SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DISCONTINUES.

PAR

RENÉ BAIRE

À DIJON.

DEUXIÈME PARTIE.

Introduction.

Pour poursuivre l'étude des fonctions de classe supérieure à 1, étude qui a été commencée dans les deux derniers chapitres de la première partie de ce travail,[1] j'ai été conduit à introduire certaines notions nouvelles, que je me propose de définir et d'étudier dans cette deuxième partie. Les fonctions considérées jusqu'ici sont définies sur un ensemble de points de l'espace à n dimensions G_n; on peut exprimer ce fait en disant que *l'argument de la fonction est un point de l'espace à n dimensions;* on a vu que la théorie des ensembles de points dans G_n, sur laquelle nous avons fait reposer la théorie des fonctions continues et discontinues, est dominée par la notion de point limite. Ce sont précisément ces deux notions: ensemble de points, point limite, qu'il nous sera utile, pour la suite de nos recherches, de remplacer par des notions un peu différentes.

J'ai été conduit ainsi à la notion *d'ensemble de suites d'entiers*, que j'appelle aussi *espace à* 0 *dimension,* pour des raisons exposées dans le courant du mémoire, et j'étudie les fonctions définies sur ces nouveaux ensembles. Le théorème qui termine le travail donne une condition très large sous laquelle une fonction est de classe $\leqq 3$.

[1] Acta Mathematica, t. 30.

CHAPITRE I.

Notion des ensembles de suites d'entiers.

1. Considérons l'ensemble, souvent cité, des points du segment (0, 1) dont l'abscisse est de la forme:

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n}+\cdots, \tag{1}$$

chaque nombre c étant égal à 0 ou 2. Soit P cet ensemble, qui est, comme on sait, parfait et non dense dans le continu. Je le divise en deux ensembles parfaits P_1 et P_2, en rangeant dans P_1 les points de P pour lesquels $c_1=0$, dans P_2 ceux pour lesquels $c_1=2$; ainsi P_1 comprend les points de P situés dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, P_2 comprend ceux de l'intervalle $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Je divise de même P_1 en deux ensembles $P_{1,1}$ et $P_{1,2}$, un point de P_1 appartenant à $P_{1,1}$ ou à $P_{1,2}$ suivant qu'on a pour ce point $c_2=0$ ou $c_2=2$.

D'une manière générale, je désigne par $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$, n étant un entier positif quelconque et chacun des nombres a_i étant egal à 1 ou 2, l'ensemble des points de P pour lesquels les n premiers nombres c du développement (1) ont des valeurs fixes définies par la loi suivante:

$$c_i=0 \text{ si } a_i=1; \quad c_i=2 \text{ si } a_i=2 \qquad (i=1, 2, \cdots n). \tag{2}$$

L'ensemble $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$ est parfait et a pour points extrêmes les points d'abscisses:

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n} \text{ et } \frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^n}\cdot$$

Considérons une suite infinie d'entiers dont chacun est égal à 1 ou 2, soit:

$$a_1,\ a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{3}$$

Considérons les ensembles:

$$P_{a_1},\ P_{a_1,a_2}, \ldots P_{a_1,a_2,\ldots a_n}, \ldots \tag{4}$$

D'après la définition de ces ensembles, chacun d'eux est contenu dans le précédent; comme ils sont fermés, il y a au moins un point qui leur est commun; d'ailleurs, un point qui appartient à $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$ a par cela même les n premiers termes de son développement déterminés; donc un point commun à tous les ensembles (4) a tous ses termes déterminés, il est donc unique; c'est le point d'abscisse:

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n}+\cdots$$

les c étant liés aux a par les relations (2).

Inversement, tout point de P, étant susceptible d'être représenté par le développement (1), où les c sont égaux à 0 ou 2, peut être considéré comme le point unique commun aux ensembles:

$$P_{a_1},\ P_{a_1,a_2},\ldots P_{a_1,a_2,\ldots a_n},\ldots$$

les a étant définis par la condition que:

$$a_i=1 \text{ si } c_i=0;\quad a_i=2 \text{ si } c_i=2.$$

Nous nous trouvons avoir établi ainsi, entre les points de P et les suites d'entiers (3), *une correspondance biunivoque et réciproque,* ce qui nous permet de représenter un point quelconque de P par la suite $[a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots]$ qui lui correspond d'après la loi précédente. On voit que deux points qui sont situés dans le même ensemble à n indices sont représentés par des suites ayant en commun les n premiers nombres, et réciproquement.

Cela posé, cherchons à exprimer le fait qu'une suite de points de $P: A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ a pour limite un point A_0 (nécessairement contenu dans P), *en supposant tous ces points définis par les suites d'entiers correspondantes.* La solution de ce problème est immédiate.

Soit A_0 le point $[(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$. Il appartient, quel que soit n, à l'ensemble $P_{(a_1)_0,(a_2)_0,\ldots(a_n)_0}$ que je désigne, pour abréger, par Q_n.

Remarquons que les extrémités gauche et droite de Q_n sont respectivement extrémités droite et gauche d'intervalles contigus à P, de sorte qu'il est possible de trouver un intervalle auquel tous les points de Q_n (même les points extrêmes), sont intérieurs, et qui ne contient pas d'autres points de P que ceux de Q_n. Il en résulte que, A_0 appartenant à Q_n, et étant limite de la suite: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$, *les A_ν sont, à partir d'un certain indice, contenus dans Q_n.*

On a la réciproque suivante. Si, quel que soit n, les A_ν sont, à partir d'un certain indice, contenus dans Q_n, la suite $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ a pour limite A_0. Cela résulte de ce que, quand n croît indéfiniment, les points extrêmes de l'ensemble Q_n, dont la distance est $\frac{1}{3^n}$, tendent tous deux vers A_0.

Ce double résultat peut, si l'on introduit la représentation des points de P par des suites d'entiers, s'énoncer de la manière suivante.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point $A_\nu : [(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$ *ait pour limite, quand* ν *croît indéfiniment, le point* $A_0 : [(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$ *est que, quel que soit* n, *il y ait un entier* h *tel qu'on ait, pour* $\nu > h$:

$$(a_i)_\nu = (a_i)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

2. On peut donner immédiatement quelque extension aux notions qui précédent.

Prenons un ensemble parfait linéaire non dense *quelconque* P, ayant pour points extrêmes deux points A et B. Parmi les intervalles contigus à P, (dont aucun, comme on sait, n'a pour extrémité A ou B), prenons-en $h - 1$ arbitraires; si on enlève ces intervalles de l'intervalle total AB, il reste h intervalles tels que tout point de P fait partie de l'un d'eux. L'ensemble des points de P contenus dans l'un quelconque d'entre eux constitue un ensemble parfait Q, dont les points extrêmes sont, comme plus haut, extrémités d'intervalles contigus à P, de sorte que si A_0 appartient à Q et est limite d'une suite $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$, les A_ν sont, à partir d'un certain indice, contenus dans Q.

Désignons les h ensembles partiels en lesquels P se trouve ainsi décomposé par $P_1, P_2, \ldots P_h$, *l'attribution des indices* 1, 2, ... h *étant d'ailleurs faite d'une manière complètement arbitraire.* (Cette remarque aura une grande importance pour la suite). $P_1, P_2, \ldots P_h$ seront dits ensembles partiels du premier ordre. i étant l'un des entiers 1, 2, ... h, nous pouvons, par le même procédé, décomposer P_i en un nombre fini θ_i d'ensembles parfaits, (θ_i pouvant varier avec i). On désignera les ensembles en lesquels se décompose P_i par $P_{i,1}, P_{i,2}, \ldots P_{i,\theta_i}$, l'attribution du second indice à ces différents ensembles étant faite d'une manière arbitraire. On a ainsi des ensembles du deuxième ordre, on décompose chacun d'eux en ensembles partiels, qui seront dits du troisième ordre, et ainsi de suite. Si on se trouve avoir défini un ensemble désigné par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$, on le décompose en un nombre fini $\theta_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ d'ensembles parfaits qu'on note $P_{a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}}$, l'indice a_{n+1} recevant les valeurs $1, 2, \ldots \theta_{a_1, a_2, \ldots a_n}$.

Nous supposerons qu'en faisant cette suite d'opérations, on s'astreigne à observer la loi suivante. Si on considère tous les ensembles partiels du n^{me} ordre, le maximum λ_n de la distance des deux points extrêmes de chacun de ces ensembles tend vers o quand n croît indéfiniment.

Dans ces conditions, si nous nous donnons une suite d'entiers positifs:

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

telle que, quel que soit n, il existe un ensemble désigné par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$, ces ensembles vérifient les conditions:

$$(2) \qquad P_{a_1} \geqq P_{a_1, a_2} \geqq \cdots \geqq P_{a_1, a_2, \ldots a_n} \geqq \cdots$$

Comme la distance des deux points extrêmes du n^{me} d'entre eux tend vers o, il y a un point unique qui est contenu dans tous, soit A; A est un point de P. Inversement, si on part d'un point A de P, ce point fait partie d'un ensemble partiel du premier ordre bien déterminé, d'un ensemble partiel du second ordre contenu dans le précédent et bien déterminé, etc., de sorte qu'il existe une suite (1) telle que les ensembles (2) correspondants ont en commun le seul point A. On peut donc dire qu'il y a correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des points de P et un certain ensemble de suites d'entiers positifs, à savoir les suites $(a_1, a_2, \ldots a_n \ldots)$ telles que, quel que soit n, l'ensemble $P_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ existe: un point A de P et une suite $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ se correspondent si A est contenu, quel que soit n, dans $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$.

Cela étant, il est facile de vérifier que le théorème du § 1 sur la condition pour que le point A_ν représenté par $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$ ait pour limite A_0: $[(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$ quand ν croît indéfiniment, subsiste dans le cas actuel. En effet, pour que A_ν tende vers A_0, il faut et il suffit que, quel que soit n, les A_ν finissent par être compris dans l'ensemble $P_{(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0}$, ce qui est équivalent à ce fait qu'on doit avoir, quand ν surpasse un certain entier h:

$$(a_i)_\nu = (a_i)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

3. Pour prendre un autre exemple, désignons par P l'ensemble de tous les points du segment linéaire (0, 1). On peut dire que la représentation des abscisses de ces points par des fractions décimales, c'est-à-dire par des expressions de la forme:

$$(1) \qquad \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \qquad (0 \leqq a_i \leqq 9)$$

équivaut à une correspondance entre les points de P et les suites d'entiers

$$(2) \qquad (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots). \qquad (a_i = 0, 1, 2, \ldots 9)$$

Mais ici nous n'avons pas une correspondance biunivoque, car s'il est vrai qu'une expression de la forme (1) définit un point unique de P, il existe des points de P qui sont représentables par deux expressions distinctes de cette forme, ce sont les points d'abscisse $\frac{\alpha}{10^h}$ (α et h entiers).[1] On a, en effet, si $a_n > 1$:

[1] Exception est faite pour les points d'abscisse 0 et 1.

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n-1}{10^n}+\frac{9}{10^{n+1}}+\frac{9}{10^{n+2}}+\cdots+\frac{9}{10^{n+h}}+\cdots$$

ce que nous écrivons, en abrégé:

$$(a_1,\ldots a_{n-1},\ a_n,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots)=(a_1,\ldots a_{n-1},\ a_n-1,\ 9,\ 9,\ 9,\ldots).$$

Nous pouvons, comme dans les exemples précédents, diviser l'ensemble P en ensembles partiels d'ordres $1, 2, \ldots n, \ldots$ en désignant par $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$ l'ensemble des points d'abscisse: $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{y}{10^n}$, avec la condition: $0\leqq y\leqq 1$, chaque nombre a étant l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots 9$. Les ensembles partiels sont ici des intervalles.

Si l'on se donne une suite d'entiers $(a_1, a_2, \ldots a_n \ldots)$, on a:

$$P_{a_1}>P_{a_1,a_2}>\cdots>P_{a_1,a_2,\ldots a_n}>\cdots$$

et il y a un point unique contenu dans tous ces ensembles, point que nous représentons par la suite $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$. Mais si l'on part d'un point A de P, deux cas sont à distinguer:

1°. A n'est pas de la forme $\frac{a}{10^p}$ (a entier). Alors A fait partie d'un ensemble du premier ordre déterminé P_{a_1}, d'un ensemble du deuxième ordre bien déterminé contenu dans le précédent, P_{a_1,a_2}, etc. De plus, A est *intérieur* à chacun de ces ensembles. Par conséquent, pour qu'une suite de points de P: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ tende vers A, il faut et il suffit que, quel que soit n, les A_ν finissent par être contenus dans $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$, ou bien, en introduisant la représentation de A_ν par la suite correspondante: $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$, *il faut et il suffit que, quel que soit n, il existe un entier h tel que, pour $\nu>h$, la suite (ou, s'il y a lieu, l'une quelconque des deux suites) correspondant à A_ν ait en commun avec la suite correspondant à A les n premiers nombres.*

2°. A est de la forme $\frac{a}{10^p}$. A admet deux représentations, soit:

$$(a_1,\ a_2,\ldots a_{p-1},\ a_p-1,\ 9,\ 9,\ 9,\ldots)=(a_1,\ a_2,\ldots a_{p-1},\ a_p,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots).$$

Quel que soit $n>p$, le point A est l'extrémité commune des deux ensembles partiels d'ordre n:

(3) $$P_{a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},a_p-1,9,9,\ldots 9} \text{ et } P_{a_1,a_2,\ldots a_{p-1},a_p,0,0,\ldots 0}.$$

Pour qu'une suite: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ tende vers A, il faut et il suffit que, quel que soit $n > p$, tout point A_ν dont l'indice surpasse un certain entier h appartienne à l'un ou à l'autre des deux ensembles (3). En introduisant la représentation des points par les suites d'entiers, cette condition s'énonce ainsi: *Il faut et il suffit que, quel que soit n, il existe h tel que pour $\nu > h$, le système des n entiers $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu]$ coïncide avec le système des n premiers entiers de l'une ou l'autre des deux suites qui représentent A.*

4. Etudions maintenant la représentation des nombres par des fractions continues. Comme nous l'avons rappelé au § 31 de la première partie, tout nombre irrationnel x de l'intervalle (0, 1) est développable d'une manière déterminée en fraction continue illimitée, soit:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}\ddots}}}$$

ce que nous écrivons:

$$x = (a_1, \ a_2, \ldots a_n, \ldots) .$$

Cette relation établit une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble P des points irrationnels du segment (0, 1) et l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs. Désignons par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ l'ensemble des points irrationnels pour lesquels les n premiers quotients incomplets sont les nombres fixes $a_1, a_2, \ldots a_n$; on voit que $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ se compose de tous les points irrationnels d'un certain intervalle, que nous avons désigné précédemment (Première partie, § 31) par $I_{a_1, a_2, \ldots a_n}$. Dans le cas actuel, l'ensemble P se trouve décomposé en une infinité (dénombrable) d'ensembles partiels du premier ordre: $P_1, P_2, \ldots$, chacun de ceux-ci en une infinité d'ensembles partiels du deuxième ordre, etc....

Le point A de P correspondant à la suite $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ est *intérieur* à chacun des intervalles $I_{a_1, a_2, \ldots a_n}$. Il en résulte que, *pour que le point A_ν, variable avec ν, et représenté par la suite $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$ ait pour limite A, il faut et il suffit que, quel que soit n, il existe un entier h tel que, pour $\nu > h$, la suite correspondant à A_ν ait en commun avec la suite correspondant à A les n premiers nombres.*

5. Enfin, comme dernier exemple, considérons l'ensemble étudié dans le chapitre V de la première partie, et désigné par P_ω, ensemble qui se compose des points irrationnels compris entre 0 et 1 pour lesquels le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n. On a défini (§ 34, 35) certains ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, (n, i_1, i_2, ... i_n recevant toutes les valeurs entières positives); tout point A de P_ω fait partie, d'une manière bien déterminée, d'une suite d'ensembles tels que:

$$p_{i_1} > p_{i_1, i_2} > \cdots > p_{i_1, i_2, \ldots i_n} > \cdots \tag{1}$$

et réciproquement, si on se donne arbitrairement une suite d'entiers positifs (i_1, i_2, ... i_n, ...), on a vu que les ensembles (1) correspondants ont en commun un point unique qui appartient à P_ω. Il y a ainsi une correspondance biunivoque entre les différents points de P_ω et l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs.

Etant donné un point A de P_ω, désignons par (a_1, a_2, ... a_n, ...) la suite des quotients incomplets qui lui correspond, et par (i_1, i_2, ... i_n, ...) la suite des indices des ensembles p contenant A. Cherchons si, en utilisant cette seconde représentation, il est possible de trouver une proposition analogue au théorème des § 1, 2, 3, 4.

Remarquons d'abord que si deux suites (i_1, i_2, ... i_n, ...) et (i'_1, i'_2, ... i'_n, ...) ont en commun les n premiers nombres, c'est-à-dire si $i_1 = i'_1$, $i_2 = i'_2$, ... $i_n = i'_n$, les deux points A et A' de P_ω correspondants sont contenus dans le même ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. D'autre part, on sait que $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ a pour dérivé l'ensemble parfait $q_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, et la distance maxima de deux points de cet ensemble tend vers o quand n croît indéfiniment.

Cela posé, supposons qu'on ait, d'une part un point $A:(i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots)$, d'autre part un point A_ν, variable avec ν: $[(i_1)_\nu, (i_2)_\nu, \ldots (i_n)_\nu, \ldots]$ tel que, quel que soit n, on ait, quand ν dépasse une certaine valeur:

$$(i_1)_\nu = i_1, \quad (i_2)_\nu = i_2, \ldots \quad (i_n)_\nu = i_n.$$

Dans ces conditions, A_ν tend vers A, car A_ν finit par être contenu dans l'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, quel que soit n; sa distance à A tend donc vers o quand ν croît indéfiniment.

Mais cette proposition n'a pas ici de réciproque, car deux points de P_ω peuvent être pris aussi voisins qu'on veut l'un de l'autre, et cependant appartenir à des ensembles p à n indices différents, par exemple à deux ensembles p_i et $p_{i'}$ différents; cela résulte de ce que l'ensemble formé par la réunion de tous les ensembles p_i est partout dense dans le continu.

6. On peut, de l'étude des différents exemples que nous venons de passer en revue, dégager les caractères communs que voici. Une correspondance se

trouve établie entre un ensemble de points d'une part, et d'autre part un certain ensemble de suites d'entiers; cette correspondance est, dans certains cas, biunivoque, et dans d'autres cas, comporte certaines restrictions, par le fait qu'il y a dans l'un des ensembles des éléments exceptionnels ayant deux correspondants dans l'autre. Mais le fait le plus intéressant pour l'étude que j'ai en vue est que *la notion de point variable tendant vers un point fixe est remplacée par celle-ci: une suite d'entiers, variable, a en commun avec une suite fixe, un nombre de termes au commencement qui croît indéfiniment.*

On conçoit qu'il peut y avoir intérêt à changer le point de départ de toute cette étude en procédant de la manière suivante: on prendra comme base du raisonnement, comme éléments fondamentaux, les suites d'entiers, considérées *a priori*, et l'on adoptera, comme définition de la limite, pour ces éléments, la propriété que nous venons d'énoncer et qui, dans les théories courantes, constitue un résultat. C'est le nouveau point de vue auquel je vais me placer maintenant; dans le chapitre qui suit, je poserai les définitions premières, et j'étudierai, sur les ensembles ainsi définis, les propriétés analogues à celles qui, dans la théorie des ensembles de points, ont fait l'objet du chapitre II de la première partie. Je m'occuperai ensuite, dans le chapitre III, de définir et d'étudier les fonctions définies sur ces nouveaux ensembles.

CHAPITRE II.

Théorie des ensembles de suites d'entiers.

7. Les éléments sur lesquels nous raisonnerons sont les suites d'entiers de la forme:

$$(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$$

où chaque élément a_n est un des entiers positifs $1, 2, 3, \ldots$ Ces éléments joueront, dans les théories qui vont suivre, le même rôle que les points dans les théories précédemment traitées, et nous étudierons des *ensembles de suites d'entiers*, c'est-à-dire des ensembles dont chaque élément est une suite de la forme indiquée. L'ensemble de *toutes* les suites d'entiers positifs sera appelé *ensemble fondamental.*

Nous ferons, au sujet de ces nouveaux ensembles, des conventions identiques à celles qui ont été faites pour les ensembles de points (Première partie,

§ 5). Etant donnés des ensembles de suites d'entiers P, Q, R... en nombre fini ou infini, nous désignons par $M(P, Q, R, \ldots)$, $D(P, Q, R, \ldots)$ respectivement l'ensemble formé par la réunion de P, Q, R, ... et l'ensemble composé des éléments communs à P, Q, R, ... Dans le cas où P, Q, R, ... n'ont deux à deux aucun élément commun, nous écrivons: $M(P, Q, R, \ldots) = P + Q + R + \ldots$ et cet ensemble est dit la somme de P, Q, R, ... Les égalités ou inégalités: $P = Q$, $P \geqq Q$ (ou $Q \leqq P$), $P > Q$ (ou $Q < P$), $P = 0$, expriment respectivement que P et Q sont identiques, que P contient tous les éléments de Q, que P contient, outre les éléments de Q, un élément au moins, que P ne contient aucun élément. Si l'on a $P \geqq Q$, on désigne par $P - Q$ l'ensemble des éléments contenus dans P sans être contenus dans Q.

8. La notion fondamentale qui nous servira dans cette étude est celle *d'élément limite. On dit que l'élément*

$$A_0 : [(a_1)_0,\ (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$$

est limite de l'élément, variable avec ν:

$$A_\nu : [(a_1)_\nu,\ (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$$

si, quel que soit n, *il existe un entier* h *tel que, pour* $\nu > h$, *on a*:

$$(a_i)_\nu = (a_i)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Deux *éléments-suites* distincts sont considérés comme d'autant plus voisins l'un de l'autre qu'ils ont en commun un plus grand nombre de termes consécutifs à partir du premier. Ceci nous conduit à effectuer des divisions dans l'ensemble fondamental. Réunissons ensemble toutes les suites pour lesquelles le premier terme a une valeur déterminée α; nous partageons ainsi l'ensemble fondamental en une infinité dénombrable d'ensembles partiels; appelons respectivement groupe (1), groupe (2), groupe (3), etc. l'ensemble des suites pour lesquelles le premier terme est 1, 2, 3, etc.: ce seront *les groupes du premier ordre.* Chacun de ces groupes se subdivise de la même manière en groupes du deuxième ordre, d'après la valeur du second terme; ainsi le groupe (1) est formé par la réunion des groupes du second ordre: (1, 1), (1, 2), etc.

D'une manière générale, étant donné un système d'entiers positifs rangés dans un ordre déterminé: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, appelons groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ l'ensemble des suites pour lesquelles les p premiers termes sont respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$; ce groupe sera dit d'ordre p.

Le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ se subdivise en une infinité dénombrable de groupes d'ordre $(p + 1)$, savoir:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_p,\ 1),\ (\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_p,\ 2), \ldots,$$

chacun de ceux-ci en groupes d'ordre $p+2$, etc.

Etant donnée une suite d'entiers A déterminée, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, , \ldots)$, cette suite appartient, comme on voit, au groupe d'ordre 1: (α_1), au groupe d'ordre 2: $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots$, au groupe d'ordre p: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$, etc. Réciproquement, si l'on a une suite de groupes d'ordres successifs: $1, 2, \ldots p, \ldots$, chacun de ces groupes étant contenu dans le précédent, il existe une suite d'entiers bien déterminée qui est contenue dans tous ces groupes.

A l'aide de ces notions nouvelles, la définition générale de la limite peut s'énoncer dans les termes suivants:

L'élément-suite A_0 est limite de la suite d'éléments-suites $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ si, quel que soit n, les A_ν sont, quand ν dépasse une certaine valeur, contenus dans le groupe d'ordre n qui contient A_0.

9. *Etant donné un ensemble P de suites, on dit qu'une suite A,* (faisant partie ou non de P), *est limite pour P si tout groupe contenant A contient au moins une suite autre que A faisant partie de P.*

Transformons cette condition. Soit n un entier, désignons par g_n le groupe d'ordre n qui contient A. La condition qui vient d'être énoncée étant supposée remplie, il existe dans g_n une suite A_1 faisant partie de P et distincte de A. Les suites A et A_1 ont en commun les n premiers termes, elles peuvent avoir en commun un plus grand nombre de termes consécutifs à partir du premier, mais il existe certainement un entier $n_1 > n$ tel que les n_1 premiers termes de A_1 ne sont pas identiques aux n_1 premiers termes de A, de telle sorte que les deux groupes d'ordre n_1 qui contiennent respectivement A et A_1 sont distincts. Cela étant, dans le groupe d'ordre n_1 qui contient A, nous pouvons prendre une suite A_2 faisant partie de P et distincte de A; A_2 sera distincte de A_1. En répétant le raisonnement, on trouve $n_2 > n_1$ tel que le groupe d'ordre n_2 contenant A ne contient pas A_2, dans ce même groupe on prend A_3 faisant partie de P et distincte de A, et ainsi de suite. Le procédé se poursuit indéfiniment, de sorte qu'on obtient une série infinie de suites de P: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$, chacune d'elles étant distincte des précédentes. On voit ainsi que *si A est limite pour P, tout groupe contenant A contient une infinité de suites de P.* La réciproque est évidente, car l'hypothèse que tout groupe contenant A contient une infinité de suites de P entraîne ce fait que tout groupe contenant A contient une suite de P autre que A. En résumé, on a, pour la notion d'élément limite d'un ensemble, la nouvelle définition, complètement équivalente à la précédente:

Etant donné un ensemble P, une suite A est limite pour P si tout groupe contenant A contient une infinité de suites de P.

Remarquons que, dans la démonstration précédente, A_ν tend vers A, car A_ν est contenu dans le groupe d'ordre $n_{\nu-1}$ qui contient A, et $n_{\nu-1}$ croît indéfiniment. Donc, si A est limite pour P, il est possible d'extraire de P une série d'éléments: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ distincts de A, et ayant A pour limite. La réciproque est évidente.

10. *Définitions.* Un ensemble P est dit *fermé* s'il contient tous ses éléments limites. — Un ensemble P est *dense en lui-même* si tout élément de P est limite pour P.

Un ensemble P est *parfait* s'il est à la fois fermé et dense en lui-même.

P étant quelconque, un élément de P qui n'est pas limite pour P est dit *isolé* dans P. D'après cela, un ensemble P est parfait s'il est fermé et ne contient aucun élément isolé.

P étant quelconque, l'ensemble des éléments limites de P est appelé dérivé d'ordre 1 de P, ou simplement dérivé de P: on le note P^1. Je dis que P^1 *est fermé;* il faut montrer que si A est un élément limite pour P^1, A fait partie de P^1; en effet, dans tout groupe g contenant A existe une suite de P^1, soit B; g, contenant la suite B, contient une infinité de suites de P; donc A est limite pour P, c'est-à-dire fait partie de P^1.

Il est évident que la condition pour qu'un ensemble P soit fermé, dense en lui-même, parfait, peut s'écrire: $P \geqq P^1$, $P \leqq P^1$, $P = P^1$. La condition $P \geqq Q$ entraîne $P^1 \geqq Q^1$.

Appelons ensemble dérivé d'ordre 0 de l'ensemble P la réunion de P et de son dérivé d'ordre 1, P^1; soit donc: $P^0 = M(P, P^1)$. D'après cela, un élément A de P^0, ou bien fait partie de P, ou bien est limite pour P, de sorte que: *L'ensemble P^0 est l'ensemble des éléments A tels que tout groupe contenant l'un de ces éléments contient au moins un élément de P.* — P^0 est fermé et a pour dérivé P^1, car si A est limite pour P^0, tout groupe contenant A contient une infinité d'éléments de P ou de P^1, et par suite, de toutes façons, une infinité d'éléments de P; donc A fait partie de P^0 et de P^1. D'ailleurs, inversement, un élément de P^1, dérivé de P, fait partie du dérivé de $P^0 \geqq P$. Donc P^0 a bien pour dérivé P^1 et le contient, par suite est fermé.

Si P est fermé, de $P \geqq P^1$, on déduit: $P^0 = P$, et réciproquement cette condition exprime que P est fermé.

Si P est dense en lui-même, de $P \leqq P^1$ on déduit que le dérivé de P, qui est P^1, est contenu dans le dérivé de P^1. Donc P^1 est aussi dense en lui-même, et comme d'autre part P^1 est fermé, il est parfait.

Si $P, Q, \ldots R$ sont des ensembles fermés en nombre *fini*, $T = M(P, Q, \ldots R)$ est aussi fermé. En effet, un élément limite pour T est limite pour l'un au moins des ensembles $P, Q, \ldots R$, par suite fait partie de l'un d'eux, et aussi de T. Si $P, Q, \ldots R$ sont parfaits, T est parfait, car un élément A de T, s'il fait partie de P par exemple, est limite pour P, donc aussi pour T.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont des ensembles fermés en nombre *fini ou infini*, l'ensemble $S = D(P, Q, R, \ldots)$, s'il existe, est *fermé*. En effet, un élément A, limite pour S, est limite pour chacun des ensembles $P, Q, R, \ldots$, donc fait partie de tous ces ensembles, et par suite de S.

11. Soit P un ensemble de suites quelconque. Par rapport à P, les différents groupes définis au § 8 se distinguent en deux espèces, suivant qu'ils contiennent ou non des éléments de P. Nous dirons qu'un groupe est *relatif à* P s'il contient au moins un élément de P, qu'il est *extérieur* à P s'il ne contient aucun élément de P. On reconnaît immédiatement que: si un groupe g est extérieur à P, tout groupe contenu dans g est aussi extérieur à P; si un groupe g, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, est relatif à P, les groupes (α_1), (α_1, α_2), $\ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1})$, qui contiennent g, sont aussi relatifs à P, et parmi les groupes d'ordre $h+1$ contenus dans g, il y en a au moins un qui est relatif à P. Enfin, par définition de P^0, un groupe relatif à P est aussi relatif à P^0, et réciproquement, de sorte que l'ensemble des groupes relatifs à P, P étant quelconque, coïncide avec l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble fermé.

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un certain ensemble P de suites, et nous avons défini l'ensemble des groupes relatifs à P, lequel possède la propriété suivante: Si Γ est cet ensemble de groupes, et A une suite quelconque de P, tous les groupes contenant A font partie de Γ. Inversement, donnons-nous *a priori* un ensemble de groupes Γ, et cherchons s'il existe des suites telles que tous les groupes contenant chacune d'elles fassent partie de Γ ou, comme nous dirons pour abréger, des suites *contenues* dans Γ, ou *appartenant* à Γ. Remarquons d'abord que si cela est, l'ensemble P de ces suites est fermé; car, soit A une suite limite pour P; quel que soit n, le groupe d'ordre n qui contient A contient, par hypothèse, des suites de P; donc il fait partie de Γ; donc A est telle que tous les groupes contenant A font partie de Γ, donc A fait partie de P, ce qui montre que P est fermé.

Etant donné un ensemble de groupes Γ, pour qu'il existe des suites contenues dans Γ, une première condition est que, si un groupe d'ordre p, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$, fait partie de Γ, tous les groupes (α_1), (α_1, α_2), $\ldots$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1})$ qui contiennent ce groupe, doivent aussi faire partie de Γ. Nous conviendrons de dire qu'un ensemble de groupes possédant cette propriété est *complet*.

Il faut en outre évidemment qu'il y ait dans Γ des groupes d'ordre n, quel que soit n. Ces deux conditions ne sont d'ailleurs pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant. Prenons tous les groupes d'ordre 1:

$$(1),\quad (2),\quad (3), \ldots$$

puis tous les groupes d'ordre 2 contenus dans (2), tous les groupes d'ordres 2 et 3 contenus dans (3), et d'une manière générale, quel que soit n, tous les groupes d'ordre $2, 3, \ldots n$, contenus dans (n). L'ensemble Γ de tous ces groupes est complet, il contient des groupes de tous les ordres, mais aucune suite n'appartient à Γ; car soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ une suite, le groupe d'ordre α_1+1 qui la contient n'est pas contenu dans Γ.

Résumons ces résultats en disant que: Si Γ est un ensemble complet de groupes, il peut y avoir ou non des suites appartenant à Γ; s'il y en a, leur ensemble P est fermé; si Γ_1 est l'ensemble des groupes relatifs à P, Γ_1 est évidemment contenu dans Γ.

12. Demandons-nous maintenant à quelles conditions un ensemble Γ de groupes coïncide avec l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble de suites. En interprétant les remarques du § 11, on a immédiatement des conditions nécessaires, qui peuvent s'énoncer comme il suit: L'ensemble Γ doit être complet, et si g est un groupe contenu dans Γ, d'ordre h, il y a au moins un groupe d'ordre $h+1$ contenu dans g qui fait partie de Γ. Je dis que ces conditions sont suffisantes; en effet, supposons-les remplies; prenons, dans Γ, un groupe quelconque g, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$; d'une part les groupes (α_1), $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h-1})$ font partie de Γ, puisque Γ est complet; d'autre part, d'après la seconde condition, il existe dans Γ un groupe d'ordre $h+1$ contenu dans Γ, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \alpha_{h+1})$; dans ce nouveau groupe existe, d'après la même condition, un groupe d'ordre $h+2$ contenu dans Γ, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \alpha_{h+1}, \alpha_{h+2})$; ce raisonnement peut se poursuivre indéfiniment, et montre l'existence d'une suite infinie de groupes d'ordres $1, 2, \ldots h, h+1, h+2, \ldots$ dont chacun est contenu dans le précédent et appartenant tous à Γ; la suite définie par ces groupes appartient donc à Γ. En résumé, il existe des suites appartenant à Γ; on sait que l'ensemble P de ces suites est fermé; d'autre part, le groupe g dont on est parti est arbitraire dans Γ, on voit donc que tout groupe de Γ contient des suites de P, c'est-à-dire est relatif à P. Ainsi Γ coïncide avec l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble de suites. On a ainsi le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble Γ de groupes constitue l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble de suites est que Γ soit complet *et que, si g est un groupe d'ordre h de Γ, il y ait dans Γ un groupe d'ordre $h+1$ contenu dans g.*

Etant donné un ensemble fermé P de suites, l'ensemble Γ des groupes relatifs à P est parfaitement déterminé, ainsi que l'ensemble Γ' des groupes extérieurs à P, Γ' se composant de tous les groupes qui ne font pas partie de Γ. Réciproquement, la connaissance de Γ, ou, ce qui revient au même, de Γ', permet de décider si une suite donnée fait ou non partie de P. En résumé, la connaissance d'un ensemble fermé est complètement équivalente à la connaissance des groupes relatifs à cet ensemble (ou des groupes extérieurs); cette propriété sera très utile dans la suite; pour le moment, nous en tirerons cette conséquence qu'un *ensemble fermé est déterminé par une infinité dénombrable de conditions.*

13. Supposons qu'un ensemble Γ de groupes satisfasse aux conditions du § précédent, de sorte qu'il existe des suites appartenant à Γ; l'ensemble P de ces suites est fermé. Demandons-nous à quelles conditions P sera parfait; faisons à ce sujet quelques remarques générales.

Si A est un élément de P non limite pour P, c'est-à-dire isolé dans P, il y a un entier n tel que le groupe d'ordre n qui contient A ne contient pas d'autre suite de P; si g est ce groupe, g est contenu dans Γ, et les seuls groupes contenus dans g qui font partie de Γ sont le groupe (unique) d'ordre $n+1$ contenant A, le groupe (unique) d'ordre $n+2$ contenant A, etc. Ainsi, dans un certain groupe g de Γ n'existe qu'un seul groupe d'ordre déterminé supérieur à celui de g et faisant partie de Γ.

Réciproquement, supposons que dans Γ existe un groupe g tel que, si n est son ordre, il n'existe dans Γ, pour chaque valeur de h, qu'un seul groupe d'ordre $n+h$ contenu dans g. Il en résulte évidemment que g ne contient qu'un seul élément faisant partie de P, lequel est par suite isolé dans P.

Pour que P soit parfait, c'est-à-dire ne contienne aucun élément isolé, il faut et il suffit que la condition précédente ne soit jamais réalisée, c'est-à-dire que *dans tout groupe g d'ordre n contenu dans Γ existent au moins deux groupes d'un même ordre supérieur à n et contenus dans Γ.* On peut vérifier directement que c'est bien là la condition nécessaire et suffisante pour que P soit parfait.

La condition est nécessaire, car si P est parfait, tout élément de P est limite pour P; donc tout groupe g de Γ, contenant un élément de P, en contient au moins deux distincts; si n est l'ordre de g, pour h assez grand, les groupes d'ordre $n+h$ qui contiennent ces deux éléments sont distincts, donc il y a dans g deux groupes d'un même ordre supérieur à n et contenus dans Γ.

La condition est suffisante: en effet, supposons-la remplie. Si A est un élément de P, tout groupe g contenant A contient, par hypothèse, deux groupes

g' et g'' *d'un même ordre* supérieur à celui de g et contenus dans Γ; g' et g'', étant contenus dans Γ, contiennent chacun au moins un élément de P; on a donc ainsi au moins deux éléments *distincts* de P contenus dans g; ainsi g contient certainement un élément de P autre que A; donc A est limite pour P, ce qui achève de démontrer la proposition.

14. Nous allons démontrer, sur les ensembles de suites, un théorème complètement analogue à celui qui a été démontré sur les ensembles de points à n dimensions dans les «Leçons sur les fonctions discontinues» (§ 62, p. 102).

Appelons $(\varDelta)$ l'ensemble de tous les groupes possibles. $(\varDelta)$ est évidemment dénombrable. Etant donné un ensemble fermé P, appelons $\varDelta(P)$ l'ensemble des groupes extérieurs à P, qui, comme nous l'avons vu, détermine complètement P. Il est évident que si $P \geqq Q$, (P et Q étant fermés), tout groupe extérieur à P est extérieur à Q, de sorte que $\varDelta(Q)$ contient tous les éléments dont se compose $\varDelta(P)$. De plus, si $P > Q$, il y a certainement des groupes qui appartiennent à $\varDelta(Q)$ sans appartenir à $\varDelta(P)$, sans quoi l'identité de $\varDelta(Q)$ et de $\varDelta(P)$ entraînerait celle de P et de Q, contrairement à l'hypothèse.

Cela posé, supposons qu'on ait des ensembles fermés, correspondant aux nombres ordinaux des classes I et II:

$$P_0, P_1, P_2, \dots P_n, \dots P_\omega, \dots P_\alpha, \dots \tag{1}$$

avec la condition que $\alpha < \alpha'$ entraîne $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$. D'après ce qui précède, quel que soit α, $\varDelta(P_{\alpha+1})$ contient tous les éléments de $\varDelta(P_\alpha)$; désignons par $C(P_\alpha)$ l'ensemble des groupes qui font partie de $\varDelta(P_{\alpha+1})$ sans faire partie de $\varDelta(P_\alpha)$. On voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $C(P_\alpha)$ soit nul est que $P_{\alpha+1} = P_\alpha$. Considérons les ensembles de groupes:

$$C(P_0), \quad C(P_1), \dots C(P_n), \dots C(P_\alpha), \dots \tag{2}$$

Chacun de ces ensembles constitue une partie de l'ensemble dénombrable $(\varDelta)$, et deux d'entre eux n'ont aucun élément commun, car un élément de $C(P_\alpha)$ fait partie de $\varDelta(P_{\alpha+1})$, par suite de $\varDelta(P_{\alpha+2})$ et de tous les $\varDelta(P_{\alpha'})$ pour lesquels $\alpha' > \alpha$, il ne fait donc pas partie de $C(P_{\alpha'})$ si $\alpha' > \alpha$.

Il y a donc au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles (2) non nuls; les indices de ceux des ensembles (2) qui ne sont pas nuls formant ainsi un ensemble fini ou dénombrable, il y a un nombre α des classes I ou II qui est supérieur à tous ces indices. Si $\alpha' \geqq \alpha$, on a $C(P_{\alpha'}) = 0$, d'où résulte:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = P_{\alpha+2} = \cdots = P_{\alpha'} = \cdots, \qquad \alpha' > \alpha. \tag{3}$$

Désignons par P_Ω l'ensemble commun à tous les ensembles (1); on voit que *les ensembles* (1) *sont, pour des valeurs suffisamment grandes de l'indice, identiques à* P_Ω. C'est là le théorème que j'avais en vue. Il y a un nombre β bien déterminé qui est le plus petit tel qu'on ait $P_\beta = P_\Omega$.

Ajoutons deux remarques, analogues aux remarques I et III (loc. cit., § 63, p. 104).

1°. Supposons que les ensembles (1) satisfassent à la condition que, si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun aux ensembles $P_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$. Soit alors A un élément quelconque de P_0; si A ne fait pas partie de tous les ensembles (1), c'est-à-dire de P_Ω, soit δ le plus petit nombre tel que P_δ ne contient pas A; δ ne peut être de seconde espèce, car A appartiendrait à tous les ensembles dont l'indice est inférieur à δ, et par suite à P_δ, d'après la condition donnée; donc δ est de première espèce et a un précédent γ; A appartient à P_γ sans appartenir à $P_{\gamma+1}$. En résumé, tout élément A de P_0 fait partie, ou bien de $P_\Omega = P_\beta$, ou bien d'un ensemble $P_\gamma - P_{\gamma+1}$, et cela d'une manière bien déterminée. Nous exprimerons ce résultat au moyen de la formule:

$$P_0 = \Sigma (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega, \quad \gamma < \beta.$$

La somme est étendue à toutes les valeurs de γ des classes I et II, ou si l'on veut, seulement aux valeurs $< \beta$.

2°. Supposons que les ensembles (1) satisfassent à la condition que tout élément isolé de l'un quelconque de ces ensembles ne fait pas partie de l'ensemble suivant. Dans ces conditions, je dis que P_Ω, s'il n'est pas nul, est parfait. En effet, il ne peut exister d'élément isolé dans P_Ω, car un tel élément, soit A, serait isolé dans $P_\beta = P_\Omega$, par suite ne ferait pas partie de $P_{\beta+1}$, ce qui est en contradiction avec le fait que $P_\beta = P_{\beta+1} = P_\Omega$. Donc P_Ω est nul ou parfait.

Il est utile de remarquer que si on a une série infinie d'ensembles fermés de suites, dont chacun contient le suivant, soit:

$$P_0 > P_1 > P_2 > \cdots > P_n > \cdots$$

il n'y a pas nécessairement d'élément commun à tous ces ensembles.[1] (Il suffit par exemple de prendre pour P_n l'ensemble de toutes les suites dont le premier terme est $> n$.) C'est pourquoi nous ne chercherons pas à donner pour les ensembles actuels, de théorème analogue à celui de la Remarque II (loc. cit., § 63).

[1] On peut démontrer que cela a lieu dans le cas où l'ensemble P_0 est tel que, si g est un groupe relatif à P_0, et si h est son ordre, les groupes d'ordre $h+1$ relatifs à P_0 et contenus dans g sont en nombre *fini*.

15. Etant donné un ensemble de suites arbitraire P, nous avons défini (§ 10) les dérivés d'ordre 0 et 1 de P, et nous savons que P^0 a pour dérivé P^1. Nous définirons le dérivé d'ordre α de P, P^α, α étant un nombre ordinal quelconque des classes I ou II, par la double convention suivante:

1°. Si α est de première espèce et >0, P^α est le dérivé d'ordre 1 de $P^{\alpha-1}$.

2°. Si α est de deuxième espèce, P^α est l'ensemble commun à tous les ensembles $P^{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha'<\alpha$.

Les ensembles $P^0, P^1, \dots P^\alpha, \dots$ ainsi définis, satisfont aux conditions remplies, dans le § précédent, par les ensembles désignés par P_0, P_1, etc. . . . ; ils satisfont aussi aux deux conditions complémentaires 1° et 2°. On peut donc énoncer les résultats suivants, en désignant par P^Ω (dérivé d'ordre Ω de P) l'ensemble commun à tous les ensembles P^α:

P^Ω est nul ou parfait; il y a un nombre déterminé β des classes I ou II tel que:

$$P^\beta = P^{\beta+1} = \cdots = P^\Omega.$$

Si $\alpha<\beta$, on a $P^\alpha > P^\beta$. Enfin, on a:

$$P^0 = \Sigma(P^\gamma - P^{\gamma+1}) + P^\Omega, \quad \gamma<\beta. \tag{1}$$

Remarquons qu'aucun terme de la somme n'est nul pour $\gamma<\beta$, car la condition $P^\gamma = P^{\gamma+1}$ exprimerait que P^γ est parfait et coïncide avec tous les ensembles dérivés qui suivent, ce qui contredit ce fait que $P^\gamma > P^\Omega$.

Un ensemble tel que $P^\gamma - P^{\gamma+1}$ se compose de tous les éléments *isolés* de l'ensemble fermé P^γ; a fortiori chacun de ces éléments est isolé pour l'ensemble $P^\gamma - P^{\gamma+1}$. Appelons d'une manière générale ensemble *isolé* tout ensemble tel que chacun de ses éléments est isolé dans l'ensemble; je dis qu'un *ensemble isolé est dénombrable.*

Faisons une remarque préliminaire. Si Q est un ensemble isolé, A un élément de Q, et si on désigne par $g_1, g_2, \dots g_n, \dots$ les groupes d'ordres $1, 2, \dots n, \dots$ qui contiennent A, nous avons déjà vu (§ 13) que, à partir d'un certain rang, ces groupes ne contiennent pas d'autre élément de Q que A; parmi les groupes qui remplissent ces conditions, l'un d'eux a le plus petit indice, c'est-à-dire est d'ordre minimum; ainsi, à tout élément A de Q correspond un groupe bien déterminé g qui contient A, ne contient pas d'autre élément de Q, tandis que le groupe d'ordre inférieur à celui de g et contenant g (s'il existe) contient au moins deux éléments de Q.

Cela posé, prenons: les groupes d'ordre 1 ne contenant qu'un seul élément de Q; puis, les groupes d'ordre 2 non contenus dans les précédents, et ne contenant qu'un seul élément de Q; puis, les groupes d'ordre 3 non contenus dans les précédents et ne contenant qu'un seul élément de Q, etc....; supposons cette opération prolongée indéfiniment. On obtient ainsi un ensemble de groupes tels que chacun d'eux contient un seul élément de Q et que tout élément A de Q est contenu dans un et un seul d'entre eux, car le groupe g correspondant à A d'après la convention précédente est obtenu par le procédé indiqué, tandis qu'aucun des autres groupes contenant A n'est obtenu. Ainsi il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble Q et un certain ensemble de groupes, lequel est dénombrable. Donc Q est aussi dénombrable.

Dans la formule (1), l'ensemble P^0 désigne un ensemble fermé quelconque; il y a lieu de distinguer deux cas suivant que P^Ω est nul ou existe effectivement; dans tous les cas, $\Sigma(P^\gamma - P^{\gamma+1})$ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles isolés, et est par suite dénombrable. On peut donc dire que:

Un ensemble fermé de suites, ou bien est dénombrable, ou bien se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.[1]

16. Soit P un ensemble parfait de suites; si g est un groupe relatif à P, l'ensemble des suites de P contenues dans g, soit $D(P,g)$, est parfait; en effet, d'abord cet ensemble est fermé, comme étant l'ensemble commun aux deux ensembles fermés P et g; de plus, toute suite A de $D(P,g)$ est limite pour cet ensemble, car si g' est un groupe contenant A, il y a dans g' une infinité d'éléments de P, et si g' est contenu dans g, ces suites appartiennent à $D(P,g)$, donc A est limite pour $D(P,g)$, qui est donc parfait. Nous dirons que l'ensemble parfait $D(P,g)$ est la *portion* de P déterminée par le groupe g.

Soit Q un ensemble quelconque contenu dans P. Il y a deux cas possibles, qui s'excluent l'un l'autre:

1°. *Dans toute portion P_1 de P existe une portion P_2 de P qui ne contient aucun élément de Q. Nous dirons dans ce cas que Q est non dense dans P.*

2°. *Il y a une portion P_1 de P telle que toute portion P_2 de P_1 contient des éléments de Q. Nous dirons alors que Q est partout dense dans P_1.*

On voit que dans le premier cas, Q^0 (qui est contenu dans P, puisque $Q \leqq P$ entraine $Q^0 \leqq P^0 = P$) est, comme Q, non dense dans P, tandis que, dans le second cas, tous les éléments de la portion désignée par P_1 appartiennent à Q^0, de sorte que Q^0 coïncide avec P dans un certain groupe relatif à P.

Si Q est non dense dans P, la partie Q_1 de Q contenue dans une portion P_1 de P est non dense dans P_1.

---

[1] Nous verrons plus loin qu'un ensemble parfait n'est pas dénombrable.

17. Q étant un ensemble contenu dans l'ensemble parfait P, nous dirons que Q *est de première catégorie dans* P, *s'il existe une infinité dénombrable d'ensembles non denses dans* P *tels que tout élément de* Q *fait partie de l'un d'eux.*

Si Q *n'est pas de première catégorie dans* P, *nous dirons que* Q *est de deuxième catégorie dans* P.

De ces définitions résultent immédiatement les conséquences suivantes:

Un ensemble contenu dans un ensemble de première catégorie est lui-même de première catégorie. Un ensemble contenant un ensemble de deuxième catégorie est lui-même de deuxième catégorie.

La réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie constitue un ensemble de première catégorie.

Si Q est de première catégorie dans P, la partie de Q contenue dans une portion quelconque P_1 de P est de première catégorie dans P_1.

Démontrons maintenant que, si Q est de première catégorie dans P, il existe, dans toute portion de P, des éléments de P qui ne font pas partie de Q. En effet, Q peut être considéré comme la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ Donnons-nous un groupe relatif à P, soit g_1; dans la portion $P_1 = D(P, g_1)$, nous pouvons, comme Q_1 est non dense dans P, trouver une portion P_2, déterminée par un groupe g_2, et ne contenant aucun élément de Q_1; de plus, nous pouvons supposer que l'ordre de g_2 est égal au moins à 2, car si cela n'est pas, nous remplaçons P_2 par une portion de P_2 déterminée par un groupe d'ordre 2; cela étant, comme Q_2 est non dense dans P, nous pouvons de même trouver, dans P_2, une portion P_3 déterminée par un groupe g_3 d'ordre au moins égal à 3, et ne contenant aucun élément de Q_2; en poursuivant l'application de ce procédé, on détermine une série infinie de groupes g_1, $g_2, g_3, \ldots g_n, \ldots$ qui sont tous relatifs à P, dont chacun est contenu dans le précédent, tels que l'ordre de g_n est au moins égal à n, et tels que $D(P, g_{n+1})$ ne contient aucun élément de Q_n. Il existe un élément contenu dans tous les groupes

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_n \geqq \cdots$$

puisque l'ordre de g_n croît indéfiniment avec n; si A est cet élément, A fait partie de P puisque tous ces groupes sont relatifs à P; enfin, d'après la propriété que g_{n+1} ne contient aucun élément de Q_n, A ne fait partie d'aucun Q_n, par conséquent ne fait pas partie de Q, ce qui démontre la proposition.

Ce résultat montre que l'ensemble parfait P n'est pas de première catégorie par rapport à lui-même; on reconnaît en particulier que P n'est pas dénombrable, car un ensemble dénombrable est de première catégorie.[1]

[1] On peut démontrer qu'un ensemble parfait de suites a la puissance du continu.

Il résulte aussi de là que, si Q est de première catégorie dans P, l'ensemble $P-Q$, complémentaire de Q, est de deuxième catégorie.

Dans certaines questions, nous aurons à considérer un ensemble Q_n contenu dans un ensemble parfait P, et variant avec l'indice n; s'il arrive que, quel que soit n, Q_n soit de première catégorie, l'ensemble Q formé par la réunion de tous les Q_n $(n=1, 2, \ldots)$ est aussi de première catégorie. Dans le cas où $n<n'$ entraîne $Q_n \leqq Q_{n'}$, nous dirons que Q est limite de Q_n pour $n=\infty$. De même, si on a un ensemble Q_ϱ variable dépendant d'un paramètre ϱ susceptible de prendre toutes les valeurs positives, et si $\varrho>\varrho'$ entraîne $Q_\varrho \leqq Q_{\varrho'}$, l'ensemble Q de tous les éléments qui appartiennent à Q_ϱ lorsque ϱ est suffisamment petit est appelé ensemble limite de Q_ϱ quand ϱ tend vers 0. Si, quel que soit ϱ, Q_ϱ est de première catégorie, il en est de même de Q.

CHAPITRE III.

Les fonctions définies sur les ensembles de suites.

18. Etant donné un ensemble P de suites, si nous faisons correspondre à chaque élément de cet ensemble un nombre réel, nous dirons que l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur l'ensemble P. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étendre aux fonctions nouvelles ainsi définies la plupart des notions et des résultats obtenus dans les »Leçons, etc.» et la première partie de ce travail (chapitres I, III, IV) pour les fonctions de n variables. Pour concevoir la possibilité de cette extension, il suffit de remarquer que la théorie des fonctions de n variables a pour base fondamentale la notion de point limite d'une suite de points, notion qui est remplacée, dans la théorie actuelle, par celle d'élément-suite limite d'une suite d'éléments-suites.

Considérons un ensemble *fermé* P de suites; soit f une fonction définie sur P, en supposant, pour prendre le cas général, que f puisse recevoir toutes les valeurs réelles et les valeurs $+\infty$, $-\infty$, en d'autres termes, toutes les valeurs de l'ensemble désigné par R' (Première partie, § 1). Nous dirons que f *est continue pour l'élément A de P si, $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ étant une suite quelconque d'éléments de P ayant pour limite A, la suite de nombres: $f(A_1), f(A_2), \ldots f(A_\nu), \ldots$ a pour limite $f(A)$.* Si f est continue en chacun des éléments de P, nous dirons que f est continue sur P; si Q est un ensemble fermé contenu dans P, il est évident que f est continue sur Q. Une fonction f est limite d'une suite de fonctions: $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ si, quel que soit l'élément A de l'ensemble fermé P où ces fonctions sont définies, on a: $\lim f_n(A) = f(A)$.

19. L'ensemble des fonctions continues sur P constitue la classe o de fonctions. Une fonction f définie sur P est dite de classe α, α étant un nombre ordinal des classes I ou II, si elle n'appartient pas à une classe d'indice $< \alpha$, et si elle est limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ dont chacune appartient à une classe $< \alpha$. En appelant E l'ensemble des fonctions de toutes les classes marquées par les nombres α des classes I ou II, le raisonnement du § 1 (Première partie) s'applique au cas actuel, et montre que E contient toutes ses fonctions limites.

D'ailleurs, on conçoit qu'un grand nombre de raisonnements faits pour le cas où l'on part d'un ensemble à n dimensions peuvent être immédiatement transposés à la théorie actuelle. Nous nous contenterons d'énoncer sans démonstration les résultats pour lesquels il est évident que cette transposition ne présente aucune difficulté, et nous détaillerons au contraire les démonstrations qui présentent des différences sensibles avec les cas étudiés précédemment. C'est ainsi qu'on reconnaît tout de suite que les raisonnements des § 2, 3, 4 de la première partie s'appliquent aux fonctions définies sur un ensemble fermé P de suites, et permettent d'énoncer les résultats suivants:

Une fonction f de classe $\leqq \alpha$, bornée, peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ *chacune d'elles étant comprise entre les mêmes limites que* f (ou même entre des limites plus rapprochées que celles de f).

L'étude des fonctions non bornées, pouvant même recevoir des valeurs infinies, peut se ramener, par une transformation convenable, à l'étude des fonctions bornées.

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions de classes $\leqq \alpha$ est une fonction de classe $\leqq \alpha$. Une fonction de classe $\leqq \alpha$ $(\alpha > 0)$ est la somme d'une série, convergente pour chaque élément A de P, et dont les termes sont des fonctions de classes $< \alpha$.

20. Etant donnée une série dont les termes sont des fonctions définies sur l'ensemble fermé P, soit

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$$

nous dirons que cette série est uniformément convergente sur P si elle converge pour chaque élément et si, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit l'entier h, il y a un entier $n > h$ tel que pour tout élément A de P, on a:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots| < \varepsilon.$$

Je dis que *si les u_n sont des fonctions de classes $\leqq \alpha$, la somme f est aussi de classe $\leqq \alpha$;* il suffit, pour le voir, de reprendre les raisonnements du § 3 de la première partie. On montre d'abord que, par un groupement de termes consécutifs convenablement effectué, la série (1) peut être remplacée par une autre dont les termes, à partir du second, sont moindres en valeur absolue que ceux d'une série convergente à termes positifs numériques choisie à l'avance; les termes de cette nouvelle série sont de classes $\leqq \alpha$, comme ceux de la première. Tout est ramené à montrer qu'étant donnée une série:

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont les termes sont des fonctions de classes $\leqq \alpha$, et une série à termes positifs numériques convergente

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

telle qu'on ait, pour tout élément A de P et quel que soit n:

$$|u_n| \leqq a_n,$$

la somme f de (1) est de classe $\leqq \alpha$.

Or, en supposant $\alpha > 0$, u_n peut être considéré comme la limite d'une suite

$$u_{n,1}, \; u_{n,2}, \ldots u_{n,p}, \ldots$$

les $u_{n,p}$ étant de classes $< \alpha$ et tels que:

$$|u_{n,p}| \leqq a_n.$$

On vérifie alors que la fonction

$$f_i = u_{1,i} + u_{2,i} + \cdots + u_{i,i}$$

qui est de classe $< \alpha$, a pour limite f.

Le raisonnement suppose $\alpha > 0$. Le théorème a lieu aussi pour $\alpha = 0$ et s'énonce ainsi: *Une série uniformément convergente de fonctions continues sur un ensemble fermé P représente une fonction continue sur P.* En effet, supposons que les termes u_n de (1) soient continus sur P. Soit A un élément de P, soit A_1, $A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ une suite d'éléments de P ayant pour limite A. Donnons-nous un nombre positif ε; nous pouvons, par hypothèse, trouver n tel que, si on pose $f_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, on ait, pour tous les éléments de P:

$$|f_n - f| < \varepsilon.$$

On a donc:

$$|f(A) - f_n(A)| < \varepsilon, \quad |f(A_\nu) - f_n(A_\nu)| < \varepsilon.$$

La fonction f_n est continue en A; donc, quand ν dépasse une certaine valeur, on a:

$$|f_n(A_\nu) - f_n(A)| < \varepsilon,$$

d'où, en combinant les trois dernières inégalités:

$$|f(A_\nu) - f(A)| < 3\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, cela montre que $f(A_\nu)$ tend vers $f(A)$. Donc f est continue sur P.

Du théorème général qui vient d'être démontré sur les séries uniformément convergentes résulte l'importante conséquence que voici:

Pour démontrer qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq \alpha$, il suffit de démontrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, f diffère de moins de ε d'une fonction de classe $\leqq \alpha$.

21. Pour étudier de plus près les fonctions des différentes classes définies sur les ensembles de suites, nous commencerons par leur étendre les notions de maximum, minimum, oscillation, étudiées au commencement du chapitre III de la première partie.

Soit P un ensemble *quelconque* de suites, sur lequel est définie une fonction f. Si g est un groupe relatif à P, l'ensemble des valeurs de f aux différents éléments de P contenus dans g a une borne supérieure, une borne inférieure, une oscillation, que nous désignons respectivement par:

$$M(f,\ P,\ g),\quad m(f,\ P,\ g),\quad \omega(f,\ P,\ g)$$

et l'on a:

$$\omega(f,\ P,\ g) = M(f,\ P,\ g) - m(f,\ P,\ g) \geqq 0.$$

Si g' est un groupe relatif à P et contenu dans g, on a évidemment:

$$M(f,\ P,\ g) \geqq M(f,\ P,\ g') \qquad m(f,\ P,\ g) \leqq m(f,\ P,\ g').$$

Soit maintenant A un élément de P^0; les groupes d'ordre $1, 2, \ldots$ qui contiennent A, sont tous relatifs à P; si on désigne par $g_1, g_2, \ldots g_n, \ldots$ soit ces groupes, soit plus généralement, une suite quelconque de groupes contenant A et d'ordres croissants, on a:

$$(1) \qquad M(f,\ P,\ g_1) \geqq M(f,\ P,\ g_2) \geqq \cdots \geqq M(f,\ P,\ g_n) \geqq \cdots$$

La suite de nombres (1) a une limite déterminée, qui ne dépend que de A; nous la désignerons par $M(f, P, A)$ et nous dirons que c'est le *maximum de f sur P en A*.

Si A est un élément appartenant à un groupe g, on a:

$$M(f, P, A) \leqq M(f, P, g).$$

On définit de même le minimum de f en A, soit $m(f, P, A)$, et l'oscillation de f en A:

$$\omega(f, P, A) = M(f, P, A) - m(f, P, A).$$

Nours dirons que f est continue ou discontinue en A par rapport à P suivant que le nombre $\omega(f, P, A)$ est nul ou positif; cette définition est évidemment en accord avec la définition de la continuité donnée pour les ensembles fermés au § 18.

22. Si l'on a, en un élément A de P:

$$M(f, P, A) = f(A), \tag{1}$$

la fonction f a en A la propriété suivante: quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a un groupe contenant A tel que, pour tout élément A' de P contenu dans ce groupe, on a:

$$f(A') < f(A) + \varepsilon;$$

et réciproquement, cette propriété, si elle existe, entraîne la condition (1). Nous dirons que dans ce cas, *f est semi-continue supérieurement en A;* si une fonction f définie sur un ensemble *fermé* P possède en chaque élément de P la semi-continuité supérieure, nous dirons que f est semi-continue supérieurement sur P.

La semi-continuité inférieure en A se définit de même par la condition:

$$m(f, P, A) = f(A).$$

Une fonction qui possède en A les deux semi-continuités est continue en cet élément.

La somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement en A relativement à P possède aussi la même propriété.

Si f est semi-continue supérieurement en A, $-f$ est semi-continue inférieurement.

Si f définie sur l'ensemble fermé P est semi-continue supérieurement sur P, l'ensemble Q des éléments de P où $f \geqq \alpha$, α étant un nombre quelconque, est fermé. Car, si A est un élément de P limite pour la suite d'éléments de P:

$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ et si on a, quel que soit n: $f(A_n) \geqq \alpha$, on a en A: $M(f, P, A) \geqq \alpha$, et par suite: $f(A) = M(f, P, A) \geqq \alpha$.

Nous pouvons établir tout de suite qu'une fonction f semi-continue supérieurement sur un ensemble fermé P, est de classe $\leqq 1$. Il faut pour cela définir une suite de fonctions continues sur P: $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ telle qu'on ait, en tout élément A de P: $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$. Nous prendrons pour f_n la fonction qui, pour chaque groupe g d'ordre n relatif à P, a en tous les éléments de P contenus dans ce groupe, la valeur $M(f, P, g)$; une telle fonction est bien continue en chaque élément A de P, car si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ est une suite tendant vers A, A_ν est, pour ν assez grand, contenu dans le même groupe d'ordre n que A, et l'on a alors: $f_n(A_\nu) = f_n(A)$. D'autre part, on a bien, quel que soit A: $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$, car en désignant par g_n le groupe d'ordre n qui contient A, et tenant compte de ce que: $f(A) = M(f, P, A)$, cette égalité se réduit à la suivante:

$$\lim_{n=\infty} M(f, P, g_n) = M(f, P, A),$$

laquelle est la définition même de $M(f, P, A)$.

En outre, d'après la définition de f_n, on a en tout élément A: $f_n(A) \geqq f_{n+1}(A)$, de sorte que la suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ ne va jamais en croissant. Réciproquement, soit une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ telle qu'en tout élément A on ait:

$$f_n(A) \geqq f_{n+1}(A).$$

Cette suite a nécessairement une limite f; je dis que f est semi-continue supérieurement. En effet, soit A un élément, soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver p entier tel que:

$$f_p(A) < f(A) + \varepsilon.$$

Comme f_p est continue, on peut trouver un groupe g contenant A tel que, pour tout élément A' de g contenu dans g, on ait:

$$f_p(A') < f_p(A) + \varepsilon.$$

On a alors:

$$f(A') \leqq f_p(A') < f_p(A) + \varepsilon < f(A) + 2\varepsilon.$$

La condition $f(A') < f(A) + 2\varepsilon$ indique que f est semi-continue supérieurement.[1]

[1] Le résultat peut s'énoncer ainsi: La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit représentable par une série à termes continus et tous négatifs à partir d'un certain rang est qu'elle soit semi-continue supérieurement. Cf. R. Baire, *Sur les séries à termes continus et tous de même signe*, Bulletin de la Société Math. 1904.

Le raisonnement s'applique en particulier à des fonctions que nous rencontrerons à plusieurs reprises, et qui seront définies comme il suit. A chaque groupe g relatif à un ensemble fermé P est attaché un nombre $\varphi(g)$, tel que si g' est contenu dans g, on a: $\varphi(g') \leqq \varphi(g)$; la valeur de la fonction f en chaque élément A de P est la limite pour $n=\infty$ de $\varphi(g_n)$, g_n étant le groupe d'ordre n qui contient A. On reconnaît qu'une telle fonction est limite de la fonction continue f_n égale en tous les éléments de P d'un groupe g d'ordre n à $\varphi(g)$, la limite étant toujours atteinte par valeurs non croissantes. Donc f est semi-continue supérieurement.

23. Reprenons le cas d'une fonction f quelconque définie sur un ensemble *quelconque* P; nous avons attaché (§ 21), à chaque groupe g relatif à P, le nombre $M(f, P, g)$, borne supérieure des valeurs de f aux différents éléments de P contenus dans g, et nous avons défini, en chaque élément A de P^0, le nombre $M(f, P, A)$, limite de $M(f, P, g)$, quand g est un groupe contenant A dont l'ordre croît indéfiniment. Si nous considérons la fonction φ définie en chaque élément A de P^0 par la condition d'être égale à $M(f, P, A)$, φ rentre dans la catégorie de fonctions définie au § précédent: donc φ *est semi-continue supérieurement.*

De même, $\psi = m(f, P, A)$ *est semi-continue inférieurement.*

La fonction $\omega = \varphi - \psi$, somme de φ et $-\psi$, *est semi-continue supérieurement.* Il en résulte que l'ensemble des éléments de P^0 où l'on a: $\omega(f) \geqq \sigma$, σ étant positif, est *fermé.*

24. Considérons maintenant une fonction f définie en tous les éléments d'un ensemble *parfait* P. En chaque élément de P existe une valeur pour l'oscillation $\omega(f)$, qui définit le degré de discontinuité de f en cet élément. Nous distinguerons les fonctions f en deux sortes.

1° Quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble des éléments où $\omega \geqq \sigma$ est *non dense* dans P. Alors l'ensemble des éléments de discontinuité est de première catégorie: dans toute portion de P existent des points de continuité pour f; $\omega(f)$ a son minimum nul en tout élément, et dans toute portion. On dit que f est *ponctuellement discontinue sur* P.

2° Si non, il existe une portion P_1 de P et un nombre positif σ tel qu'en tout élément de P_1, on a $\omega(f) \geqq \sigma$. Nous dirons que f *est totalement discontinue.*

D'après ces définitions, pour que f soit ponctuellement discontinue, il faut et il suffit que $\omega(f)$ ait son minimum nul en tout élément. Une fonction continue rentre dans la catégorie des fonctions ponctuellement discontinues.

25. Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit de classe $\leqq 1$ est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P.*

Nous nous contenterons, pour la démonstration de ce théorème, de considérer des fonctions *bornées*, l'extension du résultat au cas général se faisant exactement comme pour le cas des fonctions de n variables (Première partie, § 13, et Leçons sur les fonctions discontinues).

Pour montrer que la condition est nécessaire, je vais démontrer qu'il y a contradiction à admettre l'existence d'un ensemble parfait H sur lequel on aurait une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ tendant vers une fonction f($f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots f$ étant *bornées*), le minimum de l'oscillation de f aux différents éléments de H étant *positif*.

Soit en effet 2λ un nombre positif inférieur à ce minimum: dans toute portion H' de H, on a:

$$\omega(f, H') > 2\lambda. \tag{1}$$

Soit μ un nombre positif inférieur à λ; posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon. \tag{2}$$

Soit enfin p un entier positif.

Partons d'une portion H' quelconque de H, déterminée par un groupe g'; soit A_0 un élément de H'. Comme $f_n(A_0)$ tend, pour $n = \infty$, vers $f(A_0)$, on peut prendre $\alpha > p$ tel que:

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

La fonction f_α est continue sur H; on peut donc trouver un groupe g_1 contenant A_0, contenu dans g', tel que si A est un élément quelconque de la portion H_1 de H déterminée par g_1, on ait:

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

D'après (1), l'ensemble des valeurs de f aux différents éléments de H_1 a une oscillation supérieure à 2λ; il y a donc, dans cette portion (Leçons sur les fonctions discontinues, p. 80), un élément A_1 tel que:

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda = \mu + 4\varepsilon. \tag{5}$$

On peut ensuite trouver $\beta > p$ tel que:

$$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon, \tag{6}$$

et enfin, à cause de la continuité de f_β, on peut trouver un groupe g_2 contenant

A_1, contenu dans g_1, tel que si A est un élément quelconque de la portion H_2 déterminée par g_2, on ait:

$$(7) \qquad |f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon.$$

Comme H_2 fait partie de H_1, pour tout élément A de H_2 on a, en combinant (3), (4), (5), (6), (7):

$$(8) \qquad |f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \mu$$

et par suite:

$$(9) \qquad \omega[f_{p+1}(A),\ f_{p+2}(A), \ldots] > \mu.$$

En résumé, p étant donné, toute portion H' de H contient une portion dont tous les éléments satisfont à (9): c'est dire que l'ensemble K_p des éléments de H qui ne satisfont pas à (9) est *non dense* dans H; l'ensemble K, limite de K_p quand on donne à p successivement toutes les valeurs entières 1, 2, ..., est *de première catégorie;* il y a donc des éléments qui ne font pas partie de K; un tel élément, soit A, satisfait à (9), quel que soit p, ce qui contredit l'hypothèse que $f_n(A)$ a une limite finie.

26. Il reste à montrer que la condition du théorème I est suffisante. D'après la conclusion du § 20, il suffit pour cela de faire voir que si f est une fonction définie sur l'ensemble fermé P, ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, étant donné $\sigma > 0$, il est possible de définir sur P une fonction F différant de f de moins de σ, et qui soit de classe $\leqq 1$. Nous ramènerons d'autre part la construction d'une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ tendant vers F au problème suivant: Attacher à chaque groupe g relatif à P un nombre $\varphi(g)$, de telle manière que si A est un élément de P, et si g_n est le groupe d'ordre n qui contient A, on ait: $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(g_n) = F(A)$. Si en effet on suppose ce problème résolu, et si on appelle f_n la fonction qui, pour tous les éléments de P contenus dans un même groupe d'ordre n, soit g, a la valeur $\varphi(g)$, on reconnaît que f_n est continue et a pour limite F. Ainsi tout revient à définir la fonction F et les nombres $\varphi(g)$ de manière à vérifier les conditions précédentes.

Définissons des ensembles P_α correspondant aux différents nombres ordinaux $\leqq \Omega$ comme il suit:

1° $P_0 = P$.

2° Si α est de première espèce, P_α est l'ensemble des éléments A de l'ensemble parfait $P_{\alpha-1}^\Omega$ pour lesquels:

$$\omega(f,\ P_{\alpha-1}^\Omega,\ A) \geqq \sigma.$$

D'après l'hypothèse que f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, si $P^{\Omega}_{\alpha-1}$ existe, P_α est *non dense* dans $P^{\Omega}_{\alpha-1}$, donc $P_\alpha < P_{\alpha-1}$.

3° Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble des éléments communs aux ensembles dont l'indice est inférieur à α.

Les ensembles P_α sont ainsi parfaitement définis; ils satisfont évidemment aux conditions du § 14, y compris les conditions complémentaires 1° et 2°. On a donc, en désignant par P_Ω l'ensemble commun à tous les P_α:

$$P = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega \qquad \gamma < \Omega$$

et P_Ω est parfait ou nul.

Mais je dis que P_Ω ne peut pas exister, car pour un certain nombre $\beta < \Omega$ on a:

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \cdots = P_\Omega.$$

Or, nous avons vu plus haut que $P_\beta > 0$ entraine $P_{\beta+1} < P_\beta$. Ainsi $P_\Omega = 0$ et l'on a:

$$P = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) \qquad \gamma = 0, 1, 2, \ldots$$

On a d'autre part, pour une valeur déterminée quelconque de γ:

$$\begin{aligned} P_\gamma - P_{\gamma+1} &= (P_\gamma - P^{\Omega}_\gamma) + (P^{\Omega}_\gamma - P_{\gamma+1}) \\ &= \Sigma(P^{\nu}_\gamma - P^{\nu+1}_\gamma) + P^{\Omega}_\gamma - P_{\gamma+1} \qquad \nu = 0, 1, \cdots < \Omega. \end{aligned}$$

En résumé, tout élément A de P fait partie, ou bien d'un ensemble $P^{\nu}_\gamma - P^{\nu+1}_\gamma$, ou bien d'un ensemble $P^{\Omega}_\gamma - P_{\gamma+1}$, et cela d'une manière bien déterminée.

En un élément A qui fait partie d'un ensemble $P^{\nu}_\gamma - P^{\nu+1}_\gamma$, posons: $F(A) = f(A)$.

En un élément A qui fait partie d'un ensemble $P^{\Omega}_\gamma - P_{\gamma+1}$, posons: $F(A) = m(f, P^{\Omega}_\gamma, A)$. Comme on a, en cet élément: $\omega(f, P^{\Omega}_\gamma, A) < \sigma$, il en résulte:

$$|f(A) - F(A)| < \sigma.$$

Cette inégalité a donc lieu pour tous les éléments de P.

Soit maintenant g un groupe relatif à P; nous allons définir $\varphi(g)$. Pour cela, désignons par $Q_{\gamma,\nu}(\gamma < \Omega,\ \nu \leqq \Omega)$ l'ensemble des éléments de P^{ν}_γ contenus dans g.[1] Les ensembles Q sont des ensembles fermés ordonnés comme les ensembles P correspondants; convenons de dire que l'ensemble $Q_{\gamma,\nu}$ a pour *suivant immédiat*

[1] On reconnait facilement que $Q_{\gamma,\nu} = Q^{\nu}_\gamma$, ce qui n'a pas lieu nécessairement dans le cas des ensembles de points à n dimensions.

l'ensemble $Q_{\gamma,\nu+1}$ si $\nu < \Omega$, l'ensemble $Q_{\gamma+1,0}$ si $\nu = \Omega$; il est évident que si un ensemble est nul, son suivant l'est aussi.

Parmi les ensembles $Q_{\gamma,\nu}$ qui ne sont pas nuls, il n'y en a pas nécessairement un dont le suivant soit nul; il y a d'ailleurs au plus un ensemble remplissant cette condition. Si cela a lieu, soit $Q_{h,k}$ cet ensemble, qui contient effectivement des éléments, tandis que son suivant n'en contient pas. Nous poserons:

$$\varphi(g) = m(f,\ Q_{h,k}).$$

Si cela n'a pas lieu, nous prendrons pour $\varphi(g)$ un nombre quelconque, par exemple une valeur constante choisie une fois pour toutes à l'avance.

Démontrons que la fonction F et les nombres $\varphi(g)$ satisfont aux conditions requises. Pour cela, soit A un élément de P; distinguons deux cas:

1° A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$; A est isolé dans P_γ^ν; nous pouvons déterminer un groupe g' contenant A et ne contenant aucun autre élément de P_γ^ν; si g_n est le groupe d'ordre n contenant A, g_n est, pour n assez grand, contenu dans g', g_n contient alors un seul élément de P_γ^ν, à savoir A; de sorte que, pour g_n, $Q_{\gamma,\nu}$ existe et se réduit à A, l'ensemble suivant $Q_{\gamma,\nu+1}$ est nul. On a alors:

$$\varphi(g_n) = m(f,\ Q_{\gamma,\nu}) = f(A) = F(A).$$

La condition cherchée est donc obtenue.

2° A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$. On a posé:

$$F(A) = m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A).$$

La fonction $m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A)$, considérée sur l'ensemble parfait P_γ^Ω, est semi-continue inférieurement; si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver un groupe g contenant A tel qu'en tout élément A' de P_γ^Ω contenu dans g, on ait:

$$m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A') > m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A) - \varepsilon.$$

On peut, d'autre part, remplacer, s'il y a lieu, g par un groupe g' contenant A, contenu dans g et ne contenant aucun élément de $P_{\gamma+1}$, puisque A ne fait pas partie de l'ensemble *fermé* $P_{\gamma+1}$.

Cela étant, si g_n contenant A est contenu dans g', l'ensemble $Q_{\gamma,\Omega}$ relatif à g_n existe et contient A, tandis que l'ensemble suivant $Q_{\gamma+1,0}$ est nul. On a donc, pour n assez grand,

$$\varphi(g_n) = m(f,\ Q_{\gamma,\Omega}),$$

et ce nombre est compris entre les nombres $m(f, P^{\Omega}_{\gamma}, A)$ et $m(f, P^{\Omega}_{\gamma}, A) - \varepsilon$, c'est-à-dire entre $F(A)$ et $F(A) - \varepsilon$. Donc la condition requise est encore réalisée.

Le théorème I est ainsi démontré.

27. Il résulte de ce théorème que si une fonction définie sur un ensemble fermé n'est pas de classe $\leqq 1$, il existe un ensemble parfait H et un nombre positif λ tel qu'en tout point de H, l'oscillation de f par rapport à H est $\geqq \lambda$.

Par suite, *pour montrer qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$, il suffit de montrer que si H est un ensemble parfait quelconque contenu dans P, il y a une portion H_1 de H sur laquelle f est de classe $\leqq 1$.*

Soient les deux fonctions: f_1 définie sur un ensemble fermé P_1 et de classe $\leqq 1$, f_2 définie sur un ensemble fermé P_2 et de classe $\leqq 1$; la fonction f définie sur l'ensemble fermé $M(P_1, P_2)$ par la condition d'être égale à f_1 pour tout élément de P_1, et à f_2 pour tout élément de P_2 n'appartenant pas à P_1, sera dite obtenue par la superposition de f_1 à f_2. Je dis que f est de classe $\leqq 1$; en effet, soit H un ensemble parfait quelconque contenu dans $M(P_1, P_2)$; posons: $H_1 = D(H, P_1)$; si H_1 coïncide avec H, f est identique sur H à f_1 et est de classe $\leqq 1$; sinon, il y a une portion K de H qui ne contient aucun élément de H_1, par suite de P_1; sur cette portion K, f est identique à f_2, donc est de classe $\leqq 1$.

Le résultat s'étend immédiatement au cas de p fonctions superposées.

28. Comme dans le cas des fonctions de n variables réelles, il y a lieu de considérer une fonction définie sur un ensemble *quelconque* P, et de rechercher à quelles conditions il est possible d'achever la définition de f aux éléments de $P^0 - P$, de manière à avoir une fonction qui soit de classe 0 ou 1 sur l'ensemble fermé P^0. L'extension des méthodes employées au § 18 de la première partie ne présente aucune difficulté. Etant donnée une fonction f définie partiellement sur un ensemble parfait H, c'est-à-dire définie seulement aux éléments d'un ensemble K contenu dans H, il y a, en chaque élément A de K^0, une valeur déterminée pour l'oscillation $\omega(f, H, A)$ de f relativement à H. Si l'ensemble des éléments pour lesquels cette oscillation est $\geqq \sigma$, σ étant un nombre positif quelconque, est *non dense* dans H, nous dirons que f est *ponctuellement discontinue sur H;* dans le cas contraire, f sera totalement discontinue. Cela étant, on démontrera, comme dans la première partie, que: *pour que f définie sur P quelconque soit de classe $\leqq 1$, il faut et il suffit que f soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P^0.*

29. Nous allons maintenant étendre aux ensembles de suites la théorie qui fait l'objet du chapitre IV de la première partie.

Soit f une fonction définie sur un ensemble parfait P. Les nombres λ tels que l'ensemble des éléments de P où $f > \lambda$ est de première catégorie dans P ont une borne inférieure, soit $M'(f, P)$; l'ensemble des éléments où $f > M'(f, P) - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie dans P, tandis que l'ensemble des éléments où $f > M'(f, P) + \varepsilon$ est de première catégorie, ainsi par suite que l'ensemble des éléments où $f > M'(f, P)$, qui est limite du précédent quand ε tend vers 0. Il y a de même un nombre déterminé $m'(f, P)$ tel que l'ensemble des éléments où $f < m'(f, P) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie, tandis que l'ensemble des éléments où $f < m'(f, P)$ est de première catégorie.

On a évidemment:

$$M'(f, P) \leqq M(f, P), \quad m'(f, P) \geqq m(f, P).$$

Je dis que $M'(f, P) \geqq m'(f, P)$. En effet, l'ensemble des éléments où $f > M'$ étant de première catégorie, l'ensemble des éléments où $f \leqq M'$, qui est son complémentaire, est de deuxième catégorie, d'où résulte que M' est au moins égal à m'.

Nous poserons:

$$\omega'(f, P) = M'(f, P) - m'(f, P) \geqq 0.$$

Il est évident que, si Q est un ensemble de première catégorie dans P, on peut faire complètement abstraction des valeurs de f aux éléments de Q dans la définition des nombres $M'(f, P)$, $m'(f, P)$, $\omega'(f, P)$.

Si P_1 est une portion de P, comme tout ensemble de première catégorie dans P est tel que la partie de cet ensemble contenue dans P_1 est de première catégorie dans P_1, on en déduit que:

$$M'(f, P_1) \leqq M'(f, P), \quad m'(f, P_1) \geqq m'(f, P), \quad \omega'(f, P_1) \leqq \omega'(f, P).$$

30. Dans les mêmes conditions, soit A un élément de P; en désignant par P_n la portion de P déterminée par le groupe g_n d'ordre n contenant A, on voit que, quand n augmente, $M'(f, P_n)$ que nous écrirons aussi $M'(f, P, g_n)$ ne peut croître; donc ce nombre a, pour $n = \infty$, une limite, que je désigne par $M'(f, P, A)$. Soit $\varphi'(A)$ la fonction égale, en tout élément de A, à $M'(f, P, A)$; la fonction φ' est obtenue dans les conditions du § 22: elle est donc semi-continue supérieurement.

Je dis que *l'ensemble H des éléments où $f > \varphi'$ est de première catégorie.* En effet, soit g un groupe relatif à P; l'ensemble des éléments de P contenus dans g où $f > M'(f, P, g)$ est de première catégorie dans P; soit $K(g)$ cet ensemble. En considérant tous les groupes g relatifs à P (en nombre infini *dénombrable*), et désignant par K la réunion des ensembles $K(g)$, K est de première catégorie.

Il est évident que tout élément de K fait partie de H; je dis que réciproquement tout élément A de H fait partie de K; en effet, on a, en A:

$$f(A) > \varphi'(A) = M'(f, P, A);$$

on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que:

$$f(A) > \varphi'(A) + \varepsilon;$$

on peut d'autre part trouver un groupe g contenant A tel qu'on ait:

$$M'(f, P, g) < \varphi'(A) + \varepsilon;$$

on a donc:

$$f(A) > M'(f, P, g);$$

donc A fait partie de $K(g)$ et par suite de K. Ainsi l'ensemble H des éléments où $f > \varphi'$, est identique à K, et par suite de première catégorie.

On définit d'une manière analogue en chaque élément A la fonction semi-continue inférieurement $\psi'(A) = m'(f, P, A)$; c'est la limite de $m'(f, P, g_n)$ pour $n = \infty$, g_n étant le groupe d'ordre n contenant A. L'ensemble des éléments où $f < \psi'$ est de première catégorie.

La fonction $\omega'(f, P, A) = \varphi' - \psi' \geqq 0$ est semi-continue supérieurement.

Si une fonction f définie sur P parfait satisfait, en tout élément A de P, à la condition:

$$m(\omega'(f)) = 0,$$

quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble fermé des éléments où $\omega'(f) \geqq \sigma$, est *non dense* dans P, donc l'ensemble des éléments où $\omega' = \varphi' - \psi' > 0$ est de première catégorie. En désignant par Π la réunion des trois ensembles d'éléments, tous de première catégorie, pour lesquels on a l'une des inégalités:

$$f > \varphi', \qquad f < \psi', \qquad \varphi' > \psi',$$

on voit qu'on a, en tout élément A de $P - \Pi$:

$$f \leqq \varphi', \qquad f \geqq \psi', \qquad \varphi' = \psi',$$

d'où:

$$f = \varphi' = \psi'.$$

D'après les propriétés de semi-continuité appartenant à φ' et ψ', on voit que f a en A la propriété suivante: Quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a un groupe g contenant A tel que si A' est un élément quelconque de $P - \Pi$ contenu dans g, on a:

$$f(A) - \varepsilon < f(A') < f(A) + \varepsilon.$$

On exprimera cette propriété en disant que *f est, en A, continue par rapport à $P - \Pi$.*

On voit aussi qu'*il existe une fonction de classe $\leqq 1$ telle que f n'en diffère qu'aux éléments d'un ensemble de première catégorie.*

31. Je dis que *la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite,* c'est-à-dire que si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ définies sur P parfait a une limite f et si on a, quel que soit i: $m(\omega'(f_i)) = 0$ en tout élément de P, on a aussi $m(\omega'(f)) = 0$ en tout élément de P. Je vais montrer pour cela qu'il y a contradiction à admettre que la fonction $\omega'(f)$ relative à P ait son minimum *positif.* (Je suppose la fonction f *bornée.*)

Soit 2λ un nombre positif inférieur à ce minimum; dans toute portion P' de P, on a:

$$M'(f, P') - m'(f, P') > 2\lambda. \tag{1}$$

Soit μ un nombre positif inférieur à λ; posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon. \tag{2}$$

Désignons par Π_i l'ensemble des éléments de P où l'on n'a pas:

$$f_i = \varphi'(f_i) = \psi'(f_i).$$

Soit $\Pi = M(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n, \ldots)$. L'ensemble Π est de première catégorie dans P, et en tout élément A de $P - \Pi$, quel que soit i, f_i est continue par rapport à $P - \Pi$.

Soit p un entier. Partons d'une portion P' quelconque de P, déterminée par un groupe g'; soit A_0 un élément de $P - \Pi$ contenu dans P'. Comme $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A_0) = f(A_0)$, il y a $\alpha > p$ tel que:

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

f_α est continue en A_0 par rapport à $P - \Pi$. On peut donc trouver un groupe g_1 contenant A_0, contenu dans g', tel que si A est un élément quelconque de $P - \Pi$ contenu dans g_1, on a:

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

L'ensemble des valeurs de f aux différents éléments de $P - \Pi$ contenus dans g_1 a des bornes supérieure et inférieure entre lesquelles, d'après une remarque du § 29, se trouvent compris les nombres $M'(f, P, g_1)$ et $m'(f, P, g_1)$, dont la différence surpasse 2λ, d'après (1); donc l'oscillation de cet ensemble de valeurs surpasse 2λ. Il y a donc certainement un élément A_1 de $P-\Pi$ contenu dans g_1 tel que:

$$|f(A_1)-f(A_0)|>\lambda=\mu+4\varepsilon. \tag{5}$$

On peut trouver $\beta>p$ tel que:

$$|f_\beta(A_1)-f(A_1)|<\varepsilon, \tag{6}$$

et enfin, à cause de la continuité de f_β en A_1 par rapport à $P-\Pi$, on peut trouver un groupe g_2 contenant A_1, contenu dans g_1 et tel que si A est un élément quelconque de $P-\Pi$ contenu dans g_2, on a:

$$|f_\beta(A)-f_\beta(A_1)|<\varepsilon. \tag{7}$$

A satisfait aussi alors à (4), et les inégalités (3), (4), (5), (6), (7) donnent, pour tout élément A de $P-\Pi$ contenu dans g_2:

$$\omega[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots]>\mu. \tag{8}$$

Ainsi, p étant donné, toute portion P' de P contient une portion dont tous les éléments, s'ils n'appartiennent pas à Π, satisfont à (8), c'est-à-dire que l'ensemble K_p des éléments ne satisfaisant pas à (8) ne contient, outre des éléments de Π, qu'un ensemble *non dense;* donc *K_p est de première catégorie, et il en est de même de $K=M(K_1, K_2, \ldots)$.* Il y a des éléments non contenus dans K; un tel élément, soit A, satisfait à (8), quel que soit p, ce qui contredit le fait que $f_n(A)$ a une limite finie.

Il est ainsi démontré que *la condition $m(\omega'(f))=0$ se conserve à la limite. Cette propriété,* évidemment vérifiée par les fonctions de classe 0, *appartient donc à toutes les fonctions de l'ensemble E.*

CHAPITRE IV.

Relations entre les ensembles de points et les ensembles de suites.

32. Les deux derniers chapitres ont mis en évidence l'analogie profonde qui existe entre les deux notions d'ensemble de points dans l'espace à n dimensions et d'ensemble de suites d'entiers; cette analogie résulte entièrement, comme nous l'avons indiqué au début, de ce que, dans l'une et l'autre théorie, les questions traitées sont des conséquences plus ou moins lointaines de la seule notion fondamentale de limite. Rappelons à ce sujet que, en restant dans le cas des ensembles à n dimensions, une première généralisation avait consisté à étendre aux ensembles parfaits quelconques les résultats établis d'abord dans le cas des ensembles continus.[1]

Il est utile maintenant de signaler quelques différences entre les trois notions d'ensemble continu, d'ensemble parfait non continu, et d'ensemble de suites d'entiers.

33. Prenons, comme type d'ensemble continu, le segment linéaire $(0, 1)$; *il est impossible de partager cet ensemble en deux ensembles fermés;* car, si P et Q sont deux ensembles fermés sans point commun, on démontre[2] que la distance d'un point de P à un point de Q ne descend pas au dessous d'un certain nombre positif α; si A appartient à P, B à Q, il est impossible de trouver entre A et B des points intermédiaires $C_1, C_2, \ldots C_h$, appartenant tous à P ou Q et tels que, dans l'ensemble $(A, C_1, C_2, \ldots C_h, B)$, la distance de deux points consécutifs soit inférieure à α; tandis que si A et B appartiennent au segment $(0, 1)$, il est possible de trouver un nombre fini de points appartenant au segment et remplissant cette condition: donc il ne peut y avoir identité entre le segment et l'ensemble $P + Q$.[3]

Au contraire, un ensemble parfait linéaire non dense dans le continu peut être partagé en deux ou en un nombre fini quelconque d'ensembles parfaits; cela résulte, par exemple, de l'étude faite aux § 1 et 2.

Ce caractère appartient aussi aux ensembles de suites d'entiers, d'après les définitions du Chapitre II. Car, si P est un ensemble parfait de suites, pour n assez grand, les groupes d'ordre n relatifs à P sont en nombre au moins égal à 2; soient $g, g', \ldots$ ces groupes; les ensembles $D(P, g)$, $D(P, g'), \ldots$ sont parfaits, n'ont deux à deux aucun élément commun, et leur réunion constitue l'ensemble P.

34. On voit en outre que, si $g, g', \ldots$ sont en nombre infini (nécessairement dénombrable), P se trouve décomposé en une *infinité* d'ensembles parfaits, soit $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$

De plus, la réunion d'un ensemble quelconque d'ensembles pris parmi $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$ constitue un ensemble parfait (et par suite fermé).

Enfin, ce procédé de décomposition d'un ensemble fermé de suites en une infinité d'ensembles partiels tous fermés peut se poursuivre indéfiniment, du moins pour certains ensembles. C'est ainsi, par exemple, que l'ensemble fondamental

---

[1] cf. Leçons sur les fonctions discontinues, chapitre IV.

[2] cf. par ex, Jordan, Cours d'Analyse.

[3] On sait que les ensembles continus qui sont dans les mêmes conditions que le segment $(0, 1)$ dans cette étude sont dits *d'un seul tenant.*

des suites d'entiers (§ 7), qui est parfait, se décompose en une infinité dénombrable d'ensembles partiels qui sont parfaits, à savoir les groupes du premier ordre (1), (2), ..., chacun d'eux se décompose également à son tour en une infinité d'ensembles parfaits, qui sont les groupes du second ordre, etc.... Tout élément-suite est déterminé par les groupes partiels d'ordre $1, 2, \ldots n, \ldots$ qui le contiennent.

35. Signalons encore ce fait que, dans la division d'un ensemble de suites en ensembles partiels (en nombre fini ou infini) du même ordre, la désignation de ces ensembles partiels par des indices sert uniquement à rappeler que ces ensembles partiels sont pensés comme différents entre eux, et par conséquent l'attribution de ces indices peut être faite d'une manière complètement arbitraire: il n'y a pas lieu de considérer ces ensembles partiels comme rangés dans un ordre déterminé. Cela crée une différence caractéristique entre les ensembles de suites et les continus à 1 ou n dimensions, qui sont, comme on sait, des ensembles simplement ordonnés ou n fois ordonnés.

On peut dire, en résumé, que les ensembles de suites, tels que nous les avons construits, possédent les attributs du continu, en ce qui concerne la notion de limite, et seulement en ce qui concerne cette notion. La notion d'ordre relatif, qui est fondamentale dans les questions relatives aux continus (à $1, 2 \ldots n$ dimensions), et d'où dérivent en particulier les notions de cheminement, de connexion, n'existe pas dans les ensembles de suites.

On est ainsi conduit à considérer les ensembles de suites comme des *ensembles à* 0 *dimension;* nous appellerons *espace à* 0 *dimension* l'ensemble fondamental G_0 de toutes les suites; *toute suite sera un point de cet espace.*

36. Montrons maintenant que cette théorie est utile au point de vue de l'étude des fonctions définies sur un ensemble de points. Pour cela, rappelons quelques résultats du chapitre V de la première partie. Etant donné une fonction f définie sur un ensemble fermé P_0, et satisfaisant, sur tout ensemble parfait, à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, nous avons été conduits à considérer (§ 29) certains ensembles $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ dont chacun se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, et tels que, sur chacun des ensembles dont se compose P_n, f est identique à une certaine fonction de classe $\leqq 1$, sauf aux points qui appartiennent à P_{n+1}; de plus, il peut y avoir des points appartenant à tous les P_n, on désigne leur ensemble par P_ω. Il est assez naturel de dire, dans ces conditions, que la fonction f se réduit à des éléments connus, sauf aux points de P_ω, et l'on est alors amené à chercher des conditions auxquelles satisfont les valeurs de f sur P_ω; la théorie précédente va nous permettre de donner une première réponse à cette question.

Pour fixer les idées, prenons le cas étudié au § 35 (Première partie), où P_ω se compose des points irrationnels du segment (o, 1) pour lesquels le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n. Il existe, comme on l'a vu au § 5 (Deuxième partie), une correspondance biunivoque entre P_ω et l'ensemble fondamental des suites d'entiers $(i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots)$, ensemble que je désigne par G_0; et, d'après les résultats de ce paragraphe, si $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots, A$, sont des éléments de G_0, ayant pour correspondants dans P_ω des points $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots, B$, la condition: $\lim A_n = A$ entraîne: $\lim B_n = B$ (la réciproque n'étant pas vraie).

Cela posé, f étant une fonction définie sur le segment (o, 1), que nous désignons par P_0, considérons la fonction φ définie sur G_0 par la condition d'avoir, en tout élément de G_0, la valeur de f au point correspondant de P_ω. Si f est continue sur P_0, φ est continue sur G_0, car, en conservant les notations précédentes pour les éléments de G_0 et les points correspondants de P_ω, de: $\lim A_n = A$ résulte: $\lim B_n = B$, par suite, en vertu de la continuité de f: $\lim f(B_n) = f(B)$, ce qui s'écrit: $\lim \varphi(A_n) = \varphi(A)$; cette dernière condition exprime, comme A est arbitraire, que φ est continue sur G_0.

D'autre part, si $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ et f sont des fonctions définies sur P_0 et telles que $\lim f_n = f$, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ et φ, définies sur G_0 par la condition de correspondre à $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots, f$ comme f correspond à φ dans la question précédente, sont évidemment telles que $\lim \varphi_n = \varphi$.

On déduit immédiatement de l'ensemble de ces deux propositions que si f est une fonction de classe $\leqq \alpha$, la fonction φ correspondante est de classe $\leqq \alpha$ sur G_0. Cela est vrai pour $\alpha = 0$, d'après la première proposition; en admettant le fait pour tous les nombres inférieurs à un nombre $\alpha > 0$, et supposant f de classe $\leqq \alpha$, f est la limite d'une suite $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$, f_n étant de classe $\alpha_n < \alpha$; les fonctions correspondantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ définies sur G_0 sont de classes au plus égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$, et comme elles tendent vers φ, φ est de classe $\leqq \alpha$.

En particulier, on voit que, f appartenant à l'ensemble E, φ appartient sur G_0, à l'ensemble E, et par conséquent satisfait, sur tout ensemble parfait de suites contenu dans G_0, à la condition fondamentale $m[\omega'(\varphi)] = 0$. Nous avons donc ainsi des conditions auxquelles satisfont les valeurs de f aux points de P_ω.

37. Nous allons maintenant montrer qu'on peut aller plus loin, et ramener complètement l'étude des fonctions des différentes classes α définies sur des ensembles de points à n dimensions ($n \geqq 1$) à l'étude analogue sur des ensembles de suites, ou comme nous dirons, sur des ensembles à o dimension, cela dans l'hypothèse $\alpha \geqq 2$. Nous étudierons d'abord, dans ce but, quelques questions préliminaires.

Dans ce qui suit, nous considérons deux ensembles P et Q, dont chacun peut être, soit un ensemble de points, soit un ensemble de suites; grâce à la convention de langage précédemment faite, nous pouvons nous contenter de dire que chacun d'eux est un ensemble de points dans un espace à n dimensions, n étant un entier positif *ou nul*. Les nombres n et n' relatifs à P et Q peuvent être ou non différents.

38. Supposons qu'il existe entre les points de P et ceux de Q une correspondance biunivoque et réciproque, et telle que, $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ et A étant des points de P, $B_1. B_2, \ldots B_n, \ldots$ et B étant les points de Q qui leur correspondent respectivement, l'une quelconque des deux conditions: $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$, entraîne l'autre. Nous dirons alors que cette correspondance entre P et Q est bicontinue, et constitue une *application* de P sur Q.

Déduisons de cette définition deux conséquences.

P et Q étant applicables l'un sur l'autre, si P_1 est une partie de P, et si Q_1 est l'ensemble des points de Q correspondants à ceux de P_1, la correspondance qui applique P sur Q applique P_1 sur Q_1. En effet, avec les notations précédentes, si les A_n et A appartiennent à P_1, les B_n et B appartiennent à Q_1, et réciproquement; les conditions: $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$ étant équivalentes, il en résulte que la correspondance entre P_1 et Q_1 est une application.

Si P et Q sont applicables, et si P est dense en lui-même, Q est aussi dense en lui-même. En effet, soit B un point quelconque de Q; B a dans P un correspondant A; comme P est dense en lui-même, A est limite d'une suite de points de P distincts de A: $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$; ces points ont dans Q des correspondants $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ distincts de B, et l'on a $\lim B_n = B$; cela exprime, comme B est quelconque dans Q, que Q est dense en lui-même.

39. Nous aurons un premier exemple d'application en interprétant les résultats du § 1; on reconnaît en effet que l'ensemble parfait linéaire non dense qui y est désigné par P est applicable sur l'ensemble des suites: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ pour lesquelles chaque nombre a_i est égal à 1 ou 2. Nous avons donc là une application entre deux ensembles situés, l'un dans G_1, l'autre dans G_0. Ces ensembles sont tous deux parfaits, et par suite fermés; l'exemple suivant fera voir que, de deux ensembles applicables, l'un peut être fermé sans que l'autre le soit.

Soit $n \geqq 1$. Je vais démontrer que l'ensemble H_n des points de G_n dont les n coordonnées sont irrationnelles est applicable sur G_0.

Considérons d'abord le cas de $n = 1$. Rappelons que tout nombre irrationnel x est de la forme:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

a_0 est un entier positif, nul, ou négatif, les nombres $a_1, a_2, \dots$ sont des entiers positifs; établissons tout d'abord une correspondance biunivoque et réciproque entre les valeurs que prend a_0, qui forment un ensemble dénombrable, et les entiers positifs; nous désignerons par a'_0 la variable qui, par ce procédé, correspond à a_0; un nombre irrationnel x détermine alors une suite: $(a'_0, a_1, a_2, \dots)$, dont chaque terme est un entier positif; et réciproquement une telle suite définit un nombre irrationnel x. On a ainsi, entre H_1 et G_0, une correspondance biunivoque et réciproque; cette correspondance est bicontinue, car, pour qu'un nombre irrationnel variable avec l'indice p, soit $x_1, x_2, \dots x_p, \dots$ tende vers un nombre irrationnel fixe x_0, il faut et il suffit que les nombres $a_0, a_1, a_2, \dots a_h$, correspondants à x_p, deviennent, pour p assez grand, égaux aux nombres analogues relatifs à x_0, cela quel que soit h donné à l'avance; or, cette condition est évidemment remplie ou non en même temps que la condition analogue obtenue en substituant à a_0 la variable a'_0; donc il faut et il suffit, pour que x_p tende vers x_0, que la suite $(a'_0, a_1, a_2, \dots)$ correspondante à x_p, tende vers la suite analogue correspondante à x_0; or, aux notations près, il y a identité entre l'ensemble des suites $(a'_0, a_1, a_2, \dots)$ et l'ensemble G_0; donc il y a application de H_1 sur G_0.

Soit maintenant $n > 1$. Désignons par $x, y, \dots z$, les coordonnées courantes dans G_n. Aux n coordonnées d'un point A de H_n, qui sont irrationnelles, correspondent, d'après la loi précédente, des suites d'entiers positifs:

$$\begin{array}{l} (a'_0, a_1, a_2, \dots a_i, \dots \quad) \\ (b'_0, b_1, b_2, \dots b_i, \dots \quad) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (c'_0, c_1, c_2, \dots c_i, \dots \quad) \end{array} \tag{1}$$

Considérons alors la suite:

$$(a'_0, b'_0, \dots c'_0, a_1, b_1, \dots c_1, a_2, b_2, \dots c_2, \dots a_i, b_i, \dots c_i, \dots). \tag{2}$$

Cette suite est un point B de l'espace à o dimension G_0, et il est évident que, quand A varie de toutes les manières possibles dans H_n, B peut coïncider avec tout point de G_0. La correspondance entre A et B est donc une correspondance biunivoque et réciproque entre H_n et G_0. Je dis qu'elle est bicontinue; soient $B_1, B_2, \dots B_p, \dots$ des points de G_0, ayant pour correspondants dans H_n les points $A_1, A_2, \dots A_p, \dots$ La condition nécessaire et suffisante pour que: $\lim B_p = B$

est que, quel que soit h, on puisse, en prenant p assez grand, rendre les développements (2) qui correspondent respectivement à B_p et B identiques en ce qui concerne les h premiers termes; si cela a lieu, la même condition est remplie par l'un quelconque des n développements (1), de sorte que chaque coordonnée $x, y, \ldots z$, de A_p tend vers la coordonnée correspondante de A, donc A_p tend vers A; la réciproque a lieu, de sorte que la correspondance entre H_n et G_0 constitue une application.

40. Soient P et Q deux ensembles applicables. Considérons une fonction f définie, soit sur P, soit en certains points de P formant un ensemble P_1; considérons la fonction φ définie en chaque point B de Q correspondant à un point A de P par la condition: $\varphi(B) = f(A)$: nous dirons que φ est la transformée de f dans l'application de P sur Q. Nous nous proposons de rechercher si, de certaines propriétés simples de l'une de ces fonctions, il est possible de déduire des résultats concernant l'autre.

En premier lieu, soit A un point de P au voisinage duquel f est définie (c'est-à-dire que A fait partie de P_1^0); je dis que φ est définie au voisinage du point B de Q correspondant à A, et que le maximum, le minimum de φ au point B sont respectivement égaux aux nombres analogues relatifs à f au point A. Soit en effet λ un nombre inférieur au maximum de f en A; d'après la définition même de ce maximum, il existe une suite de points de P_1: $A_1, A_2, \ldots A_h, \ldots$, tendant vers A, et tels que, quel que soit h, on a: $f(A_h) > \lambda$ (ces points étant distincts ou non de A); les points de Q: $B_1, B_2, \ldots B_h, \ldots$ qui correspondent à $A_1, A_2, \ldots A_h, \ldots$, tendent vers B, et on a $\varphi(B_h) > \lambda$; donc φ est définie au voisinage de B, et le maximum de φ en B est au moins égal à λ; en opérant d'une manière analogue, mais partant de B au lieu de A, on reconnaît que les maxima de f en A et de φ en B sont tels qu'un nombre inférieur à l'un ne peut surpasser l'autre: ils sont donc égaux. Il y a de même égalité pour les minima, et par suite pour les oscillations de f en A et de φ en B.

41. Comme application, prenons le cas particulier important où P et Q sont tous deux fermés, et où f est définie en tout point de P: φ est alors définie en tout point de Q. Si f est continue sur P, c'est qu'en chaque point de P l'oscillation est nulle, il en est donc de même de l'oscillation de φ en tout point de Q; donc φ est aussi continue. Si f, définie sur P, est de classe α, je dis que φ est aussi de classe α; cela a lieu, d'après ce qui précéde, pour $\alpha = 0$; admettons le résultat pour tous les nombres inférieurs à α; f est la limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_h, \ldots$ de classes toutes inférieures à α; ces fonctions ont pour transformées des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h, \ldots$ appartenant aux mêmes classes, d'après le résultat admis, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h, \ldots$ tend vers φ, qui est donc de classe $\leqq \alpha$; en reprenant le raisonnement en partant de φ au lieu de f, on constate que la classe de f ne peut pas surpasser celle de φ: donc f et φ sont de même classe.

42. P et Q étant toujours deux ensembles applicables, supposons que l'un d'eux soit dense en lui-même; il en est alors de même pour l'autre, et les dérivés respectifs de P et Q, P^0 et Q^0, sont parfaits. Soit f définie sur P, φ sa transformée sur Q; je dis que si f est ponctuellement discontinue sur P^0, φ est ponctuellement discontinue sur Q^0. Pour le faire voir, commençons par transformer la définition de la discontinuité ponctuelle.

Soit $\sigma > 0$; soit K l'ensemble des points de P^0 où l'oscillation de f est $\geqq \sigma$; pour que f soit ponctuellement discontinue, il faut et il suffit que, quel que soit σ, l'ensemble fermé K soit non dense dans P^0, ou, ce qui revient au même, que $P^0 - K$ soit partout dense dans P^0. Si cela a lieu, soit R l'ensemble des points de P en chacun desquels l'oscillation est $< \sigma$. R comprend tous les points de P, sauf ceux qui font partie de l'ensemble non dense K; comme P est partout dense sur P^0, R est aussi partout dense sur P^0, c'est-à-dire que tout point de P^0, et en particulier tout point de P, est limite d'une suite de points de P en chacun desquels l'oscillation est $< \sigma$. Réciproquement, supposons que tout point de P soit limite d'une suite de points de P en chacun desquels l'oscillation est $< \sigma$; c'est donc que tout point de P fait partie du dérivé d'ordre o de R, R^0; comme $P^0 - K$ contient R, le dérivé d'ordre o de $P^0 - K$ contient R^0, par suite P, d'après ce qui précéde, et par suite enfin le dérivé d'ordre o de P, c'est-à-dire P^0: cela veut dire que $P^0 - K$ est partout dense dans P^0, c'est-à-dire que f est ponctuellement discontinue.

En résumé, il faut et il suffit, pour que f soit ponctuellement discontinue sur P^0, que, quel que soit $\sigma > 0$, tout point de P soit limite d'une suite de points de P en chacun desquels l'oscillation soit $< \sigma$. Or, cette condition, supposée remplie par f, entraîne la même condition relativement à la transformée φ de f sur l'ensemble Q applicable sur P. Donc, si l'une des fonctions f et φ est ponctuellement discontinue, il en est de même de l'autre.

43. Soient P et Q deux ensembles applicables et d'ailleurs quelconques; f étant définie partiellement ou non sur P et de classe $\leqq 1$, je dis que sa transformée φ sur Q est aussi de classe $\leqq 1$. Il suffit, pour le voir, de vérifier que tout ensemble parfait H contenu dans Q^0 contient une portion dans laquelle φ est ponctuellement discontinue; or, soit Γ l'ensemble des points de Q contenus dans H: deux cas seulement sont possibles:

1°. Γ^0 ne coïncide pas avec H; c'est donc que H contient une portion dans laquelle φ n'est pas définie, et par suite doit être considérée comme ponctuellement discontinue au sens général.

2°. Γ^0 coïncide avec H; alors Γ est dense en lui-même et correspond à un ensemble Π de P qui est dense en lui-même; d'après l'hypothèse, f étant de classe $\leqq 1$, est ponctuellement discontinue sur Π^0, donc φ est aussi, d'après le § précédent, ponctuellement discontinue sur $H = \Gamma^0$.

Par le procédé de récurrence généralisé, on démontre comme précédemment que si f est de classe $\alpha\,(\alpha \geqq 2)$, φ est aussi de classe α, car la classe de l'une de ces fonctions ne peut surpasser celle de l'autre (sauf dans le cas où la classe de l'une est o).

En résumé, étant donnée une fonction f définie sur un ensemble P, si φ est sa transformée sur un ensemble Q applicable sur P, dans le cas où P et Q sont fermés, on peut affirmer que les classes de ces fonctions sont toujours égales; dans le cas général, les classes des fonctions (sur P^0 et Q^0 respectivement) sont encore égales, sauf qu'elles peuvent être o pour l'une, 1 pour l'autre. Un exemple montre que ce dernier cas est réalisable: soit H_1 l'ensemble des nombres irrationnels du segment (o, 1), qui a pour dérivé ce segment P_1; H_1 est applicable sur G_0 par le procédé du § 39. Prenons sur G_0 une fonction f égale à n en tous les points de G_0 faisant partie du groupe (n); cette fonction est continue, tandis que la transformée φ a sur P_1, des points de discontinuité en chaque point de la forme $\frac{1}{n}$.

44. Démontrons maintenant sur les fonctions de classe 2 un théorème qui ne diffère que par une légère modification de forme d'un théorème donné dans la première partie (§ 28). Les notions nouvelles acquises dans le présent mémoire vont nous permettre de traiter simultanément le cas des ensembles de points et celui des ensembles de suites.

Dans l'espace à n dimensions $(n \geqq 0)$, considérons un systéme dénombrable d'ensembles fermés rangés dans un certain ordre, $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$, et satisfaisant à la condition qu'un point quelconque de G_n fait partie au plus d'un nombre fini de ces ensembles. Soient $f_1, f_2, \ldots f_h, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$ et de classe $\leqq 2$. Considérons la fonction f définie comme il suit: si A appartient à certains des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, ces ensembles étant par hypothèse en nombre fini, l'un d'eux a un indice supérieur aux autres, soit h cet indice: on prend $f(A) = f_h(A)$. Je dis que f, qui se trouve ainsi définie sur l'ensemble $P = M(P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots)$, est de classe $\leqq 2$.

Pour que f soit définie sur un ensemble fermé, convenons, par exemple, de la définir en tout point de G_n, en lui donnant la valeur o en chaque point de $G_n - P$.

Comme f_h est de classe $\leqq 2$ sur P_h, il existe sur P_h une suite de fonctions de classe $\leqq 1$: $f_{h,1}, f_{h,2}, \ldots f_{h,p}, \ldots$ tendant vers f_h. Définissons une fonction φ_p ainsi:

$\varphi_p = f_{1,p}$ aux points de P_1 n'appartenant pas à $P_2, P_3, \ldots P_p$,

$\varphi_p = f_{2,p}$ aux points de P_2 n'appartenant pas à $P_3, \ldots P_p$,

. . . . .

$\varphi_p = f_{p,p}$ aux points de P_p,

$\varphi_p = 0$ aux points de $G_n - M(P_1, P_2, \ldots P_p)$.

La fonction φ_p, étant obtenue par le procédé de superposition appliqué à un nombre fini de fonctions de classe $\leqq 1$, est de classe $\leqq 1$.

Je dis que φ_p tend vers f en chaque point. C'est évident pour un point de $G_n - P$. Si A appartient à P, soit h le plus grand entier tel que A fait partie de P_h: on a $f(A) = f_h(A)$. Supposons $p > h$; d'après la définition de φ_p, comme A fait partie de P_h sans faire partie de $P_{h+1}, P_{h+2}, \ldots P_p$, on a $\varphi_p(A) = f_{h,p}(A)$; donc, quand p croît indéfiniment, $f_{h,p}(A)$ tend vers $f_h(A)$, c'est-à-dire que $\varphi_p(A)$ tend vers $f(A)$. Donc f est de classe $\leqq 2$.

45. Considérons l'espace à n dimensions $G_n (n \geqq 1)$; soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les coordonnées courantes. Si on donne à h de ces coordonnées des valeurs fixes, et si on fait varier les $n - h$ autres de toutes les manières possibles, on obtient un espace plan à $n - h$ dimensions, parallèle à h des axes de coordonnées. Supposons que ces h coordonnées fixes aient des valeurs rationnelles, et convenons de dire que nous avons ainsi un *plan rationnel d'ordre $n - h$ contenu dans G_n.* Il y a des plans rationnels d'ordre n (l'espace G_n lui-même), $n - 1, n - 2, \ldots 2, 1$ (ceux-ci sont, à proprement parler, des droites), 0 (chacun de ceux-ci se réduit à un point). L'ensemble de tous ces plans rationnels est dénombrable, car: 1° h peut recevoir un nombre *fini* de valeurs: $0, 1, 2, \ldots n$; 2° h étant fixé, on peut choisir d'un nombre *fini* de manières les h coordonnées qui reçoivent des valeurs fixes; 3° étant données, parmi $x_1, x_2, \ldots x_n$, les h coordonnées qui doivent recevoir des valeurs fixes, chacune d'elles peut recevoir toutes les valeurs rationnelles, donc on obtient ainsi une infinité *dénombrable* de plans.

Supposons que les plans rationnels ainsi définis soient rangés, d'une manière d'abord arbitraire, en une suite:

$$(1) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_K, \ldots$$

Soit P un de ces plans, supposé distinct de G_n, et par suite d'ordre $n - h$, avec $h \geqq 1$. Parmi les plans rationnels (1) autres que P, il y en a qui contiennent P: on les obtient en ne laissant fixes, parmi les h coordonnées fixes de P, que quelques-unes d'entre elles, remplaçant chacune des autres par une coordonnée variable prenant toutes les valeurs réelles possibles; comme cette opération ne peut se faire que d'un nombre fini de manières, on voit qu'étant donné un plan de (1) d'ordre $n - h$, il y a, dans (1), un nombre fini de plans d'ordres $n, n - 1, \ldots \ldots, n - h + 1$, contenant P.

Cela posé, je dis qu'on peut ranger les éléments de (1) en une suite (2) ordonnée de telle sorte que dans cette nouvelle suite, chaque plan P soit placé après tous les plans qui le contiennent. Pour cela, prenons pour premier élément de (2), le plan G_n; supposant obtenus les q premiers éléments de (2), prenons, comme $(q+1)^{\text{me}}$ élément, le premier élément de (1) qui soit non obtenu encore et qui soit tel que tous les plans le contenant soient déjà obtenus.

Je dis que, par application de ce procédé, tout plan de (1) est obtenu. Cela a lieu pour G_n; supposons démontré que cela a lieu pour tout plan d'ordre $n, n-1, \dots n-\alpha+1$, et démontrons le pour les plans d'ordre $n-\alpha$. Soit un plan d'ordre $n-\alpha$, occupant le rang K dans (1), donc désigné par P_K; il y a un nombre fini d'éléments P de (1) contenant P_K, ils sont d'ordre supérieur à $n-\alpha$, donc, d'après l'hypothèse admise, ils se trouvent tous obtenus au bout d'un certain nombre fini N d'opérations; donc, après $N+K$ opérations au plus, le plan P_K sera obtenu. Ainsi tous les plans (1) sont obtenus; et, d'après le procédé employé, la suite (2) est telle que chaque plan P y figure après tous ceux qui le contiennent.

Imaginons que la suite (1) soit la suite modifiée comme nous venons de l'expliquer, et possédant par conséquent la propriété précédente.

Soit P_K un des ensembles de cette suite, à h coordonnées fixes et $n-h$ variables; supposons que chacune de ces $n-h$ dernières reçoive toutes les valeurs irrationnelles possibles; l'ensemble H_K ainsi obtenu est applicable sur G_0 par le procédé du § 39. Considérons la suite des ensembles H_K correspondant respectivement aux ensembles de (1):

$$H_1, H_2, \dots H_K, \dots \tag{3}$$

Soit A un point quelconque de G_n; soit h le nombre de ses coordonnées rationnelles. Il y a un et un seul ensemble de (3) qui contient A: c'est celui qu'on obtient en laissant fixes les h coordonnées rationnelles de A et donnant aux autres coordonnées toutes les valeurs irrationnelles; soit H_K cet ensemble; A fait partie de l'ensemble P_K qui correspond à H_K, et parmi les ensembles (1), les seuls, outre P_K, qui contiennent A, sont ceux qui contiennent P_K; donc, parmi les ensembles (1) qui contiennent A, il y en a un qui est contenu dans tous les autres, c'est P_K. On peut écrire, comme les H n'ont deux à deux aucun point commun,

$$G_n = H_1 + H_2 + \cdots + H_K + \cdots$$

46. Cela posé, soit f une fonction définie (totalement ou partiellement) sur G_n. Si f est de classe $\leqq \alpha$, elle est de classe $\leqq \alpha$ sur toute partie de G_n, en particulier sur chaque ensemble P_K, et aussi sur chaque ensemble H_K (H_K a pour dérivé P_K); si on applique H_K sur G_0 par le procédé du § 39, la fonction f sur H_K se transforme en une fonction définie sur G_0 qui est de classe $\leqq \alpha$ (sous la condition $\alpha \geqq 1$ (§ 43), et même aussi pour $\alpha = 0$).

Réciproquement, dans l'hypothèse $\alpha \geqq 2$, je dis que si f est telle que, par application de chacun des ensembles H_K sur G_0, on obtient une fonction de classe $\leqq \alpha$, f est de classe $\leqq \alpha$ sur G_n. Il suffit de vérifier la proposition pour $\alpha = 2$, l'extension au cas de $\alpha > 2$ s'en déduisant par application du procédé de récurrence généralisé.

Nous supposons donc f telle que, en appliquant l'un quelconque des ensembles H_K sur G_0, la transformée de f soit de classe $\leqq 2$. Dans ces conditions, d'après le § 43, f est de classe $\leqq 2$ sur H_K, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f_K de classe $\leqq 2$ définie sur P_K (dérivé d'ordre 0 de H_K), et égale à f en tout point de H_K. Le procédé du § 44 est applicable aux fonctions de classe $\leqq 2$: $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_K, \ldots$ respectivement définies sur les ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots P_K, \ldots$, puisqu'un point A de G_n fait partie d'un nombre fini de ces ensembles; soit F la fonction à laquelle donne naissance ce procédé: F est de classe $\leqq 2$. Je dis que $F = f$; en effet, soit A un point de G_n; soit H_K l'ensemble de la suite (3) dont A fait partie; parmi les ensembles de (1) qui contiennent A, P_K est le dernier (§ 45); dans l'application du procédé de formation de F (§ 44), on obtient: $F(A) = f_K(A)$; et comme A fait partie de H_K, on a par la définition de f_K: $f_K(A) = f(A)$; ainsi $F(A) = f(A)$. Donc f est de classe $\leqq 2$.

En résumé, *il faut et il suffit, pour que f soit de classe $\leqq \alpha$ $(\alpha \geqq 2)$ sur G_n, que, pour tous les H_K, la transformée de f sur G_0 par application de H_K sur G_0 soit de classe $\leqq \alpha$.* La conclusion de cette étude est que, *pour $\alpha \geqq 2$, l'étude des fonctions sur G_n peut se ramener à l'étude des fonctions définies sur G_0.*

CHAPITRE V.

Cas particuliers de fonctions.

47. Dans le chapitre III, nous avons étendu aux fonctions définies sur un ensemble à 0 dimension les résultats des chapitres III et IV de la première partie (étude des fonctions de classe $\leqq 1$, étude de la condition $m[\omega'(f)] = 0$). Nous en sommes donc, en ce qui concerne les fonctions définies sur un ensemble à 0 dimension, au même point où nous en étions en ce qui concerne les fonctions définies sur un ensemble à n dimensions, au commencement du chapitre V de la première partie. Nous sommes donc conduits tout naturellement à faire une étude analogue à celle des premiers numéros de ce chapitre; c'est par là que nous allons commencer.

Tout d'abord, une fonction f définie sur un ensemble fermé P de G_0 est de classe $\leqq 1$ sur P, si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^Ω; a fortiori, si $\alpha > 1$, f est de classe $\leqq \alpha$ sur P dès qu'elle est de classe $\leqq \alpha$ sur P^Ω; nous pouvons donc, dans la suite, nous borner à considérer des fonctions définies sur un ensemble *parfait*.

Soit donc f définie sur l'ensemble parfait P et satisfaisant sur P à la condition $m[\omega'(f)] = 0$; il y a un ensemble de première catégorie K et une fonction φ de classe $\leqq 1$ sur P tels que $f = \varphi$ en tout point de $P - K$. Soit $K = M(K_1, K_2, \ldots K_i, \ldots)$, les K_i étant *non denses* dans P; remplaçons chaque ensemble K_i par son dérivé d'ordre 0, K_i^0, qui contient K_i, est aussi non dense dans P, et de plus est fermé; K_i^0 se compose de l'ensemble parfait K_i^Ω (s'il existe), plus un ensemble dénombrable. Si $K' = M(K_1^0, K_2^0, \ldots K_i^0, \ldots)$, on a $f = \varphi$ en tout point de $P - K'$, et K' se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits: $K_1^\Omega, K_2^\Omega, \ldots K_i^\Omega, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. On sera conduit à étudier la fonction f sur chacun des ensembles parfaits K_i^Ω, qu'on traitera exactement comme on a traité P; on introduira ainsi des ensembles parfaits non denses dans chacun des K_i^Ω, puis des ensembles parfaits non denses dans chacun des ensembles obtenus, etc....

48. Théorème. *Soit P_0 un ensemble fermé, et $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles fermés tous contenus dans P_0; soient $f_0, f_1, f_2, \ldots f_i, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_0, P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$, et toutes de classe $\leqq 2$. La fonction f, qui est égale à f_1 sur P_1, à f_i $(i = 2, 3, \ldots)$ aux points de P_i qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_{i-1}$, enfin à f_0 aux points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$, est de classe $\leqq 2$ sur P_0.*

En effet, h étant l'un des entiers $0, 1, 2, \ldots i, \ldots$, il y a, sur P_h, une suite de fonctions de classe $\leqq 1$ tendant vers f_h, soit:

$$f_{1,h}, f_{2,h}, \ldots f_{\nu,h}, \ldots$$

En tout point A de P_h, on a:

$$\lim_{\nu\, \infty} f_{\nu,h}(A) = f_h(A). \tag{1}$$

Cela posé, définissons des fonctions φ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ comme il suit:

$\varphi_\nu = f_{\nu,1}$ sur P_1;

$\varphi_\nu = f_{\nu,h}$ $(h = 2, 3, \ldots \nu)$ aux points de P_h qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_{h-1}$;

$\varphi_\nu = f_{\nu,0}$ aux points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles P_1, $P_2, \ldots P_\nu$.

La fonction φ_ν, ainsi définie sur P_0, est de classe $\leqq 1$, comme obtenue par superposition des fonctions de classe $\leqq 1$: $f_{\nu,1}, f_{\nu,2}, \ldots f_{\nu,\nu}, f_{\nu,0}$.

Je dis qu'en tout point A de P_0, on a: $\lim\limits_{\nu\,\infty} \varphi_\nu(A) = f(A)$. En effet, si A fait partie d'un des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, soit i le plus petit indice tel que A appartient à P_i; alors A n'appartient à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_{i-1}$ (si $i > 1$). D'après la définition de φ_ν, dès que $\nu \geqq i$, on a $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,i}(A)$, et d'après la définition de f, on a $f(A) = f_i(A)$. Donc, en utilisant la condition (1), on a:

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim_{\nu=\infty} f_{\nu,i}(A) = f_i(A) = f(A).$$

Si A ne fait partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, on a, quel que soit ν: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,0}(A)$, et d'autre part: $f(A) = f_0(A)$; donc:

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim_{\nu=\infty} f_{\nu,0}(A) = f_0(A) = f(A).$$

Ainsi f est la limite de φ_ν qui est de classe $\leqq 1$, donc f est de classe $\leqq 2$.

49. Comme cas particulier de ce théorème, on voit que si f_0 est une fonction de classe $\leqq 2$ définie sur l'ensemble fermé P_0, la fonction f obtenue en remplaçant par des valeurs arbitraires les valeurs de f_0 aux points d'un ensemble *dénombrable* Q est de classe $\leqq 2$. Il suffit en effet, en désignant les points de Q par $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots$, d'appliquer la proposition précédente en prenant $P_i = A_i$, et $f_i = f$. On en conclut que, *si R est un ensemble dénombrable de points, la classe α d'une fonction f est indépendante de ses valeurs aux points de R, dès que $\alpha \geqq 2$.*

Reprenons le procédé du § 47. Nous partons d'une fonction f définie sur un ensemble fermé P_0 et satisfaisant sur tout ensemble parfait contenu dans P_0 à la condition $m[\omega'(f)] = 0$; il existe, d'une part une fonction φ_0 de classe $\leqq 1$ sur P_0, d'autre part un ensemble de première catégorie dans P_0, soit P_1, tel qu'on a $f = \varphi_0$ en tout point de $P_0 - P_1$; de plus on peut supposer que P_1 se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans P_0^Ω, soit $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Si f se trouve être de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles p_i, l'application du théorème du § 48 (en remplaçant f_0 par φ_0 et tous les f_i $(i > 0)$ par f), montre que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

Si cela n'est pas, nous traiterons chaque ensemble parfait p_i comme nous avons traité P_0; nous définissons donc une fonction φ_i de classe $\leqq 1$ sur p_i, et un ensemble de première catégorie dans p_i, soit p'_i, tel que $f = \varphi_i$ en tout point de $p_i - p'_i$; de plus, p'_i se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans p_i, soit $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots p_{i,j}, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. On peut être amené à continuer l'application du procédé; d'une manière générale, si l'on a introduit l'ensemble parfait $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, et si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur cet ensemble, il y a une fonction de classe $\leqq 1$ sur $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, soit $\varphi_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, et un ensemble de première catégorie dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, soit $p'_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, tel qu'on a $f = \varphi_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$ en tout point de $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha} - p'_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$. L'ensemble $p'_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$ se compose, outre un certain ensemble dénombrable, d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$; nous les désignons par $p_{i_1, i_2 \ldots i_\alpha, i_{\alpha+1}}$, l'indice $i_{\alpha+1}$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots$ Désignons par P_α l'ensemble formé par la réunion des ensembles p à α indices.

Je dis que si, par l'application du procédé indiqué, on obtient un ensemble P_h tel que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_h}$ dont se compose P_h, f est de classe $\leqq 2$ sur P_0; il suffit, pour le voir, d'appliquer successivement le théorème du § 48, d'abord à chacun des ensembles p à $h - 1$ indices, ce qui montre que f est de classe $\leqq 2$ sur chacun de ces ensembles, puis ensuite à chacun des ensembles à $h - 2$ indices, et ainsi de suite en remontant jusqu'à chacun des ensembles $p_1, p_2, \ldots$, et finalement à P_0.

50. Il peut arriver aussi qu'on soit conduit à former des ensembles P_h en nombre infini.

Indiquons des exemples. Soit $P_0 = G_0$. Donnons-nous d'une part un entier positif n, d'autre part un système de h entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, et étudions *l'ensemble Q des suites*[1] *commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, chacun des termes suivants de la suite étant $> n$.*

Soit A le point:

$$(a_1, a_2, \ldots a_h, a_{h+1}, \ldots).$$

Si A ne fait pas partie de Q, c'est que, ou bien $(a_1, a_2, \ldots a_h)$ ne coïncide pas avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, ou bien l'un des entiers $a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots$, soit a_K, est $\leqq n$. En prenant, dans le premier cas, le groupe $(a_1, a_2, \ldots a_h)$, dans le second cas, le groupe $(a_1, a_2, \ldots a_h, \ldots a_K)$, on a un groupe qui contient A et ne contient aucun point de Q. Ainsi tout point qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q; donc Q est *fermé*.

Si B fait partie de Q, il est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots)$$

[1] Je rappelle que j'emploie indifféremment les mots *point* ou *suite d'entiers*.

les β étant $> n$. On obtient un autre point de Q en remplaçant un quelconque des β, soit β_r, par un nombre supérieur; en donnant à r des valeurs croissant indéfiniment, on obtient une suite de points variables de Q tendant vers B; donc tout point de Q est limite pour Q; donc Q, qui est fermé, est *parfait*.

Le point C:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \dots \beta_{h+j}, 1, 1, \dots)$$

obtenu en remplaçant dans B les termes dont le rang supasse $h+j$ par 1, ne fait pas partie de Q; si on fait croître j indéfiniment, ce point tend vers B. Donc Q est *non dense* dans P_0.

Ainsi, *l'ensemble des points commençant par* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h)$, *les autres termes étant supérieurs à* n, *est un ensemble parfait non dense*. Nous désignerons maintenant cet ensemble par $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$.

51. Si nous donnons à n une valeur fixe, et si nous faisons varier de toutes les manières possibles les entiers $h, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h$, nous obtenons une infinité dénombrable d'ensembles $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$. *L'ensemble* P_n *formé par la réunion de tous les* $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$ *est l'ensemble des suites pour lesquelles tous les termes surpassent* n, *à partir d'un certain rang.*

Prenons, parmi les ensembles $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$, 1° ceux pour lesquels $h = n$, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h$, prenant toutes les valeurs possibles;

2° ceux pour lesquels $h \geqq n$, avec $\alpha_h \leqq n$. Appellons ensembles normaux $p^{(n)}$ ces ensembles. Je dis qu'un point déterminé A de P_n appartient à un et un seul ensemble normal $p^{(n)}$. En effet, soit $(a_1, a_2, \dots)$ ce point. Le seul ensemble $p^{(n)}$ contenant A qui remplit l'une des conditions 1° ou 2° est l'ensemble $p^{(n)}[a_1, a_2, \dots a_h]$, h étant le plus petit nombre supérieur ou égal à n, tel que tous les a de rang supérieur à h soient supérieurs à n.

Ainsi deux ensembles normaux $p^{(n)}$ n'ont aucun point commun, et P_n est la réunion de tous les ensembles normaux $p^{(n)}$.

Il est évident que P_{n+1} est contenu dans P_n.

Soit $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k]$ un ensemble normal $p^{(n+1)}$; on a, soit $k = n+1$, soit $k > n+1$, avec $\alpha_k \leqq n+1$.

Si les nombres $\alpha_{n+1}, \dots \alpha_k$ sont tous supérieurs à n, posons $h = n$; sinon, certains d'entre eux étant inférieurs ou égaux à n, prenons, parmi ces derniers, celui qui a le rang le plus élevé, et appelons h ce rang. On a ainsi, soit $h = n$, soit $h > n$, avec $\alpha_h \leqq n$, de sorte que l'ensemble $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$ est normal; de plus, si $k > h$, les nombres $\alpha_{h+1}, \alpha_{h+2}, \dots \alpha_k$ sont supérieurs à n. Ainsi tout point de $p^{(n+1)}[\alpha_1, \dots \alpha_h, \dots \alpha_k]$ possède la propriété caractéristique des points de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$. Donc *tout ensemble normal* $p^{(n+1)}$ *est contenu dans un cer-*

tain ensemble normal $p^{(n)}$, lequel est unique, puisque un ensemble normal $p^{(n)}$ autre que $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$ n'a aucun point commun avec cet ensemble.

Je dis que $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k]$ est *non dense* dans $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$. Il suffit de faire voir qu'au voisinage de tout point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$ existe un point qui fait partie de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$ sans faire partie de $p^{(n+1)}[\alpha_1, \dots \alpha_k]$. Or, soit A un point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \dots).$$

Considérons, j étant arbitraire, le point B:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h, \beta_{h+1}, \dots \beta_{h+j}, n+1, n+1, \dots),$$

dans lequel tous les termes de rang supérieur à $h+j$ sont égaux à $n+1$. Ce point appartient bien à $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h]$, puisque les termes de rang $> h$ sont $> n$, mais il n'appartient pas à P_{n+1}, puisqu'il y a une infinité de termes égaux à $n+1$; donc il n'appartient pas à $p^{(n+1)}[\alpha_1, \dots \alpha_k]$.

De plus, en prenant j assez grand, le point B peut être pris aussi voisin qu'on veut de A, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, modifiant les notations précédentes, nous rangerons les ensembles normaux $p^{(1)}$ dont se compose P_1 dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par la notation $p_1, p_2, \dots p_i, \dots$ Chacun des ensembles normaux $p^{(2)}$ appartient à un et un seul des ensembles normaux $p^{(1)}$; dans l'ensemble p_i, il y a une infinité dénombrable d'ensembles normaux $p^{(2)}$, nous les rangerons dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par $p_{i,1}, p_{i,2}, \dots p_{i,j}, \dots$ Nous définissons ainsi d'une manière générale des ensembles parfaits $p_{i_1, i_2, \dots i_n}$, les entiers $n, i_1, i_2, \dots i_n$, prenant toutes les valeurs entières positives. L'ensemble $p_{i_1, i_2, \dots i_n, i_{n+1}}$ est contenu dans $p_{i_1, i_2, \dots i_n}$ et est non dense par rapport à lui. La réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \dots i_n}$, n étant fixe, constitue l'ensemble P_n des points pour lesquels tous les termes, à partir d'un certain rang, surpassent n.

52. Il y a des points qui font partie de P_n, quel que soit n; ce sont les points pour lesquels le terme de rang n croît indéfiniment avec n; en effet, pour ces points, le nombre de termes inférieurs à n est fini, quel que soit n; je désigne l'ensemble de ces points par P_ω; on a:

$$P_0 > P_1 > \dots > P_n > \dots > P_\omega$$

et

$$P_\omega = D(P_0, P_1, \dots P_n, \dots).$$

Soit A un point déterminé de P_ω:

$$(a_1, a_2, \dots).$$

Ce point fait partie de P_1, il appartient à un ensemble normal $p^{(1)}$ bien déterminé, soit p_{i_1}; appartenant à P_2, il appartient à un ensemble normal $p^{(2)}$ bien déterminé, qui doit être contenu dans p_{i_1}, soit donc p_{i_1, i_2}; d'une manière générale, le point A est contenu dans un ensemble normal $p^{(n)}$ bien déterminé, de la forme $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. Il y a donc une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$ telle que A est contenu dans tous les ensembles:

$$p_{i_1} > p_{i_1, i_2} > \ldots > p_{i_1, i_2, \ldots i_n} > \ldots$$

Réciproquement, donnons-nous une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$ et considérons les ensembles:

$$P_0 > p_{i_1} > p_{i_1, i_2} > \ldots > p_{i_1, i_2, \ldots i_n} > \ldots \tag{1}$$

Si nous revenons aux notations primitives relatives aux ensembles p, ces ensembles seront désignés de la manière suivante:

$$p_{i_1} = p^{(1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h_1}] \text{ avec } h_1 \geqq 1,$$
$$p_{i_1, i_2} = p^{(2)}[\alpha_1, \ldots \alpha_{h_1}, \ldots \alpha_{h_2}] \text{ avec } h_2 \geqq 2 \text{ et } h_2 \geqq h_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{i_1, i_2, \ldots i_n} = p^{(n)}[\alpha_1 \ldots \alpha_{h_1}, \ldots \alpha_{h_2}, \ldots \alpha_{h_n}] \text{ avec } h_n \geqq n \text{ et } h_n \geqq h_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Du fait que $h_n \geqq n$ résulte que h_n croît indéfiniment, de sorte que les entiers α définis par ce qui précède sont en nombre infini; il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles p de (1); c'est le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h_1}, \ldots \alpha_{h_2}, \ldots \alpha_{h_n}, \ldots)$$

et ce point appartient à tous les P_n, par suite à P_ω.

Ainsi, à toute suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$, correspond un point déterminé de P_ω, à savoir le point unique contenu dans tous les ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$.

On peut donc dire qu'une correspondance biunivoque et réciproque se trouve établie entre P_0 et P_ω au moyen de la loi suivante:

(a) *Le point A de P_0: $(i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots)$ et le point B de P_ω: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots)$ se correspondent si B est contenu, quel que soit n, dans l'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$.*

Cette correspondance possède la propriété suivante: Si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ sont des points de P_0, et si $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$ sont les points correspondants de P_ω, la condition: $\lim A_\nu = A_0$ entraîne: $\lim B_\nu = B_0$. En effet, soit:

$$\left.\begin{array}{l} A_\nu = [(i_1)_\nu, (i_2)_\nu, \ldots (i_n)_\nu, \ldots] \\ B_\nu = [(\alpha_1)_\nu, (\alpha_2)_\nu, \ldots (\alpha_h)_\nu, \ldots] \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots 0.$$

Si A_ν tend vers A_0, c'est que, quel que soit n, quand ν dépasse un certain entier p, A_ν est contenu dans le groupe d'ordre n qui contient A_0, c'est-à-dire que:

$$(1) \qquad (i_1)_\nu = (i_1)_0, (i_2)_\nu = (i_2)_0, \ldots (i_n)_\nu = (i_n)_0.$$

D'autre part, d'après la définition des divers ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, deux points contenus dans le même ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ ont en commun au moins les n premiers termes, de sorte que les conditions (1) entraînent pour les points B_ν et B_0 les conditions:

$$(\alpha_1)_\nu = (\alpha_1)_0, (\alpha_2)_\nu = (\alpha_2)_0, \ldots (\alpha_n)_\nu = (\alpha_n)_0.$$

Comme n est arbitraire, cela exprime que B_ν tend vers B_0.

Nous dirons que la correspondance établie entre P_0 et P_ω par la loi (a) est *biunivoque, réciproque, et continue dans le sens de P_0 sur P_ω.*

La partie de P_ω contenue dans l'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, soit $D(p_{i_1, i_2, \ldots i_n}, P_\omega)$ est dense dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. Car, soit:

$$p_{i_1, i_2, \ldots i_n} = p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h];$$

au voisinage de tout point A de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$, soit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots),$$

existe un point faisant partie du même ensemble et de P_ω; il suffit de prendre le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots \beta_{h+j}, n+1, n+2, \ldots),$$

où les termes qui suivent celui de rang $h+j$ sont les nombres entiers positifs à partir de $n+1$. Ce point, qui fait partie de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ et de P_ω, peut être pris aussi voisin qu'on veut de A, en prenant j assez grand.

A fortiori, si $r > n$, l'ensemble $D(p_{i_1, i_2, \ldots i_n}, P_r)$ est dense dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. En particulier, l'ensemble formé par la réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}}$ ($i_1, i_2, \ldots i_n$ fixes, i_{n+1} variable) est dense dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$.

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux de la première partie (§ 36 à la fin) montreraient que la fonction f qui est égale, sur $P_i - P_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) à u_i, et sur P_ω à u_ω ($u_0, u_1, \ldots u_i, \ldots u_\omega$ étant des nombres arbitraires] est de classe 3 si l'on n'a pas $\lim u_i = u_\omega$, et de classe ≤ 2 si $\lim u_i = u_\omega$.

CHAPITRE VI.

Les ensembles à 0 dimension.

53. Nous allons généraliser les procédés employés dans l'exemple précédent, et pour cela poser de nouvelles définitions.

Partons d'un ensemble fermé P. Considérons des ensembles fermés, en nombre infini dénombrable ou fini, tous contenus dans P; désignons-les par la notation p_i, i prenant soit toutes les valeurs entières positives, soit certaines de ces valeurs. Nous dirons que nous avons là un *système d'ensembles* contenu dans P, et nous le désignerons par $K(p_i)$.

Si les ensembles p_i n'ont deux à deux aucun point commun, nous dirons que le système est *normal.*

n étant donné, si chaque ensemble p_i est contenu dans un groupe d'ordre n, nous dirons que le *système est d'ordre n.*

Ainsi, *un système normal d'ordre n est constitué par une infinité dénombrable* (ou un nombre fini) *d'ensembles fermés n'ayant deux à deux aucun point commun, et dont chacun est contenu dans un groupe d'ordre n.*

54. Soit un système quelconque $K(p_i)$ contenu dans l'ensemble fermé P, et constitué par les ensembles $p_1, p_2, \dots p_i, \dots$ Proposons-nous de trouver des ensembles fermés $q_1, q_2, \dots$ n'ayant deux à deux aucun point commun et tels que tout point appartenant à l'un des ensembles $p_1, p_2, \dots$, appartienne à un et un seul des ensembles $q_1, q_2, \dots$, autrement dit de *remplacer le système quelconque $K(p_i)$ par un système normal contenant les mêmes points.*

Définissons d'abord la notion de groupes *contigus.* Soit T un ensemble fermé contenu dans P. Considérons les groupes relatifs à P et extérieurs à T; prenons, parmi eux, d'abord les groupes d'ordre 1, puis les groupes d'ordre 2 non contenus dans les précédents, puis les groupes d'ordre 3 non contenus dans les précédents, etc.... Nous dirons que chacun des groupes obtenus est contigu à T; ainsi, un groupe d'ordre n est contigu à T s'il est relatif à P, extérieur à T, et si le groupe d'ordre $n-1$ qui le contient (dans le cas de $n>1$) contient des points de T; deux groupes contigus à T distincts n'ont aucun point commun, d'après le procédé qui a servi à définir ces groupes; enfin, tout point de $P-T$ appartient à un groupe contigu à T, car si A est un tel point, les groupes contenant A ne peuvent contenir tous des points de T, puisque T est fermé; si n est le plus petit entier tel que le groupe d'ordre n contenant A est extérieur à T, ce groupe est contigu à T.

Revenons aux ensembles $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ Posons, à partir de $i = 2$:

$$p'_i = M(p_1, p_2, \ldots p_{i-1});$$

p'_i est fermé; soit $g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots g_{i,k}, \ldots$ les groupes contigus à p'_i; désignons par $t_{i,k}$ la portion de p_i contenue dans le groupe $g_{i,k}$; nous avons ainsi des ensembles fermés $t_{i,k}$ dépendant de deux indices; en y ajoutant l'ensemble p_1, nous avons une infinité dénombrable d'ensembles que nous prendrons pour ensembles $q_1, q_2, \ldots$

Deux de ces ensembles n'ont aucun point commun. D'abord p_1 n'a aucun point commun avec l'un quelconque des ensembles t, puisque chacun de ceux-ci est contenu dans un groupe contigu à un ensemble p'_i qui contient p_1. Soit maintenant deux ensembles t; s'ils ont même premier indice, ils appartiennent à deux groupes différents contigus à un même ensemble p' et par suite n'ont aucun point commun. S'ils n'ont pas même premier indice, soit $t_{h,a}$ et $t_{h',a'}$, avec $h' > h$; $t_{h,a}$ fait partie de p_h, donc de $p'_{h'} = M(p_1, p_2, \ldots p_h, \ldots p_{h'-1})$; or, $t_{h',a'}$ est contenu dans un groupe contigu à $p'_{h'}$, donc n'a aucun point commun avec $t_{h,a}$.

Tout point A appartenant à un des ensembles p_i appartient à un ensemble q; car, soit i le plus petit entier tel que A fait partie de p_i; si $i = 1$, A fait partie de p_1 qui est un ensemble q; si $i > 1$, A ne fait pas partie de $p_1, p_2, \ldots p_{i-1}$, donc pas de p'_i; donc A appartient à un certain groupe contigu à p'_i, soit $g_{i,k}$; faisant partie de p_i, il appartient à $t_{i,k}$.

En résumé, *le système formé par les ensembles q est normal et contient tous les points du système donné $K(p_i)$.*

En outre, n étant donné, on peut remplacer chaque ensemble q par la somme de ses portions contenues dans les différents groupes d'ordre n; on obtient encore ainsi une infinité dénombrable d'ensembles fermés n'ayant deux à deux aucun point commun, chacun étant contenu dans un groupe d'ordre n, et tels que tout point de $K(p_i)$ appartient à l'un d'eux: le système de ces ensembles est un système normal d'ordre n.

55. Définitions.

Soit $K(p_i)$ un système normal. Etant donnés les points $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$, dont chacun fait partie d'un des ensembles p_i, nous dirons que, *dans le système $K(p_i)$, la suite $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ a pour limite A_0, ou encore qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans le système $K(p_i)$, si l'on a $\lim A_\nu = A_0$* (*au sens ordinaire*), *et si, en outre, p_i étant l'ensemble du système qui contient A_0* (cet ensemble est unique, puisque le système est normal), *les points de la suite $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ sont, à partir d'un certain rang, tous contenus dans p_i.*

56. *Etant donnés deux systèmes normaux $K(p_i)$ et $K(q_j)$, nous dirons que*

$K(q_j)$ est contenu dans $K(p_i)$ si chaque ensemble de $K(q_j)$ est contenu dans un des ensembles p_i (lequel est nécessairement unique). Nous écrirons dans ce cas:

$$K(p_i) \geqq K(q_j).$$

Remarquons que si cela a lieu, si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ sont des points de $K(q_j)$, la condition: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(q_j)$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_i)$, car les points $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ finissent par être contenus dans l'ensemble q_j qui contient A_0, d'après la condition: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(q_j)$, et par suite dans l'ensemble p_i qui contient A_0, ce qui entraîne: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_i)$.

57. On sait que, étant donnés des ensembles fermés $p, q, \ldots r$, l'ensemble des points communs à tous ces ensembles, $D(p, q, \ldots r)$, est fermé; on dit que $D(p, q, \ldots r)$ est le plus grand commun diviseur de $p, q, \ldots r$.

Soit maintenant des systèmes normaux en nombre fini:

$$(1) \qquad K(p_i),\ K(q_j), \ldots K(r_l).$$

On appelle système plus grand commun diviseur des systèmes (1) *le système constitué par les ensembles $D(p_i, q_j, \ldots r_l)$ obtenus en associant de toutes les manières possibles un des ensembles p_i, un des ensembles $q_j, \ldots$, un des ensembles r_l*; le nombre de ces manières est évidemment infini dénombrable ou fini.

Le système obtenu, soit $K(t_h)$, est évidemment contenu dans chacun des systèmes (1). Il est normal, car si on considère deux combinaisons différentes des indices $(i, j, \ldots l)$, soit $(i, j, \ldots l,)$ et $(i', j', \ldots l')$, on a au moins l'une des conditions $i \neq i'$, $j \neq j', \ldots l \neq l'$; si par exemple $i \neq i'$, les ensembles p_i et $p_{i'}$ n'ayant aucun point commun, il en est de même des ensembles $D(p_i, q_j, \ldots r_l)$ et $D(p_{i'}, q_{j'}, \ldots r_{l'})$.

Si chacun des systèmes (1) est d'ordre n, le système $K(t_h)$ est aussi d'ordre n.

Soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ des points appartenant à $K(t_h)$. Je dis que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(t_h)$ est qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes* (1)*: $K(p_i)$, $K(q_j), \ldots K(r_l)$.*

Supposons en premier lieu qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(t_h)$. Il en résulte que: 1° on a: $\lim A_\nu = A_0$ (sens ordinaire); 2° l'ensemble déterminé t_h qui contient A_0 contient A_ν dès que ν surpasse une certaine valeur s. Considérons alors le système $K(p_i)$; il y a dans ce système un ensemble bien déterminé p_i qui contient t_h; donc cet ensemble p_i contient A_0, et aussi A_ν pour $\nu > s$; et comme $\lim A_\nu = A_0$, il en résulte; $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_i)$. De même on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(q_j)$, etc....

Réciproquement, supposons qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes $K(p_i)$, $K(q_j)$, ... $K(r_l)$. L'ensemble p_i de $K(p_i)$ qui contient A_0 contient A_ν dès que ν surpasse un certain entier s_1; l'ensemble q_j qui contient A_0 contient A_ν dès que ν surpasse un certain entier s_2, etc.... Soit t_h l'ensemble commun à $p_i, q_j, \ldots$; dès que ν surpasse le plus grand des entiers $s_1, s_2, \ldots$, A_ν est contenu dans t_h, qui contient d'ailleurs A_0. Comme on a $\lim A_\nu = A_0$, on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(t_h)$. La proposition est donc démontrée.

58. Soit P un ensemble fermé. Prenons arbitrairement un système normal d'ordre 1 contenu dans P, soit $K(p_{\beta_1})$; p_{β_1} étant un ensemble de ce système, prenons un système normal d'ordre 2 contenu dans p_{β_1}, et dont nous désignerons les ensembles par p_{β_1,β_2}, β_2 recevant certaines valeurs entières positives; chaque ensemble p_{β_1} peut contenir une infinité dénombrable d'ensembles p à deux indices, ou un nombre fini, ou n'en contenir aucun. En poursuivant l'application du procédé, on définit des ensembles fermés désignés par la notation $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$, dans les conditions suivantes:

1° L'ensemble $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h,\beta_{h+1}}$ est contenu dans $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$.

2° Tout ensemble à h indices est contenu dans un groupe d'ordre h.

3° Deux ensembles distincts ayant le même nombre d'indices n'ont aucun point commun.

Il résulte de 2° et 3° que, h étant fixé, le système des ensembles à h indices est un système normal d'ordre h; soit $K(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h})$ ce système, ou, pour abréger, K_h; on a, d'après 1°:

$$K_1 \geqq K_2 \geqq \ldots \geqq K_h \geqq \ldots \tag{1}$$

Nous appellerons *suite normale de systèmes une suite de systèmes normaux d'ordres respectifs* 1, 2, ... h, ..., *dont chacun est contenu dans le précédent.* Ainsi (1) est une suite normale de systèmes.

Les indices $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ des ensembles p qui constituent les différents systèmes (1) sont des groupes dont l'ensemble Γ est complet, puisque, si $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ fait partie de Γ, les groupes (β_1), (β_1, β_2), ... $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{h-1})$ en font aussi partie. Soit R l'ensemble fermé de suites (ou points) déterminé par l'ensemble de groupes Γ. R est, comme on sait, l'ensemble des points $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ tels que tous les groupes (β_1), (β_1, β_2), ... $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, ..., font partie de Γ.

Soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ un tel point. Les ensembles $p_{\beta_1}, p_{\beta_1,\beta_2}, \ldots, p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}, \ldots$ existent effectivement, et l'on a:

$$p_{\beta_1} \geqq p_{\beta_1,\beta_2} \geqq \ldots \geqq p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h} \geqq \ldots \tag{2}$$

De plus, $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$ est contenu dans un groupe d'ordre h.

Soit (α_1) le groupe qui contient p_{β_1}; l'ensemble p_{β_1, β_2} est contenu, d'une part dans p_{β_1} et par suite dans (α_1), d'autre part dans un certain groupe d'ordre 2; donc ce dernier groupe est contenu dans (α_1), et est de la forme (α_1, α_2); en continuant le raisonnement, on reconnaît l'existence d'une suite infinie d'entiers: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots$ telle que, quel que soit h, $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$.

Soit A le point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots)$. h étant fixé, le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$ contient l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ et par suite tous ceux qui suivent cet ensemble dans (2); donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$ contient des points de chacun des ensembles (2). Cela étant, soit p l'un quelconque des ensembles (2); puisque, quel que soit h, le groupe d'ordre h qui contient A contient des points de l'ensemble fermé p, A appartient à p. Ainsi A appartient à tous les ensembles (2).

D'ailleurs un point qui fait partie de tous les ensembles (2) appartient aux groupes (α_1), (α_1, α_2), $\ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h), \ldots$, donc se confond avec A. Il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles (2).

A tout point B de R nous pouvons ainsi faire correspondre le point A de P qui est l'unique point contenu dans les ensembles (2).

A deux points distincts B et B' de R correspondent ainsi deux points A et A' distincts; car, soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$, $B' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_h, \ldots)$; il y a un entier h tel que $\beta_h \neq \beta'_h$; alors, les ensembles $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ et $p_{\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_h}$ qui contiennent respectivement A et A', n'ont aucun point commun; donc A et A' sont distincts.

Si on désigne par Q l'ensemble des points A correspondant aux points de R, on a établi entre Q et R une correspondance biunivoque et réciproque définie par la loi suivante:

Un point $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots)$ de Q et un point $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ de R se correspondent si A est contenu dans tous les ensembles

$$p_{\beta_1}, \; p_{\beta_1, \beta_2}, \ldots p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \ldots$$

Il est évident qu'aux points de R contenus dans le groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ correspondent les points de Q contenus dans l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Une autre conséquence est que, si deux points B et B' de R ont en commun les h premiers termes, les points correspondants A et A' de Q ont en commun les h premiers termes; car les deux points B et B' étant contenus dans le même groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, leurs correspondants A et A' sont contenus dans le même ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, et par suite dans le même groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$.

Je dis que, si $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$, sont des points de R, et $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ leurs correspondants dans Q, la condition: $\lim B_\nu = B_0$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$. En effet, h étant fixé, il résulte de la condition: $\lim B_\nu = B_0$ que, dès que ν surpasse un certain entier s, B_ν a en commun avec B_0 les h premiers termes; alors, d'après ce qui précède, A_ν a en commun avec A_0 les h premiers termes; ceci ayant lieu quel que soit h, on a: $\lim A_\nu = A_0$.

D'une manière générale, si l'on a, comme dans ce qui précède, *deux ensembles fermés P et R, si, entre les points d'un certain ensemble Q contenu dans P et les points de R existe une correspondance biunivoque, réciproque, et telle que, $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$, étant des points de R et $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ leurs correspondants dans Q, la condition: $\lim B_\nu = B_0$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$, nous dirons qu'on a, entre Q et R, une correspondance biunivoque, réciproque, et continue dans le sens de R sur Q.* Nous dirons en outre que *l'ensemble (Q, R) est déduit de P*, cette double notation (Q, R) servant à rappeler que l'on envisage, non pas seulement un certain ensemble de points Q contenu dans P, mais en outre une certaine loi de correspondance entre cet ensemble et un ensemble fermé R.

Le procédé qui vient d'être exposé nous a permis de définir des ensembles déduits; nous dirons que *la suite normale*

$$K(p_{\beta_1}) \geqq K(p_{\beta_1,\beta_2}) \geqq \ldots \geqq K(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}) \geqq \ldots \tag{1}$$

détermine l'ensemble déduit (Q, R).

On reconnaît que les méthodes employées dans l'exemple des § 50—52 fournissent un cas particulier d'application du procédé général qui vient d'être exposé.

59. Signalons un cas très particulier, mais important, d'*ensemble déduit.*

Soit P un ensemble fermé, $K(p_i)$ un système normal contenu dans P. h étant donné, remplaçons chaque ensemble p_i par ses différentes portions contenues dans les différents groupes d'ordre h; désignons par K_h le système normal formé par toutes ces portions. D'après cette définition, l'ensemble des points du système K_h est identique à l'ensemble des points du système donné; de plus, chaque ensemble de K_{h+1} est contenu dans un certain ensemble de K_h; la suite de systèmes:

$$K_1 \geqq K_2 \geqq \ldots \geqq K_h \geqq \ldots$$

est une suite normale de systèmes; elle détermine donc un ensemble déduit (Q, R), Q se composant de tous les points du système donné $K(p_i)$.

Remarquons qu'un ensemble fermé contenu dans P, et en particulier P luimême, peut être considéré comme un système normal composé d'un seul ensemble, et par conséquent donne lieu à un ensemble déduit.

60. On peut obtenir des ensembles déduits au moyen d'un procédé plus général que celui du § 58, en ce sens qu'il est soumis à moins de conditions restrictives.

Soit P un ensemble fermé. Supposons qu'on ait des ensembles fermés tous contenus dans P, désignés par la notation $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, dans les conditions suivantes:

1° Les indices $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h)$ des ensembles p forment un ensemble de groupes complet Γ.

2° L'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$.

D'après cela, R étant l'ensemble de suites déterminé par l'ensemble de groupes Γ, et $(\beta_1, \beta_2, \dots)$ étant un point de R, on a, d'après 1° et 2°

$$(1) \qquad p_{\beta_1} \geqq p_{\beta_1, \beta_2} \geqq \dots \geqq p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h} \geqq \dots$$

3° On suppose que, quel que soit n, il y a un ensemble de (1) contenu tout entier dans un groupe d'ordre n.

Je dis que cette condition entraîne comme conséquence qu'il y a un et un seul point contenu dans les ensembles (1). En effet, faisons correspondre à chaque entier n un entier h_n qui sera le plus petit tel que l'ensemble de rang h_n de (1) soit contenu dans un groupe d'ordre n; on a évidemment $h_{n+1} \geqq h_n$, et de plus, le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ d'ordre n qui contient l'ensemble de rang h_n contient l'ensemble de rang h_{n+1}; donc le groupe g d'ordre $n+1$ qui contient ce dernier ensemble est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$. De là résulte l'existence d'une suite déterminée d'entiers: $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ telle que l'ensemble de (1) de rang h_n est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$.

Soit $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots)$; n étant fixé, le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ contient l'ensemble de rang h_n de (1) et par suite tous ceux qui suivent; donc $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ contient des points de chacun des ensembles (1). Soit p un quelconque des ensembles (1); puisque, quel que soit n, le groupe d'ordre n qui contient A contient des points de l'ensemble fermé p, A appartient à p. Ainsi A appartient à tous les ensembles (1). D'ailleurs un point qui fait partie de tous les ensembles (1) appartient en particulier aux ensembles de rang $h_1, h_2, \dots h_n, \dots$ donc aux groupes (α_1), $(\alpha_1, \alpha_2), \dots (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \dots$ donc se confond avec A.

Ainsi il y a un et un seul point contenu dans tous les ensembles (1). A tout point $B = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ de R correspond un point A de P, celui qui est contenu dans les ensembles (1). Soit Q l'ensemble de tous les points A.

Faisons enfin une dernière hypothèse.

4° A deux points distincts de R, B et B', correspondent par la loi 3° deux points distincts A et A' de P.

Il y a ainsi, entre Q et R, une correspondance biunivoque et réciproque; je dis que cette correspondance est continue dans le sens de R sur Q. Soit en effet, $B_1, B_2, \dots B_\nu, \dots$ des points de R, soit $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots A_0$ leurs correspondants dans Q. Supposons qu'on ait $\lim B_\nu = B_0$. Soit $B_0 = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ et $A_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Le point A_0 est contenu dans les ensembles:

(1) $$p_{\beta_1} \geqq p_{\beta_1, \beta_2} \geqq \cdots \geqq p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq \cdots$$

D'après la condition 3°, quel que soit n, il y a un entier h tel que l'ensemble de rang h de (1) est contenu dans un groupe d'ordre n, lequel, devant contenir A_0, est nécessairement $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Puisque $\lim B_\nu = B_0$, dès que ν depasse une certaine valeur, B_ν est contenu dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, et par suite A_ν est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, donc dans $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Ceci ayant lieu quel que soit n, on a: $\lim A_\nu = A_0$. Donc la correspondance est continue dans le sens de R sur Q, et on peut dire que (Q, R) est un ensemble déduit de P.

61. Faisons maintenant une étude inverse de la précédente. Partons des hypothèses suivantes: *on a un ensemble fermé P, un ensemble (Q, R) déduit de P, c'est-à-dire un ensemble Q contenu dans P et correspondant à un ensemble fermé R suivant une loi biunivoque, réciproque et continue dans le sens de R sur Q.*

Soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ un groupe relatif à R; aux points de R contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ correspondent dans Q des points dont je désigne l'ensemble par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Le dérivé d'ordre 0 de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est contenu dans P, qui est fermé et contient Q; je désigne $Q^0_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ par $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Ainsi, $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est un ensemble fermé contenu dans P et tel que tout groupe contenant un point de $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ contient au moins un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

D'ailleurs, si on considère deux groupes relatifs à R dont le second est contenu dans le premier, soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1})$, il est évident que $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, et par suite $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Cela posé, soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ un point de R, et soit A le point correspondant de Q. Considérons les ensembles:

(1) $$P_{\beta_1} \geqq P_{\beta_1, \beta_2} \geqq \cdots \geqq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq \cdots$$

Le point A est contenu dans tous les ensembles $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, par suite dans tous les ensembles (1). Je dis qu'il n'y a pas d'autre point contenu dans tous les ensembles (1); pour le prouver, je vais montrer que si un point $A' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ est contenu dans tous les ensembles (1), il coïncide avec A.

Quel que soit h, A' est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; donc, chacun des groupes contenant A', à savoir: (α_1), (α_1, α_2), $\ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i)$, $\ldots$ contenant un point de $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, contient au moins un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Nous pouvons donc prendre:

dans (α_1), un point A_1 de Q_{β_1};

dans (α_1, α_2), un point A_2 de Q_{β_1, β_2};

. . . .

dans $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h)$, un point A_h de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$;

. . . .

et ainsi indéfiniment.

Puisque A_h et tous les points qui suivent, A_{h+1}, etc. . . ., sont contenus dans le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h)$, on a: $\lim A_h = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h, \dots) = A'$. D'autre part, soit $B_1, B_2, \dots B_h, \dots$ les points de R correspondant à $A_1, A_2, \dots A_h, \dots$ Comme A_h appartient à $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, B_h appartient à $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h)$, d'où résulte: $\lim B_h = (\beta_1, \beta_2, \dots) = B$. Or, d'après la loi de correspondance, $\lim B_h = B$ entraîne: $\lim A_h = A$; on vient de voir que: $\lim A_h = A'$; donc A' coïncide avec A, et A est l'unique point contenu dans tous les ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$. Nous sommes donc parvenus au résultat suivant:

I. *Si* (Q, R) *est un ensemble déduit de* P, Q *est constitué comme il suit. On a des ensembles fermés contenus dans* P, *désignés par la notation* $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, *dans les conditions suivantes:*

1° $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$.

2° Etant donnée une suite infinie d'ensembles telle que:

$$P_{\beta_1} \geqq P_{\beta_1, \beta_2} \geqq \dots \geqq P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h} \geqq \dots, \tag{1}$$

il y a un et un seul point contenu dans tous ces ensembles. L'ensemble de tous les points ainsi obtenus est l'ensemble Q.

Complétons ce résultat par quelques remarques.

Soit toujours $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots)$ le point unique contenu dans les ensembles (1).

II. Je dis que, *quel que soit* n, *les ensembles* (1) *sont, à partir d'un certain rang, tous contenus dans le groupe* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$. Remarquons d'abord que, n étant fixé, si un ensemble de (1) est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, il en est de même des ensembles (1) qui suivent. Cela posé, admettons que la proposition II soit inexacte; il y a donc une certaine valeur de n telle qu'aucun des ensembles (1) n'est contenu dans le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$; alors, quel que soit h, $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ contient au moins un point extérieur à $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, on peut prendre un groupe contenant un tel point et qui soit extérieur à $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$; ce groupe, contenant un point de $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, contient au moins un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$; donc, en résumé, quel que soit h, on peut trouver un point M_h de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ qui soit extérieur au groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. En faisant $h = 1, 2, \ldots$, on a des points $M_1, M_2, \ldots$ appartenant respectivement à $Q_{\beta_1}, Q_{\beta_1, \beta_2}, \ldots$, par suite à Q; les correspondants de ces points dans R, soit $N_1, N_2, \ldots$ appartiennent donc respectivement aux groupes $(\beta_1), (\beta_1, \beta_2), \ldots$; on a donc: $\lim N_i = (\beta_1, \beta_2, \ldots) = B$, d'où résulte, d'après la loi de correspondance, $\lim M_i = A$, puisque A correspond à B; mais cela est impossible, puisque les points M_i sont tous extérieurs au groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ qui contient A; il y a donc contradiction. La proposition II est donc établie.

On en déduit la conséquence suivante, concernant l'ensemble de tous les ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

III. *Etant donné un ensemble $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, si un groupe g est relatif à cet ensemble, on peut trouver un ensemble P à h' indices $(h' \geqq h)$ contenu à la fois dans g et dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.*

En effet, on peut d'abord, dans le groupe g qui contient des points de $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, prendre un point A de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; ce point est contenu dans une suite d'ensembles P désignés de la manière suivante:

$$(2) \qquad P_{\beta_1} \geqq \ldots \geqq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}} \geqq \ldots$$

D'après II, à partir d'un certain rang, les ensembles (2) sont tous contenus dans g qui est un groupe contenant A; il en résulte la proposition III.

IV. *Si R est parfait, tous les ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ sont parfaits.*

En effet, soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ un groupe relatif à R; l'ensemble $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$ qui est une portion de R, est parfait. Soit A un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, soit B son correspondant dans $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$; puisque $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$ est parfait, on peut trouver une suite de points de cet ensemble tous distincts de B et tendant vers B, soit $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots$; soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ les points correspondants de $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots$ dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; ces points sont tous distincts de A et tendent vers A; le résultat étant valable pour tout point A de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, cet ensemble est dense en lui-même, et son dérivé d'ordre 0, $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, est parfait.

62. Considérons une suite normale de systèmes (Cf. § 58):

$$(1) \qquad K(p_{\beta_1}) \geqq K(p_{\beta_1, \beta_2}) \geqq \ldots \geqq K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}) \geqq \ldots$$

(Pour abréger, nous désignerons aussi $K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h})$ par K_h).

La suite normale (1) détermine un ensemble déduit (Q, R) [Cf. § 58], et, étant donné (Q, R), on a défini par les méthodes du § 61, des ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ qui sont parfaitement déterminés.

Remarquons que $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$. En effet, les points de Q qui correspondent aux points de $D[R, (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h)]$ constituent, d'après le § 61, l'ensemble $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, et d'autre part, sont contenus dans $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$; donc ce dernier ensemble contient $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, et, étant fermé, contient le dérivé d'ordre o de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, c'est-à-dire $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$.

h étant fixé, désignons par $S_h\,(Q, R)$ le système des ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$; chaque ensemble $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ étant contenu dans l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ correspondant, le système $S_h\,(Q, R)$ est un système normal d'ordre h; comme on a $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \beta_{h+1}} \leqq P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, le système $S_{h+1}\,(Q, R)$ est contenu dans $S_h\,(Q, R)$. En rapprochant ces résultats de la proposition I, on reconnaît que la suite:

$$S_1\,(Q, R) \geqq \dots \geqq S_h\,(Q, R) \geqq \dots \tag{2}$$

est une suite normale de systèmes déterminant l'ensemble déduit (Q, R). Quand on part de la suite (1), la suite (2) est parfaitement déterminée; nous dirons que c'est *la suite normale enveloppant l'ensemble déduit* (Q, R).

63. Soit (Q, R) un ensemble déduit de l'ensemble fermé P. Etant donnés des points $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots A_0$ appartenant à Q, nous dirons que, *dans l'ensemble déduit* (Q, R), *la suite* $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots$ *tend vers* A_0, *ou qu'on a: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q, R) *si,* $B_1, B_2, \dots B_\nu, \dots B_0$ *étant les points correspondants de* $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots A_0$, *dans* R, *on a: lim* $B_\nu = B_0$.

Soit une suite normale de systèmes:

$$K\,(p_{\beta_1}) \geqq \dots \geqq K\,(p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}) \geqq \dots$$

déterminant un ensemble déduit (Q, R). Je dis que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q, R) *est qu'on ait: lim* $A_\nu = A_0$ *dans chacun des systèmes* $K\,(p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h})$.

Conservons les notations du § 62.

Supposons d'abord qu'on ait: lim $A_\nu = A_0$ dans (Q, R); cela veut dire qu'on a: lim $B_\nu = B_0$. Soit $B_0 = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \dots)$. h étant fixé, B_ν, dès que ν dépasse une certaine valeur, est contenu dans le groupe $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h)$, et alors A_ν fait partie de $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$. Comme d'ailleurs, la condition: lim $B_\nu = B_0$ entraîne: lim $A_\nu = A_0$ (au sens ordinaire), on a: lim $A_\nu = A_0$ dans le système $K\,(p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h})$. Cela étant vrai quel que soit h, on voit que la condition de l'énoncé est nécessaire.

Supposons maintenant qu'on ait, quel que soit h: lim $A_\nu = A_0$ dans $K\,(p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h})$. Le point A_0 fait partie des ensembles:

$$p_{\beta_1} \geqq p_{\beta_1, \beta_2} \geqq p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h} \geqq \dots$$

h étant fixé, la condition: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h})$ montre que, dès que ν dépasse une certaine valeur, A_ν est contenu dans $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$, et par suite B_ν est contenu dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$; ceci ayant lieu quel que soit h, on a: $\lim B_\nu = B_0$, c'est-à-dire: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R). La condition est donc suffisante.

64. Soit P un ensemble fermé; soit (Q, R) et (Q', R') deux ensembles déduits de P. Nous dirons que (Q', R') *est contenu dans* (Q, R) *si:* 1° Q' *est contenu dans* Q*;* 2° *si,* $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ *étant des points appartenant à* Q' (*et par suite à* Q), *la condition: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q', R') *entraîne: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q, R).

Indiquons un cas, que nous rencontrerons ultérieurement, dans lequel ces conditions sont réalisées.

Supposons qu'on ait deux suites normales de systèmes:

$$(1) \qquad K_1 \geqq K_2 \geqq \ldots K_h \geqq \ldots$$

$$(2) \qquad K'_1 \geqq K'_2 \geqq \ldots K'_h \geqq \ldots$$

déterminant respectivement deux ensembles déduits (Q, R) et (Q', R'), et telles que, pour toutes les valeurs de h à partir d'un certain entier s, on ait:

$$(3) \qquad K_h \geqq K'_h, \quad (h \geqq s).$$

Je dis que (Q', R') est contenu dans (Q, R).

En effet, d'abord les points de Q', appartenant à tous les systèmes K'_h, appartiennent, d'après (3), à tous les systèmes K_h pour $h \geqq s$ et par suite à tous les systèmes (1), donc aussi à Q qui se compose des points appartenant à tous les systèmes (1).

En second lieu, soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ des points de Q' tels qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q', R'). Il en résulte, d'après le § 63 (condition nécessaire), qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (2): $K'_1, K'_2, \ldots$ Par suite de la condition (3), on a aussi: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (1) pour $h \geqq s$, et par suite pour toute valeur de h. D'après le § 63 (condition suffisante), cela prouve qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R). La proposition est donc démontrée.

65. Supposons qu'on ait des ensembles déduits de l'ensemble fermé P, en nombre infini dénombrable (ou fini):

$$(1) \qquad (Q_1, R_1), (Q_2, R_2), \ldots (Q_n, R_n), \ldots$$

Proposons-nous de former un nouvel ensemble déduit de P, (Q, R) ayant les deux propriétés suivantes:

1° Q se compose des points appartenant à $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$

2° Si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ sont des points de Q, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R) est qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des ensembles déduits (Q_n, R_n).

Nous dirons *que* (Q, R) *est l'ensemble déduit plus grand commun diviseur des ensembles déduits* (1).

Nous allons former (Q, R) dans le cas où chacun des ensembles déduits (1) est déterminé par une suite normale. Soit:

(2) $$K_{1,n} \geqq K_{2,n} \geqq \ldots \geqq K_{h,n} \geqq \ldots$$

une suite normale de systèmes déterminant l'ensemble déduit (Q_n, R_n).

Considérons le tableau:

(3) $$\left\{\begin{array}{l} K_{1,1} \geqq K_{2,1} \geqq \ldots \geqq K_{h,1} \geqq \ldots \\ K_{1,2} \geqq K_{2,2} \geqq \ldots \geqq K_{h,2} \geqq \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{1,n} \geqq K_{2,n} \geqq \ldots \geqq K_{h,n} \geqq \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Désignons par Σ_1 le système $K_{1,1}$; soit $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ les ensembles dont il se compose. Soit Σ_2 le système plus grand commun diviseur des deux systèmes $K_{2,1}$ et $K_{2,2}$; tout ensemble faisant partie de Σ_2 est contenu dans un ensemble de $K_{2,1}$, par suite dans un ensemble de $K_{1,1}$ ou Σ_1; donc Σ_2 est contenu dans Σ_1; désignons les ensembles de Σ_2 par la notation $p_{i,j}$, en observant la condition que $p_{i,j}$ soit contenu dans p_i. D'une manière générale, soit Σ_h le système normal plus grand commun diviseur des systèmes:

(4) $$K_{h,1},\ K_{h,2}, \ldots K_{h,h}.$$

Σ_{h+1} sera le plus grand commun diviseur des systèmes:

(5) $$K_{h+1,1},\ K_{h+1,2}, \ldots K_{h+1,h},\ K_{h+1,h+1}.$$

Un ensemble déterminé p faisant partie de Σ_{h+1} est contenu dans certains ensembles faisant respectivement partie des h premiers systèmes (5), par suite dans certains ensembles faisant respectivement partie des systèmes (4), donc enfin est contenu dans un ensemble de Σ_h. Ainsi Σ_{h+1} est contenu dans Σ_h; on peut désigner les ensembles de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_h, \ldots$ par la notation $p_{\beta_1}, p_{\beta_1,\beta_2}, \ldots p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}, \ldots$ en observant la condition que $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h,\beta_{h+1}}$ soit contenu dans $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$. En outre, Σ_h, contenu dans les systèmes (4) qui sont d'ordre h, est d'ordre h. En résumé, on a défini une suite normale de systèmes:

(6) $$\Sigma_1 \geqq \Sigma_2 \geqq \ldots \geqq \Sigma_h \geqq \ldots$$

Cette suite détermine un ensemble déduit (Q, R).

Si on considère une ligne quelconque du tableau (3), par exemple la n^{me}, en comparant les deux suites:

$$\begin{cases} K_{1,n} \geqq K_{2,n} \geqq \ldots \geqq K_{n,n} \geqq \ldots \geqq K_{h,n} \geqq \ldots \\ \Sigma_1 \quad \geqq \Sigma_2 \quad \geqq \ldots \geqq \Sigma_n \quad \geqq \ldots \geqq \Sigma_h \quad \geqq \ldots \end{cases}$$

on reconnaît que pour $h \geqq n$, Σ_h est contenu dans $K_{h,n}$. Il en résulte que (Q, R) est contenu dans (Q_n, R_n). Ainsi (Q, R) est contenu dans tous les ensembles déduits (Q_n, R_n). Je dis que (Q, R) satisfait aux conditions imposées au plus grand commun diviseur des (Q_n, R_n).

En effet, d'abord un point appartenant à $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ appartient à tous les systèmes du tableau (3); quel que soit h, il appartient à tous les systèmes (4), donc à Σ_h; donc, appartenant à tous les systèmes Σ_h de (6), il appartient à Q. Réciproquement, si un point appartient à Q, il appartient à tous les systèmes Σ_h de (6), donc, quel que soit h, aux systèmes (4); si on considère alors la n^{me} ligne du tableau (3), le point en question appartient aux systèmes de cette ligne à partir d'un certain rang, donc à tous ces systèmes, donc à Q_n, et cela quel que soit n.

Soit maintenant $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ des points de Q. Supposons d'abord qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des ensembles déduits (Q_n, R_n). D'après le § 63, il en résulte qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (2), par suite dans chacun des systèmes du tableau (3), par suite, quel que soit h, dans chacun des systèmes (4), par suite, d'après le § 57, dans Σ_h quel que soit h, par suite dans chacun des systèmes de (6), par suite enfin, d'après le § 63, dans (Q, R).

Réciproquement, supposons qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R). Il en résulte qu'on a, d'après le § 63, $\lim A_\nu = A_0$ dans Σ_h quel que soit h, donc $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (4), quel que soit h. Considérons alors la n^{me} ligne du tableau (3), autrement dit la suite normale (2); d'après ce qu'on vient de voir, on a $\lim A_\nu = A_0$ dans tous les systèmes $K_{n,n}, K_{n+1,n}, \ldots$, par suite dans tous les systèmes (2), par suite dans (Q_n, R_n), et cela quel que soit n. La proposition est donc démontrée.

66. Soit, dans un ensemble fermé P, un ensemble déduit (Q, R), que nous supposons défini d'une manière absolument quelconque. Utilisons les résultats du § 61; $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ étant un groupe relatif à R, on désigne par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h}$ l'ensemble des points de Q correspondant aux points de R contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, par $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ le dérivé d'ordre o de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. D'après la proposition I du § 61, Q est l'ensemble des points dont chacun est contenu dans une suite telle que:

$$P_{\beta_1} \geqq P_{\beta_1, \beta_2} \geqq \ldots \geqq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq \ldots$$

Le système $K(P_{\beta_1})$, constitué par les ensembles P à un seul indice, n'est pas nécessairement normal, car les ensembles P_{β_1} ne sont assujettis à aucune condition; au moyen du procédé du § 54, nous pouvons remplacer ce système par un système normal d'ordre 1, contenant les mêmes points; soit $K(\Pi_{\gamma_1})$ ce système.

Π_{γ_1} étant un ensemble quelconque, mais déterminé, du système $K(\Pi_{\gamma_1})$, considérons tous les ensembles à deux indices, P_{β_1, β_2}; prenons la partie commune à chacun de ces ensembles et à Π_{γ_1}; le système formé par ces parties communes, qui est contenu dans Π_{γ_1}, peut être remplacé, au moyen du procédé du § 54, par un système normal d'ordre 2 contenant les mêmes points, et dont nous désignerons les ensembles par Π_{γ_1, γ_2}.

D'une manière générale, $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ étant défini, nous considérons les parties communes à cet ensemble et aux différents ensembles P à $h+1$ indices; nous remplaçons le système de ces parties communes par un système normal d'ordre $h+1$ contenant les mêmes points, et dont nous désignons les ensembles par la notation $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h, \gamma_{h+1}}$. On a ainsi une suite normale de systèmes:

$$K(\Pi_{\gamma_1}) \geqq K(\Pi_{\gamma_1, \gamma_2}) \geqq \ldots \geqq K(\Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}) \geqq \ldots$$

qui détermine un ensemble déduit (Q', R'). Je dis que l'ensemble Q dont on est parti est contenu dans Q'. En effet, soit A un point de Q; il correspond à un certain point B de R, soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$; A est contenu dans les ensembles

$$P_{\beta_1}, P_{\beta_1, \beta_2}, \ldots P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \ldots$$

Etant contenu dans P_{β_1}, A fait partie d'un ensemble bien déterminé Π_{γ_1}; appartenant à Π_{γ_1} et à P_{β_1, β_2}, il fait partie d'un ensemble bien déterminé Π_{γ_1, γ_2}, d'après la définition de ces ensembles; en continuant le raisonnement, on reconnaît que A fait partie d'une suite bien déterminée d'ensembles

$$\Pi_{\gamma_1} \geqq \Pi_{\gamma_1, \gamma_2} \geqq \ldots \geqq \Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h} \geqq \ldots$$

Donc A fait partie de Q'.

Par le procédé qui vient d'être exposé, *on a remplacé l'ensemble déduit* (Q, R) *par un ensemble déduit* (Q', R') *déterminé par une suite normale de systèmes, l'ensemble nouveau* Q' *contenant l'ensemble donné* Q.

67. Soit P un ensemble fermé; soit (Q, R) un ensemble déduit de P; soit (T, U) un ensemble déduit de l'ensemble fermé R. A un point C de U correspond, par la loi de correspondance entre T et U [disons, en abrégé, par la loi (T, U)], un point B de T. Au point B contenu dans T, et par suite dans R, correspond, par la loi de correspondance (Q, R), un point A de Q; soit V l'ensemble des points A ainsi obtenus; V est contenu dans Q, et par suite dans P. Nous pouvons considérer comme établie une correspondance biunivoque et réciproque entre les points C de U et les points A de V, par l'intermédiaire des points B de T: un point C de U et un point A se correspondent s'il y a un point B de T tel que A et B se correspondent par la loi (Q, R), et B et C par la loi (T, U).

Cette correspondance entre V et U est continue dans le sens de U sur V; car, en désignant par A_ν, B_ν, C_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 0)$, trois points correspondants: A_ν dans V, B_ν dans T, C_ν dans U, la condition: $\lim C_\nu = C_0$ entraîne: $\lim B_\nu = B_0$ d'après la loi (T, U), et la condition: $\lim B_\nu = B_0$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$ d'après la loi (Q, R).

En résumé, on peut dire que (V, U) est un ensemble déduit de P, la loi de correspondance résultant des deux correspondances (Q, R) et (T, U). *On dira que (Q, R) et (T, U) sont deux ensembles déduits successifs*, et que l'ensemble déduit (V, U) est l'ensemble déduit résultant de (Q, R) et (T, U). Il est évident que (V, U) est contenu dans (Q, R).

68. Particularisons la question qui précède. Soit, dans l'ensemble fermé P, une suite normale de systèmes:

$$(1) \qquad K(p_{\beta_1}) \geqq K(p_{\beta_1, \beta_2}) \geqq \ldots \geqq K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}) \geqq \ldots$$

Elle détermine un ensemble déduit (Q, R).

En désignant, comme précédemment, par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ l'ensemble des points de Q correspondant aux points de R contenus dans le groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, par $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ le dérivé d'ordre 0 de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, on a vu que $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Donnons-nous maintenant, dans l'ensemble fermé R, une suite normale de systèmes:

$$(2) \qquad K(r_{\gamma_1}) \geqq K(r_{\gamma_1, \gamma_2}) \geqq \ldots \geqq K(r_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}) \geqq \ldots$$

Elle détermine un ensemble déduit (T, U). Soit $T_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ l'ensemble des points de R qui correspondent aux points de U contenus dans $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h)$; l'ensemble $T_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$, contenu dans R, est d'autre part contenu dans un certain groupe d'ordre h, (à cause du fait que T est déterminé par une suite normale; cf. § 58);

soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ ce groupe. Par la loi (Q, R), aux points de R contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, correspondent dans Q les points de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; donc, par cette même loi (Q, R), aux points de $T_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ correspondent dans Q des points, dont l'ensemble est contenu dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Mais ce dernier ensemble n'est autre que l'ensemble des points de P qui, par la loi résultante (V, U), correspondent aux points de U contenus dans $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h)$; désignons-le par $V_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$, et son dérivé d'ordre o par $W_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$. On voit que $V_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ est contenu dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, par suite $W_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, a fortiori dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Le système des ensembles W à h indices n'est pas normal, car rien n'indique que deux ensembles W à h indices n'ont aucun point commun.

Appliquons le procédé du § 66 à l'ensemble (V, U) déduit de P, de façon à obtenir un nouvel ensemble déduit (V', U') déterminé par une suite normale de systèmes, et tel que V soit contenu dans V'. Dans l'application de ce procédé, on remplace le système $K(W_{\gamma_1})$ des ensembles W à un indice par un système normal $K(\Theta_{\delta_1})$ contenant les mêmes points, et d'une manière générale le système des ensembles W à h indices $K(W_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h})$ par un système normal $K(\Theta_{\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_h})$ contenant les mêmes points.

Comme, d'après ce qu'on vient de voir, chaque ensemble W à h indices est contenu dans un ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ déterminé, il en résulte que chaque ensemble $\Theta_{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h}$, qui est compris dans un certain ensemble W à h indices (d'après le procédé du § 66), est contenu dans un ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ déterminé. On obtient ainsi une suite normale de systèmes:

$$(3) \qquad K(\Theta_{\delta_1}) \geqq K(\Theta_{\delta_1, \delta_2}) \geqq \ldots \geqq K(\Theta_{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h}) \geqq \ldots$$

déterminant l'ensemble déduit (V', U'), avec en outre cette condition que chaque système de (3) est contenu dans le système de même rang de (1), c'est-à-dire que:

$$K(\Theta_{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h}) \leqq K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}).$$

Le résultat de cette étude peut s'exprimer ainsi: *On a, dans un ensemble fermé P, un ensemble déduit (Q, R) déterminé par une suite normale* (1); *dans R, un ensemble déduit (T, U) déterminé par une suite normale; il en résulte un ensemble déduit de P, (V, U). On peut remplacer (V, U) par un ensemble déduit (V', U') déterminé par une suite normale* (3) *dont chaque système est contenu dans le système de même rang de* (1), *et telle que V est contenu dans V'.*

CHAPITRE VII.

Fonctions de classe $\leqq 3$.

69. Nous allons appliquer les notions nouvelles acquises dans le précédent chapitre à la théorie des fonctions. Faisons d'abord quelques remarques.

Soit f une fonction définie sur un ensemble fermé P. Soit (Q, R) un ensemble déduit de P. Considérons la fonction φ définie sur l'ensemble fermé R par la condition d'être égale, en chaque point B de R, à la valeur de f au point A de Q qui correspond à B. Nous dirons que φ est la transformée de f sur (Q, R).

I. Si A est un point de Q où f est continue par rapport à P, φ est, au point B de R correspondant à A, continue par rapport à R. En effet, soit $B_1, B_2, \dots B_\nu, \dots$ une suite de points de R tendant vers B, soit $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots$ leurs correspondants dans Q; d'après la loi de correspondance, la condition: $\lim B_\nu = B$ entraîne: $\lim A_\nu = A$; cette dernière condition, en vertu de la continuité de f en A, entraîne: $\lim f(A_\nu) = f(A)$, ce qui peut s'écrire, d'après la définition de φ: $\lim \varphi(B_\nu) = \varphi(B)$. Cette dernière condition exprime que φ est continue en B par rapport à R.

II. Si on a, sur P, une suite de fonctions $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ tendant vers f, si $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots \varphi$, sont les transformées sur (Q, R) de $f_1, f_2, \dots f_n, \dots f$, la suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots$ tend vers φ. En effet, B étant un point quelconque de R et A son correspondant dans Q, on a, d'après l'hypothèse, la condition: $\lim f_n(A) = f(A)$, qui s'écrit: $\lim \varphi_n(B) = \varphi(B)$.

III. Soit f une fonction de classe α sur P. Je dis que φ est de classe $\leqq \alpha$ sur R.

La proposition a lieu pour $\alpha = 0$, puisque, f étant continue sur P en tout point A de Q, il en résulte, d'après I, que φ est continue en tout point B de R.

Admettons la proposition pour les nombres inférieurs à un nombre déterminé α, et démontrons-la pour α. f, étant de classe α, est limite d'une suite de fonctions de classes inférieures à α, soit: $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ Les transformées $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots$ de ces fonctions sur (Q, R) sont, d'après la proposition admise, de classes inférieures à α, et, d'après II, tendent vers φ; donc φ est de classe $\leqq \alpha$.

IV. Il résulte de III que si f appartient à E sur P, φ appartient sur R à E, et par suite, satisfait, sur tout ensemble parfait contenu dans R, à la condition fondamentale: $m[\omega'(f)] = 0$. Nous obtenons ainsi une condition nécessaire nouvelle pour qu'une fonction appartienne à E, condition qui englobe celle que nous connaissions jusqu'ici, mais qui est plus complète et qu'on peut énoncer ainsi:

Pour qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P appartienne à E, il faut que, (Q, R) étant un ensemble déduit quelconque de E, et φ la transformée de f sur (Q, R), φ satisfasse sur tout ensemble parfait contenu dans R à la condition $m(\omega'(\varphi)) = 0$. Pour abréger le langage, nous exprimerons cette condition en disant que *f satisfait sur P à la condition fondamentale généralisée.* De plus, pour simplifier l'écriture, nous cesserons de désigner la transformée de f sur (Q, R) par une lettre différente de f, et nous dirons simplement que nous considérons la fonction f sur (Q, R), ou même simplement sur R.

70. Soit f une fonction définie sur l'ensemble fermé P et satisfaisant à la condition fondamentale généralisée.

Nous définirons des ensembles déduits de P correspondant aux nombres ordinaux des classes I et II:

$$(1) \qquad (P_0, R_0), (P_1, R_1), \ldots (P_n, R_n), \ldots (P_\omega, R_\omega), \ldots (P_\alpha, R_\alpha), \ldots,$$

chacun de ces ensembles déduits étant déterminé par une suite normale de systèmes qui sera une suite normale enveloppant l'ensemble considéré (Cf. § 62), soit, pour l'ensemble (P_α, R_α), la suite normale

$$(2) \qquad K_1(P_\alpha), K_2(P_\alpha), \ldots K_h(P_\alpha), \ldots$$

En même temps, nous définirons certaines fonctions de classe ≤ 1: $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n, \ldots \varphi_\omega, \ldots \varphi_\alpha, \ldots$ respectivement définies sur les ensembles fermés $R_0, R_1, \ldots R_n, \ldots R_\omega, \ldots R_\alpha, \ldots$ Nous considérerons aussi ces fonctions respectivement sur les ensembles $P_0, P_1, \ldots P_n, \ldots P_\omega, \ldots P_\alpha, \ldots$

Les ensembles déduits (1) et les fonctions φ seront définis si nous réalisons les trois opérations suivantes: 1° Définition de (P_0, R_0); 2° Connaissant (P_α, R_α), définition de φ_α et de $(P_{\alpha+1}, R_{\alpha+1})$; 3° Définition de (P_α, R_α) quand α est de deuxième espèce.

1° P_0 et R_0 sont identiques à P; (c'est seulement pour la symétrie des notations que nous employons les lettres P_0 et R_0). Nous avons fait remarquer, au § 59, que l'ensemble fermé P pouvait être considéré comme déduit de lui-même. La suite normale de systèmes déterminant l'ensemble déduit (P_0, R_0) sera définie comme il suit: $K_h(P_0)$ désigne le système constitué par les portions de P contenues dans les différents groupes d'ordre h relatifs à P.

2° Supposons défini (P_α, R_α), ainsi que la suite normale (2) enveloppant (P_α, R_α). Comme (P_α, R_α) est un ensemble déduit de P, la fonction f, considérée sur R_α, satisfait à la condition fondamentale; il existe donc une fonction φ_α définie sur R_α (et que nous considérerons aussi sur P_α), de classe ≤ 1 sur R_α, et telle que l'ensemble Π_a des points de R_a où l'on a: $f \neq \varphi_a$ est de première catégorie par rapport à R_a^Ω. Remplaçons Π_a par un système d'ensemble fermés contenant tous les points de Π_a; les points de ce système forment, si l'on emploie le procédé du § 59, un ensemble déduit de R_a, soit (S_a, T_a); des deux ensembles déduits successifs, (P_a, R_a) déduit de P, et (S_a, T_a) déduit de R_a résulte un ensemble déduit de P, soit (Σ_a, T_a), Σ_a étant contenu dans P_a et contenant les points correspondant à Π_a d'après la loi (P_a, R_a); par le procédé du § 68, on peut remplacer (Σ_a, T_a) par un ensemble déduit (P_{a+1}, R_{a+1}) déterminé par une suite normale S dont chaque système est contenu dans le système de même rang de la suite normale (2) déterminant (P_a, R_a), et de plus P_{a+1} contenant Σ_a; enfin on remplace la suite normale S par la suite enveloppant (P_{a+1}, R_{a+1}), soit $K_h(P_{a+1})$ le h^{me} système de cette suite; d'après la condition qui vient d'être énoncée, quel que soit h, on a:

$$K_h(P_a) \geqq K_h(P_{a+1}).$$

D'autre part, P_{a+1} contient Σ_a, par suite tous les points de P correspondant à Π_a dans la correspondance (P_a, R_a); donc, en tout point de $P_a - P_{a+1}$, on a: $f = \varphi_a$.

3° Si α est de deuxième espèce, on prend une suite de nombres $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ $\dots < \alpha_n < \dots$ tendant vers α. Par définition, (P_a, R_a) sera l'ensemble déduit plus grand commun diviseur des ensembles déduits:

$$(P_{a_1}, R_{a_1}),\ (P_{a_2}, R_{a_2}), \dots (P_{a_n}, R_{a_n}), \dots$$

Cet ensemble sera obtenu par le procédé du § 65. Il en résulte que P_a est l'ensemble des points communs à tous les $P_{a'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

Ainsi se trouvent définis les ensembles déduits (P_a, R_a) et les fonctions φ_a, ainsi que les suites normales déterminant les différents ensembles déduits (P_a, R_a). Il est à remarquer qu'il entre une certaine part d'arbitraire dans ces définitions.

Faisons la remarque suivante. Si β et γ sont deux nombres ordinaux, avec $\beta < \gamma$, on a évidemment $(P_\beta, R_\beta) \geqq (P_\gamma, R_\gamma)$; en outre, si on considère les deux suites normales déterminant respectivement (P_β, R_β) et (P_γ, R_γ):

$$\begin{gathered} K_1(P_\beta),\ K_2(P_\beta), \dots K_h(P_\beta), \dots \\ K_1(P_\gamma),\ K_2(P_\gamma), \dots K_h(P_\gamma), \dots \end{gathered}$$

qui sont respectivement des suites normales enveloppant (P_β, R_β), (P_γ, R_γ), il y a un entier n tel que pour $h \geqq n$, on a

$$K_h(P_\beta) \geqq K_h(P_\gamma).$$

On reconnaît d'abord que si cette proposition est établie d'une part pour β et γ $(\beta < \gamma)$, et d'autre part pour γ et δ $(\gamma < \delta)$, elle est vraie pour β et δ.

Cela posé, pour établir la proposition dans toute sa généralité, admettons-la dans le cas où β et γ sont des nombres ordinaux quelconques inférieurs à un nombre déterminé α, et démontrons-la quand on remplace γ par α. Distinguons deux cas:

1° α est de première espèce; soit α' son précédent. La proposition a lieu pour α', α, d'après le procédé de formation exposé au 2° . Elle a lieu, par hypothèse, pour β, α', si $\beta < \alpha'$. Donc elle a lieu pour β, α, β étant quelconque et inférieur à α.

2° α est de deuxième espèce. Dans le procédé de définition 3°, on a fait choix d'une suite $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$ tendant vers α, et d'après le procédé de définition de l'ensemble déduit plus grand commun diviseur, la proposition a lieu, quel que soit n, pour α_n, α. Si β est un nombre quelconque inférieur à α, il y a des nombres de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ supérieurs à β; soit α_n l'un d'eux. La proposition a lieu, par hypothèse, pour β, α_n. Donc elle a lieu pour β, α.

La proposition est donc établie.

On en conclut immédiatement l'extension suivante: Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ des nombres ordinaux en nombre fini, tels que

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p.$$

Si on considère les suites normales déterminant respectivement les ensembles déduits $(P_{\beta_1}, R_{\beta_1})$, $(P_{\beta_2}, R_{\beta_2})$, $\ldots (P_{\beta_p}, R_{\beta_p})$, il y a un entier n tel que, pour $h \geqq n$, on a:

$$K_h(P_{\beta_1}) \geqq K_h(P_{\beta_2}) \geqq \ldots \geqq K_h(P_{\beta_p}).$$

71. Je dis que, *étant donnée une fonction f sur un ensemble fermé, si, dans l'application du procédé qui vient d'être exposé, on aboutit à un ensemble déduit (P_β, R_β) tel que f est de classe $\leqq 1$ sur R_β, f est de classe $\leqq 3$ sur P.*

Résumons les conditions de la question.

On a des ensembles déduits de P correspondant aux nombres ordinaux $\leqq \beta$:

(1) $$0, 1, 2, \ldots n, \ldots \omega, \ldots \alpha, \ldots \beta,$$

soit:

(2) $$(P_0, R_0), \ldots (P_\alpha, R_\alpha), \ldots (P_\beta, R_\beta).$$

On a:

$$(3) \qquad P_0 \geqq P_1 \geqq \ldots \geqq P_\alpha \geqq \ldots \geqq P_\beta.$$

Soit A un point de P; on a $P_0 = P$; si A ne fait pas partie de P_β, il y a des ensembles de (3) qui ne contiennent pas A; soit γ le plus petit indice de ces ensembles; γ ne peut être de deuxième espèce, car alors tous les ensembles (3) d'indice $< \gamma$ devraient contenir A, et comme P_γ contient les points communs à tous ces ensembles, P_γ contiendrait A; donc γ est de première espèce et a un précédent α: A fait partie de P_α, sans faire partie de $P_{\alpha+1}$. On peut dire que *tout point A de P fait partie, d'une manière bien déterminée, d'un ensemble $P_\alpha - P_{\alpha+1}$*, ($P_{\alpha+1}$ n'existant pas si $\alpha = \beta$).

Enfin on a des fonctions

$$(4) \qquad \varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\alpha, \ldots \varphi_\beta$$

telles que φ_α est définie sur R_α et de classe $\leqq 1$; nous considérons en même temps φ_α sur P_α, la valeur de φ_α en chaque point de P_α étant, bien entendu, égale à la valeur de φ_α au point correspondant de R_α. En un point A de $P_\alpha - P_{\alpha+1}$, on a: $f = \varphi_\alpha$.

L'ensemble déduit (P_α, R_α) est déterminé par la suite normale enveloppante:

$$K_1(P_\alpha),\ K_2(P_\alpha), \ldots K_h(P_\alpha), \ldots$$

h étant fixé, si on désigne par $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ un groupe relatif à R_α, par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ l'ensemble des points de P_α correspondant aux points de R_α contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, on sait que le système $K_h(P_\alpha)$ est constitué par tous les ensembles fermés $Q^\circ_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, qui n'ont deux à deux aucun point commun.

La fonction φ_α est de classe $\leqq 1$ sur R_α; on peut donc (Ch. III), attacher à tout groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ relatif à R_α un nombre déterminé $\Theta_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ tel qu'on ait la condition suivante:

Etant donné un point de R_α, soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$, le nombre $\varphi_\alpha(B)$ est la limite de la suite:

$$\Theta_{\beta_1}, \Theta_{\beta_1, \beta_2}, \ldots \Theta_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \ldots$$

Considérons le système $K_h(P_\alpha)$; nous désignerons par $\psi_{\alpha, h}$ une fonction qui sera définie sur chacun des ensembles dont se compose $K_h(P_\alpha)$, de la manière suivante: sur l'ensemble $Q^\circ_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, on a:

$$\psi_{\alpha, h} = \Theta_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}.$$

Ainsi nous définissons: $\psi_{a,1}$ sur chacun des ensembles de $K_1(P_a)$, $\psi_{a,2}$ sur chacun des ensembles de $K_2(P_a)$, ... $\psi_{a,h}$ sur chacun des ensembles de $K_h(P_a)$, ...

Si A est un point de P_a, A appartient à tous les systèmes $K_h(P_a)$; en désignant par $B=(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \dots)$ le point de R_a correspondant à A, A appartient aux ensembles $Q^\circ_{\beta_1}$, $Q^\circ_{\beta_1,\beta_2}, \dots Q^\circ_{\beta_1,\beta_2,\dots\beta_h}, \dots$ Donc on a:

$$\psi_{a,h}(A) = \Theta_{\beta_1,\beta_2,\dots\beta_h},$$

d'où, par suite:

$$\lim_{h=\infty} \psi_{a,h}(A) = \varphi_a(B) = \varphi_a(A). \tag{5}$$

Cela posé, rangeons les nombres ordinaux $\leqq \beta$ en une suite dénombrable:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n, \dots;$$

formons les suites limitées:

$$\begin{array}{l} \gamma_1 \\ \gamma_1, \gamma_2 \\ \quad \cdots \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n \\ \quad \cdots\cdots \end{array} \tag{6}$$

que nous écrivons ensuite dans l'ordre naturel de grandeur:

$$\begin{array}{l} \delta_{1,1} \\ \delta_{1,2}, \delta_{2,2} \\ \quad \cdots \\ \delta_{1,n}, \delta_{2,n}, \dots \delta_{n,n} \\ \quad \cdots\cdots \end{array} \tag{7}$$

de telle sorte que l'ensemble des nombres de la n^{me} ligne de (7) est identique à l'ensemble de nombres $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$, et que de plus on a:

$$\delta_{1,n} < \delta_{2,n} < \dots < \delta_{n,n}. \tag{8}$$

De plus, tout nombre $\leqq \beta$ fait partie, quand n dépasse une certaine valeur, de l'ensemble de nombres (8).

D'après la remarque du § 70, si on considère les n ensembles déduits correspondant aux indices: $\delta_{1,n}, \delta_{2,n}, \dots \delta_{n,n}$, il existe un entier λ_n tel que pour $h \geqq \lambda_n$ on a:

$$K_h(P_{\delta_{1,n}}) \geqq K_h(P_{\delta_{2,n}}) \geqq \dots \geqq K_h(P_{\delta_{n,n}}). \tag{9}$$

Remplaçons les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ ainsi obtenus par des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$ tels que $\mu_n \geqq \lambda_n$ et tels qu'on ait en outre:

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots \tag{10}$$

Les conditions (9) sont vérifiées pour $h \geqq \mu_n$, de sorte qu'on a:

$$K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}) \geqq K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}}) \geqq \ldots \geqq K_{\mu_n}(P_{\delta_{n,n}}). \tag{11}$$

Nous allons définir sur P une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ tendant vers f. Nous définirons f_n comme il suit.

Désignons par $P - K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}})$ l'ensemble des points de P qui ne font pas partie du premier système (11), par $K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}) - K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}})$ l'ensemble des points qui appartiennent au premier de ces systèmes sans appartenir au second, etc... Nous prendrons:

$$\begin{array}{ll} \text{Sur } P - K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}): & f_n = 0. \\ \text{Sur } K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}) - K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}}): & f_n = \psi_{\delta_{1,n},\,\mu_n}. \\ \text{Sur } K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}}) - K_{\mu_n}(P_{\delta_{3,n}}): & f_n = \psi_{\delta_{2,n},\,\mu_n}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{Sur } K_{\mu_n}(P_{\delta_{n,n}}): & f_n = \psi_{\delta_{n,n},\,\mu_n}. \end{array} \tag{12}$$

Je dis que f_n est de classe $\leqq 2$ sur P. D'abord, sur chaque ensemble du dernier système (11), soit $K_{\mu_n}(P_{\delta_{n,n}})$, f est constante, donc de classe $\leqq 2$. Admettons que f_n soit de classe $\leqq 2$ sur chaque ensemble du h^{me} système (11); considérons alors un ensemble bien déterminé du $(h-1)^{me}$ système (11), soit Q; d'après la définition (12), f_n est égale, sur Q, à une constante, sauf aux points qui font partie du h^{me} système; or ces points constituent, dans l'ensemble Q, une infinité dénombrable d'ensembles fermés, sur chacun desquels, d'après la proposition admise, f_n est de classe $\leqq 2$; donc, par application du théorème du § 48, f_n est de classe $\leqq 2$ sur Q. En remontant ainsi de proche en proche, on établit que f_n est de classe $\leqq 2$ sur chacun des ensembles du premier système (11), et aussi sur P, par une dernière application du même théorème. Ainsi f_n est de classe $\leqq 2$.

Je dis qu'en tout point A de P on a:

$$\lim f_n(A) = f(A).$$

On a vu qu'il y a un nombre $\alpha \leqq \beta$ bien déterminé tel que A fait partie de P_α et ne fait pas partie de $P_{\alpha+1}$. On a:

$$f(A) = \varphi_a(A).$$

Dès que n dépasse une certaine valeur n_1, a et $a+1$ font partie de l'ensemble des nombres (8), de telle sorte qu'il y a, dans (11), deux termes consécutifs qui sont

$$K_{\mu_n}(P_a) \geqq K_{\mu_n}(P_{a+1}).$$

A fait partie de P_a, par suite de tous les $K_{\mu_n}(P_a)$; ne faisant pas partie de P_{a+1}, il ne fait pas partie de tous les ensembles $K_h(P_{a+1})$; donc, dès que h dépasse une certaine valeur q, A ne fait pas partie de $K_h(P_{a+1})$; on aura $\mu_n > q$ dès que n dépassera une certaine valeur n_2. Soit n' le plus grand des entiers n_1, n_2; la condition $n > n'$ entraîne les conséquences suivantes:

Il y a, dans la suite (11), deux termes consécutifs, dont le premier est $K_{\mu_n}(P_a)$, le second $K_{\mu_n}(P_{a+1})$; de plus, A, qui fait partie de $K_{\mu_n}(P_a)$, ne fait pas partie de $K_{\mu_n}(P_{a+1})$. Donc, d'après la définition (12), pour toute valeur de $n > n'$, on a:

$$f_n(A) = \psi_{a,\mu_n}(A).$$

Le raisonnement est évidemment valable pour le cas de $a = \beta$, auquel cas l'ensemble P_{a+1} n'existe pas.

Quand n croît indéfiniment, il en est de même de μ_n, on a donc, d'après (5):

$$\lim f_n(A) = \lim \psi_{a,\mu_n}(A) = \varphi_a(A) = f(A).$$

Ainsi f est la limite de f_n sur P. Comme f_n est de classe $\leqq 2$, *f est de classe $\leqq 3$*.

NOTE.

Je signale, comme travaux se rapportant à des questions connexes à celles qui sont étudiées dans le présent mémoire:

H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement (Journal de mathématiques, 1905).

M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel (Thèse, Paris, 1906, et Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.)

TABLE.

Deuxième partie.