ÜBER DIE COSSERAT'SCHEN FUNKTIONENTRIPEL UND IHRE ANWENDUNG IN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE.

VON

A. KORN,

in MÜNCHEN.

Das Problem des elastischen Gleichgewichts bei gegebenen Verrückungen[1] an der Grenze eines gegebenen elastischen Körpers lässt sich, wenn die Oberfläche des Körpers eine stetig gekrümmte Fläche ist, auf das folgende mathematische Problem zurückführen:

Man sucht drei in einem Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

und an der Oberfläche ω von τ die Grenzwerte

[1] A. KORN, Abhandlungen zur Elasticitätstheorie I., Sitz. Ber. der K. Bayer. Akad. d. Wisssch. 36. S. 37 ff., 1906, Ann. Ec. Norm. (3) 24, p. 9 ff., 1907. Wir beschäftigen uns hier mit dem einfachsten Fall, dass keine äusseren Kräfte X, Y, Z wirken, und setzen über die gegebenen Verrückungen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ an der Grenze nicht blos Stetigkeit, sondern auch die Stetigkeit der ersten Ableitungen in solcher Weise voraus, dass für irgend zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in der Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } |D_1 \bar{u}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{v}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{w}|_1^2 \lesseqgtr \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \; (\lambda > 0).$$

Man vgl. auch I. FREDHOLM, Solution d'un problème fondamental de l'élasticité, Ark. för. Mat. Astr. och Fys. 2, N:o 28, 1906.

$$(2)\qquad \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}$$

annehmen.

Dabei soll k eine gegebene Konstante, Θ eine harmonische Funktion des Gebietes τ sein, welche für irgend 2 Punkte 1 und 2 des Gebietes τ in der Entfernung r_{12} der Bedingung genügt:

$$(3)\qquad |\Theta_2 - \Theta_1| \overline{\overline{<}} A . r_{12}^{\lambda},$$

wo A eine endliche Konstante und λ eine von Null verschiedene positive Zahl bezeichnet. Diese Funktion Θ wird als gegeben vorausgesetzt.

Das Problem (1), (2) ist stets eindeutig lösbar, wenn k eine gegebene, der Ungleichung:

$$-1 < k < +\infty$$

entsprechende Zahl vorstellt.

E. und F. Cosserat[1] haben nun zuerst den Gedanken ausgesprochen, dass das Lösungssystem u, v, w als Funktionen des Parameters k Pole für Werte von

$$k = k_j, \quad k_j < -1$$

haben kann, dass für derartige Werte von k mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutige und stetige Funktionen

$$U_j, \; V_j, \; W_j$$

existieren werden, welche den Bedingungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\Delta U_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, \\ &\Delta V_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} = 0, \quad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial W_j}{\partial z} \\ &\Delta W_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{in } \tau, \\ \left.\begin{aligned} U_j &= 0, \\ V_j &= 0, \\ W_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{an } \omega \end{cases}$$

---

[1] E. und F. Cosserat, Comptes Rendus, 126, p. 1089, 1898, 133, p. 145, 1901, man vgl. auch Appell, Traité de mécanique rationnelle III, p. 528 ff.

entsprechen; dass es wahrscheinlich möglich ist, jedes Lösungssystem u, v, w[1] eines Problemes von der Art (1), (2) nach den Funktionentripeln $U_j\, V_j\, W_j$ zu entwickeln:

$$(5) \qquad \begin{cases} u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}$$

wobei die Konstanten C_k leicht als Raumintegrale zu berechnen sind, welche mit Hilfe der gegebenen Funktion Θ aufgestellt werden können, mit Berücksichtigung der für 2 linear unabhängige Funktionentripel $U_i\, V_i\, W_i$, $U_k\, V_k\, W_k$ bestehenden Relationen:

$$(6) \qquad \int_\tau \Theta_i \Theta_k \, d\tau = 0, \quad k_i \neq k_k.$$

Für den Fall, dass die Oberfläche eine Kugel ist, können alle diese Behauptungen leicht verifiziert werden, es handelte sich darum, auch in dem allgemeinen Falle einer beliebigen, stetig gekrümmten Fläche ω Verallgemeinerungen dieser Behauptungen zu geben, die von E. und F. Cosserat zunächst nur in Analogie zu den Untersuchungen Poincarés über die Differentialgleichung:

$$\Delta \varphi + k \varphi = f$$

aufgestellt und nur in speziellen Beispielen verifiziert worden waren.

Es sei mir gestattet, im Folgenden die Funktionentripel $U_j\, V_j\, W_j$, welche mit ihren ersten Ableitungen im Gebiete τ eindeutig und stetig sind und Differentialgleichungen bzw. Grenzbedingungen von der Form (4) genügen, als Cosserat'sche Funktionentripel des Gebietes τ mit der zugehörigen Zahl k_j zu bezeichnen.

§ 1.

Wir führen in den Gleichungen (1) und (2) an Stelle der Funktionen u, v, w die 3 folgenden Funktionen u', v', w' ein:

$$(7) \qquad \begin{cases} u' = u - \dfrac{k}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \\ v' = v - \dfrac{k}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \end{cases}$$

[1] Bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die Ableitungen der gegebenen Funktion θ.

$$(7)\qquad \left\{ w' = w - \frac{k}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r},\right.$$

dann ist:

$$(8)\qquad \theta' = (1 + k)\,\theta,$$

und wir können die Gleichungen (1) und (2) folgendermassen schreiben:

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned} \varDelta u' &= -\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \varDelta v' &= -\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \varDelta w' &= -\frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau;$$

$$(10)\qquad \left.\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{4\pi}\frac{k}{1+k}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\ v' &= -\frac{1}{4\pi}\frac{k}{1+k}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\ w' &= -\frac{1}{4\pi}\frac{k}{1+k}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega,$$

oder auch, wenn wir:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ f_2 &= -\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ f_3 &= -\frac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad k = -\frac{2\lambda}{1+\lambda}$$

setzen, in folgender Weise:

$$(13)\qquad \left.\begin{aligned} \varDelta u' &= f_1, \\ \varDelta v' &= f_2, \\ \varDelta w' &= f_3 \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau;$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= \lambda\left(u' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}\right), \\ v' &= \lambda\left(v' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}\right), \\ w' &= \lambda\left(w' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}\right) \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega.$$

Wir versuchen[1] die Lösung in folgender Weise: Wir bilden sukzessive die Funktionen $u'_j\, v'_j\, w'_j$ mit Hilfe der folgenden Bedingungen:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \Delta u'_0 &= f_1, \\ \Delta v'_0 &= f_2, \\ \Delta w'_0 &= f_3, \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau; \\ &u'_0 = v'_0 = w'_0 = 0, \quad \text{an } \omega \end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta u'_j = \Delta v'_j = \Delta w'_j = 0, \quad \text{in } \tau \\ &\left.\begin{aligned} u'_j &= u'_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ v'_j &= v'_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ w'_j &= w'_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} \text{an } \omega, \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots$$

dann werden offenbar die Reihen:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \cdots, \\ v' &= v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \cdots, \\ w' &= w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \cdots \end{aligned}\right.$$

die Lösungen des Problems (13), (14) darstellen, wenn die Reihen mit ihren ersten Ableitungen in τ konvergent sind und eindeutige und stetige Funktionen der Stelle in τ darstellen.

[1] Man vgl. die analoge Betrachtung in meiner Abh.: Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten. Rend. Cont. del Circ. Mat. di Palermo, 1908.

In bezug auf diese Konvergenzbetrachtungen können wir nun alle Resultate aus meiner Abhandlung: Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume (Krakauer Anzeiger 1907, S. 837 ff.) übernehmen:

Die Konvergenzbeweise lassen sich in aller Strenge führen, solange λ absolut genommen kleiner als eine bestimmte endliche Zahl $|\lambda_1|$ ist, die streng genommen grösser als eins ist. In jedem Falle können wir für irgend ein $|\lambda|$, das kleiner ist, als eine beliebig gegebene positive Zahl m, eine Zahl p und $p+1$ der Gleichung

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1 \tag{18}$$

genügende Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$$

so finden, dass das Problem:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u'' &= \alpha_0 f_1, \\ \Delta v'' &= \alpha_0 f_2, \quad \text{in } \tau; \\ \Delta w'' &= \alpha_0 f_3, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} u'' &= \alpha_0 u'_0 + \alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_p u'_p + \lambda\left(u'' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r}\right), \\ v'' &= \alpha_0 v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_p v'_p + \lambda\left(v'' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r}\right), \\ w'' &= \alpha_0 w'_0 + \alpha_1 w'_1 + \cdots + \alpha_p w'_p + \lambda\left(w'' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r}\right) \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega \tag{20}$$

durch die Methode der sukzessiven Approximationen gelöst wird, und es ergibt sich somit, falls nicht grade λ eine Lösung der Gleichung:

$$D(\lambda) \equiv (-\lambda)^p \alpha_0 + (-\lambda)^{p-1}\alpha_1 + \cdots + (-\lambda)\alpha_{p-1} + \alpha_p = 0 \tag{21}$$

ist, dass wir die Lösungen des Problems (13), (14) für jedes

$$|\lambda| \overline{\gtrless} m$$

in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{U'(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \quad (n \overline{\gtrless} p) \\ v' &= \frac{V'(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \\ w' &= \frac{W'(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

darstellen können, wobei die Funktionen U', V', W' stets in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind und für die Fälle:

$$\lambda = \lambda_j, \quad j = 1, 2 \ldots n$$

abgesehen von einer multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten, in sogenannte biharmonische Funktionentripel $U'_j\, V'_j\, W'_j$ übergehen, welche ich durch die Gleichungen:

$$(23) \qquad \Delta U'_j = \Delta V'_j = \Delta W'_j = 0, \quad \text{in } \tau;$$

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} U'_j &= \lambda_j \left(U'_j + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \right), \\ V'_j &= \lambda_j \left(V'_j + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \right), \\ W'_j &= \lambda_j \left(W'_j + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \right), \\ &\mathfrak{U}'_j \cos(\nu x) + \mathfrak{V}'_j \cos(\nu y) + \mathfrak{W}'_j \cos(\nu z) = 0, \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega;$$

$$(25) \qquad \int_\tau (\Theta'^2_j + \mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j)\, d\tau = 1$$

definiert habe. Die den biharmonischen Funktionentripeln $U'_j\, V'_j\, W'_j$ zugehörigen Zahlen λ_j genügen der Gleichung:

$$D(\lambda) = 0$$

und können keine mehrfachen Wurzeln dieser Gleichung sein.

Nach der Lösung des Problems (13), (14) erhalten wir infolge der Beziehungen (7), (8), (12) als Lösung des ursprünglichen Problems (1), (2) die Funktionen:

$$(26) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= u' - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\ v &= v' - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\ w &= w' - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}. \end{aligned}\right.$$

Nur eine Bemerkung ist noch zu dieser Untersuchung nachzutragen: Bei der Lösung des Problems (13), (14) wurde (Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems, Krakauer Anz. 1907, p. 866) vorausgesetzt, dass f_1, f_2, f_3 in ganzer Erstreckung des Gebietes τ eindeutig und stetig sind und der Bedingung:

$$\varDelta \int_\tau f_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi f_j, \quad j = 1, 2, 3$$

genügen. In der Tat ist für die Giltigkeit aller dieser Resultate — wie ohne weiteres aus dem Beweise derselben hervorgeht —, hinreichend, dass die ersten Ableitungen der Funktionen u_0, v_0, w_0, welche durch die Gleichungen (15) definiert sind, von der Art stetig sind, dass für irgend 2 Punkte des Gebietes in dem Abstande r_{12}:

$$\text{abs.}\, |D_1 u_0|_1^2, \quad \text{abs.}\, |D_1 v_0|_1^2, \quad \text{abs.}\, |D_1 w_0|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \qquad (\lambda > 0).$$

Diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn wir für f_1, f_2, f_3 die Funktionen (11) setzen und die ursprüngliche Voraussetzung (3) machen. Es ergibt sich das leicht mit Hilfe der Sätze des Kapitels I und II meiner Abhandlung: Sur les équations de l'élasticité (Ann. Ec. Norm. (3) 24, p. 12 ff., 1907).

Die Untersuchung des § 1 hat uns eine neue Lösungsmethode des Problems (1), (2) nicht bloss für den Fall:

$$|\lambda| < 1$$

also:

$$-1 < k < +\infty$$

gegeben, sondern auch für den Fall

$$|\lambda| \geqq 1$$

also

$$k \leqq -1$$

falls nicht grade λ eine Wurzel der Gleichung

$$D(\lambda) = 0$$

ist. Die Stellen

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots$$

denen biharmonische Tripelfunktionen $U'_j\, V'_j\, W'_j$ entsprechen, sind auch Pole der Lösung u, v, w (26) des ursprünglichen Problems (1), (2).

Die Pole sind sämtlich einfach und haben eine Häufungsstelle an der Stelle:

$$|\lambda| = \infty$$

[1] oder abteilungsweise eindeutig und stetig.

also an der Stelle:

$$k = -2.$$

Wie nun die Residuen der Lösungen des Problems (13), (14), abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten, an den Stellen

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots$$

in biharmonische Funktionentripel des Gebietes τ übergehen, so können wir nunmehr zeigen, dass die Residuen der Lösungen des Problems (1), (2) COSSERAT'sche Funktionentripel des Gebietes τ werden, abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten.

Wir haben hierzu nur zu zeigen, dass die Funktionen:

$$(27) \qquad \begin{cases} U_j = c_j\left[U'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r}\right], \\ V_j = c_j\left[V'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r}\right], \\ W_j = c_j\left[W'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r}\right], \end{cases}$$

in denen die c_j Konstanten bezeichnen, den Gleichungen genügen:

$$(28^a) \qquad \left.\begin{cases} \Delta U_j + k_j\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, \\ \Delta V_j + k_j\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = 0, \\ \Delta W_j + k_j\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = 0 \end{cases}\right\} \text{ in } \tau; \quad k_j = -\frac{2\lambda_j}{1+\lambda_j}$$

$$(28^b) \qquad \left.\begin{cases} U_j = 0, \\ V_j = 0, \\ W_j = 0 \end{cases}\right\} \text{ an } \omega.$$

Es ist in der Tat:

$$\Theta_j = c_j\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\Theta'_j$$

und daher:

$$\Delta U_j + k_j\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = c_j\frac{\partial \Theta'_j}{\partial x}\left\{\frac{2\lambda_j}{1-\lambda_j} + k_j\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right\} = 0,$$

analog folgen die beiden übrigen Gleichungen (28[a]); es ist ferner:

$$U'_j = \frac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r}, \quad \text{an } \omega,$$

nach (27), also:

$$U_j = 0, \quad \text{an } \omega,$$

analog folgen die beiden übrigen Gleichungen (28[b]).

Wir wollen die Konstanten c_j noch so wählen, dass:

$$(29) \qquad \int_\tau (\Theta_j^2 + \mathfrak{U}_j^2 + \mathfrak{V}_j^2 + \mathfrak{W}_j^2)\, d\tau = 1 \quad \text{wird:}$$

es ergibt sich, wegen der Relationen:

$$(30) \qquad \begin{cases} \Theta_j = c_j \dfrac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\Theta'_j, \\ \mathfrak{U}_j = c_j \mathfrak{U}'_j, \\ \mathfrak{V}_j = c_j \mathfrak{V}'_j, \\ \mathfrak{W}_j = c_j \mathfrak{W}'_j \end{cases}$$

es muss

$$c_j^2 \int_\tau \left\{ \left(\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right)^2 \Theta'^2_j + \mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j \right\} d\tau = 1$$

sein, und da:

$$(31) \qquad \int_\tau \Theta'^2_j\, d\tau = \frac{\lambda_j - 1}{2\lambda_j}, \quad \int_\tau (\mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j)\, d\tau = \frac{\lambda_j + 1}{2\lambda_j}$$

so folgt:

$$(32) \qquad c_j = \sqrt{\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} = \sqrt{-k_j - 1}\,.$$

I. Wenn wir die COSSERAT'schen Funktionentripel des Gebietes $U_j\ V_j\ W_j$ und die denselben zugehörigen Zahlen k_j durch die Gleichungen:

$$(33) \qquad \left.\begin{cases} \Delta U_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, \\ \Delta V_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = 0, \\ \Delta W_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = 0 \end{cases}\right\} \text{ in } \tau;$$

$$(33)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} U_j &= 0, \\ V_j &= 0, \\ W_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega; \\ \int\limits_\tau (\Theta_j^2 + \mathfrak{U}_j^2 + \mathfrak{V}_j^2 + \mathfrak{W}_j^2)\, d\tau = 1 \end{cases}$$

und die Bedingung definieren, dass die Funktionen in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sein sollen, und zwar so, dass für irgend 2 Punkte des Gebietes τ, 1 und 2, in der Entfernung r_{12}, die absolute Differenz der Werte der ersten Ableitungen:

$$(34)\qquad \text{abs. } |D_1 U_j|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 V_j|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 W_j|_1^2 \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst.}^{1}\, r_{12}^{\lambda}, \qquad (\lambda > 0)$$

sein soll, besteht zwischen den Cosserat'schen Funktionentripeln und den biharmonischen Funktionentripeln $U'_i\, V'_j\, W'_j$ des Gebietes τ der Zusammenhang:

$$(35)\qquad \begin{cases} U_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} \left\{ U'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1 - \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int\limits_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r} \right\}, \\[2ex] V_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} \left\{ V'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1 - \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int\limits_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r} \right\}, \\[2ex] W_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} \left\{ W'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1 - \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int\limits_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r} \right\}. \end{cases}$$

II. Die Lösung jedes Problems der Elastizitätstheorie von der Form (1), (2) kann bei der Bedingung (3), und wenn $|\lambda|^2$ unterhalb einer beliebigen endlichen Grenze m liegt, in der folgenden Form dargestellt werden:

$$(36)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\Phi(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)}, \\[2ex] v = \dfrac{X(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)}, \\[2ex] w = \dfrac{\Psi(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)}; \end{cases}$$

---

[1] Die Konstante kann nur mit unendlich wachsendem j unendlich wachsen.

[2] $\lambda = -\dfrac{k}{2+k}$.

dabei sind die Funktionen Φ, X, Ψ mit ihren ersten Ableitungen in τ für jeden beliebigen Wert

$$|\lambda| \overline{\overline{<}} m$$

eindeutig und stetig, und

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$$

stellen eine endliche Anzahl von Zahlen dar, aus der Reihe der COSSERAT'schen Funktionentripeln zugehöriger Zahlen, und die Funktionen Φ, X, Ψ gehen für:

$$\lambda = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten in COSSERAT'sche Funktionentripel mit den zugehörigen Zahlen λ_j über.

III. Will man von den COSSERAT'schen Funktionentripeln umgekehrt zu den biharmonischen Funktionentripeln zurückgehen, so hat man die Formeln zu benützen:

$$(37) \quad \begin{cases} U'_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}} \left\{ U_j + \frac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_\tau \Theta_j \frac{d\tau}{r} \right\}, \\ V'_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}} \left\{ V_j + \frac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \Theta_j \frac{d\tau}{r} \right\}, \\ W'_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}} \left\{ W_j + \frac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \Theta_j \frac{d\tau}{r} \right\}; \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} \Theta'_j = -\sqrt{\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}}\, \Theta_j, \\ \mathfrak{U}'_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}}\, \mathfrak{U}_j, \\ \mathfrak{B}'_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}}\, \mathfrak{B}_j, \\ \mathfrak{W}'_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}}\, \mathfrak{W}_j. \end{cases}$$

IV. Für zwei COSSERAT'sche Funktionentripel

$$U_i\, V_i\, W_i \quad \text{und} \quad U_j\, V_j\, W_j$$

mit verschiedenen zugehörigen Zahlen λ und λ bestehen die Relationen:

$$\int_\tau \Theta_i \Theta_j \, d\tau = 0, \tag{39}$$

$$\int_\tau (\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_j + \mathfrak{V}_i \mathfrak{V}_j + \mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_j) \, d\tau = 0. \tag{40}$$

Zusatz zu IV. Gestattet das Lösungssystem u, v, w des Problems (1), (2) die Entwickelung nach COSSERAT'schen Funktionentripeln:

$$u = \Sigma_j C_j U_j, \quad v = \Sigma_j C_j V_j, \quad w = \Sigma_j C_j W_j \tag{41}$$

so haben die Konstanten C_j dieser Entwickelung die Werte:

$$\left\{ \begin{aligned} C_j &= \int_\tau (\theta \Theta_j + \mathfrak{u} \mathfrak{U}_j + \mathfrak{v} \mathfrak{V}_j + \mathfrak{w} \mathfrak{W}_j) \, d\tau, \\ &= \frac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \int_\tau \theta \Theta_j \, d\tau, \\ &= \frac{k_j}{k - k_j} \int_\tau \Theta \Theta_j \, d\tau. \end{aligned} \right. \tag{42}$$

§ 3.

In der Theorie des biharmonischen Problems und der biharmonischen Funktionentripel wurde gezeigt (Krakauer Anz. 1907, S. 889),[1] dass, wenn auch nicht immer die Entwickelung der Lösungen u', v', w' des Problemes (13), (14) selbst nach biharmonischen Tripelfunktionen sichergestellt ist, jedenfalls eine endliche Zahl s vorhanden ist, so, dass die Funktionen:

$$\begin{aligned} & u' - u'_0 - \lambda u'_1 - \lambda^2 u'_2 - \cdots - \lambda^{s-1} u'_{s-1}, \\ & v' - v'_0 - \lambda v'_1 - \lambda^2 v'_2 - \cdots - \lambda^{s-1} v'_{s-1}, \\ & w' - w'_0 - \lambda w'_1 - \lambda^2 w'_2 - \cdots - \lambda^{s-1} w'_{s-1} \end{aligned}$$

nach biharmonischen Tripeln entwickelt werden können. Es werden also jedenfalls die Entwickelungen bestehen:

---

[1] In den Gleichungen 128^b, l. c. ist bereits mit Rücksicht auf das dort zu behandelnde biharmonische Problem $\lambda = 1$ gesetzt.

$$(43)\qquad \begin{cases} u' = u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \cdots + \lambda^{s-1} u'_{s-1} + C_1 U'_1 + C_2 U'_2 + \cdots, \\ v' = v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \cdots + \lambda^{s-1} v'_{s-1} + C_1 V'_1 + C_2 V'_2 + \cdots, \\ w' = w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \cdots + \lambda^{s-1} w'_{s-1} + C_1 W'_1 + C_2 W'_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo die C_j Konstanten sind.

Damit erhalten wir aber auch sofort ein korrespondierendes Resultat für die Entwickelung der Lösungen u, v, w des Problems (1), (2) nach COSSERAT'schen Funktionentripeln:

V. Wenn auch die Entwickelung der Lösungen u, v, w des Problems (1), (2) selbst nach COSSERAT'schen Funktionentripeln nicht sichergestellt ist, so ist jedenfalls stets eine endliche Zahl s vorhanden, so, dass die Funktionen:

$$u - \sum_0^{s-1} {}_j \lambda^j \left(u'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$v - \sum_0^{s-1} {}_j \lambda^j \left(v'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$w - \sum_0^{s-1} {}_j \lambda^j \left(w'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right)$$

in denen die Funktionen u'_j, v'_j, w'_j durch die Gleichungen (11), (15), (16) definiert sind, der Entwickelung nach COSSERAT'schen Funktionentripeln fähig sind:

$$(44)\qquad \begin{cases} u = \sum_0^{s-1} {}_j \lambda^j \left(u'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right) + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ v = \sum_0^{s-1} {}_j \lambda^j \left(v'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right) + C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ w = \sum_0^{s-1} {}_j \lambda^j \left(w'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right) + C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo die $C_1, C_2, \ldots$ Konstanten sind.

Für die Kugel ist sichergestellt, dass $s = 0$ ist (Krakauer Anz. 1907, S. 894), somit gilt für die Kugel stets die Entwickelung:

$$
(45) \qquad \begin{cases} u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}
$$

wo:

$$
(46) \qquad C_j = \frac{k_j}{k - k_j} \int\limits_\tau \Theta \Theta_j \, d\tau .
$$

§ 4.

Für den Fall der Kugel habe ich die biharmonischen Funktionentripel früher angegeben (Krakauer Anz. 1907, S. 893). Denken wir uns eine Kugel vom Radius R um den Anfangspunkt als Centrum und führen wir Polarkoordinaten durch die Transformationen:

$$
(47) \qquad \begin{cases} x = r_1 \mu_1, \\ y = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1, \quad \mu_1 = \cos \theta_1 \\ z = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1, \end{cases}
$$

ein und setzen:

$$
(48) \qquad F_j(x, y, z) = r_1^j \, Y_j(\mu_1, \varphi_1),
$$

wo Y_j eine allgemeine Kugelfunktion j-ter Ordnung vorstellt, dann sind die biharmonischen Funktionentripel:

$$
(49) \qquad \begin{cases} U'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left\{ (2j+1) x F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial x} \right\}, \\ V'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left\{ (2j+1) y F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial y} \right\}, \quad \lambda_j = -(2j+1); \\ W'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left\{ (2j+1) z F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial z} \right\}; \end{cases}
$$

α_j bezeichnet eine Konstante, welche zur Befriedigung der Bedingung

$$
\int\limits_\tau (\Theta'^2_j + \mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j) \, d\tau = 1
$$

zu verwenden ist.

Da

$$
(50) \qquad \Theta'_j = \alpha_j F_j
$$

und

$$(51)\qquad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau}\Theta'_j\frac{d\tau}{r}=\frac{\alpha_j F_j}{2j+1}\left\{\frac{r_1^2}{2j+3}-\frac{1}{2}(r_1^2-R^2)\right\},$$

so ergeben sich aus (35) unmittelbar die COSSERAT'schen Funktionentripel für die Kugel:

$$(52)\qquad \begin{cases} U_j=\beta_j(r_1^2-R^2)\dfrac{\partial F_j}{\partial x}, \\ V_j=\beta_j(r_1^2-R^2)\dfrac{\partial F_j}{\partial y}, \\ W_j=\beta_j(r_1^2-R^2)\dfrac{\partial F_j}{\partial z}, \end{cases}$$

β_j eine Konstante, die zur Befriedigung der Bedingung:

$$\int\limits_{\tau}(\Theta_j^2+\mathfrak{U}_j^2+\mathfrak{V}_j^2+\mathfrak{W}_j^2)\,d\tau=1$$

zu verwenden ist.

Die Entwickelungen der Lösungen u, v, w des Problems (1), (2) nach diesen Funktionen:

$$(53)\qquad \begin{cases} u=C_1U_1+C_2U_2+\cdots, \\ v=C_1V_1+C_2V_2+\cdots, \\ w=C_1W_1+C_2W_2+\cdots, \end{cases}$$

wo:

$$(54)\qquad C_j=\frac{k_j}{k-k_j}\int\limits_{\tau}\Theta\,\Theta_j\,d\tau,\qquad \left(k_j=-\frac{2j+1}{j}\right)$$

sind bereits seit langem bekannt; die in der Einleitung gemachte Voraussetzung über die Funktion Θ ist für die Reihenentwickelungen (53) und für die gliedweise einmalige Differenzierbarkeit dieser Reihen hinreichend.