ESSAIS SUR LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES AUX COEFFICIENTS ENTIERS

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG.

Introduction.

1. Le présent mémoire a été composé d'après les notes manuscrites qui m'ont resté en rédigeant mon mémoire du même titre auquel l'Académie des Sciences de Paris avait accordé le grand prix pour 1900;[1] à défaut d'une copie exacte, il en diffère par le style et peut être même en matière tans qu'il s'agit des détails secondaires. Son objet est d'exposer certaines formules qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques aux coefficients entiers telles que

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{ou bien} \quad (a, b, c).$$

J'appellerai équivalentes deux formes (a, b, c) et (a', b', c') lorsqu'elles sont proprement équivalentes dans le sens de GAUSS, c'est à dire, si l'on peut passer de l'une à l'autre en effectuant une substitution linéaire aux coefficients entiers et au déterminant égal à plus un ($x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$; $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Pour des formes équivalentes l'expression $D = b^2 - 4ac$ a la même valeur; on l'appelle le *discriminant*.

[1] Le problème mis en concours a été posé comme suit: *Perfectionner en quelque point important la recherche du nombre des classes de formes quadratiques à coefficients entiers et de deux indéterminées.*

Les discriminants sont alors des nombres entiers, positifs ou négatifs, qui satisfont à l'une ou l'autre de deux congruences

$$D \equiv 1, \qquad D \equiv 0 \pmod 4.$$

Reciproquement, tout entier qui satisfait à une de ces congruences est le discriminant d'une infinité de formes. Nous exclurons cependant le cas où D serait un carré parfait, car dans ce cas la forme quadratique se décompose en produit de deux formes linéaires.

L'ensemble de forme, en nombre infini, équivalentes entre elles, s'appelle une *classe* de formes. Pour un discriminant donné les formes se distribuent en un nombre fini de classes. Ce nombre des classes est une fonction arithmétique du discriminant; son calcul effectif présente des difficultés matérielles qui augmentent avec la grandeur du discriminant; l'objet de nos recherches sera de diminuer ces difficultés pour rendre le calcul réalisable.

Dans la solution de ce problème on peut se borner à certaines restrictions qui n'altèrent pas la généralité du problème.

Le plus grand commun diviseur δ des trois coefficients a, b, c est le même pour toutes les formes d'une classe; les quotients

$$a' = \frac{a}{\delta}, \qquad b' = \frac{b}{\delta}, \qquad c' = \frac{c}{\delta},$$

seront alors les coefficients d'une forme (a', b', c') du discriminant

$$D' = \frac{D}{\delta^2}.$$

Les classes de formes admettant le diviseur δ sont donc ramenées aux classes de formes primitives d'un discriminant moindre $\frac{D}{\delta^2}$.

On appelle *primitives* les formes et les classes correspondantes qui n'ont aucun diviseur plus grand que un.

On peut se borner à la détermination du nombre des classes *primitives* correspondant à un discriminant donné. C'est ce nombre-là que je désignerai désormais par $Cl(D)$, si le discriminant D est positif.

Pour les discriminants négatifs on peut aller plus loin; dans ce cas le signe des coefficients extrêmes a et c reste le même pour toutes les formes d'une classe. On peut se borner à la détermination du nombre des classes primitives et positives (pour lesquelles les dits coefficients sont positifs), car les classes négatives qui restent sont au nombre égal.

Je désignerai alors par $Cl(-\Delta)$ le nombre des classes primitives et positives du discriminant négatif $-\Delta$.

2. Dans les oeuvres de GAUSS et de DIRICHLET ont été considérées les formes telles que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

de sorte que le coefficient moyen $2b$ est pair; le nombre $n = b^2 - ac$ s'appelait le *déterminant* de la forme; on était obligé de distinguer entre les formes proprement primitives et les formes improprement primitives; ces dernières ont 2 pour leur plus grand diviseur.

Dans la théorie que nous acceptons qui est plus ancienne et qui a été reprise par KRONECKER les formes proprement primitives du déterminant n ne sont autre chose que les formes primitives du discriminant pair $D = 4n$.

Les formes improprement primitives du déterminant n s'obtiennent en multipliant par deux les formes primitives du discriminant n.

Par ces remarques-là la correspondance des deux théories, classique et moderne, est complètement caractérisée; la différence n'est pas grande, cependant la simplification qui règne dans la théorie moderne et qu'on doit à KRONECKER, mérite l'attention. Il n'y s'agit pas, en réalité, des fait nouveaux, la modification n'a qu'une portée méthodique mais considérable.[1]

Pour la détermination du nombre des classes on a le procédé de réduction dû à LAGRANGE et à GAUSS, puis les formules directes que la science doit à LEJEUNE-DIRICHLET; c'est en nous appuyant sur les découvertes de ce grand géomètre que nous sommes parvenu à des méthodes moins simples en théorie mais plus expéditives dans la pratique.

---

[1] La théorie de KRONECKER se trouve exposée dans l'excellente oeuvre du savant Père J. de Séguier, S. J.:

Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker. Berlin, Felix L. Dames, 1894.

La connaissance d'une partie de ce livre est indispensable pour le lecteur de ce mémoire.

Sauf ces méthodes on possède des théorèmes d'une rare beauté qui résultent directement des recherches de LEGENDRE et de GAUSS sur la représentation des nombres par la somme de trois carrés et qui ont été mis sous la forme analytique par KRONECKER.[1] Cet illustre savant les a obtenus comme conséquences des équations de la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques, tandis qu'une déduction directe et relativement élémentaire des résultats en question est due à HERMITE.[2] Il me semble que cette dernière voie, intimement liée avec une autre création féconde de ce grand géomètre, celle de l'élément simple des fonctions elliptiques de troisième espèce, puisse mener à des connaissances nouvelles, vu la circonstance que la dite transcendante fournit l'évaluation des sommes de GAUSS.

Les théorèmes de KRONECKER ont donné naissance aux nombreuses et importantes recherches de plusieurs géomètres, et toutes ces découvertes rendraient d'excellents services s'il s'agissait de dresser une table de la fonction $Cl(-\Delta)$, mais elles abrègent peu les calculs lorsqu'ils s'agit d'obtenir le nombre des classes pour un déterminant isolé, la réduction allant par grands nombres voisins au déterminant donné de sorte qu'il faudrait reprendre un grand nombre de fois la réduction pour descendre aux petits arguments pour lesquels la fonction est connue. La recherche directe des formes réduites serait en tout cas plus expéditive, et c'est donc, sauf dans leur fécondité, dans le rôle qu'ils vont jouer dans l'arithmétique de l'avenir que repose l'importance des découvertes de KRONECKER et de ses successeurs.

3. Pour faire ressortir clairement la signification des différents symboles dont nous aurons besoins, je vais rappeler succinctement quelques notions et théorèmes connus, en renvoyant pour leur démonstration au livre de M. DE SÉGUIER.

---

[1] *Über quadratische Formen von negativer Determinante.* Monatsberichte der kön. preuss. Akad. der Wissenschaften, 1875.

[2] *Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique* (Journal de Liouville, 1862), puis: *Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques* (Mélanges math. et astron. tirés du Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg; réimpr. Acta, 5).

La signification du symbole de la théorie des résidus quadratiques appelé le signe de LEGENDRE

$$\left(\frac{p}{q}\right)$$

a subit sous les mains de JACOBI et de KRONECKER des modifications dont voici la forme définitive.

m, n étant deux entiers on pose

1°. $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$ s'ils ont un diviseurs commun plus grand que l'unité;

2°. Si n est impair et

$$n = p p' p'' \ldots$$

sa décomposition en facteurs premiers, on prend

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\ldots;$$

3°. Si n est pair et alors $n = 2^\alpha n'$, n' étant impair, on prend

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{2^\alpha n'}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^\alpha \left(\frac{m}{n'}\right);$$

4°. On convient de prendre

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{-n}\right).$$

Dans cette généralité le symbole perd certaines propriétés dont il a joué dans le sens primitif de LEGENDRE et de JACOBI; mais il les retient, si le »numérateur» m est un discriminant.

Je rappelle en particulier que l'on a

1°. Pour un discriminant positif D

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{m'}\right), \quad \text{si} \quad m \equiv \pm m' \pmod{D};$$

par exemple

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{D-m}\right);$$

2° Pour un discriminant négatif $D = -\Delta$

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m'}\right) \operatorname{sgn.}(mm'), \quad \text{si} \quad m \equiv m' \pmod{\Delta};$$

si, par exemple, $0 < m < \Delta$, on aura

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{m-\Delta}\right)$$

ou bien

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\Delta - m}\right).$$

L'équation

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right), \qquad D \gtrless 0, \qquad m > 0,$$

n'a lieu que pour des discriminants impairs D, m étant quelconque.

Si ensuite D_1 et D_2 sont deux discriminants de signes quelconques mais premiers entre eux, on a

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right) = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn.} D_1}{2} \frac{1-\operatorname{sgn.} D_2}{2}},$$

de sorte que ce produit est égal à $+1$, si un au moins des deux discriminants est positif.

Pour tous les discriminants on a la relation

$$\sum_{n=1}^{|D|-1} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D \gtrless 0).$$

Cela est évident, si D est négatif; si D est positif, cette relation revient à la suivante

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D > 0).$$

Ensuite, pour D positif,

$$\sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) n = 0, \qquad (D > 0);$$

cela résulte de ce qui précède en substituant $n = D - m$; la somme deviendra alors

$$D \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{m}\right) - \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{m}\right) m;$$

la première partie étant nulle, on aura

$$\sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) n = - \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{m}\right) m,$$

d'où le résultat annoncé.

D'autres propriétés ont lieu pour les discriminants de nature particulière mais assez généraux pour que le problème concernant le nombre des classes puisse s'y borner. Ce sont les discriminant que KRONECKER appelait *fondamentaux* et dont voici la définition.

Un discriminant est dit fondamental, s'il ne contient aucun carré impair et qu'il contient le facteur carré 4 seulement si cela est indispensable pour conserver sa forme de discriminant. Il n'est donc jamais un multiple de 16.

En représentant par P un nombre positif ou négatif, produit d'un certain nombre de facteurs premiers différents et qui satisfait à la congruence

$$P \equiv 1 \pmod 4,$$

les discriminants fondamentaux D_0 auront l'une des quatre formes suivantes:

$$D_0 = P, \qquad D_0 = -4P, \qquad D_0 = \pm 8P.$$

En convenant de représenter par $\sqrt{D}$ la racine arithmétique (positive) de D, si D est positif, et la quantité $i\sqrt{-D}$, si D est négatif, on a l'équation très importante dont on trouvera la démonstration dans l'ouvrage cité de M. DE SÉGUIER et dans les mémoires de LEBESGUE parus dans le Journal de Liouville (T. 15, 1850):

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0 - 1} \left(\frac{D_0}{h}\right) e^{\frac{2hm\pi i}{\Delta_0}} = \left(\frac{D_0}{m}\right) \sqrt{D_0},$$

(D_0 un discriminant fondamental, $\Delta_0 = |D_0|$, m un entier positif).

En séparant les deux cas $D_0 > 0$ et $D_0 = -\Delta_0 < 0$, on a en particulier

$$\sum_{h=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \cos\frac{2hm\pi}{D_0} = \left(\frac{D_0}{m}\right)\sqrt{D_0},$$

$$\sum_{h=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{D_0} = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \cos\frac{2hm\pi}{\Delta_0} = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{\Delta_0} = \left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\sqrt{\Delta_0}.$$

4. Ces préliminaires rappelés, nous passons à énoncer les résultats classique trouvés par Lejeune-Dirichlet pour évaluer le nombre des classes. En reprenant l'écriture de Kronecker, nous ferons correspondre à chaque discriminant négatif D le nombre τ qui est égal à 6 pour $D = -3$, puis $\tau = 4$ pour $D = -4$ et $\tau = 2$ pour $D < -4$.

Dans le cas de discriminant positif on est obligé d'introduire la *solution fondamentale* de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4;$$

c'est le couple des plus petits nombres positifs T, U qui satisfont à cette équation. On pose, pour abréger,[1]

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = E(D),$$

et les résultats de Dirichlet s'écriront comme il suit

$$Cl(-\Delta) = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2n\pi}, \tag{1}$$

$$Cl(D)\log E(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\sqrt{D}}{n}. \tag{2}$$

[1] Cette écriture n'est pas d'ailleurs très bien choisie, le symbole, $E(x)$ ayant déjà une signification généralement acceptée.

DIRICHLET lui-même effectua la sommation de ces séries dans le cas des discriminants fondamentaux sous forme finie et, après les modifications nécessaires, ses résultats se résument par les deux équations

$$Cl(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h, \tag{3}$$

$$Cl(D)\log E(D) = -\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{D} \tag{4}$$

(D et $-\Delta$ étant des discriminants fondamentaux).

Théoriquement ces résultats élégants ne laissent rien à désirer, mais il en sera autrement si l'on veut s'en servir dans la pratique où leur emploi devient extrêmement laborieux.

DIRICHLET a trouvé lui-même, pour des discriminants négatifs, des formules plus simples, dont la recherche lui a été indispensable puisque il a voulu mettre, dans les signes de LEGENDRE, le discriminant au dénominateur.

Ses résultats, présentés sous la façon de la théorie de KRONECKER, s'expriment par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 2^{\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}}\, Cl(-\Delta),\\
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-4D),\\
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-8D),\\
&\sum_{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-8\Delta).
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous retrouverons ces formules du grand géomètre comme conséquences immédiates de deux relations (équivalentes d'ailleurs) plus générales que voici:

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{aD}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-\Delta D), \\ \displaystyle\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{a}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{a\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\, Cl(-\Delta D), \end{cases}$$

où l'on suppose que D et $-\Delta$ soient deux discriminants fondamentaux, le premier positif, le second négatif.

Les exemples des discriminants $-559 = -43.13$ et $1159 = -59.21$ que j'ai traités dans le texte, font voir que l'emploi des formules (6) présente l'avantage sur la recherche directe des formes réduites, tandis que l'emploi de la première des formules (5) devient matériellement impossible.

Mais ce procédé ne fournit une méthode applicable que pour des discriminants composés, contenus, bien entendu, dans certaines limites.

Si Δ est premier, la difficulté subsiste, et il faudra chercher une autre voie. Dans certaines limites la formule suivante qui est également exacte pour tous les discriminants fondamentaux pourra être utile:

$$(7)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{1 + \left(\frac{-3}{\Delta}\right) - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\, Cl(-\Delta).$$

Dans d'autres cas on pourrait recommander l'emploi des approximations analytiques qui se présentent véritablement en foule et dont voici les exemples les plus simples:

$$(8)\qquad \frac{2}{\tau}\, Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 u\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta u}}}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

où u signifie une quantité positive arbitraire pour laquelle on prend le mieux l'unité;

$$(9)\qquad \frac{1}{\tau}\, Cl(-\Delta) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + 1} + \frac{\sqrt{\Delta}}{u} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sin\mathrm{hyp}\, \frac{2m\pi}{u}}$$

où on prend le mieux $u = \sqrt{2\Delta}$,

$$(10)\quad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta) = \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{\cos\operatorname{hyp}\frac{m\pi}{u}},$$

$$(11)\quad \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta) = \tau \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2mu\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} - \frac{\tau}{u} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u\sqrt{\Delta}}} - 1};$$

en différentiant et prenant $u = 1$, on en déduit

$$(12)\quad Cl(-\Delta) = -\tau \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} + \frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{m}{\left(e^{\frac{m\pi}{\sqrt{\Delta}}} - e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

L'emploi de ces développements devient autant plus commode, si l'on connait un facteur du nombre cherché $Cl(-\Delta)$. La distribution des classes en genres fait voir que (pour des discriminants fondamentaux) ce nombre sera divisible par $2^{\varpi-1}$, si Δ contient ϖ facteurs premiers différents. Au même but peuvent servir les congruences suivantes qui correspondent aux discriminants formés de deux ou trois facteurs premiers et dont la première est due à M. HURWITZ:

$$(13)\qquad Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right) \pmod 4,$$

(p et q étant des nombres premiers).

(14) »Si les trois nombres premiers p, q, r sont congrus à moins un pour le module quatre, on aura

$$Cl(-pqr) \equiv 4 \pmod 8,$$

si

$$\left(\frac{pq}{r}\right) = \left(\frac{pr}{q}\right) = \left(\frac{qr}{p}\right),$$

mais

$$Cl(-pqr) \equiv 0 \pmod 8,$$

si cette dernière condition n'est pas remplie.»

(15) »Supposons $p \equiv q \equiv -r \equiv 1 \pmod 4$, alors on a ou

$$\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) \quad \text{et} \quad Cl(-pqr) \equiv \left(1 - \left(\frac{p}{r}\right)\right)^2 \pmod 8$$

ou bien

$$\left(\frac{p}{r}\right) = -\left(\frac{q}{r}\right) \quad \text{et} \quad Cl(-pqr) \equiv 2\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right) \pmod 8.$$

Pour les discriminants positifs l'emploi de la formule de DIRICHLET est encore plus pénible; KRONECKER a réussi de combler cette difficulté en la ramenant à la recherche des formes réduites d'un discriminant négatif. Pour rappeler le célèbre résultat de l'illustre géomètre je pose [1]

$$H(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i}),$$

ω étant un quantité à partie imaginaire positive.

Etant donné un discriminant fondamental et positif D, choisissons un discriminant fondamental négatif $-\Delta_1$, premier avec le précédent, de sorte que le produit $-\Delta = -\Delta_1 D$ sera aussi un discriminant fondamental.

Cela étant, déterminons un système complet de représentants [2] des différentes classes positives du discriminant $-\Delta$ que je désignerai par (a, b, c) de sorte que $4ac - b^2 = \Delta$. Pour une forme (a, b, c) les signes de LEGENDRE

$$\left(\frac{-\Delta}{ax^2 + bxy + cy^2}\right)$$

ont une valeur indépendante de x et y pourvu que l'entier $ax^2 + bxy + cy^2$ soit premier avec Δ. En convenant de désigner ce signe invariant par

$$\left(\frac{-\Delta}{a, b, c}\right),$$

---

[1] D'après M. DEDEKIND on se sert du symbole $\eta(\omega)$; mais la lettre η ayant été employée par WEIERSTRASS dans une signification toute différente, je préfère une écriture nouvelle.

[2] Représentant d'une classe s'appelle une forme quelconque y appartenant.

la formule de KRONECKER s'écrira comme il suit:

$$(16)\qquad \frac{2}{\tau_1} Cl(-\Delta_1) Cl(D) \log E(D)$$

$$= \sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta}{a\,,\,b\,,\,c}\right) \log \frac{a}{H^2\left(\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right) H^2\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right)},$$

la lettre τ_1 ayant pour le discriminant négative $-\Delta_1$ la signification habituelle de τ.

Le calcul de la valeur du second membre devient le plus commode, si l'on choisit pour les (a, b, c) les formes réduites. La seule difficulté sérieuse qui pourrait se présenter dans les applications consiste dans la recherche des formes réduites d'un discriminant multiple de D.

Nous avons essayé cependant de tirer de la théorie de DIRICHLET des moyens qui conduisent au même but dans certains cas et que je veux résumer en quelques phrases:

Un résultat anoncé par CAUCHY et qui généralise les recherches antérieures de GAUSS, JACOBI et DIRICHLET, consiste en ce que pour un discriminant fondamental quelconque le polynôme irréductible $F(x)$ du degré $\varphi(|D|)$ qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{D}}$, admet la décomposition suivante

$$4F(x) = Y(x)^2 - DZ(x)^2,$$

$Y(x)$ et $Z(x)$ étant deux polynômes aux coefficients entiers des degrés respectifs $\frac{1}{2}\varphi(|D|)$ et $\frac{1}{2}\varphi(|D|) - 1$. En ajoutant la condition que les coefficients des termes les plus élevés soit positifs, les dits polynômes seront complètement définis.

Cela étant, soient D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux du même signe et premiers autre eux, et représentons par $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ les polynômes Y et Z formés pour le discriminant D_1. Posant enfin pour abréger $|D_1| = \Delta_1$, $|D_2| = \Delta_2$, nous avons la relation

$$(17)\qquad Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2) = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

qui, pour des discriminants composés, pourrait simplifier le calcul dans des cas nombreux, si l'on disposait d'une table soigneusement construite des polynômes Y et Z.

En passant sous silence certains détails que nous avons trouvés ou retrouvés sur les fonctions $Y(x)$ et $Z(x)$ et qui se trouvent exposés au chapitre III, le lecteur trouvera dans ce qui suit les formules directes pour le calcul du nombre des classes d'un discriminant positif formamental, à savoir

$$Cl(D)\log E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}}\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2}dx + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{Du}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}, \tag{18}$$

u signifiant une quantité positive arbitraire, pour laquelle on prend le mieux l'unité; puis

$$\frac{1}{2}Cl(D)\log E(D) = \sqrt{D}\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u}}+1} + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{nu\pi}{D}}}{1-e^{-\frac{nu\pi}{D}}}, \tag{19}$$

où on peut prendre $u=\sqrt{2D}$; et enfin

$$\frac{1}{2}Cl(D)\log E(D) = \frac{\pi}{2}u\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2} - \sum_1^\infty \left(\frac{D}{m}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2mu\pi}{D}}\right) - \sqrt{D}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}}-1}, \tag{20}$$

où il se recommande de prendre $u=\sqrt{D}$. A cause de présence de la somme

$$\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2},$$

laquelle est d'ailleurs égale à l'expression plus simple

$$-\frac{4}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_1^{\left[\frac{D}{2}\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D},$$

cette dernière formule ne peut être employée que pour les valeurs de D assez modérées. Mais les deux autres formules sont assez commodes, puisque le facteur $\log E(D)$ est souvent de même grandeur que $\sqrt{D}$.

Plusieurs de nos résultats ne présentent qu'un intérêt théorique. Telles sont par exemples les équations obtenues au I^r chapitre dont je veux rappeler un

$$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r)$$

$$= (-1)^\nu \sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1} \left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1} \left(\frac{D_r}{h_r}\right) E\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

où $D_1, D_2, \ldots, D_r$ sont des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ négatifs, puis généralement $\Delta_\alpha = |D_\alpha|$.

Notre mémoire se termine par certains développements semiconvergents. Nous n'y avons pas développé nos recherches analytiques qui intéressent la théorie des modules singuliers et ne s'appliquent pas au problème particulier qui nous occupe. Je me réserve d'y revenir dans une autre occasion et me contente de signaler les résultats suivants, d'un genre différent:

Représentons par $\Re(x)$ le plus petit reste positif de la quantité réelle x et posons pour abréger

$$\sum_{\rho=1}^{m-1} \rho \Re\left(\frac{n\rho}{m}\right) = \Re(m, n).$$

Cela étant, prenons un entier positif arbitraire τ et posons

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^\tau = \frac{t + u\sqrt{D}}{2},$$

en supposant que D soit un discriminant fondamental positif, et T, U la solution fondamentale de l'équation de FERMAT.

Concevons maintenant un système complet de représentants (a, b, c) des différentes classes du discriminant D, choisis de la sorte que a soit positif; alors on aura

$$\sum_{(a,b,c)} \left[\frac{1}{a} \Re\left(au, \frac{bu - t}{2}\right) + \frac{t}{12a} - \frac{au^2}{4}\right] = 0.$$

Si en second lieu D est le produit de deux discriminants négatifs fondamentaux $-\Delta_1$ et $-\Delta_2$, auxquels correspondent les nombres τ_1 et τ_2 autrefois représentés par τ, on a

$$\sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta_1}{a\,,\,b\,,\,c}\right)\left[\frac{1}{a}\Re\left(au\,,\,\frac{bu-t}{2}\right)+\frac{t}{12a}-\frac{au^2}{4}\right]=\frac{2\tau u}{\tau_1\tau_2}Cl(-\Delta_1)\,Cl(-\Delta_2).$$

CHAPITRE I.

1. Le point de départ de notre exposition est l'équation fondamentale de Dirichlet. Soit D un discriminant quelconque, D_0 le discriminant fondamental qui lui corresponde de la sorte que $D=D_0Q^2$, l'entier Q devant se réduire à l'unité, si le discriminant donné est fondamental.

Notons par $(a\,,\,b\,,\,c)$ les représentants des différentes classes de formes primitives du discriminant D, en convenant de ne considérer que des classes positives dans le cas de discriminant négatif, et supposons que l'on a choisi les formes où $a>0$.

Posons ensuite $\tau=1$ pour $D>0$, $\tau=6$ pour $D=-3$, $\tau=4$ pour $D=-4$ et $\tau=2$ pour $D<-4$.

Cela étant, l'équation de Dirichlet s'écrira comme il suit

$$(1)\qquad \sum_{(a,b,c)}\sum_{m,n}{}^{*}\left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right)F(am^2+bmn+cn^2)$$
$$=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk).$$

Pour $F(z)$ on peut prendre une fonction quelconque qui assure la convergence absolue des deux séries à double entrée; quant au second membre, les conditions sommatoires sont évidentes, et au premier, il faut mettre pour (a, b, c) successivement tous les représentants rappelés plus haut, et pour une forme (a, b, c) fixée, la sommation relative à m, n varie avec le discriminant.

Si D est négatif, on devra prendre pour m et n tous les entiers positifs, nuls et négatifs à l'exception de la seule combinaison $m = n = 0$, tandis que dans le cas de discriminant positif les conditions sommatoires s'écriront

$$m > gn, \qquad n \geqq 0,$$

en posant pour abréger

$$g = \frac{T - bU}{2aU},$$

où les lettres T et U représentent les plus petits nombres positifs qui satisfont à l'équation de FERMAT

$$T^2 - DU^2 = 4.$$

La fonction $F(z)$ étant entièrement arbitraire, notre équation n'est qu'une pure identité et elle revient à affirmer que, pour un nombre positif l, premier avec le nombre Q, la totalité de solutions des différentes équations indéterminées aux inconnues m et n

$$am^2 + bmn + cn^2 = l, \qquad \left(\begin{matrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ m > gn, n \geqq 0 \text{ pour } D > 0 \end{matrix}\right)$$

sera donnée par la somme

$$\tau \sum \left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{D}{h}\right)$$

étendue à tous les entiers positifs h, k ayant le produit égal à l.

Ce théorème très intéressant sur le nombre de représentations d'un nombre fixe par les différentes classes du discriminant D a été établi à l'aide des moyens purement arithmétiques par DIRICHLET et par M. H. WEBER (Göttinger Nachrichten, 1893). Si l'on était en connaissance d'une fonction $F(z)$ qui serait nulle pour z suffisamment grand et telle que les sommes

$$\sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$

aient une valeur commune S, différente de zéro, on aurait dans la formule

$$\frac{\tau}{S}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{D}{h}\right)F(hk)$$

une expression sous forme finie et purement arithmétique du nombre des classes du discriminant D.

Or on ne connait aucune fonction de l'espèce anoncée et pour parvenir à la détermination du nombre des classes on est obligé de faire usage des raisonnements analytiques, étrangers à la théorie élémentaire des nombres.

Nous choisirons une quantité positive X et prendrons

$$F(z) = 1 \quad \text{pour} \quad z \leqq X,$$
$$F(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z > X;$$

nous diviserons alors par X les deux membres de la formule (1) et passerons à la limite pour X infini.

Pour une forme (a, b, c) fixe, la somme

$$N(X) = \sum{}^{*}\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right)F(am^2 + bmn + cn^2)$$

revient à un entier, nombre des combinaisons m, n qui remplissent certaines conditions. La recherche étant plus facile lorsque $Q = 1$, je commence par traiter le cas d'un discriminant fondamental. Dans ce cas la quantité $N(X)$ n'est autre chose que le nombre des points aux coordonnées entières et différents de l'origine qui satisfont à la condition

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X,$$

à laquelle, dans le cas de discriminant positif, s'ajoutent encore les deux suivantes

$$x > gy, \qquad y \geqq 0.$$

Cette représentation géométrique de la question nous permettra d'obtenir facilement la limite du quotien $N(X):X$ pour X infini.

Pour y parvenir la distinction des deux cas est nécessaire et je commence par l'hypothèse

1° $$D = -\Delta < 0.$$

La quantité $N(X)$ sera alors le nombre des points aux coordonnées entières placés dans l'aire de l'ellipse

$$ax^2 + bxy + cy^2 = X.$$

Le quotient $N(X):X$ sera égal à la surface somme de $N(X)$ carrés ayant pour côtés la longueur commune $\frac{1}{\sqrt{X}}$. Construisons les points aux coordonnées

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{X}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{X}},$$

ils se trouvent évidemment dans l'aire de l'ellipse

$$(\alpha) \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

et les $N(X)$ carrés en question peuvent être disposés de la sorte que les points (ξ, η) deviennent leur centres. Ils rempliront simplement toute l'aire de l'ellipse dont l'équation est (α), si l'on ne compte pas une région, très mince pour grandes valeurs de X, qui entoure le contour (α), et si l'on néglige le carré ayant pour centre l'origine.

La limite pour X infini du rapport $N(X):X$ sera donc exactement l'aire de l'ellipse donnée par l'équation (α) et sera exprimée par l'intégrale double

$$\iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1,$$

que je représente par J.

La condition de limites pouvant s'écrire

$$(2a\xi + b\eta)^2 + \Delta\eta^2 \leqq 4a$$

je pose dans l'intégrale

$$2a\xi + b\eta = \zeta\sqrt{\Delta}, \quad \text{d'où} \quad d\xi = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} d\zeta,$$

ce qui donne

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iint d\eta d\zeta, \qquad \zeta^2 + \eta^2 \leqq \frac{4a}{\Delta}.$$

L'intégrale étant ainsi ramenée à celle qui exprime l'aire du cercle ayant la quantité $\sqrt{\frac{4a}{\Delta}}$ pour rayon, on conclut

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{4a\pi}{\Delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

ou bien

$$\lim \frac{N(X)}{X} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

en supposant $D = -\Delta$, $Q = 1$.

Soit en second lieu

2° $$D > 0, \qquad Q = 1.$$

Les coordonnées entières x et y des points que nous devons considérer satisferont alors aux conditions

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leq X, \qquad x > gy, \qquad y \geqq 0,$$

et si nous posons

$$\frac{x}{\sqrt{X}} = \xi, \qquad \frac{y}{\sqrt{X}} = \eta,$$

les points (ξ, η) se trouveront dans l'aire limitée par l'hyperbole

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

et par les deux droites $\eta = 0$, $\xi = g\eta$.

En construisants les carrés du côté égal à $\frac{1}{\sqrt{X}}$ ayant leurs centres aux différents points ξ, η dont nous venons de parler, leur surface totale sera précisément égale à la quantité $N(X):X$. Or les dits carrés remplissent simplement l'aire de la figure dont nous venons de parler, si l'on ne compte pas une bande très mince pour X très grand. Il s'ensuit que la limite pour X infini du quotient $N(X):X$ sera donnée par l'intégrale double

$$J' = \iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1, \qquad \xi > g\eta, \qquad \eta > 0.$$

La première des conditions de limites s'écrivant

$$(2a\xi + b\eta)^2 - D\eta^2 \leqq 4a,$$

je pose

$$2a\xi + b\eta = \zeta,$$

ce qui donne, en observant que

$$2ag + b = \frac{T}{U},$$

la formule

$$J' = \frac{1}{2a}\iint d\eta d\xi; \qquad \zeta^2 - D\eta^2 \leqq 4a, \qquad \eta \geqq 0, \qquad \zeta > \frac{T}{U}\eta.$$

Pour un η donné ζ variera de $\frac{T}{U}\eta$ à $\sqrt{4a + D\eta^2}$, et la condition

$$\frac{T}{U}\eta \leqq \sqrt{4a + D\eta^2}$$

donne, si l'on fait usage de l'équation

$$T^2 - DU^2 = 4,$$

la limitation suivante

$$\eta \leqq U\sqrt{a}.$$

Il vient donc

$$J' = \frac{1}{2a}\int_0^{U\sqrt{a}} d\eta\left(\sqrt{4a + D\eta^2} - \frac{T}{U}\eta\right).$$

Faisant

$$\eta = \frac{2x\sqrt{a}}{\sqrt{D}}$$

il vient

$$J' = \frac{2}{\sqrt{D}}\int_0^{\frac{1}{2}U\sqrt{D}} \left(\sqrt{1 + x^2} - \frac{Tx}{U\sqrt{D}}\right)dx$$

et la formule élémentaire

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

donne le résultat

$$J' = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

d'où la formule cherchée

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

lorsque $D > 0$, $Q = 1$.

Pour traiter le cas général où D n'est plus fondamental nous aurons besoins de la fonction numérique $\mu(n)$ introduite par MOEBIUS;[1] elle est égale à zéro, si n admet un diviseur carré plus grand que un, mais $\mu(n) = (-1)^{\varpi}$, si n se compose de ϖ facteurs premiers différents; enfin $\mu(1) = 1$. Cette fonction jouit de la propriété qui s'exprime par l'équation

$$\sum_{n:d} \mu(d) = 0,$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre $n > 1$.

Si $n = 1$, la somme se réduit au terme unique dont la valeur est $\mu(1) = 1$.

C'est au moyen de cette propriété qu'on vérifie l'identité suivante qui est très importante

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) f(k) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=0}^{\infty} f(hd),$$

et dans laquelle d parcourt tous les diviseurs de Q et $f(z)$ signifie une fonction quelconque qui assure la convergence des séries que la formule contient.

Enfin, pour obtenir l'expression de LEGENDRE

$$\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right)$$

sous une forme plus simple, je suppose les représentants (a, b, c) choisis

---

[1] Cette notation est maintenant presque généralement adoptée; KRONECKER s'est servi du symbole ε_n au lieu de $\mu(n)$.

de la sorte que les nombres b et c soient divisibles par tous les facteurs premiers du nombre Q et que a soit premier avec Q. Alors on aura

$$\left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right)=\left(\frac{Q^2}{am^2}\right)=\left(\frac{Q^2}{m}\right),$$

et la formule fondamentale de DIRICHLET s'écrira d'une manière plus simple

$$(1^a)\qquad \sum_{(a,b,c)}\sum_{m,n}{}^{*}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk).$$

La fonction $F(z)$ étant toujours la même, je vais d'abord traiter le cas du discriminant négatif $D=-\Delta$; la somme partielle correspondant à un représentant fixe (a, b, c) sera comme plus haut

$$N(X)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2);$$

en la transformant au moyen de la formule (2) elle devient

$$N(X)=\sum_{Q:d}\mu(d)\sum_{m,n}{}'F(am^2d^2+bmdn+cn^2),$$

la somme à double entrée $\sum'$ se rapportant à tous les entiers positifs, nuls et négatifs m, n, à l'exception de la seule combinaison $m=n=0$, et d parcourant tous les diviseurs du nombre Q.

En posant maintenant pour abréger

$$\sum_{m,n}{}'F(ad^2m^2+bdmn+cn^2)=N(X;\,ad^2,\,bd,\,c),$$

on a évidemment d'après les résultats obtenus plus haut, la formule

$$\lim_{X=\infty}\frac{N(X;\,ad^2,\,bd,\,c)}{X}=\frac{2\pi}{\sqrt{4acd^2-b^2d^2}}=\frac{2\pi}{d\sqrt{\Delta}},$$

et par conséquent

$$\lim_{X=\infty}\frac{N(X)}{X}=\sum_{Q:d}\frac{\mu(d)}{d}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

Or, $\varphi(Q)$ désignant la fonction numérique d'EULER et de GAUSS exprimant la totalité des nombres premiers avec Q qui ne surpassent pas Q, on a

$$\sum_{Q:d}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\varphi(Q)}{Q}$$

de sorte que

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \frac{\varphi(Q)}{Q} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

— Δ étant un discriminant négatif général ($\Delta = \Delta_0 Q^2$).

Lorsque le discriminant D est positif, notre quantité $N(X)$ est égale à la série à double entrée

$$N(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m>gn} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2);$$

en lui appliquant la méthode de transformation tirée de la relation (2), nous aurons d'abord

$$N(X) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{dm>gn} F(ad^2m^2 + bdmn + cn^2).$$

La condition sommatoire $dm > gn$ peut être écrite comme il suit

$$m > \frac{dT - bdU}{2ad^2U} n,$$

et prendra une forme plus simple, si l'on introduit les notations

$$dT = T_1, \qquad U = U_1, \qquad ad^2 = a_1, \qquad bd = b_1, \qquad c = c_1,$$

et enfin

$$D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = Dd^2.$$

On aura

$$T_1^2 - D_1 U_1^2 = 4d^2,$$

et la condition sommatoire s'écrira

$$m > g_1 n, \quad \text{où} \quad g_1 = \frac{T_1 - b_1 U_1}{2a_1 U_1}.$$

En cherchant la limite pour X infini de la quantité

$$\frac{1}{X} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m>g_1 n} F(a_1 m^2 + b_1 mn + c_1 n^2)$$

le raisonnement sera tout semblable à celui que nous avons exposé plus haut et on parvient à obtenir la valeur de la limite en question sous la forme de l'intégrale double

$$J'' = \frac{1}{2a_1}\iint \delta\eta\,\delta\zeta, \qquad \zeta^2 - D_1\eta^2 \leqq 4a_1, \qquad \eta > 0, \qquad \zeta > \frac{T_1}{U_1}\eta.$$ [1]

Elle est évidemment égale à la quantité

$$\frac{1}{2a_1}\int\limits_0^{U\sqrt{a}} \delta\eta\left(\sqrt{4a_1 + D_1\eta^2} - \frac{T_1}{U_1}\eta\right)$$

qui coïncide avec l'expression

$$\frac{1}{d}J' = \frac{1}{d\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}.$$

On aura donc la valeur cherchée

$$\lim_{X=\infty}\frac{N(X)}{X} = \sum\frac{\mu(d)}{d}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$$

ou bien

$$\lim\frac{N(X)}{X} = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

ce qui résout le problème dans le cas de discriminant positif général.

Les formules obtenues plus haut pour les discriminants fondamentaux résultent des formules générales en y prenant $Q = 1$.

Pour résumer, j'emploie pour un moment l'écriture

$$M = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{lorsque} \quad D = -\Delta = -\Delta_0 Q^2,$$

et

$$M = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}, \quad \text{lorsque} \quad D = D_0 Q^2 > 0.$$

Nos résultats obtenus jusqu'ici se résument par la formule

$$\lim_{X=\infty}\left\{\frac{1}{X}\sum_{m,n}{}^{*}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2 + bmn + cn^2)\right\} = M.$$

---

[1] Pour éviter tout malentendu j'emploie le caractère δ au lieu du symbole habituel, pour désigner la différentielle.

En faisant usage de ce resultat dans l'équation qui résulte de la formule de Dirichlet (1^a)

$$\sum_{(a,b,c)} \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) \right\}$$
$$= \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) \right\},$$

on observe que le premier membre se compose d'autant de fois la quantité M qu'il y a des formes (a, b, c), c'est à dire qu'il y a de classes différentes. On a donc

$$MCl(D) = \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) \right\}.$$

L'évaluation de la limite qui constitue le second membre donnera évidemment une expression du nombre des classes $Cl(D)$ du discriminant D. La limite en question se simplifie d'abord en lui appliquant la formule (2) qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{k=1}^{\infty} F(dhk),$$

et puisque pour notre fonction $F(z)$ spéciale

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(dkh) = E\left(\frac{X}{dh}\right),$$

en faisant usage de l'écriture habituelle $E(z)$ pour désigner le plus grand entier contenu dans z, nous aurons

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) E\left(\frac{X}{dh}\right)$$

et notre résultat prend la forme

$$MCl(D) = \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{X}{dh}\right)}{X} \right\}.$$

Nous verrons bientôt que les limites

$$\lim_{w=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{w}{h}\right)}{w}$$

existent et ont pour valeur la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

il s'ensuit que l'on a

$$\lim_{X=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{X}{dh}\right)}{X} = \frac{1}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h},$$

et notre résultat devient

$$MCl(D) = \tau \sum_{Q:d} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

En faisant usage de la formule

$$\sum \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(Q)}{Q}$$

une réduction se présente tout de suite, et on aura la formule

$$M_0 Cl(D) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h},$$

où

$$M_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{si} \quad D = -\Delta < 0,$$

et

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2}, \quad \text{si} \quad D > 0.$$

En d'autres termes on aura les relations classiques de LEJEUNE-DIRICHLET

$$Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2h\pi}, \tag{3}$$

$$Cl(D) \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{\sqrt{D}}{h}. \tag{4}$$

2. Cette démonstration des résultats classiques de DIRICHLET qui vient d'être exposée est en principe due à HERMITE[1] qui l'a succinctement publiée dans les Comptes Rendus, t. 55 (1862).

Je vais la compléter en établissant le lemme sur lequel elle s'appuie et sur lequel le grand géomètre n'à pas insisté; il s'agit de la formule

$$\lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

Je l'envisage comme un cas particulier de la limite plus générale, celle de la somme

$$\sum_{h=1}^{\infty} w_h \frac{E(mv_h)}{m}. \tag{a}$$

On est amené à cette expression par un autre problème tout étranger à l'Arithmétique, en se demandant si l'on parvient à une valeur approchée de la série infinie convergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} w_h v_h, \qquad \left(\lim_{h=\infty} v_h = 0\right),$$

en remplaçant les quantités positives v_h par leurs valeurs approchées prises avec un nombre fini k des décimales. En désignant 10^k par m, la valeur approchée de v_h est en effet la fraction

$$\frac{E(mv_h)}{m},$$

et on est amené à l'expression (a).

[1] *Sur la théorie des formes quadratiques.*

La formule qu'on supçonne ainsi

$$\text{(b)} \qquad \lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} w_h \frac{E(mv_h)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} w_h v_h$$

peut cependant ne pas être exacte en général, si la convergence de la série infinie n'est pas absolue. En effet, si l'on change l'ordre de termes de la série pour lui attribuer une somme différente, on a tout de suite un exemple voulu, car la limite qui constitue le premier membre est indépendante de l'ordre des termes.

La formule (b) reste cependant exacte pour les séries absolument convergentes comme cela est facile à voir, puis pour certaines classes particulières de séries. Parmi ces dernières je me borne à considérer celle qui s'applique à la question particulière qui nous occupe. Je vais supposer alors que les quantités positives

$$v_1\,,\ v_2\,,\ v_3\,,\ \ldots,\ v_\nu\,,\ v_{\nu+1}\,,\ \ldots$$

ne vont jamais en croissant et qu elles tendent verz zéro; enfin que les quantités

$$w_1\,,\ w_2\,,\ w_3\,,\ \ldots,\ w_\nu\,,\ w_{\nu+1}\,,\ \ldots$$

sont telles que les sommes

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu = s_\nu$$

sont en valeur absolue plus petites qu'une certaine constante g.

Cela étant, l'identité bien connue d'Abel

$$w_1v_1 + w_2v_2 + \ldots + w_nv_n = s_1(v_1 - v_2) + s_2(v_2 - v_3) + \ldots$$
$$+ s_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + s_n v_n$$

fait voir que la série

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu v_\nu$$

est convergente. Je pose ensuite l'expression dont il s'agit d'étudier la limite pour m infini

$$S_m = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m},$$

et j'emploie les décompositions suivantes des sommes S et S_m:

$$S = S' + S'', \qquad S_m = S'_m + S''_m,$$

où

$$S' = \sum_{\nu=1}^{n-1} w_\nu v_\nu, \qquad S'' = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu v_\nu,$$

$$S'_m = \sum_{\nu=1}^{n-1} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m}, \qquad S''_m = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m}.$$

L'emploi de l'identité d'Abel permet de mettre les restes S'' et S''_m sous la forme suivante

$$S'' = w_n(v_n - v_{n+1}) + (w_n + w_{n+1})(v_{n+1} - v_{n+2}) \\ + (w_n + w_{n+1} + w_{n+2})(v_{n+2} - v_{n+3}) + \ldots,$$

$$S''_m = w_n(v'_n - v'_{n+1}) + (w_n + w_{n+1})(v'_{n+1} - v'_{n+2}) \\ + (w_n + w_{n+1} + w_{n+2})(v'_{n+2} + v'_{n+3}) + \ldots,$$

où j'ai posé pour abréger

$$v'_\nu = \frac{E(mv_\nu)}{m}.$$

Les quantités v'_ν également comme les quantités v_ν ne vont jamais en croissant, de sorte que les différences

$$v_{n+\nu} - v_{n+\nu+1} \quad \text{et} \quad v'_{n+\nu} - v_{n+\nu+1}$$

ne sont jamais négatives. Ensuite, les sommes

$$w_n + w_{n+1} + \ldots + w_{n+\nu} = s_{n+\nu} - s_{n-1}$$

restant, grâce à l'hypothèse, plus petites en valeur absolue que la quantité constante $2g$, on aura évidemment les inégalités

$$|S''| < 2g[(v_n - v_{n+1}) + (v_{n+1} - v_{n+2}) + \ldots],$$

$$|S''_m| < 2g[(v'_n - v'_{n+1}) + (v'_{n+1} - v'_{n+2}) + \ldots]$$

ou bien

$$|S''| < 2gv_n, \qquad |S''_m| < 2g\frac{E(mv_n)}{m} < 2gv_n.$$

En choisissant n suffisamment grand, les sommes complémentaires S'' e S''_m seront alors aussi petites qu'on le voudra, et d'autre part les somme S' et S'_m différent autant peu qu'on le veut, si l'on prend pour m un quantité suffisamment grande. Il s'ensuit que l'on a sous les hypothèse anoncées

$$\lim_{m=\infty} S_m = S.$$

Dans les séries de DIRICHLET on a spécialement

$$v_\nu = \frac{1}{\nu}, \qquad w_\nu = \left(\frac{D}{\nu}\right);$$

les conditions du théorème seront vérifiées, si l'on observe que grâce au relations

$$\sum_{\nu=1}^{|D|} \left(\frac{D}{\nu}\right) = 0, \qquad \left(\frac{D}{\nu + k|D|}\right) = \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{D}{\nu}\right) = s_n$$

n'ont que $|D| - 1$ valeurs différentes. L'équation dont il s'agit

$$\lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}$$

se trouve alors démontrée.

3. Les formules (3) et (4) qui viennent d'être démontrées ramènen la détermination du nombre des classes à la sommation de la série infini

$$P(D) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}; \tag{5}$$

pour désigner cette série KRONECKER s'est servi de la lettre $H(D)$, mai puisque nous conservons la lettre H pour désigner la fonction

$$H(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i})$$

ce qui évite toute confusion entre les formules de WEIERSTRASS et DEDEKIND, il a fallu de changer la notation du grand géomètre. De l'autre côté je crois pouvoir conserver la notation rélative au cas de $D > 0$,

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = E(D) \tag{6}$$

puisque une confusion avec la fonction $E(z)$ de LEGENDRE ne parait pas probable.

KRONECKER est allé un peu plus loin, en acceptant une signification du symbole $E(D)$ aussi dans le cas $D < 0$, ce qui lui a permit de condenser les deux résultats (3) et (4) en une seule équation.

Mais cette simplification est seulement apparente, les deux cas $D > 0$ et $D < 0$ sont de nature tellement différente que toute fusion ne puisse être qu'artificielle et ne pourra se tenir qu'en peu de formules.

Nous devons maintenant nous occuper de la série $P(D)$ et des deux formules de DIRICHLET que je prends sous la forme

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta) = \tau P(-\Delta), \tag{3*}$$

$$\frac{1}{\sqrt{D}} Cl(D) \log E(D) = P(D). \tag{4*}$$

Une première remarque consiste en ce que la série $P(D)$ (en considérant ensemble les deux cas $D > 0$ et $D < 0$) peut se sommer au moyen de la dérivée logarithmique de la fonction gamma.

Posons, pour abréger, $|D| = \Delta$ et considérons la somme finie

$$P_m = \sum_{h=1}^{m\Delta} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

on aura évidemment $\lim P_m = P(D)$ (pour m infini). En posant $h = \alpha + \Delta\nu$, cette somme devient

$$P_m = \sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha + \Delta\nu};$$

cela étant, les identités

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\alpha}\right) = 0, \qquad \left(\frac{D}{\Delta}\right) = 0$$

permettent d'écrire

$$P_m = \frac{1}{\Delta} \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{a}\right) \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\frac{a}{\Delta} + \nu} - \log m \right),$$

et en faisant usage de la formule élémentaire

$$\lim_{m=\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{x+\nu} - \log m \right) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

le passage à la limite pour m infini nous donne le résultat voulu

$$P(D) = -\frac{1}{\Delta} \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{a}\right) \frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}; \qquad (\Delta = |D|). \tag{7}$$

On en tire, en séparant les deux cas, les équations

$$\frac{2\pi}{\tau} \sqrt{\Delta}\, Cl(-\Delta) = -\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}, \tag{7^a}$$

$$\sqrt{D}\, Cl(D) \log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \frac{\Gamma'\left(\frac{a}{D}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{D}\right)}. \tag{7^b}$$

La relation

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta - a}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$$

permet de suite de simplifier (7^a); mettons-y en effet $\Delta - a$ au lieu de a et ajoutons membre à membre avec (7^a); on aura

$$\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left[\frac{\Gamma'\left(1 - \frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{a}{\Delta}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)} \right],$$

et la relation bien connue

$$\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\pi\cot x\pi$$

donne immédiatement

$$\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta} \tag{8}$$

ou en réunissant les termes égaux

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta)=\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}. \tag{8°}$$

On parvient au même résultat en se servant, pour obtenir la somme (7^a), de la formule connue de GAUSS

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{h}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)}=\Gamma'(1)-\log 2\Delta-\frac{\pi}{2}\cot\frac{h\pi}{\Delta}+\sum_{a=1}^{\Delta-1}\cos\frac{2ah\pi}{\Delta}\log\sin\frac{a\pi}{\Delta}; \tag{α}$$

mais cette dernière permet aussi de traiter le cas de discriminant positif; la formule (7^b) donnera alors

$$\sqrt{D}\,Cl(D)\log E(D)=-\sum_{a=1}^{D-1}\log\sin\frac{a\pi}{D}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2ah\pi}{D}. \tag{9}$$

Cette équation beaucoup plus compliquée que la formule (8) se simplifiera, si l'on se borne aux *discriminants fondamentaux*. Pour un tel discriminant a lieu l'équation

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2ah\pi}{D}=\left(\frac{D}{a}\right)\sqrt{D},\qquad(\sqrt{D}>0),$$

et la formule (9) deviendra

$$Cl(D)\log E(D)=-\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)\log\sin\frac{a\pi}{D}, \tag{9*}$$

D étant un discriminant positif fondamental.

En réunissant des termes égaux, on peut écrire le second membre comme il suit

$$-2\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{a}\right)\log\sin\frac{a\pi}{D}\cdot$$

4. Nous parviendrons à la somme de la série $P(D)$ d'une manière plus élémentaire, de la sorte que la formule (α) de Gauss n'est plus indispensable. Mais nous voulons d'abord ramener la détermination du nombre des classes d'un discriminant général à celle dans le cas d'un discriminant fondamental. On peut ramener d'une manière plus générale la quantité $P(DS^2)$ à la quantité $P(D)$.

Je reprends pour ce but la formule établie plus haut

$$P(DS^2)=\lim_{m=\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{DS^2}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m},$$

et j'emploie l'équation (2), à savoir

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{S^2}{h}\right)f(h)=\sum_d\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(hd),$$

(d parcourant tous les diviseurs de S).

J'y fais

$$f(h)=\left(\frac{D}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m},$$

et j'aurai d'abord

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{DS^2}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{h}=\sum_d\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{hd}\right)\frac{E\left(\frac{m}{hd}\right)}{m}$$

$$=\sum_d\mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m'}{h}\right)}{m'},\qquad\left(m'=\frac{m}{d}\right),$$

puis en passant à la limite pour m infini,

$$P(DS^2) = \sum_d \mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d}P(D),$$

d parcourant tous les diviseurs du nombre S.

Cela étant, représentons par s tous les facteurs premiers différents de S, on aura évidemment

$$\sum_d \mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d} = \prod_s\left(1-\left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right) \tag{10}$$

et puis la formule cherchée

$$P(DS^2) = P(D)\prod_s\left(1-\left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right), \tag{11}$$

où s parcourt les facteurs premiers différents du nombre S. Les formules (3^*) et (4^*) permettent alors de conclure

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta S^2}}Cl(-\Delta S^2) = 2P(-\Delta S^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{DS^2}}Cl(DS^2)\log E(DS^2) = P(DS^2)$$

et par conséquent

$$\frac{Cl(-\Delta S^2)}{Cl(-\Delta)} = \frac{2}{\tau}S\prod_s\left(1-\left(\frac{-\Delta}{s}\right)\frac{1}{s}\right), \tag{12}$$

$$\frac{Cl(DS^2)\log E(DS^2)}{Cl(D)\log E(D)} = S\prod_s\left(1-\left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right). \tag{13}$$

Il s'ensuit que la détermination des nombres $Cl(D_0Q^2)$ et $Cl(-\Delta_0Q^2)$ revient à celle des nombres $Cl(D_0)$ et $Cl(-\Delta_0)$ qui correspondent aux discriminants fondamentaux.

Nous allons maintenant considérer la série $P(D)$ correspondante à un discriminant fondamental. Son évaluation s'obtient au moyen des développements suivants

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2} - x = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2hx\pi}{h\pi},$$

$$(\gamma) \qquad -\log\sin x\pi = \log 2 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\cos 2hx\pi}{h}$$

qui ont lieu sous la condition $0 < x < 1$ et qui ne sont que des conséquences de la série logarithmique.

Soit $-\Delta$ un discriminant négatif fondamental et posons, dans l'équation (β), $x = \frac{\nu}{\Delta}$, multiplions de part et d'autre par le signe de Legendre $\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$ et ajoutons les résultats pour $\nu = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$. Il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\Delta}\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\pi} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \sin\frac{2h\nu\pi}{\Delta},$$

ou, si l'on fait usage des relations

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \sin\frac{2h\nu\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sqrt{\Delta}:$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{h\pi} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} P(-\Delta).$$

La dernière quantité étant, suivant (3^*), égale à

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta),$$

on a l'équation connue

$$(14) \qquad Cl(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu.$$

En opérant d'une manière analogue sur l'équation (γ) on trouve l'équation

$$(9^*) \qquad Cl(D)\log E(D) = -\sum_{\nu=1}^{D-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \log\sin\frac{\nu\pi}{D}$$

qui a été obtenue plus haut.

5. De ces résultats de Dirichlet nous allons exposer une généralisation laquelle nous paraît de présenter un certain intérêt théorique.

Dans l'identité analytique

$$-\log(1-z)=\sum_1^\infty \frac{z^n}{n}, \qquad |z|<1,$$

remplaçons z par la quantité

$$ze^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\dots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)},$$

en représentant par $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ les valeurs absolues des discriminants fondamentaux de signes quelconques $D_1, D_2, \dots, D_r$, puis après avoir multiplié les deux membres par le signe

$$\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\dots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)$$

ajoutons les résultats qu'on obtient en faisant varier l'indice h_1 de 1 à Δ_1-1, h_2 de 1 à Δ_2-1, et ainsi de suite.

La somme suivante qui est le coefficient de $\frac{z^n}{n}$ au second membre

$$\sum_{h_1}\sum_{h_2}\dots\sum_{h_r}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\dots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{2n\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\dots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}$$

est évidemment égale au produit des sommes simples

$$\sum_{h_1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)e^{\frac{2nh_1\pi i}{\Delta_1}}\sum_{h_2}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)e^{\frac{2nh_2\pi i}{\Delta_2}}\dots\sum_{h_r}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{\frac{2nh_r\pi i}{\Delta_r}},$$

ou bien en faisant usage de la formule connue, au produit des quantités

$$\left(\frac{D_1}{n}\right)\sqrt{D_1}\left(\frac{D_2}{n}\right)\sqrt{D_3}\dots\left(\frac{D_r}{n}\right)\sqrt{D_r}=\left(\frac{D_1D_2\dots D_r}{n}\right)\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\dots\sqrt{D_r};$$

les racines carrées $\sqrt{D_a}$ sont ou bien positives (si $D_a>0$) ou bien imaginaires positives (si $D_a<0$).

On aura donc l'équation suivante qui a lieu sous la condition $|z| < 1$,

$$(15) \qquad \sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_1 D_2 \ldots D_r}{n}\right)\frac{z^n}{n}$$

$$= -\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\ldots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\log\left(1 - ze^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}\right).$$

En supposant que le nombre $D = D_1 D_2 \ldots D_r$ n'est pas un carré, il sera alors un discriminant et dans la série qui figure au premier membre

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{z^n}{n}$$

on pourra faire tendre z vers l'unité. Si pour certaines combinaisons de valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_r$ la somme

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}$$

se réduit à un entier, le terme logarithmique correspondant au second membre se réduit à la quantité

$$\pm \log(1 - z).$$

La somme de tous les termes devant rester finie pour $z = 1$, il s'ensuit que ces termes se détruiront deux à deux, de sorte que

»dans le second membre de l'équation (15) on peut supprimer toutes les combinaisons $h_1 h_2 \ldots h_r$ lesquelles rendent entière la somme

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\text{»}.$$

Cela posé, soit u une quantité réelle positive; nous aurons quelquefois à considérer les deux *restes*

$$u - E(u) = \Re(u), \qquad u - E\left(u + \frac{1}{2}\right) = R(u),$$

dont le premier s'appelle le plus petit reste positif, le second le plus petit reste absolu.

En posant pour un moment

$$\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)=x, \qquad (0<x<1),$$

on a évidemment

$$e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}=e^{2x\pi i},$$

et puisque, grâce à la condition $0<x<1$,

$$\log(1-e^{2x\pi i})=\log(2\sin x\pi)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi i,$$

on aura

$$\log\left(1-e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots\right)}\right)$$

$$=\log\left|2\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots\right)\right|+\pi i\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots\right)-\frac{\pi i}{2}.$$

Donc en passant à la limite pour $z=1$ dans l'équation (15) il vient

$$(\delta)\quad\left\{\begin{aligned}&\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}P(D)\\&=-\sum_{(h)}{}'\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|\\&\quad-\pi i\sum_{(h)}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)\end{aligned}\right.$$

où les conditions sommatoires sont

$$0<h_1<\Delta_1\ ,\ 0<h_2<\Delta_2\ ,\ \ldots\ ,\ 0<h_r<\Delta_r$$

et où l'on convient de suprimer les termes infinis.

Distinguons maintenant les deux cas $D>0$ et $D<0$.

Pour D négatif et égal à $-\Delta$ le nombre des termes négatifs dans la suite $D_1, D_2, \ldots, D_r$ sera impair $2\nu+1$, et il vient

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}=(-1)^\nu i\sqrt{\Delta}.$$

Si donc, dans l'équation (δ), on compare les parties imaginaires des deux membres, il vient

$$(-1)^\nu\sqrt{\Delta}P(-\Delta)=-\pi\sum_{(h)}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right).$$

Puisque ici $\Delta > 4$, on a $\tau = 2$ et l'équation (3^*) donne

$$P(-\Delta) = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta),$$

et par conséquent, notre résultat devient

$$(-1)^{\nu+1} Cl(-\Delta) = \sum_{(h)} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \cdots \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

ou bien

(16)
$$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r) = (-)^{\nu+1} \sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1} \left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1} \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

($D_1, D_2, \ldots, D_r$ désignant des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ sont négatifs, puis $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ leurs valeurs absolues correspondantes).

Supposons en second lieu que D est positif; alors parmi les facteurs $D_1, D_2, \ldots, D_r$ il y en aura un nombre pair 2ν qui soient négatifs, et le produit $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}$ sera exactement $(-1)^\nu \sqrt{D}$. En comparant les parties réelles dans l'équation (δ), on aura donc

$$(-1)^\nu \sqrt{D}\, P(D) = -\sum_{(h)}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots\right)\right|$$

et puisque

$$\sqrt{D}\, P(D) = Cl(D) \log E(D),$$

il vient

(17)
$$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r) \log E(D_1 D_2 \ldots D_r) = (-1)^{\nu+1} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_r}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|$$

($D_1, D_2, \ldots, D_r$ désignants des discriminants fondamentaux dont 2ν sont négatifs, puis $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ leurs valeurs absolues; les conditions sommatoires étant

$$0 < h_1 < \Delta_1,\ 0 < h_2 < \Delta_2,\ \ldots,\ 0 < h_r < \Delta_r$$

avec supression des termes infinies ou absurdes).

Ces formules généralisent évidemment les résultats (14) et (9^*); en effet, si $r = 1$, $D = -\Delta < -4$, on aura $\Re\left(\frac{h}{\Delta}\right) = \frac{h}{\Delta}$ et l'équation (16) se réduit à (14), puisque $\nu = 0$.

On peut transformer la formule (16) en sorte que la fonction numérique $\Re(x)$ se trouve remplacée par la fonction de LEGENDRE $E(x)$; cette transformation suppose cependant que le nombre r des facteurs D_a surpasse l'unité. On a en effet, par définition,

$$\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$
$$=\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)-E\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

et puis, grâce à l'hypothèse de $r>1$,

$$\sum_{(h)}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)=0;$$

la formule (16) devient alors

$$(16^*)\qquad Cl(D_1D_2\ldots D_r)$$
$$=(-1)^\nu\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)E\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

en supposant comme plus haut que $2\nu+1$ signifie le nombre des termes négatifs de la suite $D_1, D_2, \ldots, D_r$; $r>1$.

Nous parviendrons plus tard à des formules équivalentes et nous développerons les conséquences qu'on en peut tirer, mais à présent je veux considérer l'équation (17) pour montrer qu'elle permet de simplifier l'équation de DIRICHLET (9*) en cas où le discriminant D est un nombre pair.

Si D est un discriminant pair, positif et fondamental, il ne peut avoir que l'une des trois formes suivantes

$$D=4\Delta,\qquad D=8\Delta,\qquad D=8D_1,$$

où $-\Delta$ et D_1 sont des discriminants fondamentaux impairs, le premier négatif, le second positif. Dans le premier cas on a $D_1=-\Delta$, $D_2=-4$, donc $r=2$, $\nu=1$, et la formule (17) devient

$$Cl(4\Delta)\log E(4\Delta)$$
$$=\sum_{h_1=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h_1}\right)\left\{\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta}+\frac{1}{4}\right)\right|-\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta}+\frac{3}{4}\right)\right|\right\}$$

en suprimant toutefois les valeurs de h_1 qui rendraient entier le nombre $\frac{h_1}{\Delta} + \frac{1}{2}$; or de telles valeurs de h_1 ne se présentent pas et l'on a comme la valeur du second membre

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log \left| \frac{\sin \pi \left(\frac{h}{\Delta} + \frac{1}{4}\right)}{\sin \pi \left(\frac{h}{\Delta} + \frac{3}{4}\right)} \right|,$$

et en faisant usage de l'identité

$$\frac{\sin \pi \left(\frac{1}{4} + \xi\right)}{\sin \pi \left(\frac{3}{4} + \xi\right)} = \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{4} + \xi\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \xi\pi}{1 - \operatorname{tg} \xi\pi},$$

il vient

$$Cl(4\Delta) \log E(4\Delta) = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{h\pi}{\Delta}}{1 - \operatorname{tg} \frac{h\pi}{\Delta}} \right|. \tag{18}$$

Les termes du second membre coïncident deux à deux et on peut l'écrire aussi

$$2 \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{h\pi}{\Delta}}{1 - \operatorname{tg} \frac{h\pi}{\Delta}} \right|.$$

On trouve en poursuivant la voie analogue les deux autres formules que je me borne à indiquer

$$Cl(8\Delta) \log E(8\Delta) = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log \left| \frac{\operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{8} + \frac{h}{\Delta}\right)}{\operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{h}{\Delta}\right)} \right|, \tag{19}$$

$$Cl(8D) \log E(8D) = -\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \left| \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{8} + \frac{h}{D}\right) \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{h}{D}\right) \right|. \tag{20}$$

6. La formule (14), à savoir

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu,$$

peut être transformée en expressions plus simples qui se prètent mieux aux applications. Je suppose en premier lieu Δ impair $2n+1$; la somme

$$S = \sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu$$

qui figure au second membre de la dite formule peut se décomposer comme il suit

$$S = \sum_1^n\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \sum_1^n\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right)(n+\nu).$$

Or, Δ étant impair, on a

$$\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2n+2\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2\nu-1}\right),$$

et en faisant $2\nu - 1 = \lambda$, il vient

$$S = \sum_1^n\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_\lambda\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\Delta+\lambda}{2}. \qquad (\lambda=1,3,5,\ldots,2n-1)$$

La première partie du second membre peut s'écrire

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)\frac{2\nu}{2},$$

et on aura en décomposant la seconde partie en deux sommes

$$S = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{1}{2}\left\{\sum\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)2\nu + \sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda\right\} + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}\sum_\lambda\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right).$$

Or l'expression entre parenthèses $\{\ \}$ n'est autre chose que la somme

$$\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h = S,$$

et on a la relation

$$\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)S = \Delta\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_\lambda\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right),$$

d'où en remplaçant S par sa valeur

$$-\frac{2\Delta}{\tau}Cl(-\Delta),$$

la formule suivante

$$\sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\left(\frac{2}{\Delta}\right) - 2\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{21}$$

($-\Delta$ étant un discriminant fondamental impair, et λ parcourant les valeurs $1, 3, 5, \ldots, \Delta - 2$).

Cette formule subsiste aussi pour Δ pair, mais alors les deux membres sont nuls.

En restant dans l'hypothèse de Δ impair, on peut faire usage de la formule

$$\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\Delta - \lambda}\right),$$

et les différences $\Delta - \lambda = 2\nu$ ayant les valeurs $2, 4, 6, \ldots, \Delta - 1$, il vient

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

et la formule (21) devient la suivante

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta). \tag{22}$$

Nous allons voir qu'elle subsiste aussi pour Δ pair. Dans ce cas on a toujours $\Delta = 4n$ et la somme désignée plus haut par S est ici évidemment

$$S = \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda; \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 4n-1)$$

en remplaçant les nombres $\lambda > 2n$ par l'expression $2n + \lambda$ il vient d'abord

$$S = \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda + \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)(2n+\lambda), \qquad (\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$$

Or on a comme cela est aisé de voir

$$\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)$$

et il reste, après réduction,

$$S = -2n \sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right), \qquad (\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$$

ce que l'on peut écrire, en introduisant de termes nuls,

$$S = -2n \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En remplaçant par S sa valeur $-\Delta \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)$, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 2 \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta);$$

mais c'est précisément l'équation (22) pour Δ pair, puisque dans ce cas $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0$.

L'équation (22) est donc générale, et si l'on observe que la formule (12) donne pour $S = 2$

$$Cl(-4\Delta) = \frac{2}{\tau}\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta),$$

on a l'équation équivalente

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = Cl(-4\Delta). \tag{22*}$$

C'est donc le nombre des classes de formes positives et primitives

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

qui appartiennent au *déterminant* $-\Delta = b^2 - ac$.

On parvient à une forme différente si, dans la somme S, on transforme les termes où $\nu > \frac{1}{2}\Delta$ en y faisant $\nu = \Delta - \mu$; il vient alors

$$S = \sum_{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \sum \left(\frac{-\Delta}{\Delta-\mu}\right)(\Delta - \mu), \qquad \begin{pmatrix} \mu < \frac{\Delta}{2} \\ \nu < \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix},$$

ou bien

$$S = 2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu - \Delta\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En substituant la valeur de S et de la somme (22), il vient

$$(23)\qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

La somme au premier membre sera donc égale à zéro, si Δ est de la forme $8k-1$.

Pour obtenir la somme

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda, \qquad (\lambda=1,3,5,\ldots,\Delta-2)$$

en cas du Δ impair, je pose $\lambda = \Delta - 2\mu$; elle devient

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\Delta-2\mu}\right)(\Delta-2\mu) = -\Delta\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) + 2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)\mu,$$

ou en faisant usage des formules (22) et (23),

$$(24)\qquad \sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\Delta} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta)$$

($-\Delta$ étant un discriminant fondamental impair et la sommation s'étendant aux valeurs de $\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \Delta - 2$).

Pour Δ pair le premier membre n'est autre chose que

$$\frac{1}{\Delta}S = -\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

Reprenons la formule (22) pour Δ *impair* plus grand que 3,

$$s = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta).$$

En repartissant les valeurs de ν en paires 2μ et impaires λ, et posant dans les termes correspondants à ces dernières $\lambda = \Delta - 2\rho$, on aura

$$0 < \mu < \frac{1}{4}\Delta, \qquad \frac{1}{4}\Delta < \rho < \frac{1}{2}\Delta$$

et la somme s devient

$$s = \sum\left(\frac{-\Delta}{2\mu}\right) - \sum\left(\frac{-\Delta}{2\rho}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left[\sum\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) - \sum\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\right].$$

Il s'ensuit

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) - \sum\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)s$$

et on a évidemment

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) + \sum\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = s,$$

d'où

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2}s,$$

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2}s.$$

En substituant la valeur de s il vient

$$\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{\left(1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2}Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{\mu=\left[\frac{\Delta}{4}\right]+1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2}Cl(-\Delta),$$

d'où en distingant les deux cas $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = \pm 1$, on tire aisément

$$(25) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} Cl(-\Delta), \\ \displaystyle\sum_{\mu=\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = 3\,\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} Cl(-\Delta). \end{cases}$$

Une de ces deux quantités est nulle, l'autre est différente de zéro, et le calcul se ramène à déterminer $\left[\frac{1}{4}\Delta\right]$ signes de LEGENDRE.

Nous terminons par la détermination de la somme

$$T = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu^2.$$

En y remplaçant ν par $\Delta - \nu$, on aura

$$T = -\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)(\Delta-\nu)^2 = -\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)[\Delta^2 - 2\Delta\nu + \nu^2]$$

ou bien

$$T = 2\Delta \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu - T,$$

d'où il vient

$$T = \Delta \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu$$

ou bien

$$(26) \quad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu^2 = -\frac{2\Delta^2}{\tau} Cl(-\Delta).$$

Il peut avoir quelque intérêt de connaître les sommes

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)h, \qquad \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D}$$

aussi dans les cas où les discriminants $-\Delta$ et D ne sont plus fondamentaux. Ces sommes se déterminent aisément au moyen de l'identité (2)

$$(\alpha) \qquad \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{h}\right)f(h)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(dh),$$

d parcourant les diviseurs de Q.

Soit en effet $\Delta=\Delta_0 Q^2$, où $-\Delta_0$ est un discriminant fondamental; en faisant, dans la formule (α),

$$f(h)=\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h \quad \text{pour} \quad h\leqq\Delta, \quad \text{et} \quad f(h)=0 \quad \text{pour} \quad h>\Delta,$$

elle devient

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta_0 Q^2}{h}\right)h=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\frac{\Delta}{d}}\left(\frac{-\Delta_0}{hd}\right)hd,$$

ou bien

$$(\beta) \qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h=\sum\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)d\sum_{h=1}^{\Delta_0\frac{Q^2}{d}}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h.$$

Cela étant, l'expression

$$A=\sum_{h=1}^{\Delta_0 m}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h$$

se détermine en faisant $h=\rho+\Delta_0\nu$ ($\rho=1,2,\ldots,\Delta_0,\ \nu=0,1,\ldots,m-1$); on aura

$$A=\sum_{\rho=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\rho}\right)\sum_{\nu=0}^{m-1}(\rho+\Delta_0\nu)=m\sum_{1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\rho}\right)\rho;$$

or, $-\Delta_0$ étant un discriminant fondamental, on peut appliquer la formule (14) qui donne

$$A=-m\Delta_0\frac{2}{\tau_0}Cl(-\Delta_0)$$

ou bien

$$(27) \qquad \sum_{h=1}^{m\Delta_0}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h=-m\Delta_0\frac{2}{\tau_0}Cl(-\Delta_0).$$

L'expression qui figure au second membre de l'équation (β)

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0 \frac{Q^2}{d}} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) h$$

aura donc pour valeur

$$-\frac{Q^2}{d} \Delta_0 \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0)$$

et il vient

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) h = -Q^2 \Delta_0 \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0) \sum_d \mu(d) \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right).$$

La somme étendue aux diviseurs d du nombre Q

$$\sum_d \mu(d) \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)$$

n'est autre chose que le produit

$$\prod_q \left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right)$$

étendu aux facteurs premiers différents du nombre Q. On aura par conséquent le résultat voulu

$$(28) \qquad -\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0) \prod_q \left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right),$$

($\Delta = \Delta_0 Q^2$, $-\Delta_0$ étant un discriminant fondamental et q parcourant les facteurs premiers différents de Q).

Considérons maintenant la seconde somme, celle qui correspond au discriminant positif $D = D_0 Q^2$, où D_0 est un discriminant fondamental. En faisant, dans la formule (α),

$$f(h) = \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D_0 Q^2} \quad \text{pour} \quad 0 < h < D_0 Q^2,$$

puis $f(h) = 0$ pour $h \geqq D_0 Q^2$, nous aurons

$$\sum_{1}^{D_0 Q^2 - 1} \left(\frac{D_0 Q^2}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D_0 Q^2} = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{h=1}^{D_0 \frac{Q^2}{d} - 1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{dh\pi}{D_0 Q^2}.$$

Pour évaluer la somme

$$B = \sum_{1}^{mD_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{mD_0}$$

on pose $h = \rho + D_0\nu$ $(\rho = 1, 2, \ldots, D_0;\ \nu = 0, 1, \ldots, m-1)$, et il vient

$$B = \sum_{\rho=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{\rho}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \log \sin \pi\left(\frac{\rho}{mD_0} + \frac{\nu}{m}\right);$$

la sommation relative à ν s'effectuera au moyen de l'identité

$$\sum_{a=0}^{m-1} \log \left| 2 \sin \pi\left(x + \frac{a}{m}\right)\right| = \log | 2 \sin mx\pi|$$

qui donne

$$B = \sum_{\rho=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{\rho}\right) \log \sin \frac{\rho\pi}{D_0}$$

ou bien

$$\sum_{1}^{mD_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \left| \sin \frac{h\pi}{mD_0} \right| = -Cl(D_0) \log E(D_0).$$

Au moyen de cette formule le résultat obtenu plus haut devient

$$\sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D} = -Cl(D_0) \log E(D_0) \sum_{d} \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right)$$

ou bien

$$(29) \qquad -\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D} = Cl(D_0) \log E(D_0) \prod_{q} \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\right)$$

$(D = D_0 Q^2$, D_0 étant un discriminant fondamental et q parcourant les facteurs premiers différents de $Q)$.

CHAPITRE II.

1. Les considérations suivantes basent sur la relation bien connue

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\nu^2\omega\pi i+2\nu u\pi i} = \sqrt{\frac{i}{\omega}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\nu)^2}$$

que j'écrirai encore une fois en prenant $\omega = ix$, $x > 0$:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 x\pi+2\nu u\pi i} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

Cela posé, soit D un discriminant fondamental positif; dans l'équation (1) je pose $u=\frac{h}{D}$ et après avoir multiplié les deux membres par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{D}{h}\right)$ j'ajoute les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. On reçoit de la sorte au premier membre l'expression

$$\sqrt{D} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi},$$

et pour simplifier le résultat qui se présente au second membre, il faudra introduire un nouvel indice sommatoire $n = h + D\nu$; on obtient ainsi l'équation

$$\sqrt{D} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{D^2 x}}.$$

Elle prendra une forme plus élégante en remplaçant x par $\frac{x}{D}$ et en réunissant des termes égaux, à savoir

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}.$$

Si au contraire on opère d'une manière analogue pour un discriminant fondamental négatif, on n'obtient aucun résultat, les deux membres de l'équation obtenue étant nuls. Mais en prenant la dérivée des deux membres de l'identité (1) par rapport à u, on parvient à l'équation

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu e^{-\nu^2 x\pi}\sin 2\nu u\pi = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(u+\nu)e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

En prenant, pour un discriminant fondamental négatif $-\Delta$, $u=\frac{h}{\Delta}$ et en ajoutant, après avoir multipliées les deux membres par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$, il vient

$$2\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{n\,.\,\mathrm{sgn}\,n}{\Delta}e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta^2 x}},$$

ou bien, si l'on change x en $\frac{x}{\Delta}$ et simplifiant,

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2 x\pi}{\Delta}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}.$$

Occupons-nous d'abord de cette dernière équation. Elle fait voir que la fonction suivante

$$F=\int_z^{\infty}dx\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2x\pi}{\Delta}} + \int_0^z\frac{dx}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}$$

ne dépende pas de la variable z supposée positive. Pour z infiniment petit la seconde intégrale disparaît et il ne reste que la première, à savoir

$$\frac{\Delta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}}$$

qui, pour $z=0$, se réduit à la quantité

$$F=\sqrt{\Delta}\,\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

La constante F étant ainsi déterminée, nous aurons la relation suivante où z est une quantité positive quelconque:

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right) n \int_0^z e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

L'intégrale se simplifie en faisant $x = \dfrac{n^2\pi}{\Delta x_1^2}$ et on aura ce résultat définitif

$$(4) \qquad \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta z}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Cette formule fournirait un moyen des plus expéditifs pour le nombre des classes des grands discriminants négatifs, si les tables de valeurs de l'intégrale

$$\int_u^\infty e^{-x^2} dx$$

étaient plus complètes, c'est à dire calculées pour les valeurs de l'argument à petite différence; cette difficulté externe, et provisoire peut-être, diminue l'utilité de la formule (4), les nombreuses interpolations dans le calcul étant bien fatigantes.

La formule fournira l'approximation la plus commode en prenant $z = 1$; on aura à peine besoins d'un nombre de termes égal à $\sqrt{\Delta}$, puisqu'il s'agit d'un nombre entier dont on connait d'ailleurs assez souvent certains diviseurs, si Δ est un nombre composé.

Passons maintenant à la formule (2); elle fait voir que la quantité

$$G = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} + \int_0^z \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}$$

est indépendante de la quantité z supposée positive; on obtient sa valeur en passant à la limite pour $z = 0$ ce qui donne

$$G = \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n} = Cl(D)\log E(D).$$

En employant cette valeur de G et les formules faciles à obtenir

$$\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{2\sqrt{D}}{n\sqrt{\pi}} \int_{n\sqrt{\frac{\pi z}{D}}}^\infty e^{-x^2} dx,$$

$$\int_0^z \frac{dx}{x} e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}} = \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x},$$

on aura le développement à convergeance rapide

$$(5)\qquad Cl(D)\log E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{z\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2} dx + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Le nombre de termes qu'il faut calculer est encore plus petit que dans le cas précédent, à cause de la présence du facteur $\log E(D)$ au premier membre, dont la valeur paraît, d'après l'expérience, être comparable à $\sqrt{D}$. La valeur de z qu'on peut recommander est $z = 1$.

Ecrivons maintenant, pour abréger et d'une manière provisoire,

$$Cl(D)\log E(D) = A, \qquad \frac{n^2\pi}{D} = c, \qquad \left(\frac{D}{n}\right) = \varepsilon;$$

l'équation (5) s'écrira alors

$$A = \sum \varepsilon \int_1^\infty e^{-czx}\sqrt{z}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum \varepsilon \int_1^\infty e^{-\frac{cx}{z}} \frac{dx}{x}.$$

Soit maintenant u une constante positive, multiplions les deux membres par $e^{-uz}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}$ et intégrons de $z = 0$ à $z = \infty$; on aura

$$A\sqrt{\frac{\pi}{u}} = \sum \varepsilon \int_1^\infty \frac{1}{cx+u} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum \varepsilon \int_1^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

L'intégrale double se simplifie en faisant usage de la formule de Cauchy

$$\int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-2\sqrt{cux}},$$

et on aura

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\int_1^\infty e^{-2\sqrt{cux}}\frac{dx}{x};$$

en changeant x en x^2 la dernière quantité prend la forme

$$2\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int_1^\infty e^{-2\sqrt{cu}\,x}\frac{dx}{x},$$

et notre formule devient

$$A\sqrt{\frac{\pi}{u}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{u}}\sum\varepsilon\int_1^\infty e^{-2x\sqrt{cu}}\frac{dx}{x} + \sum\varepsilon\int_1^\infty \frac{1}{cx+u}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale qui figure en seconde série s'exprime sous forme finie en posant $cx = ut^2$ ce qui donne

$$\int_1^\infty \frac{1}{cx+u}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{cu}}\int_{\sqrt{\frac{c}{u}}}^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{cu}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u}{c}};$$

notre équation sera ainsi

$$\frac{1}{2}A = \sum\frac{\varepsilon}{\sqrt{c\pi}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u}{c}} + \sum\varepsilon\int_1^\infty e^{-2x\sqrt{cu}}\frac{dx}{x}$$

ou bien en modifiant l'intégrale et substituant les valeurs de c, ε, A et posant pour plus d'élégance $\frac{Du}{\pi} = w^2$,

$$(6)\qquad \frac{1}{2}Cl(D)\log E(D) = \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n\pi}\operatorname{arctg}\frac{w}{n} + \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{2nw\pi}{D}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

w étant une quantité positive quelconque.

L'avantage de cette formule n'est pas trop grand, la convergeance de la première série étant trop lente. Il s'ensuit que lorsque w surpasse une certaine limite, la quantité

$$\frac{2\sqrt{D}}{\pi \log E(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{w}{n}$$

a sa partie entière constante qui est égale à $Cl(D) - 1$.

2. Une source de relations arithmétiques consiste dans la représentation analytique de certaines fonctions arithmétiques. En particulier la fonction $E(x)$ de Legendre a été représentée à l'aide d'une série trigonométrique par Schaar[1] et Stern;[2] ce dernier en a tiré plusieures conséquences arithmétiques. Riemann et dans son comentaire M. Dedekind[3] ont rencontré cette fonction, avec d'autres analogues, dans un domaine analytique important; les applications les plus intéressantes ont cependant été publiées par M. Alexander Berger.[4]

Au lieu de la fonction $E(x)$ nous introduisons la fonction $E^*(x)$, égale à $E(x)$ pour x fractionnaire, mais égale à $E(x) - \frac{1}{2}$ pour x entier; sous cette convention, la formule suivante aura lieu pour tous les x positifs

$$E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \tag{7}$$

Elle aura lieu aussi pour x négatif, si l'on a soin de choisir sa définition de la sorte que

$$E^*(x) + E^*(-x) = -1.$$

Une autre fonction est

$$R(x) = x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

[1] Mémoires des sav. étr. publiés par l'académie des Sciences de Belgique, T. 23.

[2] Journal de Crelle, T. 59.

[3] Riemann's Werke: *Fragmente aus d. Th. der ellipt. Modulfunctionen.*

[4] Nova Acta reg. Soc. sc. Upsaliensis, 1886.

qui s'appelle le plus petit reste absolu de x; elle satisfait aux conditions

$$-\frac{1}{2} \leqq R(x) < \frac{1}{2};$$

la différence $x - R(x)$ est le nombre entier le plus approchée de x.

J'introduirai au lieu de $R(x)$ la fonction modifiée

$$R^*(x) = x - E^*\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

qui ne diffère de $R(x)$ que lorsque x est un multiple impair de $\frac{1}{2}$. Evidemment, on a quel que soit x l'équation

$$R^*(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \tag{8}$$

Le plus petit reste positif de x est l'expression

$$\mathfrak{R}(x) = x - E(x)$$

et il lui correspond la fonction modifiée

$$\mathfrak{R}^*(x) = x - E^*(x)$$

dont la développement résulte immédiatement de (7).

Nous désignerons suivant l'usage, par sgn. $R^*(x)$ le signe de $R^*(x)$, c'est à dire la quantité $+1$, 0, -1 selon que $R^*(x)$ est positif, nul ou négatif; cette fonction est développable pour toutes les valeurs de x en série suivante

$$\operatorname{sgn.} R^*(x) = 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(4\nu + 2)x\pi}{(2\nu + 1)\pi}. \tag{9}$$

Notons aussi la formule concernant la valeur absolue de $R(x)$,

$$|R(x)| = \frac{1}{4} - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(4\nu + 2)x\pi}{(2\nu + 1)^2\pi^2}. \tag{10}$$

Cela étant, soit D un discriminant positif fondamental et m un entier positif; dans les formules qui précèdent nous changerons x en $x + \frac{mh}{D}$, puis nous multiplierons par le signe de Legendre $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajouterons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. En faisant usage de la formule

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2\nu h\pi}{D} = \left(\frac{D}{\nu}\right)\sqrt{D}$$

nous parviendrons de cette manière aux équations suivantes:

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)E^*\left(x+\frac{mh}{D}\right) = \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}, \tag{11}$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)R^*\left(x+\frac{mh}{D}\right) = -\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}, \tag{12}$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\operatorname{sgn.}R^*\left(x+\frac{mh}{D}\right) = 4\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda\pi}, \tag{13}$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(x+\frac{mh}{D}\right)\right| = -2\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda^2\pi^2}, \tag{14}$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots).$$

En opérant de la même manière au moyen d'un discriminant fondamental négatif, les résultats seront semblables, seulement dans la première formule la quantité

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{mh}{\Delta}$$

ne sera plus nulle, mais aura pour valeur

$$-\frac{2m}{\tau}Cl(-\Delta);$$

nous aurons ainsi les équations:

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)E^*\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right) \tag{15}$$

$$= -\frac{2m}{\tau}Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(16)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)$$
$$=-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(17)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn.}R^*\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)=4\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda\pi},$$

$$(18)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)\right|=2\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda^2\pi^2},$$

$$(\lambda=1, 3, 5, 7, 9, \ldots).$$

Ce système d'équations se distingue du précédent qui appartient aux discriminants positifs par ce que les séries aux seconds membres des trois premières équations ne s'annulent plus en prenant $x=0$; on obtient au contraire les séries

$$\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi},\qquad \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi},\qquad \sqrt{\Delta}\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda\pi}.$$

La première est

$$\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta),$$

la troisième peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

et a pour valeur

$$\frac{1}{2}Cl(-4\Delta);$$

quant à la seconde, j'observe qu'on peut l'écrire, en séparant les valeurs impaires λ de ν des valeurs paires 2ν, comme il suit

$$\sqrt{\Delta}\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda\pi}-\sqrt{\Delta}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}$$

ce qui est évidemment égal à

$$\frac{1}{2}\,Cl(-4\Delta)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

En substituant la valeur

$$Cl(-4\Delta)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta),$$

la dernière expression devient

$$\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta);$$

c'est donc la valeur de la série

$$\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi},$$

Si donc on pose dans les équations (16) et (17) $x=0$, $m=1$, on aura d'abord

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn.}R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=2Cl(-4\Delta);$$

dans ces sommes je conserve la première moitié de termes, et dans la seconde je pose $h=\Delta-k$; on aura alors

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\left(\frac{-\Delta}{k}\right)R^*\left(\frac{k}{\Delta}\right),$$

et de même pour la seconde somme; puisque enfin pour $h<\frac{1}{2}\Delta$ on a $R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\frac{h}{\Delta}$, $\operatorname{sgn.}R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=1$, il vient

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau} Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = Cl(-4\Delta),$$

résultats que nous avons vérifiés plus haut.

Les formules (11) et (15) sont les plus importantes.

Je m'arrêterai encore aux formules (14) et (18). En faisant $x=0$, $m=1$ dans la première, on trouve

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D} = -\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2}$$

ce qu'on peut écrire

$$(19)\qquad \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D} = -\left(1-\left(\frac{2}{D}\right)\frac{1}{4}\right)\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}.$$

La série qui figure au second membre est une de celles qui s'expriment sous forme finie au moyen des polynômes de BERNOULLI; pour le vérifier rapidement, je me rappelle l'équation qui a lieu pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$(20)\qquad x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu^2\pi^2};$$

en y faisant $x=\frac{h}{D}$, multipliant par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutant, on obtient

$$(21)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2} = \sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}$$

d'où en comparant avec (19) on tire cette relation remarquable

$$(22)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 = -\frac{4D}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)h.$$

Passons maintenant à (18); en y faisant $x = \frac{1}{4}$, $m = 1$, et en observant que

$$\sin\frac{\lambda\pi}{2} = \left(\frac{-4}{\lambda}\right), \qquad \left(\frac{-4}{\lambda}\right)\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = \left(\frac{4\Delta}{\lambda}\right)$$

nous aurons

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right| = \sqrt{4\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}.$$

Si Δ est impair, 4Δ sera un discriminant pcsitif fondamental et on pourra appliquer l'équation (21) pour $D = 4\Delta$; il vient

$$\sqrt{4\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2} = \sum_{1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(4\Delta)^2},$$

d'où il suit (pour Δ impair)

$$\sum_{h=1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h^2 = 16\Delta^2\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|, \tag{23}$$

et si l'on fait usage de (22)

$$\sum_{h=1}^{2\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h = -4\Delta\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|. \tag{23^a}$$

Or, la somme qui figure au second membre

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|$$

est évidemment

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right) + \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{\Delta}\right) + \sum_{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{3}{4}\right)$$

ce qui peut s'écrire, en réunissant des termes égaux,

$$2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} - 2\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}.$$

Donc

$$(24)\qquad -\frac{1}{8}\sum_{1}^{2\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h-\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h,$$

$-\Delta$ étant un discriminant négatif fondamental impair.

3. Reprenons les équations (11) et (15) dans le cas de $m=1$:

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E^*\left(x+\frac{a}{D}\right)=\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E^*\left(x+\frac{a}{\Delta}\right)=-\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta)+\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

où D et $-\Delta$ sont des discriminants fondamentaux. Ces développements deviennent plus importants, si l'on parvient à simplifier les premiers membres; c'est ce que donnent les formules suivantes

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{D}\right)=\sum_{a=1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{a}\right),$$

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{\Delta}\right)=-\sum_{a=1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right),$$

dans lesquelles x est une quantité positive et desquelles il est aisé de passer à la fonction $E^*(x)$.

Quant à la démonstration de ces relations, je me borne à établir la première en l'écrivant comme il suit

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(\frac{k+a}{D}\right)=\sum_{a=1}^{k}\left(\frac{D}{a}\right),$$

où il suffit de supposer k entier; car si k était fractionnaire, on recevrait une équation entièrement équivalente en remplaçant k par sa partie entière.

Je suppose d'abord $0<k<D$, et je pose, pour abréger

$$S_k=\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(\frac{k+a}{D}\right);$$

la différence

$$S_k - S_{k-1} = \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \left[E\left(\frac{k+a}{D}\right) - E\left(\frac{k+a-1}{D}\right) \right]$$

se compose de termes qui sont nuls, excepté le cas où $\frac{k+a}{D}$ est un entier, ce qui ne se présente que pour $a = D - k$; donc

$$S_k - S_{k-1} = \left(\frac{D}{D-k}\right) = \left(\frac{D}{k}\right);$$

en observant que

$$S_0 = 0,$$

on en déduit l'équation annoncée

$$S_k = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

qui par là se trouve démontrée.

Cela posé, observons que la quantité

$$\left(\frac{D}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{D}\right)$$

coïncide avec l'expression

$$\left(\frac{D}{a}\right) E\left(x + \frac{a}{D}\right),$$

excepté le cas où $x + \frac{a}{D}$ est un entier; cela ne se présente que lorsque Dx est un entier qui satisfait à la congruence

$$Dx \equiv -a \pmod{D};$$

la différence entre les deux expressions sera alors égale à

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{a}\right)$$

et on pourra l'écrire

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right).$$

Pour pouvoir nous servir de ce symbole dans tous les cas, convenons de représenter par le symbole

$$\left(\frac{D}{z}\right)$$

le zéro, si z est fractionnaire, en lui conservant sa signification habituelle pour z entier. On aura ainsi la formule suivante

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E^*\left(x+\frac{a}{D}\right)=\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{D}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right),$$

et on trouverait par le même raisonnement

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E^*\left(x+\frac{a}{\Delta}\right)=\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{\Delta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right).$$

Nous aurons donc les formules suivantes

$$\text{(I)}\qquad \sum_{a=1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right)=\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\text{(II)}\qquad \sum_{a=1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right)=\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta)-\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Elles sont démontrées sous l'hypothèse de $0<x<1$, mais elles ont lieu pour $x=1$ et aussi pour chaque $x>1$ puisque la somme p. ex.

$$\sum_{a=1}^{Dm+n}\left(\frac{D}{a}\right)$$

est identique avec

$$\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{D}{a}\right).$$

Il faut aussi remarquer que les considérations précédentes exigent de prendre p. ex.

$$\sum_{1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{a}\right)$$

égale à zéro dans le cas de $[Dx]=0$, où le symbole perd de sens.

Je poserai maintenant d'une manière générale, pour un discriminant fondamental positif ou négatif D, et pour $x \geqq 0$,

$$(\text{III}) \qquad S(x, D) = \sum_{a=1}^{[\Delta x]} \left(\frac{D}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{D}{\Delta x}\right),$$

Δ désignant la valeur absolue de D. La fonction $S(x, D)$ sera alors identique avec les séries (I), resp. (II).

Comme première application de ces formules je vais calculer l'intégrale

$$\int_0^1 S^2(x, -\Delta)\,dx = J$$

d'abord au moyen de la formule (II), puis directement pour en conclure une relation arithmétique intéressante. On a évidemment

$$J = \left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{\pi^2}\int_0^1 \left(\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}\right)^2 dx$$

ou, en effectuant les intégrations

$$J = \left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{2\pi^2}\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2}.$$

Or on a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2} = \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2},$$

d parcourant les facteurs premiers différents du nombre Δ; en faisant usage de la valeur

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on a donc

$$J = \left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{12}\prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right).$$

De l'autre côté, la fonction $S(x, -\Delta)$ est discontinue aux points $x = 0, \frac{1}{\Delta}, \frac{2}{\Delta}, \frac{3}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta - 1}{\Delta}, 1$, en restant constante dans les intervalles qu'ils limitent; on a en particulier

$$S\left(\frac{\nu}{\Delta} - 0\right) = \sum_{a=1}^{\nu-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right), \qquad S\left(\frac{\nu}{\Delta} + 0\right) = \sum_{a=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{a}\right).$$

Donc, dans l'intervalle

$$\frac{\nu}{\Delta} < x < \frac{\nu + 1}{\Delta}$$

la fonction $S(x, -\Delta)$ étant égale à la quantité

$$\sum_{a=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = s_\nu,$$

on peut décomposer l'intégrale comme il suit

$$J = \sum_{\nu=0}^{\Delta-1} \int_{\frac{\nu}{\Delta}}^{\frac{\nu+1}{\Delta}} S^2(x, -\Delta) dx$$

et il vient

$$J = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{\Delta} s_\nu^2.$$

En comparant les deux valeurs de J qu'on vient d'obtenir, on a la relation voulue

$$(25) \qquad \frac{4}{\tau^2} Cl(-\Delta)^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\sum_{a=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{a}\right)\right)^2 - \frac{\Delta}{12} \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right),$$

($-\Delta$ étant un discriminant fondamental négatif et d parcourant les facteurs premiers différents de Δ).

En opérant d'une manière analogue sur la fonction

$$S(x, D), \qquad (D > 0),$$

on trouve

$$(26) \qquad \sum_{\nu=1}^{D-1} \left(\sum_{a=1}^{\nu} \left(\frac{D}{a}\right)\right)^2 = \frac{D^2}{12} \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right).$$

Au moyen des développements (I) et (II) on vérifie aisément les formules suivantes, dans les quelles m signifie un entier positif arbitraire

$$\sum_{a=0}^{m-} S\left(\frac{x+a}{m}, D\right) = \left(\frac{D}{m}\right) S(x, D), \qquad (D > 0), \tag{27}$$

$$\sum_{a=0}^{m-1} S\left(\frac{x+a}{m}, -\Delta\right) \tag{28}$$

$$= \left(m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right) S(x, -\Delta),$$

puis la relation suivante qui a lieu pour $0 < x < 1$

$$S(x) = -S(1-x) \operatorname{sgn.} D \qquad (D > 0 \quad \text{ou} \quad D < 0). \tag{29}$$

Occupons-nous spécialement de la formule (28) en faisant usage en même temps de la relation (29) qui pour $D = -\Delta$ devient

$$S(x) = S(1-x).$$

En prenant $m = 2$, $x = 0$, la formule (28) reproduit l'équation bien connue

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right).$$

Pour $m = 3$, $x = 0$ il vient de (28)

$$S\left(\frac{1}{3}, -\Delta\right) = S\left(\frac{2}{3}, -\Delta\right) = \frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} Cl(-\Delta); \tag{30}$$

en supposant $\Delta > 3$ pour qu'on ait $\left(\dfrac{-\Delta}{\frac{1}{3}\Delta}\right) = 0$, on peut écrire

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} Cl(-\Delta), \qquad (\Delta > 3). \tag{30*}$$

En faisant $m = 4$, $x = 0$, l'équation (28) devient

$$S\left(\frac{1}{4}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4 - \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} 2Cl(-\Delta);$$

or

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = S\left(\frac{1}{4}\right), \qquad S\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta),$$

et par conséquent

$$(31) \qquad S\left(\frac{1}{4}, -\Delta\right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} Cl(-\Delta)$$

et si l'on suppose $\Delta \gtrless 4$,

$$(31^*) \qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) - \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

On parvient aussi à un résultat simple, si l'on fait $m = 6$, $x = 0$; en effet cela donne

$$S\left(\frac{1}{6}\right) + S\left(\frac{1}{3}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{2}{3}\right) + S\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{6 - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau} 2Cl(-\Delta).$$

En faisant usage des valeurs connues des quantités $S\left(\frac{1}{2}\right)$ et $S\left(\frac{1}{3}\right) = S\left(\frac{2}{3}\right)$, puis observant que $S\left(\frac{5}{6}\right) = S\left(\frac{1}{6}\right)$, nous aurons

$$(32) \qquad S\left(\frac{1}{6}, -\Delta\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{3}\right) - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau} Cl(-\Delta)$$

ou bien

$$(32^*) \qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{3}\right) - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

Faisant $m = 2$, $\frac{1}{2}x = \frac{1}{12}$, il vient

$$S\left(\frac{1}{12}\right) + S\left(\frac{7}{12}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right)S\left(\frac{1}{6}\right)$$

et en substituant la valeur précédente,

$$(33)\qquad S\left(\frac{1}{12}, -\Delta\right) + S\left(\frac{5}{12}, -\Delta\right)$$
$$= \frac{4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{6}\right) - \left(\frac{-\Delta}{12}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

On trouve d'une manière analogue

$$(34)\qquad S\left(\frac{1}{8}, -\Delta\right) + S\left(\frac{3}{8}, -\Delta\right) = \frac{4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} Cl(-\Delta),$$

$$(35)\qquad S\left(\frac{1}{10}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{5}, -\Delta\right)$$
$$= \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right)S\left(\frac{1}{5}, -\Delta\right).$$

De l'autre côté, l'hypothèse $x = 0$, $m = 5$ donne

$$(36)\qquad S\left(\frac{1}{5}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{5}, -\Delta\right) = \frac{5 - \left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

Si donc $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = -1$, c'est à dire pour $\Delta = 8k + 3$, on déduit de ces deux dernières équations

$$(37)\qquad S\left(\frac{1}{10}, -10\right) = \frac{1 + \left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{2} Cl(-\Delta), \qquad (\Delta \equiv 3 \pmod 8).$$

Mais beaucoup d'autres applications sont possibles des formules fondametales (I) et (II)

$$(\mathrm{a})\qquad S(x, D) = \sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(\mathrm{b})\qquad S(x, -\Delta) = \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) - \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Prenons, par exemple, dans la première équation $x+\frac{am}{\Delta}$ au lieu de x, multiplions de part et d'autre par $\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$ et ajoutons pour $a=1, 2, \ldots, \Delta-1$; $-\Delta$ signifie, bien entendu, un discriminant négatif fondamental et m un entier positif arbitraire. On aura

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)S\left(x+\frac{am}{\Delta}, D\right)=\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)\cos 2\nu\pi\left(x+\frac{am}{\Delta}\right).$$

Le second membre étant évidemment égale à la série

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{D\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-D\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

on pourra l'écrire, d'après (b), sous la forme

$$-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)S(x, -\Delta D)+\left(\frac{-\Delta}{m}\right)Cl(-\Delta D),$$

et nous aurons, par conséquent, la formule suivante

$$(38)\qquad \sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)S\left(x+\frac{am}{\Delta}, D\right)$$
$$=\left(\frac{-\Delta}{m}\right)Cl(-\Delta D)-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)S(x, -\Delta D),$$

et on trouve d'une manière analogue

$$(39)\qquad \sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)S\left(x+\frac{am}{D}, -\Delta\right)=-\left(\frac{D}{m}\right)Cl(-\Delta D)+\left(\frac{D}{m}\right)S(x, -\Delta D).$$

Ces formules ont lieu, si le produit $-\Delta D$ est un discriminant fondamental, de sorte que les entiers Δ et D sont premiers entre eux. Mais il est important de remarquer que ces relations subsisteront aussi dans le cas général où $-\Delta D$ n'est plus fondamental, si l'on convient de définir la fonction $S(x)$ comme la somme de la série (a) ou (b); dans ce cas la signification primitive de la fonction $S(x, -\Delta D)$ comme la somme (III), à savoir

$$\sum_{1}^{[\Delta D x]}\left(\frac{-\Delta D}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta D}{\Delta D x}\right),$$

est la seule chose qui va changer.

En particulier la formule $S(0, -\Delta D) = 0$ subsistera et les équations (38) et (39) donnent les relations suivantes

$$(38^\circ) \qquad \sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)S\left(\frac{am}{\Delta}, D\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)Cl(-\Delta D),$$

$$(39^\circ) \qquad \sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)S\left(\frac{am}{D}, -\Delta\right) = -\left(\frac{D}{m}\right)Cl(-\Delta D),$$

qui ont lieu pour des discriminants fondamentaux quelconques $D > 0$, $-\Delta < 0$.

Soit maintenant D' un discriminant positif fondamental, premier avec D, on vérifie aisément l'équation

$$(40) \qquad \sum_{a=1}^{|D'|-1}\left(\frac{D'}{a}\right)S\left(x + \frac{am}{|D'|}, D\right) = \left(\frac{D'}{m}\right)S(x, DD')$$

qui, sous la forme écrite, subsiste aussi lorsque D et D' signifient deux discriminants fondamentaux négatifs, premiers entre eux; la lettre m signifie un entier positif arbitraire.

Dans les formules (38°) et (39°) supposons $m = 1$ et observons que grâce aux relations

$$S(1 - x, -\Delta) = S(x, -\Delta), \qquad S(1 - x, D) = -S(x, D)$$

les termes sont égaux deux à deux; nous aurons au premier membre de la première évidemment

$$2\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)S\left(\frac{a}{\Delta}, D\right).$$

Observons ensuite que les symboles

$$\left(\frac{D}{\frac{aD}{\Delta}}\right), \quad \left(\frac{-\Delta}{\frac{a\Delta}{D}}\right)$$

disparaîtront de la formule; en effet, si par exemple $\frac{aD}{\Delta} = k$ est un entier celui-ci ne pourra être premier avec D que lorsque Δ est un multiple de D; si c'est le cas, on devra avoir $\alpha = k\frac{\Delta}{D}$, le nombre α aura un facteur commun avec Δ et il s'ensuit

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0;$$

alors, les termes correspondants ne se présentent pas dans l'équation.

On pourra donc mettre nos résultats (38°) et (39°) sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha D}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-\Delta D),$$

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2} Cl(-\Delta D).$$

Dans ces deux relations sont condensées plusieurs formules spéciales, dont quelquesunes proviennent de DIRICHLET.

Occupons-nous d'abord de la formule (B). En y prenant $D = 5$, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2} Cl(-5\Delta),$$

ou bien, en réduisant,

$$\text{(41)} \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{5}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-5\Delta).$$

L'hypothèse de $D = 8$ fournit la formule connue de DIRICHLET

$$\text{(42)} \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8\Delta),$$

et aussi en faisant $D = 12$ on parvient à une formule remarquable

$$\text{(43)} \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{12}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-12\Delta).$$

On peut combiner cette équation avec l'autre

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta), \qquad \Delta > 4;$$

en retranchant, il vient en effet

$$\frac{1}{2} Cl(-12\Delta) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta) - \sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{5\Delta}{12}\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

où les deux sommes ne contiennent que peu de termes. Pour calculer p. ex. $Cl(-12.19)$ on observe que $Cl(-19) = 1$, $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = -1$, et il vient

$$\frac{1}{2} Cl(-12.19) = 3 - \left\{\left(\frac{-\Delta}{1}\right) + \left(\frac{-\Delta}{8}\right) + \left(\frac{-\Delta}{9}\right)\right\} = 3 - (1 - 1 + 1)$$
$$= 2,$$

donc

$$Cl(-228) = 4.$$

Revenons sur la formule (A). En faisant $\Delta = 3$, elle donne

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-3D), \tag{44}$$

puis l'hypothèse de $\Delta = 4$ donne la formule connue de Dirichlet

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-4D), \tag{45}$$

on a ensuite

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{2}{7}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-7D); \tag{46}$$

si enfin on fait $\Delta = 8$, on a d'abord

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}Cl(-8D),$$

et si l'on retranche l'expression

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right) = 0,$$

il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}Cl(-8D), \tag{47}$$

équation également due à DIRICHLET.

Les résultats (A) et (B) qui au fond sont identiques puisqu'on peut passer de l'un à l'autre par le changement de l'ordre de l'addition, contiennent beaucoup d'autres cas particuliers mais qui se compliquent autant que les discriminants augmentent; je noterai encore le cas de $D = 24$ qui donne d'abord

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}Cl(-24\Delta)$$

ou bien, en réduisant,

$$\sum_{\left[\frac{1}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + 2\sum_{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}Cl(-24\Delta).$$

Si l'on connaît déjà $Cl(-\Delta)$, on pourra employer les identités

$$\sum_{1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right);$$

les sommes qui figurent en seconde place des deuxièmes membres contiennent chacune au surplus $\frac{1}{12}\Delta$ termes, celles qui occupent la première place sont respectivement [voir (30*) et (31*)], en supposant $\Delta > 4$,

$$\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}Cl(-\Delta),\qquad \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}Cl(-\Delta),$$

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta).$$

On aura donc

$$\frac{1}{2}Cl(-24\Delta)=\frac{5-3\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}Cl(-\Delta)$$

$$-s\left(1\ldots\frac{1}{24}\right)+s\left(\frac{5}{24}\ldots\frac{1}{4}\right)-s\left(\frac{7}{24}\ldots\frac{1}{3}\right)-s\left(\frac{11}{24}\ldots\frac{1}{2}\right)$$

en posant pour abréger

$$\sum_{a\Delta\leqq\nu\leqq b\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=s(a\ldots b).$$

On ramène donc la détermination de $Cl(-24\Delta)$ à celle de $Cl(-\Delta)$ et au calcul de $\frac{1}{6}\Delta$ signes de Legendre.

Pour établir les formules précédentes, c'est l'élégance qui nous a aidé; mais les formules (A) et (B) peuvent être utiles mêmes dans des cas plus compliqués, si le discriminant donné est le produit de deux facteurs pas trop différents. Prenons par exemple le discriminant $-559 = (-43).13$. J'emploie alors la formule (B) en y prenant $D = 13$, $\Delta = 43$; en écrivant simplement $(x \dots y)$ pour représenter la somme

$$\sum_{x \leqq \nu \leqq y} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

on trouve immédiatement, en décomposant et réunissant d'une manière convenable,

$$\frac{1}{2} Cl(-13\Delta) = \left(\frac{\Delta}{13} \dots \frac{2\Delta}{13}\right) + \left(\frac{3\Delta}{13} \dots \frac{4\Delta}{13}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{4\Delta}{13} \dots \frac{5\Delta}{13}\right) + \left(\frac{5\Delta}{13} \dots \frac{6\Delta}{13}\right);$$

dans notre cas $\Delta = 43$ on a

$$\left(\frac{\Delta}{13} \dots \frac{2\Delta}{13}\right) = (4 \dots 6) = 1 - 1 + 1 = 1,$$
$$\left(\frac{3\Delta}{13} \dots \frac{4\Delta}{13}\right) = (10 \dots 13) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2,$$
$$\left(\frac{4\Delta}{13} \dots \frac{5\Delta}{13}\right) = (14 \dots 16) = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$\left(\frac{5\Delta}{13} \dots \frac{6\Delta}{13}\right) = (17 \dots 19) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2} Cl(-559) = 1 + 2 + 2.3 - 1 = 8$$

ou bien $Cl(-559) = 16$.

Nous étions obligé de calculer treize symboles de Legendre $\left(\frac{-43}{\nu}\right)$; si nous voudrions faire la recherche directe de formes réduites, nous devrions chercher les décompositions des nombres

$$\frac{559 + \lambda^2}{4} \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \dots, 13$$

à savoir $140, 142, 146, 152, 160, 170, 182$, en facteurs ac tels que $\lambda \leqq a \leqq c$. On aurait obtenu les formes réduites suivantes

$$(1, 1, 140), (2, \pm 1, 70), (4, \pm 1, 35), (5, \pm 1, 28), (7, \pm 1, 20),$$
$$(10, \pm 1, 14), (8, \pm 7, 19), (10, \pm 9, 16), (13, 13, 14).$$

On voit que la détermination des formes réduites est plus laborieuse.

Prenons comme second exemple $D = 21$, $\Delta = 59$; en faisant usage de (B), on a d'abord d'une manière générale

$$-\frac{1}{2} Cl(-21\Delta) = \left(1 \ldots \frac{\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{2\Delta}{21}\right) + \left(1 \ldots \frac{4\Delta}{21}\right)$$
$$+ \left(1 \ldots \frac{5\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{8\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{10\Delta}{21}\right).$$

C'est en décomposant en groupes, une expression de la forme

$$a - (a + b) + (a + b + c) + (a + b + c + d) - (a + b + c + d + e)$$
$$- (a + b + c + d + e + f) = - b - d - 2e - f,$$

où la signification des lettres est évidente; on a donc cette formule générale

$$\frac{1}{2} Cl(-21\Delta) = \left(\frac{\Delta}{21} \ldots \frac{2\Delta}{21}\right) + \left(\frac{4\Delta}{21} \ldots \frac{5\Delta}{21}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{5\Delta}{21} \ldots \frac{8\Delta}{21}\right) + \left(\frac{8\Delta}{21} \ldots \frac{10\Delta}{21}\right);$$

dans le cas particulier qui nous occupe, $\Delta = 59$, cette quantité est

$$(3 \ldots 5) + (12 \ldots 14) + 2(15 \ldots 22) + (23 \ldots 28);$$

on devra donc additionner les nombres

$$\left(\frac{-59}{3}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{4}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{5}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{12}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{13}\right) = -1,$$
$$\left(\frac{-59}{14}\right) = -1; \quad 2\left(\frac{-59}{15}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{16}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{17}\right) = 2,$$
$$2\left(\frac{-59}{18}\right) = -2, \quad 2\left(\frac{-59}{19}\right) = -2, \quad 2\left(\frac{-59}{20}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{21}\right) = 2,$$
$$2\left(\frac{-59}{22}\right) = 2, \quad \left(\frac{-59}{23}\right) = -1, \quad \left(\frac{-59}{24}\right) = -1, \quad \left(\frac{-59}{25}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{-59}{26}\right) = \left(\frac{-59}{27}\right) = \left(\frac{-59}{28}\right) = 1.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}Cl(-21\,.\,59) = 12,$$

ou bien

$$Cl(-1159) = 24.$$

Revenons sur les fonctions $S(x, -\Delta)$; la formule

$$S(x, -\Delta) = \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) - \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$

donne pour $x = \frac{1}{2}$,

$$S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right) = \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) + \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi};$$

la série infinie a pour valeur

$$\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta)$$

et on a donc, même pour les discriminants non fondamentaux,

$$S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta);$$

remarquons que, si le discriminant n'est pas fondamental, l'expression finie (III) cesse d'avoir lieu.

Si donc, dans les formules (38) et (39) on fait $x = \frac{1}{2}$, $m = 1$, on aura

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)S\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\Delta}, D\right) = -\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right)Cl(-\Delta D),$$

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)S\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{D}, -\Delta\right) = \quad\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right)Cl(-\Delta D),$$

ou en réduisant aux premiers membres,

$$(48)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)S\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\Delta},\, D\right)=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta D}\right)}{2}Cl(-\Delta D),$$

$$(49)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{a}\right)S\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{D},\, -\Delta\right)=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta D}\right)}{2}Cl(-\Delta D).$$

Ces équations ont lieu pour des discriminants fondamentaux quelconques, $D>0$ et $-\Delta<0$.

Notons quelques cas particuliers. Pour $\Delta=3$, on tire de (48):

$$(50)\qquad S\left(\frac{1}{6},\, D\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2}Cl(-3D)$$

ou bien

$$(50^1)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{6}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2}Cl(-3D),$$

et en retranchant de (44)

$$(50^2)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{6}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{D}\right)Cl(-3D).$$

Posant $\Delta=7$, on a une formule déjà compliquée

$$S\left(\frac{5}{14},\, D\right)+S\left(\frac{3}{14},\, D\right)-S\left(\frac{1}{14},\, D\right)=\frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2}Cl(-7D).$$

En retranchant, membre à membre, les formules (30*) et (31*), il vient, pour $\Delta>4$,

$$(51)\qquad \sum_{a=\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}Cl(-\Delta);$$

cette formule peut s'appliquer, si une au moins des équations suivantes n'a pas lieu: $1 = \left(\frac{-\Delta}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = \left(\frac{4}{\Delta}\right)$; donc si Δ est impair, il ne doit pas avoir la forme $24k - 1$; on devra déterminer à peu près $\frac{\Delta}{12}$ signes $\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$.

En combinant les différentes formules que nous avons établies, on parvient à exprimer les sommes

$$\sum_{1}^{\left[\frac{m}{n}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \quad \sum_{1}^{\left[\frac{m}{n}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

par certains nombres des classes. J'abandonne ce sujet et je me borne à indiquer comment les formules générales établies jusqu'ici pourront servir au calcul du nombre des classes, si le discriminant (négatif) est le produit de trois discriminants fondamentaux premiers entre eux et dont la valeur absolue ne dépasse pas 100. C'est par exemple le discriminant

$$-35931 = 21 \cdot 29(-59).$$

En faisant

$$D = 21, \qquad \Delta = 29 \cdot 59 = 1711,$$

on peut employer la formule (B) qui donne comme nous l'avons vu plus haut

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Cl(-21 \cdot \Delta) &= -S\left(\frac{1}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{21}, -\Delta\right) - S\left(\frac{4}{21}, -\Delta\right) \\ &\quad - S\left(\frac{5}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{8}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{10}{21}, -\Delta\right) \\ &= -\sum_{a} \left(\frac{21}{a}\right) S\left(\frac{a}{21}, -\Delta\right). \qquad (a=1,2,4,5,8,10) \end{aligned}$$

En faisant usage de la formule (39) dans le cas de $\Delta = D_1 \Delta_1$ où $D_1 = 29$, $\Delta_1 = 59$, elle donne (en faisant $m = 1$),

$$S\left(\frac{a}{21}, -\Delta\right) = Cl(-\Delta) + \sum_{b=1}^{28} \left(\frac{29}{b}\right) S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -59\right)$$

et en substituant ces valeurs dans la formule précédente, la constante $Cl(-\Delta)$ disparaîtra et il y resteront les termes

$$\left(\frac{29}{b}\right) S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -\Delta_1\right), \qquad (\Delta_1 = 59).$$

Pour les former, on se sert des relations

$$S(x + 1) = S(x), \qquad S(1 - x) = S(x),$$

et on remarque qu'en prenant $b = 29 - b_1$, on aura des termes analogues, ce qui donne l'expression définitive $(\Delta_1 = 59)$

$$\frac{1}{2} Cl(-21 . 29 . 59)$$

$$= -\sum_a \left(\frac{21}{a}\right) \sum_b \left(\frac{29}{b}\right) \left[S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -\Delta_1\right) + S\left(\frac{a}{21} - \frac{b}{29}, -\Delta_1\right) \right]$$

$$(a = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10;\ b = 1, 2, 3, \ldots, 14)$$

en convenant de représenter par $S(x, -\Delta_1)$ la quantité $S(1 + x, -\Delta_1)$ même si x est négatif.

Cela posé, les quantités $S\left(\frac{a}{21} \pm \frac{b}{29}\right)$ s'expriment aisément par les sommes

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{-59}{\nu}\right). \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, 29)$$

On se construit à cet effet un tableau à double entrée des valeurs $\frac{59a}{21} \pm \frac{59b}{29}$, en mettant ensemble les valeurs réduites qui correspondent aux deux signes, et en ajoutant en même temps le signe de Legendre $-\left(\frac{21}{a}\right)\left(\frac{29}{b}\right)$. On aura ainsi un tableau rectangulaire dont les éléments sont des quantités de la forme $\pm(s_h + s_k)$, et pour obtenir la formule définitive, on devra grouper ensemble les quantités égales $\pm s_h$ ce qui donne une expression de la forme

$$\frac{1}{2} Cl(-21 . 29 . 59) = \sum_{h=1}^{29} c_h s_h,$$

qui s'évalue aisément. On aura donc, en résumé, à dresser un tableau à 6×14 cases pour énumérer les c_h et à évaluer au surplus les signes de LEGENDRE $\left(\frac{-59}{h}\right)$ depuis $h = 1$ jusqu'à $h = 29$.

4. Reprenons l'équation (15) en y supposant $m = 1$:

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle s'annulant à l'infini positif, $f'(x)$ sa dérivée. Certaines conditions qui assurent la convergence étant supposées satisfaites, multiplions les deux membres par $f'(x)dx$ et intégrons de zéro à l'infini. On a

$$\int_0^\infty f'(x)dx = -f(0), \qquad \int_0^\infty f'(x) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} f\left(n - \frac{a}{\Delta}\right),$$

d'où en faisant $n\Delta - a = m$,

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \int_0^\infty E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) f'(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) f\left(\frac{m}{\Delta}\right).$$

Ensuite, l'intégration par parties permet de transformer l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(x) \cos 2\nu x\pi dx$$

en l'expression

$$-f(0) + 2\nu\pi \int_0^\infty f(x) \sin 2\nu x\pi dx.$$

En faisant usage de ces valeurs, nous aurons la formule

$$-\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) f\left(\frac{m}{\Delta}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \left\{ -\frac{f(0)}{\nu} + 2\pi \int_0^\infty f(x) \sin 2\nu x\pi dx \right\},$$

ou bien

$$(52)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)f\left(\frac{m}{\Delta}\right)=2\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx.$$

Si l'on choisit convenablement la fonction $f(x)$, la série

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

apparaîtra dans le second membre et on aura un développement de la quantité $Cl(-\Delta)$. Faisons par exemple

$$f(x)=\int_{ax}^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

la formule

$$2\nu\pi\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx=f(0)+\int_0^{\infty}f'(x)\cos 2\nu x\pi\,dx$$

donnera

$$2\nu\pi\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-a\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos 2\nu x\pi\,dx$$

ou bien

$$2\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\pi}-\frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\pi}e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_{\frac{am}{\Delta}}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\Delta\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}-\sqrt{\Delta\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}},$$

ou en faisant $a=\sqrt{\frac{\Delta\pi}{u}}$, $u>0$,

$$(4)\qquad \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{m^2u\pi}{\Delta}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_{m\sqrt{\frac{\pi}{\Delta u}}}^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

équation que nous avons obtenue plus haut par un procédé différent.

Prenons en second lieu la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\cdot$$

L'hypothèse de $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$ n'étant permise puisque la fonction devient infinie pour $x = 0$, j'emploie la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

en la retranchant de la précédente; il vient

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\cdot$$

Faisant donc, dans la formule (52),

$$f(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{x}$$

nous aurons

$$\Delta\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1 - e^{-\frac{am}{\Delta}}}{m} = 2\sqrt{\Delta}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\operatorname{arctg}\frac{a}{2\nu\pi},$$

d'où en changeant a en $2u\pi$,

$$(53)\qquad \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arctg}\frac{u}{m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mu\pi}{\Delta}}.$$

La formule suivante [1]

$$2\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\pi}{e^{ux\pi} + \cos\alpha\pi}\sin vx\pi\,dx = \frac{1}{v}\left(\alpha - \frac{\sin\operatorname{hyp}\frac{\alpha v\pi}{u}}{\sin\operatorname{hyp}\frac{v\pi}{u}}\right),$$

$$(0 < \alpha < 1\,,\ u > 0\,,\ v > 0),$$

[1] Reinhard Mildner, *Beitrag zur Ausmittlung des Werthes bestimmter Integrale* (Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 48; 1884).

conduit à choisir

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin a\pi}{e^{ux\pi} + \cos a\pi};$$

nous aurons

$$\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin a\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos a\pi} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \left(a - \frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{2\nu a\pi}{u}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{2\nu\pi}{u}} \right)$$

ou bien

(54) $$\frac{a\pi}{\tau} Cl(-\Delta)$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin a\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos a\pi} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{2am\pi}{u}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{2m\pi}{u}},$$

$$(0 < a < 1,\ u > 0).$$

En supposant a infiniment petit, on en déduit ($u > 0$)

(54⁰) $$\frac{1}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + 1} + \frac{\sqrt{\Delta}}{u} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sin \operatorname{hyp} \frac{2m\pi}{u}}.$$

et en faisant $a = \frac{1}{2}$,

(54¹) $$\frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta)$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m \cos \operatorname{hyp} \frac{m\pi}{u}};$$

cette dernière formule sera vérifiée plus tard.

En opérant sur la formule (11) pour $m = 1$, à savoir

$$\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{D}\right) = \sqrt{D} \sum_{\nu=1}^\infty \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

d'une manière analogue que nous venons d'opérer sur la formule (15), nous aurons

$$(55)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)f\left(\frac{m}{D}\right) = 2\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\int_0^{\infty} f(x)\cos 2\nu x\pi\, dx.$$

D étant un discriminant fondamental positif.

Si l'on y fait par exemple

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{u}}{x},$$

on devra appliquer la formule suivante aisée à vérifier

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos vx}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{u}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{uv}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

qui donne:

$$D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{m}{Du} = \pi\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\int_{2\nu u\pi}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x};$$

en remplaçant $\operatorname{arctg}\frac{m}{Du}$ par sa valeur

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{Du}{m}$$

on en tire la formule (6).

Prenons en second lieu

$$f(x) = \log\frac{1+e^{-cx}}{1-e^{-cx}}, \qquad c > 0,$$

la formule

$$\int_0^{\infty}\log\frac{1+e^{-cx}}{1-e^{-cx}}\cos bx\, dx = \frac{\pi}{2b}\,\frac{1-e^{-\frac{b\pi}{c}}}{1+e^{-\frac{b\pi}{c}}}$$

permet de conclure

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{cm}{D}}}{1-e^{-\frac{cm}{D}}} = \frac{1}{2}\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\,\frac{1-e^{-\frac{2\nu\pi^2}{c}}}{1+e^{-\frac{2\nu\pi^2}{c}}}.$$

Posant $c = u\pi$ et faisant usage des formules

$$\frac{1 - e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}}{1 + e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}} = 1 - \frac{2}{e^{\frac{2\nu\pi}{u}} + 1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sqrt{D}}{\nu} = Cl(D) \log E(D),$$

nous aurons

$$(56) \quad \frac{1}{2} Cl(D) \log E(D) = \sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}} + 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \log \frac{1 + e^{-\frac{mu\pi}{D}}}{1 - e^{-\frac{mu\pi}{D}}},$$

formule qui peut être assez commode pour le calcul effectif du nombre des classes d'un discriminant fondamental positif.

Nous terminons ces recherches en nous rappelant la formule suivante due à Kummer [1]

$$\int_0^1 \cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} \cos \gamma x\pi dx = \frac{2^{1-\beta} \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + \gamma\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - \gamma\right)}, \quad (\beta > 0),$$

qui donne l'occasion à une autre application de la formule (15)

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Je change, dans cette dernière, x en ux et multipliant les deux membres par $\cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} dx$ j'intègre de zéro à un. Il vient, d'après la formule de Kummer

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) \frac{2^{1-\beta} \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2} + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \int_0^1 E\left(ux + \frac{a}{\Delta}\right) \cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} 2^{1-\beta} \Gamma(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + 2\nu u\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - 2\nu u\right)}.$$

[1] Kummer, *Sur quelques transformations générales des intégrales définies* (Journal de Crelle, t. 20).

En supposant u positif et inférieur à $\frac{1}{\Delta}$, les fonctions

$$E\left(ux + \frac{a}{\Delta}\right), \qquad (0 < \alpha < \Delta),$$

seront identiquement nulles dans l'intervalle de l'intégration, et il vient

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + 2\nu u\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - 2\nu u\right)},$$

ou bien, en posant $\frac{\beta+1}{2} = \xi$, $u = \frac{x}{\Delta}$,

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma(\xi)^2}{\Gamma\left(\xi + \frac{2\nu x}{\Delta}\right)\Gamma\left(\xi - \frac{2\nu x}{\Delta}\right)}. \tag{57}$$

Dans cette formule obtenue sous l'hypothèse de $\xi > \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$ on peut cependant prendre $\xi = \frac{1}{2}$, puisque cela donne la formule (15) qui se trouve donc généralisée par la formule (55), sous l'hypothèse restrictive bien entendu $0 < x < 1$.

5. Aux résultats obtenus dans le présent chapitre s'ajoute une formule que nous avons tirée d'une source bien différente mais qui leur ressemble beaucoup et que nous allons exposer puisque elle à été le point de départ de nos études.

Soit (a, b, c) une forme quadratique positive à des coefficients réels quelconques, $\Delta = 4ac - b^2$ son discriminant changé de signe, et soit u une quantité également réelle et positive. La formule suivante, cas particulier d'une relation rappelée par KRONECKER à maintes reprises, et dont la démonstration se trouve dans la thèse de M DE SÉGUIER

$$\sum_{m,n} e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)} = \frac{1}{u} \sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

contient des séries qui ne diffèrent des séries à double entrée employées dans le théorème de DIRICHLET que par les termes constants où $m=n=0$ dont les valeurs sont respectivement 1 et $\frac{1}{u}$. On aura donc, en isolant ces termes et en posant pour abréger

$$f(z)=e^{-\frac{2u\pi z}{\sqrt{\Delta}}}-\frac{1}{u}e^{-\frac{2\pi z}{u\sqrt{\Delta}}},$$

la relation suivante

$$\sum_{m,n}{}' f(am^2+bmn+cn^2)=\frac{1}{u}-1,$$

$$(m,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \text{ excepté } m=n=0).$$

Cela étant, remplaçons la forme (a,b,c) par les différents représentants des formes positives du discriminant fondamental $-\Delta$ et ajoutons les résultats ainsi obtenus; nous aurons

$$\sum_{(a,b,c)}\sum_{m,n}{}' f(am^2+bmn+cn^2)=\left(\frac{1}{u}-1\right)Cl(-\Delta).$$

Or, d'après la formule fondamentale de DIRICHLET, le premier membre est égal à la quantité

$$\tau\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)f(hk)=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{2uhk\pi}{\sqrt{\Delta}}}-\frac{1}{u}e^{-\frac{2hk\pi}{u\sqrt{\Delta}}}\right);$$

en effectuant la sommation relative à k et en comparant les deuxièmes membres, nous aurons la formule cherchée

$$(58)\qquad \left(\frac{1}{u}-1\right)Cl(-\Delta)=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{1}{e^{\frac{2hu\pi}{\sqrt{\Delta}}}-1}-\frac{\tau}{u}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{u\sqrt{\Delta}}}-1}$$

et on en tire en prenant les dérivées des deux membres pour $u=1$, la formule suivante

$$(59)\qquad Cl(-\Delta)=-\tau\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{\sqrt{\Delta}}}-1}+\frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\left(e^{\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}-e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

(à suivre.)