ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ IN DER TEORIE DER FUNKTIONEN $E_a(x)$

VON

A. WIMAN
in UPSALA.

Erst neuerdings ist durch Herrn MITTAG-LEFFLER die Aufmerksamkeit auf die Funktion

$$E_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(an + 1)}$$

gelenkt worden.[1] Von diesem Forscher sind aber auch sogleich die höchst interessanten Eigenschaften der Funktion klargelegt, auf denen die Rolle beruht, welche die Funktion bei der Herstellung in möglichst ausgedehnten Bereichen konvergierender Ausdrücke für analytische Funktionen spielen wird. Man gelangt in der Tat zur naturgemässen Erweiterung der von Herrn BOREL gegebenen exponentiellen Summationsmetode,[2] welche als spezieller Fall für $\alpha = 1$ eintritt. Für den Hauptsatz in der Teorie der Funktionen $E_a(x)$ habe ich nun einen neuen Beweis gefunden, welchen ich auf der freundlichen Aufforderung des Herrn MITTAG-LEFFLER hier veröffentliche. Derselbe nimmt seinen Ausgangspunkt in den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Funktionen $E_a(x)$ für rationale α genügen.

---

[1] Comptes Rendus (2 mars, 12 octobre 1903).

[2] Man sehe etwa die Darstellung bei BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, chapitre III, IV (Paris 1901).

§ 1.

Es sei zunächst $\alpha = \frac{1}{k}$, wo k eine ganze rationale Zahl bedeutet. Die Funktion $E_{k-1}(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = kx^{k-1}y + k\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}.$$

Nach der gewöhnlichen Integrationsmetode erhält man hieraus

$$(2) \qquad y = e^{x^k}\left[c + \int_0^x ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right].$$

Soll nun insbesondere $y = E_{k-1}(x)$ sein, so hat man für $x = 0$, $y = 1$, wodurch die Konstante $c = 1$ bestimmt wird. *Es besteht mithin die Identität*

$$(3) \qquad E_{k-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = e^{x^k}\left[1 + \int_0^x ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right].$$

Die Reihe $E_{k-1}(x)$ lässt sich in eine Summe von k Partialreihen $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$ zerlegen, so dass

$$(4) \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+kn}}{\Gamma\left(n+\frac{\nu}{k}+1\right)}.$$

Offenbar hat man $E_{k-1}^{(0)}(x) = e^{x^k}$ und für $\nu = 1, \ldots, k-1$

$$(5) \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^x ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Es ist der in (3) gegebene Ausdruck für $E_{k-1}(x)$, welchen wir hier diskutieren wollen. Dabei sind für $x = re^{i\varphi}$ die folgenden *drei Hauptfälle* zu unterscheiden:

1) $$-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k};$$

2) $$\frac{4\mu - 1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu + 1}{2k}\pi; \qquad (\mu = 1, \ldots, k-1)$$

3) $$\frac{4\mu + 1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu + 3}{2k}\pi. \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Der Hauptsatz, welchen wir beweisen wollen, besagt nun, dass im Falle 1)

$$\lim_{x=\infty} E_{k-1}(x) = ke^{x^k},$$

dagegen in den Fällen 2) und 3)

$$\lim_{x=\infty} E_{k-1}(x) = 0.$$

§ 2.

Es sei also zunächst

$$-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}.$$

Liegt nun x auf der positiven reellen Axe, so ergiebt sich für $\nu > 0$ unmittelbar

(6) $$E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz$$

$$= e^{x^k} - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Es handelt sich also um den Wert von

(7) $$F_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Durch wiederholte partielle Integration bekommen wir

$$(8)\qquad F^{(\nu)}_{k-1}(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-nk+\nu}}{\Gamma\left(-n+\frac{\nu}{k}+1\right)} + e^{x^k}\int_x^{\infty} ke^{-z^k}\frac{z^{-n_1k+\nu-1}}{\Gamma\left(-n_1+\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Für $F^{(\nu)}_{k-1}(x)$ erhält man demnach einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe

$$(9)\qquad \sum_{n>0} \frac{x^{-nk+\nu}}{\Gamma\left(-n+\frac{\nu}{k}+1\right)},$$

welche in formaler Hinsicht als eine Fortsetzung der Reihe $E^{(\nu)}_{k-1}(x)$ für negative Potenzen von x aufzufassen ist. Bezüglich der hierbei erreichten Genauigkeit, so findet man nach der gewöhnlichen Metode, dass, falls man die Reihe (9) mit dem kleinsten Gliede abbricht, so hat man *den Betrag von $F^{(\nu)}_{k-1}(x)$, abgesehen von einem Restgliede von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}}e^{-x^k}$.*

Berücksichtigen wir die so erhaltenen Resultate für $\nu = 1, \ldots, k-1$, so ergiebt sich

$$(10)\qquad E_{k-1}(x) = ke^{x^k} - \sum_{\nu=1}^{k-1} F^{(\nu)}_{k-1}(x) = ke^{x^k} - F_{k-1}(x),$$

wo $F_{k-1}(x)$ sich mit einer Genauigkeit von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}}e^{-x^k}$ durch die halbconvergente Reihe

$$(11)\qquad \sum_{n>0} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)}$$

abschätzen lässt. Es liefert dabei (11) die formale Fortsetzung der Reihe $E_{k-1}(x)$ für negativen Potenzen von x.

Diese Tatsache gilt aber nicht nur für die positive reelle Axe, sondern für jede Stelle $x = re^{i\varphi}$, wenn $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$. Wir setzen $X = Re^{i\varphi}$ und beachten, dass

$$(12)\qquad \int ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz = 0,$$

falls man über einen geschlossenen Weg integriert, welcher sich folgendermassen zusammensetzen lässt:

1) aus der positiven reellen Axe von O bis R;

2) aus dem innerhalb unseres Bereiches verlaufenden Kreisbogen RX;

3) aus der geraden Linie XO.

Nimmt man $R = \infty$, so verschwindet das Integral über RX. Die beiden anderen sind also einander entgegengesetzt gleich. Man bekommt mithin

$$(13) \qquad \lim_{|X|=\infty} \int_0^x k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = 1. [1]$$

Also wird

$$(14) \qquad e^{x^k} \int_0^X k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = e^{x^k} - \lim_{|X|=\infty} e^{x^k} \int_x^X k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz.$$

Da man für letzteres Integral auch in dem hier betrachteten allgemeineren Falle einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe (9) findet, so ist unsere Behauptung erwiesen.

§ 3.

In ganz anderer Weise gestalten sich die Verhältnisse in einem der $k-1$ Bereiche, für welche $\frac{4\mu-1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu+1}{2k}\pi$ $(\mu = 1, \ldots, k-1)$. Zuerst lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die halbierende Gerade $\varphi = \frac{2\mu}{k}\pi$. Betrachten wir also eine Stelle x auf dieser Geraden und untersuchen, wie sich die Formel (6) umändert, wenn für den Integrationsweg

---

[1] Für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2k}$ konvergiert zwar dieses Integral nicht absolut. Man findet aber leicht, dass, falls man dasselbe in einen reellen und einen imaginären Bestandteil auflöst, diese sich wie Reihen von absolut abnehmenden, abwechselnd positiven und negativen Gliedern verhalten.

die in Rede stehende Gerade dieselbe Rolle wie im vorigen Falle die positive reelle Axe spielt. Es ergiebt sich

$$(6') \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^\infty ke^{-|z|^k}\frac{|z|^{\nu-1}e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}d|z| - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz$$

$$= e^{x^k}e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i} - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Summieren wir jetzt die $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$, so erhalten wir

$$(15) \qquad E_{k-1}(x) = e^{x^k}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}\right] - e^{x^k}\int_x^\infty e^{-z^k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Nach sehr bekannten Sätzen über Einheitswurzeln ist aber

$$1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i} = 0,$$

so dass

$$(15') \qquad E_{k-1}(x) = -e^{x^k}\int_x^\infty e^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz = -F_{k-1}(x).$$

Für $F_{k-k}(x)$ hat man aber hier genau wie im vorigen Paragraphen einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe (11). *Der Unterschied ist also, dass im Ausdruck* (10) *für $E_{k-1}(x)$ das Hauptglied ke^{x^k} hier weggefallen ist.* Das kommt daher, dass im dortigen Bereiche die $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ sich zu einander mit ihren Hauptgliedern wie positive Einheiten verhalten, hier aber wie die Potenzen einer anderen k^{ten} Einheitswurzel als 1.

Diese Bedeutung der Reihe (11) *als asymptotischer Ausdruck von $-E_{k-1}(x)$ behält aber überhaupt im Bereiche, für welche*

$$\frac{4\mu-1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu+1}{2k}\pi,$$

ihre Gültigkeit. Dies ersieht man, indem man, ebenso wie am Ende des vorigen Paragraphen, ein geschlossenes Integral betrachtet; nur soll der Integrationsweg hier in derselben Weise in Bezug auf die halbierende Gerade orientiert sein, wie dort in Bezug auf die positive reelle Axe. *Das wesentliche ist also, dass das Integral* (13), *falls als Integrationsweg irgend eine Gerade in dem hier betrachteten Bereiche gewählt wird, zwar invariant bleibt, aber einen anderen konstanten Wert als* 1, *nämlich* $e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}$ *annimmt.*

§ 4.

Es erübrigt noch die Verhältnisse zu untersuchen in den k Gebieten, für welche $\frac{4\mu+1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu+3}{2k}\pi$ $(\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$. Dass für ein solches Argument φ $\lim\limits_{x=\infty} E_{k-1}(x) = 0$, ist sehr leicht aus (3) zu ersehen. Doch ist die genauere Bestimmung von $E_{k-1}(x)$ hier nicht ohne Schwierigkeit. Zu dem Ende wollen wir auf ein Verfahren einschlagen, welches auch in den vorigen Paragraphen anwendbar wäre. Den Integrationsweg zwischen 0 und x setzen wir aus zwei Stücken zusammen, nämlich aus der Geraden Ox_0 und dem Kreisbogen x_0x, wo wir den Punkt x_0 in solcher Weise wählen, dass der Modul $|x_0| = |x|$ und das Argument $= \frac{2\mu_1}{k}\pi$ wird; die ganze Zahl μ_1 bestimmen wir so, dass $\left|\varphi - \frac{2\mu_1}{k}\pi\right|$ so klein wie möglich ausfällt,[1] wenn φ nach dem Modul 2π genommen wird.

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden.

1) $$\mu_1 = 0.$$

Man bekommt dann nach § 2.

$$(16)\quad E_{k-1}(x) = ke^{x^k} + e^{x^k}\left[\int_\infty^{x_0} ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz + \int_{x_0}^{x} ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right]$$
$$= ke^{x^k} - F_{k-1}(x).$$

[1] Durch diese Wahl von μ_1 bekommt man die schärfste obere Grenze für das Restintegral in (17) bei der asymptotischen Darstellung. Ist aber jener kleinste Wert $= \frac{\pi}{2k}$, so hat man für μ_1 zwei Möglichkeiten, welche gleich vorteilhaft sind.

Durch partielle Integration findet man

$$(17)\qquad F_{k-1}(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} - e^{x^k}\left[\int_{\infty}^{x_0} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}\,dz \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}\,dz \right].\,[1]$$

2) $\mu_1 > 0.$

Nach § 3 hat man jetzt

$$(16')\qquad E_{k-1}(x) = e^{x^k}\left[\int_{\infty}^{x_0} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}\,dz + \int_{x_0}^{x} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}\,dz\right]$$

$$= -F_{k-1}(x),$$

wo wir in ersteren Integral die untere Grenze ∞ in der Richtung $\frac{2\mu_1}{k}\pi$ zu verstehen haben. Offenbar gestattet auch hier $F_{k-1}(x)$ eine Umformung wie (17). Will man nun das Restintegral in (17) abschätzen, so ist es von Bedeutung, dass die Funktion unter dem Integrationszeichen für die obere Grenze $z = x$ ihren grössten absoluten Betrag annimmt, falls man nämlich die Glieder in dem zugehörigen Polynome durch ihre Moduln ersetzt. Vermittelst Betrachtungen, welche, weil das Integral hier komplex ist, von etwas komplizierterer Art als in dem entsprechenden Falle in § 2 sind, findet man, dass n_1 sich so wählen lässt, dass das in Rede stehende

---

[1] Wir machen darauf aufmerksam, dass die rationale Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}$$

in Wirklichkeit blos $k-1$ Glieder enthält, weil für $n_1 - \nu =$ eine durch k teilbare Zahl der Nenner $\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)$ unendlich gross wird.

Restglied von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}$ wird. Eine solche Grösse bezeichnen wir mit $\left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right]$.

Wir dürfen also sagen, dass *die Funktion* $E_{k^{-1}}(x)$ *sich in wesentlich verschiedener Weise verhält, jenachdem* φ *zwischen den Grenzen* $-\frac{\pi}{k}$ *und* $\frac{\pi}{k}$ *eingeschlossen liegt oder nicht. Diese Tatsache findet ihren Ausdruck in den folgenden zwei Relationen, wo man* n_1 *in geeigneter Weise zu wählen hat.*[1]

1) *Hat man* $-\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{k}$, *so gilt*

$$(18)\quad E_{k^{-1}}(x) + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} = \sum_{n=-n_1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = ke^{x^k} + \left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

2) *In den restierenden Fällen, also für* $\frac{\pi}{k} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{k}$, *hat man dagegen*

$$(18')\quad E_{k^{-1}}(x) + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} = \sum_{n=-n_1}^{\infty} \frac{x_n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = \left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

Man beachte, dass für die Grenzfälle $\varphi = \pm\frac{\pi}{k}$ die Bedeutungen von (18) und (18′) identisch sind.

Aus der Gestalt der Formeln (18) *und* (18′) *lassen sich unmittelbar Sätze über die mit den* $E_{k^{-1}}(x)$ *analogen Funktionen*

$$E_{k^{-1},\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)}$$

ablesen, wo λ *eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann.* Durch eine blosse Umformung der genannten Formeln bekommen wir:

---

[1] und zwar in Abhängigkeit von $|x|$.

1) für $-\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{k}$

$$E_{k-1,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{n_1+\lambda} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(\frac{-n+\lambda}{k}+1\right)} \tag{19}$$

$$= \sum_{n=-n_1-\lambda}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)} = kx^{-\lambda}e^{x^k} + \left[x^{-\lambda+\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right];$$

2) für $\frac{\pi}{k} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{k}$

$$E_{k-1,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{n_1+\lambda} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(\frac{-n+\lambda}{k}+1\right)} \tag{19'}$$

$$= \sum_{n=-n_1-\lambda}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)} = \left[x^{-\lambda+\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

Entsprechende Sätze gelten aber noch für den Fall, dass λ keine ganze Zahl ist; Zwar folgen sie dann nicht als Korollare aus (18) und (18′), aber man kann leicht unsere nur auf die Funktionen $E_{k-1}(x)$ bezugnehmenden Rechnungen für die allgemeinere Funktionenklasse $E_{k-1,\lambda}(x)$ durchführen.

§ 5.

Die Teorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, wo α eine rationale Zahl $\frac{h}{k}$ ist, lässt sich auf den Fall, dass $\alpha = k^{-1}$ ist, zuruckführen. Es besteht ja die Identität

$$E_{\frac{h}{k}}(x) = \frac{1}{h}\left[E_{k^{-1}}\left(x^{\frac{1}{h}}\right) + E_{k^{-1}}\left(\omega x^{\frac{1}{h}}\right) + \ldots + E_{k^{-1}}\left(\omega^{h-1} x^{\frac{1}{h}}\right)\right], \tag{20}$$

wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}$. Offenbar ist es erlaubt das Argument $\frac{\varphi}{h}$ für $x^{\frac{1}{h}}$ so zu fixieren, dass die Ungleichungen

$$0 \leqq \frac{\varphi}{h} < \frac{2\pi}{h}$$

bestehen. In (20) kann man nun für jedes Glied $E_{k-1}\left(\omega^K x^{\frac{1}{h}}\right)$ einen Ausdruck aus (18) oder (18') substituieren, und zwar aus (18), falls entweder

$$\frac{\varphi}{h} + \frac{2\pi K}{h} < \frac{\pi}{k}; \qquad \varphi + 2\pi K < \alpha\pi$$

oder auch

$$\frac{\varphi}{h} + \frac{2\pi K}{h} > 2\pi - \frac{\pi}{k}; \qquad \varphi + 2\pi(K - h) > -\alpha\pi.$$

Hiernach bekommt man die Darstellung

$$(21) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_K e^{\omega^{\frac{K}{\alpha}} x^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma(-\alpha n + 1)} + \left[x^{\frac{1}{2\alpha}} e^{-|x|^{\frac{1}{\alpha}}}\right],$$

wo die Summation über die positiven und negativen ganzen Zahlen K ausgeführt wird, für welche

$$-\alpha\pi < \varphi + 2\pi K < \alpha\pi.$$

Um diesen hier nur für rationale Zahlen α bewiesenen Satz auf *reelle* irrationale Zahlen zu erweitern, ist man auf Grenzbetrachtungen hingewiesen. Doch wollen wir um so weniger auf die hierzu nötigen Erörterungen eingehen, als wir keine Möglichkeit sehen von unserem Ausgangspunkte eine allgemeine Teorie der Funktionen $E_\alpha(x)$ aufzubauen. Es ist uns in der Tat bekannt, dass Herr MITTAG-LEFFLER seine vielleicht interessantesten und überraschendsten Resultate eben für *imaginäre* α gewonnen hat.