ldots$

MATHIEU a donné aussi pour le problème B (loc. cit. pages 179, 180, 181) des valeurs numériques (avec cinq décimales), qui servent à calculer les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ dans le cas d'un carré ($a = b$).

14. Pour démontrer la convergence des séries, qui composent les formules précédentes, et pour vérifier que les fonctions u, v, que l'on a obtenues, satisfont à toutes les conditions du problème B, nous n'avons qu'à répéter les considérations que nous avons faites aux §§ 7, 8, 9 du présent Chapitre.

En concluant, *les fonctions u, v, données par les formules* (16)$'$, *satisfont aux équations* (1) *et aux conditions* (5) *au contour C;* par conséquent, *elles résoudrent le problème B.*

Remarquons ici, comme au § 9, que la fonction F, donnée par la formule (15)$'$, représente, à une constante près, la solution des équations (1)$'$ du Chapitre I, qui correspondent au problème B.

Cette remarque et la remarque analogue du § 9 montrent qu'on peut résoudre directement le problème de l'intégration des équations (1)$'$ du Chapitre I, en procédant comme précédemment.

En effet, il suffit de partager ce problème en huit autres plus simples, dont quatre sont analogues au problème A et quatre analogues au problème B; et ensuite opérer sur les deux fonctions F, que nous avons introduites précédemment, comme l'on a opéré sur les fonctions u, v des précédents problèmes A et B.
