ÜBER DIE NULLSTELLEN DER FUNKTIONEN $E_a(x)$

VON

A. WIMAN
in UPSALA.

§ 1.

Für nähere Angaben über Lage und Dichtigkeit der Nullstellen einer in der Gestalt einer Potenzreihe gegebenen ganzen Funktion sind zwar im Allgemeinen höchst komplizierte Betrachtungen erforderlich. Doch lassen sich derartige Fragen für die ganzen Funktionen

$$E_a(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(an + 1)} \tag{1}$$

in ganz einfacher Weise erledigen. Diesen Umstand verdankt man den für die Untersuchungen äusserst bequemen Darstellungen dieser Funktionen, welche von Herrn MITTAG-LEFFLER gegeben sind.

Die fundamentale Identität ist hierbei die folgende

$$E_a(x) = \frac{1}{2\pi i a} \int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega}{\omega - x}. \tag{2}$$

Die Integration wird über einen Kurvenzug ausgeführt, dessen Anfangspunkt und Endpunkt unendlich entfernt liegen, und zwar, falls α eine positive reelle Grösse bezeichnet, bez. in den Richtungen $\varphi = \mp \alpha\pi$; überdies soll die Stelle x bei der Integration auf der linken Seite gelassen werden. Hält man letztere Bedingung nicht aufrecht, so sind nur die nötigen Residuen hinzuzufügen. Als Integrationskurve kann man also auch die beiden Geraden $\varphi = \mp \alpha\pi$ in ihrer ganzen Länge nehmen; nur ist eine kleine Ausbiegung vorzunehmen, falls die Stelle x eben auf einer von diesen Geraden liegen sollte. Nach einer solchen Wahl bekommt man für $x = re^{\varphi i}$

$$E_a(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\varkappa} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{\alpha} i}} + \frac{1}{2\pi i \alpha} \int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega}{\omega - x}, \tag{3}$$

wo $\varkappa$ die positiven und negativen ganzen Zahlen (inclusive Null) durchläuft, für welche die Bedingung

$$-\alpha\pi < \varphi + 2\varkappa\pi < \alpha\pi \tag{4}$$

erfüllt ist.[1]

Das in (3) auftretende Integral lässt eine Entwickelung in eine halbkonvergente Reihe zu. Schreiben wir nämlich

$$\frac{1}{\omega - x} = -\left[\frac{1}{x} + \frac{\omega}{x^2} + \ldots + \frac{\omega^{n-1}}{x^n}\right] + \frac{\omega^n}{(\omega - x)},$$

so ergiebt sich

$$E_a(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\varkappa} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{\alpha} i}} - \sum_{1}^{n} \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu + 1)} + \frac{1}{2\pi i \alpha x^n} \int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega}{\omega - x}. \tag{5}$$

Ohne grosse Schwierigkeit findet man, dass bei geeigneter Wahl von n das Restglied höchstens von der Grössenordnung $e^{-|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$ wird.

Der zwischen den Geraden $\varphi = \mp \alpha\pi$ enthaltene Teil von der ω-Ebene ist hier als eine durch die Relation

$$t^{\alpha} = \omega \tag{6}$$

vermittelte Abbildung der t-Ebene aufzufassen, so dass den beiden Ufern der negativen reellen Halbaxe der letzteren Ebene die Geraden $\varphi = \mp \alpha\pi$ entsprechen.

---

[1] c. f. G. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.* Cinquième note, § 3. Ce tome pag. 132—147.

In ähnlicher Weise gestaltet sich die Sache, falls α eine komplexe Zahl $\beta + i\gamma$ bedeutet;[1] es muss $\beta > 0$ sein, damit $E_\alpha(x)$ eine ganze Funktion bezeichne. Doch tritt hier der Unterschied ein, dass für $t = \rho e^{i\tau}$ die Geraden $\tau = \tau_1$ und die Kreise $\rho = \rho_1$ durch (6) in logaritmische Spiralen transformiert werden. Schreiben wir nämlich $\omega = Re^{i\psi}$, so erhalten wir aus (6) die beiden Relationen

$$(7) \qquad \beta \log \rho - \gamma\tau = \log R; \qquad \gamma \log \rho + \beta\tau = \psi.$$

Den Strahlen $\tau = \tau_1$ entsprechen demnach die Spiralen

$$(8) \qquad \psi = \frac{\gamma}{\beta} \log R + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \tau_1 = \psi_0 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \tau_1,$$

wenn $\psi = \psi_0$ die der positiven Halbaxe zugeordnete Spirale bezeichnet. Setzt man jetzt

$$(9) \qquad \psi = \psi_0 + \varphi,$$

so werden die den Strahlen der t-Ebene entsprechenden Spiralen durch die Gleichungen

$$(10) \qquad \varphi = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \tau_1 \qquad (-\pi \leqq \tau_1 \leqq \pi)$$

definiert, und die t-Ebene wird auf den durch die Spiralen

$$(11) \qquad \varphi = \mp \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \pi$$

begrenzten Teil der ω-Ebene abgebildet.

Andererseits entspricht einem Kreise $\rho = \rho_1$ der durch die Spiralen (11) abgegrenzte Teil der Spirale

$$(12) \qquad \log R = -\frac{\gamma}{\beta} \psi + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \log \rho_1 = -\frac{\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \varphi + \beta \log \rho_1.$$

Man bekommt also für je zwei Stellen auf den Spiralen (11), welche demselben Punkte auf der negativen Halbaxe der t-Ebene entsprechen, verschiedene R-Werte, nämlich bez.

$$(13) \qquad R = e^{\pm \gamma\pi} \rho_1^\beta.$$

---

[1] c. f. G. Mittag-Leffler. *Sopra la funzione $E_\alpha(x)$.* R. Accad. dei Lincei, Atti. Ser. 5. Vol. 13, 3 Gennaio 1904, pag. 3—5.

Für

$$x = re^{i\psi}; \qquad \psi = \frac{\gamma}{\beta}\log r + \varphi$$

findet man

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{(\varphi + 2\varkappa\pi)i}{\alpha}}} \qquad (\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Der Funktion $E_\alpha(x)$ können wir jetzt die folgende Darstellung geben

$$(5') \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_\varkappa e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{(\varphi+2\varkappa\pi)i}{\alpha}}} - \sum_1^n \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu + 1)} + \frac{1}{2\pi i\alpha x^n}\int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega}{\omega - x},$$

wo die Summation über die den Ungleichungen

$$(4') \qquad -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta}\pi < \varphi + 2\varkappa\pi < \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta}\pi$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt wird, und für die Integration die Spiralen (11) dieselbe Rolle spielen wie in dem früher betrachteten speciellen Falle die Geraden $\varphi = \mp \alpha\pi$.

§ 2.

Sei zunächst α *eine reelle Grösse* $\geqq 2$. Es ist dann ersichtlich, dass, falls man vom Anfangspunkte in einer bestimmten anderen Richtung als $\varphi = \pi$ fortschreitet, in der Entwicklung (5) das Glied

$$\frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} \qquad (-\pi < \varphi < \pi)$$

dem absoluten Betrage nach grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder wird, wenn $|x|$ einen gewissen Wert übersteigt; in einer solchen Richtung können also Nullstellen höchstens für begrenzte Werte von $|x|$ liegen. Daraus folgt zwar noch nicht, dass die Nullstellen eben auf der negativen Halbaxe liegen sollen. Doch kann man für grosse Werte der Moduln einen Beweis hierfür in sehr einfacher Weise erbringen.

Für $\varphi = \pi$ besitzt die Entwicklung (5) zwei Hauptglieder. Betrachten wir deren Summe

$$(14) \qquad \frac{1}{a}\left[e^{r^{\frac{1}{a}}e^{\frac{\pi i}{a}}} + e^{r^{\frac{1}{a}}e^{-\frac{\pi i}{a}}}\right] = \frac{2}{a}e^{r^{\frac{1}{a}}\cos\frac{\pi}{a}}\cos\left(r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a}\right),$$

so finden wir, dass diese Glieder einander verstärken für

$$(15) \qquad r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a} = k\pi, \qquad (k=1,2,\ldots)$$

aber einander aufheben für

$$(16) \qquad r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a} = \left(k - \frac{1}{a}\right)\pi.$$

Die Sache gestaltet sich doch für die durch (15) bestimmten r-Werte insofern verschieden, als der Ausdruck (14) positiv oder negativ ist, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl darstellt. Dies trifft auch für die Funktion $E_a(x)$ zu, da ja für die fraglichen r-Werte das betreffende Glied von höherer Grössenordnung als der Rest ist. Zwischen je zwei derartigen r-Werten muss demnach $E_a(x)$ (jedenfalls für genügend grosse Zahlen k) eine Nullstelle besitzen, und zwar in der Nähe der zwischenliegende Stelle (16). *Für die Anzahl der negativen Wurzeln, deren Moduln $< r$ sind, haben wir mithin den Ausdruck*

$$(17) \qquad \frac{r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a}}{\pi}$$

erhalten.

Dass die Funktion $E_a(x)$ höchstens eine begrenzte Anzahl von imaginären Nullstellen besitzen kann, folgt jetzt daraus, dass (17) *die genaue Anzahl der Nullstellen angiebt, wenn r durch eine Identität* (15) *bestimmt wird,* und k genügend gross ist. Um dies zu beweisen, berechnen wir das Integral

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_a(x),$$

wenn die Integration in der positiven Richtung über den Kreis $|x| = r$ erstreckt wird. Nach der Zerlegung von $E_a(x)$ in zwei Faktoren:

$$(19) \qquad E_a(x) = e^{r^{\frac{1}{a}}e^{\frac{\varphi i}{a}}}(1 + u) \qquad (-\pi \leqq \varphi \leqq \pi)$$

bekommen wir

$$(20)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\left|_{-\pi}^{\pi} r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi i}{a}} + \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u).\right.$$

Es ist aber bei Bezugnahme auf die Identität (15)

$$(21)\qquad \frac{1}{2\pi i}\left|_{-\pi}^{\pi} r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi i}{a}} = \frac{r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a}}{\pi} = k.\right.$$

Anderseits hat man

$$(22)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u) = 0$$

Um die Richtigkeit von (22) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass auf Grund der speciellen Wahl von r der Ausdruck $e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi i}{a}}}$ (und folglich auch u) für $\varphi = -\pi$ und $\varphi = \pi$ einen und denselben Wert besitzt. Können wir jetzt noch nachweisen, dass bei dem ganzen Umlaufe von $\varphi = -\pi$ bis $\varphi = \pi$ $1+u$ ein positives Glied enthält, welches grösser ist als der absolute Betrag des Restes, so folgt hieraus, dass man mit dem ursprünglichen Argumente für $1+u$ zurückkommt. Es ist aber eben dies, was in (22) ausgesprochen wird.

Den fraglichen Nachweis können wir in der folgenden Weise erbringen. Ausser in der Nähe der negativen Halbaxe ist offenbar schon $1 > |u|$. Für $\varphi = -\pi + \delta$ oder $\varphi = \pi - \delta$ braucht dies zwar nicht der Fall zu sein, falls δ genügend klein ist. In diesem Falle ist aber das in u enthaltene Hauptglied eine positive Grösse. Betrachten wir z. B. den Fall $\varphi = -\pi + \delta$, so finden wir als einziges Glied in u, dessen Betrag mit 1 vergleichbar sein kann,

$$(23)\qquad e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\pi+\delta}{a} i}} e^{-r^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{(\pi-\delta) i}{a}}} = e^{-2 r^{\frac{1}{a}} \sin\frac{\pi}{a}\left(\sin\frac{\delta}{a} - i\cos\frac{\delta}{a}\right)}$$

$$= e^{-2k\pi\sin\frac{\delta}{a}}\left(\cos\left(2k\pi\cos\frac{\delta}{a}\right) + i\left(2k\pi\cos\frac{\delta}{a}\right)\right).$$

Schreiben wir

$$2k\pi\cos\frac{\delta}{a} = 2k\pi - v,$$

so ergiebt sich zunächst

$$2k\pi \sin\frac{\delta}{\alpha} = 2\sqrt{k\pi v}\sqrt{1-\frac{v}{4k\pi}},$$

und es nimmt jetzt der Ausdruck (23) die Gestalt

$$(24) \qquad e^{-\sqrt{4k\pi v - v^2}}(\cos v - i \sin v)$$

an. Der zugehörige absolute Betrag nimmt also mit wachsendem v sehr rasch ab, und bei niedrigeren Werten von v ist, wie wir behauptet haben, das in (24) und also auch in u enthaltene Hauptglied eine positive Grösse. In ähnlicher Weise erledigt man den Fall $\varphi = \pi - \delta$.

Da es nicht ohne weiteres ersichtlich ist, dass die obigen Auseinandersetzungen für niedrigere Werte von k anwendbar sind, so ist die Unmöglichkeit einer *endlichen* Anzahl von imaginären Nullstellen noch nicht erwiesen. In dem speciellen Falle $\alpha = 2$ hat man

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^{\frac{1}{2}}} + e^{-x^{\frac{1}{2}}}\right),$$

und die Nullstellen

$$-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$$

sind alle negativ. Man kann auch für $\alpha > 2$ allgemein nachweisen, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ auf der negativen Halbaxe eben so oft Zeichen wechseln muss, wie erforderlich ist, damit sämmtliche Wurzeln reell sein sollen. Es lässt sich in der Tat mit Benutzung der Entwicklung (5) wirklich darlegen, dass $E_\alpha(x)$ für *jede* durch (15) bestimmte Stelle eine positive oder negative Grösse bedeutet, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl darstellt.[1] *Für* $\alpha \geqq 2$ *besitzt demnach die Funktion* $E_\alpha(x)$ *keine imaginären Nullstellen.*

---

[1] Die Entwicklung beginnt nämlich stets mit (einem oder mehreren) Gliedern

$$\frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{2\varkappa+1}{\alpha}\pi} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{2\varkappa+1}{\alpha}\pi\right), \qquad \left(r^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{k\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}, \ \varkappa = 0, 1, \ldots\right)$$

welche dasselbe Zeichen wie $(-1)^k$ besitzen, und deren absoluter Betrag grösser als die Summe der absoluten Beträge der restierenden Glieder ist.

§ 3.

Es sei zweitens $0 < \alpha < 2$. Die bestimmenden Glieder in der Entwicklung (5) sind jetzt [1]

$$\frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} \qquad \left(-\frac{\alpha\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

und

$$-\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha+1)} \qquad \left(\frac{\alpha\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Ist $|x|$ genügend gross, so muss also der absolute Betrag von

$$\frac{1}{\alpha}\left(e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} + \frac{r^{-1} e^{-\varphi i}}{\Gamma(-\alpha)}\right) \tag{25}$$

grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder sein, es sei denn, dass die Moduln der beiden in (25) eingehenden Glieder annähernd gleich gross sind. Es ist in der Tat

$$-\frac{x^{-2}}{\Gamma(-2\alpha+1)}$$

das bestimmende Glied unter den Restgliedern, so dass der absolute Betrag des Restes von der Grössenordnung

$$r^{-2}$$

ist. Von höherer Grössenordnung kann also bei einer Nullstelle die Differenz

$$e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}} - \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|} \tag{26}$$

---

[1] Für $\alpha = 1$ verschwinden die Glieder der halbkonvergenten Reihe

$$\sum \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu+1)}$$

identisch, und die Funktion $E_1(x)$ reduziert sich auf das einzige Glied e^x. Auf diesen Fall haben demnach die Auseinandersetzungen des Textes keine Anwendung.

der absoluten Beträge der beiden Hauptglieder nicht sein. Die Relation

$$(27)\qquad e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}} = \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|}(1 + ur^{-1})$$

bestimmt mithin bei den Nullstellen eine zwar veränderliche aber *endliche* Grösse u. Aus (27) erhalten wir durch Logaritmierung

$$(28)\qquad -r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)| + u_1 r^{-1},$$

wo u_1 eine andere endlich bleibende Grösse bedeutet.

Aus (28) ersieht man, dass bei wachsendem r die Argumente der Nullstellen auf der oberen bez. unteren Halbebene immer weniger von $\frac{\alpha}{2}\pi$ bez. $-\frac{\alpha}{2}\pi$ abweichen dürfen. Da sich alles symmetrisch in Bezug auf die reelle Axe verhält, so brauchen wir offenbar nur die Verhältnisse auf der oberen Halbebene besonders zu untersuchen. Schreiben wir

$$(29)\qquad \varphi = \frac{\alpha}{2}\pi + \delta,$$

so geht (28) in

$$(30)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)| + u_1 r^{-1}$$

über. *Mit wachsendem r nähern sich also die Nullstellen unbegrenzt der Kurve*

$$(31)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)|;$$

man findet ja (von niedrigeren Gliedern abgesehen) als Abstand

$$\alpha u_1 r^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Aus (31) erhält man annäherungsweise

$$(32)\qquad \delta = \alpha r^{-\frac{1}{\alpha}}[\log r + \log|\Gamma(-\alpha)|].$$

Sucht man jetzt den Abstand einer Nullstelle von der Geraden $\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi$, so findet man hierfür in erster Annäherung

$$(33)\qquad r\delta = \alpha r^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log r + \log|\Gamma(-\alpha)|).$$

Dieser Ausdruck gestattet unmittelbar Folgendes zu erschliessen:

Hat man $\alpha < 1$, *so nähern sich die Nullstellen auf der oberen Halbebene mit wachsendem* r *unbegrenzt der Geraden* $\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi$. *Ist dagegen* $\alpha > 1$, *so wächst der Abstand der Nullstellen von der in Rede stehenden Geraden mit* r *über jede Grenze. In beiden Fällen ist aber nach* (32) δ *eine mit wachsendem* r *gegen Null abnehmende positive Grösse.*

Auch bei der folgenden Diskussion gestaltet sich die Sache etwas verschieden, je nachdem $0 < \alpha < 1$ oder $1 < \alpha < 2$.

a) $0 < \alpha < 1$.

Da hier $\Gamma(-\alpha)$ eine negative Grösse bedeutet, so führt die bei einer Nullstelle annäherungsweise geltende Bedingung, dass die Argumente der beiden in (25) enthaltenen Glieder als Differenz ein ungerade Vielfaches der Grösse π haben sollen, auf eine Relation

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\varphi}{\alpha} = -\varphi + 2k\pi \tag{34}$$

oder nach Benutzung der Substitution (29)

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\delta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \delta + 2k\pi. \tag{35}$$

Beachtet man nun den in (32) gegebenen Näherungswert für δ, so lässt sich erschliessen, dass $\cos\frac{\delta}{\alpha} - 1$ von der Grössenordnung $r^{-\frac{2}{\alpha}}(\log r)^2$ sein muss. Hiernach lässt sich (35) durch eine relation von der Gestalt

$$r^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pi + 2k\pi + \left[r^{-\frac{1}{\alpha}}(\log r)^2\right] \tag{36}$$

ersetzen. Sollte nun hier zu jedem ganzzahligen Wert von k eine Nullstelle sowohl auf der oberen als unteren Halbebene gehören, so wäre die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, sehr genau durch den Ausdruck

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}$$

angegeben.

In wie weit diese Vermutung bestätigt wird, wollen wir jetzt untersuchen, indem wir auch hier das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log E_\alpha(x) \tag{18}$$

berechnen. Dabei ist es vorteilhaft den Integrationskreis $|x| = r$ so zu wählen, dass der Kurve (31), und folglich auch der symmetrischen Kurve auf der unteren Halbebene, in einem solchen Punkte begegnet wird, dass die Argumente der beiden in (25) enthaltenen Glieder sich um ein Vielfaches der Grösse 2π unterscheiden. Es soll demnach für den Schnittpunkt mit der Kurve (31) eine Relation

$$r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \delta + (2k+1)\pi \tag{37}$$

gelten, wobei die positive ganze Zahl k genügend gross gewählt werden muss, damit die folgenden Auseinandersetzungen einwandfrei seien.

Jetzt zerlegen wir $E_\alpha(x)$ in zwei Faktoren, so dass das jedesmalige Hauptglied in der Entwicklung (5) den einen Faktor liefert:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}}(1+u); \qquad \left(-\frac{\alpha}{2}\pi - \delta \leqq \varphi \leqq \frac{\alpha}{2}\pi + \delta\right), \tag{38}$$

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}(1+u) \qquad \left(\frac{\alpha}{2}\pi + \delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\alpha}{2}\pi - \delta\right). \tag{39}$$

Für die Argumente $\pm\left(\frac{\alpha}{2}\pi + \delta\right)$ sind die Grössen $e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}}$ und $\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ auf Grund der speciellen Wahl von r einander gleich; dasselbe gilt mithin auch von den beiden in (38) und (39) auftretenden u-Werten. Es ist also $1+u$ längs der Integrationskurve eine kontinuierliche Grösse. Da sich weiter in derselben Weise wie die entsprechende Tatsache im vorigen Abschnitte nachweisen lässt, dass diese Grösse stets ein positives Hauptglied enthält, so hat man auch hier

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u) = 0. \tag{22}$$

Nimmt man jetzt auf (37), (38), (39) und (22) Bezug, so ergiebt sich sofort

$$(40)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}\pi-\delta}^{\frac{\alpha}{2}\pi+\delta} r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}} + \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{\frac{\alpha}{2}\pi+\delta}^{2\pi-\frac{\alpha}{2}\pi-\delta} -\varphi i$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{\pi} + 2k + 1 - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = 2k.$$

Man hat aber

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \left[r^{-\frac{1}{\alpha}}(\log r)^2\right].$$

Hiernach ergiebt sich

$$(41)\qquad \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2}$$

als Ausdruck für die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ *sind. Man hat sogar hier, jedenfalls für genügend grosse* r*-Werte, die genaue Anzahl der Nullstellen, falls* r *so gewählt wird, dass* (41) *eine gerade Zahl bedeutet.*

b) $1 < \alpha < 2$.

Die Modifikationen, welche hier die vorangehenden Entwicklungen erleiden müssen, weil jetzt $\Gamma(-\alpha)$ eine positive Grösse bezeichnet, bestehen eigentlich nur darin, dass die gerade Zahl $2k$ durch die ungerade Zahl $2k+1$ ersetzt werden soll und umgekehrt.

Für die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ *sind, hat man also auch in diesem Falle den Ausdruck* (41). *Es besteht aber der Unterschied, dass man jetzt die genaue Anzahl der Nullstellen bekommt, wenn* (41) *eine ungerade Zahl bedeutet.*

Die hieraus zu ziehende Folgerung, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ in diesem Falle *eine ungerade Anzahl negativer Nullstellen* (*und also mindestens eine*) besitzt, wird dadurch bestätigt, dass für $\lim x = -\infty$ das Hauptglied $\frac{1}{\alpha}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ und mithin auch $E_\alpha(x)$ eine negative Grösse ist. Hieraus folgt ja, da $E_\alpha(x)$ für positive x-Werte positiv ist, dass die Funktion auf der negativen Halbaxe eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln erleiden muss.

Man hat den Fall $\alpha = 1$ in solcher Weise als Grenzfall aufzufassen, dass für $\alpha = 1 - \delta$ oder $\alpha = \frac{1}{1-\delta}$ die Nullstellen, zu denen die niedrigsten Moduln gehören, sich mit abnehmendem δ immer mehr von dem Anfangspunkte entfernen. Die Bedeutung des Ausdruckes (41) für die Anzahl der Nullstellen fängt dann also erst bei verhältnissmässig grösseren r-Werten an.

Man überzeugt sich durch ziemlich einfache Betrachtungen, dass *die endliche Anzahl negativer Nullstellen, welche $E_\alpha(x)$ für $1 < \alpha < 2$ besitzt, jede gegebene Grenze überschreitet, wenn die Differenz $2 - \alpha = \delta$ genügend klein wind.* Betrachtet man nämlich die Verhältnisse auf der negativen Halbaxe, so ergiebt sich leicht, dass *für niedrigere r-Werte* nicht das Glied

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

sondern

$$\frac{1}{\alpha}\left[e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} + e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\frac{\varphi i}{\alpha}}}\right] = \frac{2}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}}\cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right) \tag{14}$$

den bestimmenden Einfluss ausübt. Man hat also Grund anzunehmen, es seien den ersten Zeichenänderungen von (14) Nullstellen der Funktion $E_\alpha(x)$ zugeordnet. Unter der Voraussetzung, dass dies zutrifft, so lange

$$\frac{2}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}\frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

würde man in erster Annäherung den Ausdruck

$$\frac{4}{\pi^2(2-\alpha)}\log\frac{1}{2-\alpha}$$

für die Anzahl der negativen Nullstellen erhalten.

Ist andererseits $\alpha - 1$ eine kleine Grösse, so erschliesst man durch ähnliche Überlegungen, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ blos eine einzige Nullstelle auf der negativen Halbaxe besitzt. Sucht man eine Entwicklung für den zugehörigen Modul, so ergiebt sich als Hauptglied

$$\log \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Da diese Nullstelle nach aller Wahrscheinlichkeit die dem Anfangspunkte nächstliegende ist, so ersieht man hieraus, wie die Nullstellen ins Unendliche rücken, wenn α sich dem Werte 1 nähert.

§ 4.

Ist zuletzt α *eine imaginäre Zahl* $= \beta + i\gamma$, so gestalten sich die Sachen in ganz analoger Weise. Der wesentliche Unterschied rührt davon her, dass $\varphi =$ const. jetzt nicht länger eine gerade Linie, sondern eine logarithmische Spirale bedeutet.

Zunächst findet man, dass, falls die Umgebung von einer oder zwei φ-Spiralen ausgenommen wird, die Entwicklung (5') stets ein einziges Hauptglied enthält, dessen absoluter Betrag für genügend grosse r die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder übersteigt. *Die Nullstellen mussen also jetzt eine oder zwei Annahmespiralen begleiten.*

Unter den in (5') auftretenden Gliedern betrachten wir zuerst diejenigen von der Gestalt

$$(42) \qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\theta i}{\alpha}}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \left[\cos\left(r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \sin\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}\right) \right.$$
$$\left. + i\sin\left(r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \sin\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}\right)\right],$$

wo mit Rücksicht auf (4') die Ungleichungen

$$(4'') \qquad -\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi < \theta < \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi$$

stattfinden sollen. Wird nun der absolute Betrag

$$(43) \qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}}$$

für $\theta = \theta_0$ ein Maximum, so ergiebt sich die Identität

$$\operatorname{tg} \frac{\beta\theta_0}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{\gamma}{\beta}. \tag{44}$$

Hieraus findet man zwei mit (4″) verträglichen Lösungen. Doch liefert nur diejenige ein Maximum, für welche $\operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma}{\beta}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Für das Maximum von (43) hat man nach dieser Festsetzung

$$e^{r^{\frac{1}{\beta}} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\gamma}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\beta}}} \tag{45}$$

Ist für das Maximum $\theta_0 = 0$, so muss $\gamma = 0$, d. h. α eine reelle Grösse sein. Geht man rechts oder links von dem besonderen Argumente $\theta = \theta_0$ aus, so wächst (43) mit r über jede Grenze, so lange

$$-\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi < \theta < \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi, \tag{46}$$

und man erkennt, dass für $\varphi + 2\varkappa\pi = \theta$ es stets ein derartiges Glied in der Entwicklung (5′) geben muss, falls

$$\text{a)} \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} > 2.$$

In diesem Falle (sowie auch, wenn das Zeichen $>$ durch $=$ ersetzt wird) sind also die Hauptglieder in (5′) stets von der Gestalt (42).

Für welche φ-Spiralen bekommt man nun zwei derartige Hauptglieder? Da die Glieder, für welche die Bedingung (46) erfüllt ist, immer mehr abnehmen, wenn θ, sei es rechts oder links, sich von θ_0 entfernt, so ist es leicht ersichtlich, dass dieser Fall dann und nur dann eintritt, wenn für $\theta_1 > \theta_0 > \theta_1 - 2\pi$

$$e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta_1}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta_1}{\beta^2+\gamma^2}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma(\theta_1-2\pi)}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta(\theta_1-2\pi)}{\beta^2+\gamma^2}}. \tag{47}$$

Hiernach ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\frac{\beta\theta_1}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - \cos\frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}}{\sin\frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - 1}{\sin\frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}}. \tag{48}$$

Die einzige Lösung hierzu, welche den besprochenen Nebenbedingungen genügt, *reduziert sich nur in den beiden Grenzfällen* $\gamma = 0$ *und* $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} = 2$ *auf* $\theta_1 = \pi$.

Es ist um diese Spirale $\varphi = \theta_1$, *dass sich die Nullstellen häufen, und zwar so, dass ihre Entfernung von der Spirale für* $\lim r = \infty$ *unendlich klein wird.*

Die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, lässt sich auch hier durch die Berechnung des Integrals

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_\alpha(x)$$

bestimmen, indem man $E_\alpha(x)$ in zwei Faktoren zerlegt:

$$(49) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\gamma\varphi}{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\beta\varphi}{\beta^2+\gamma^2} i}} (1 + u) \qquad (\theta_1 - 2\pi \leqq \varphi \leqq \theta_1).$$

Wird r so gewählt, dass ersterer Faktor für $\varphi = \theta_1$ und $\varphi = \theta_1 - 2\pi$ Argumente, welche um ein Vielfaches von 2π differieren, besitzt, so lässt sich in derselben Weise wie in den vorigen Abschnitten beweisen, dass

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log (1 + u) = 0.$$

Man bekommt alsdann

$$(50) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \Big|_{\theta_1 - 2\pi}^{\theta_1} r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2} i}$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi} e^{\frac{\gamma(\theta_1-\pi)}{\beta^2+\gamma^2}} \sqrt{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} + e^{-\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - 2\cos\frac{2\pi\beta}{\beta^2+\gamma^2}}.$$

Dieser verhältnissmässig komplizierte Ausdruck vereinfacht sich in den Grenzfällen, wo $\theta_1 - \pi = 0$. Für $\gamma = 0$, also $\alpha = \beta$, ergiebt sich demnach der schon in § 2 hergeleitete Ausdruck

$$(17) \qquad \frac{r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha}}{\pi}.$$

Ist dagegen $\beta^2 + \gamma^2 = 2\beta$; so lässt sich (50) in die Gestalt

$$\frac{r^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi}\left(e^{\frac{\gamma\pi}{2\beta}} + e^{-\frac{\gamma\pi}{2\beta}}\right) \tag{51}$$

umformen, d. h. man bekommt für die Anzahl der Nullstellen den gleichen Ausdruck wie im Falle

$$\text{b)} \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} < 2.$$

Da jetzt zwei Hauptglieder in (5′) auftreten, so müssen (ebenso wie im vorigen Abschnitte) an den Nullstellen die Moduln dieser Glieder annähernd gleich gross sein. Hieraus folgert man leicht, dass *die Rolle der Strahlen* $\varphi = \mp \frac{\alpha\pi}{2}$ *in Bezug auf die Nullstellen jetzt von den Spiralen* $\varphi = \mp \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi$ *übernommen wird.* In Übereinstimmung hiermit wird der Abstand der Nullstellen von der zugehörigen Spirale mit wachsendem r verschwindend klein oder nicht, je nachdem $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} < 1$ oder $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \geqq 1$.

Ebenfalls empfiehlt es sich hier behufs der Berechnung des Integrals (18) die Funktion $E_\alpha(x)$ in zwei Faktoren zu zerlegen, indem das jedesmalige Hauptglied den einen Faktor angiebt. Also

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}}(1 + u); \qquad \left(-\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta\right) \tag{38′}$$

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}(1 + u), \quad \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1\right) \tag{39′}$$

wenn für $\varphi = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1$ bez. $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta$ die Differenz

$$\left|e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}}\right| - \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|} \tag{26′}$$

gleich Null wird. In einer Hinsicht stellt doch die Sache sich hier weniger bequem, weil jetzt nicht r so gewählt werden kann, dass u an *beiden*

Grenzstellen gleiche Werte in (38′) und (39′) erhält. Für die Umgebung dieser Grenzstellen kann man aber die Diskussion an die Substitution

$$(52) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a}\left[e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{a}}} + \frac{r^{-1}}{\Gamma(-a)}\right](1 + v)$$

anknüpfen, wobei man noch eine solche Wahl von r treffen kann, dass für den Kreis $|x| = r$ die Ungleichung $|v| < 1$ erfüllt ist. Man findet so ohne Schwierigkeit, dass der Ausdruck (51) hier dieselbe Rolle für die Anzahl der Nullstellen spielt wie im vorigen Abschnitte der Ausdruck $\frac{r^{\frac{1}{a}}}{\pi}$, auf welchen er sich ja für $\gamma = 0$ reduziert.

Die Anwendbarkeit der obigen Metoden lässt sich insbesondere nach zweierlei Richtungen erweitern.

Erstens kann man nämlich $E_a(x)$ durch die Differenz von $E_a(x)$ mit einer konstanten Grösse oder einer einfach gebauten ganzen Funktion ersetzen. Es treten dann nur in den Entwicklungen (5) und (5′) neue Glieder hinzu, und die Rolle der Hauptglieder in den verschiedenen Teilen der komplexen Ebene wird in anderer Weise verteilt.

Zweitens erlauben die Metoden des Herrn Mittag-Leffler andere Funktionen in mannigfaltiger Weise (auch solche von unendlicher Höhe) zu bilden, für welche sich analoge halbkonvergente Entwicklungen wie (5) und (5′) ergeben. Es lassen sich dann in ähnlicher Weise wie hier Untersuchungen über die Nullstellen ausführen.