DEUX DÉMONSTRATIONS DE LA CONVERGENCE DE CERTAINES FRACTIONS CONTINUES

PAR

ANDRÉ MARKOFF
à St. PÉTERSBOURG.

En considérant le développement connu de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 z+\beta_3-\ddots}}}$$

supposons les limites a et b réelles de même que toutes les valeurs de la variable d'intégration y et de $\sqrt{f(y)}$.

Nous allons démontrer très simplement, que dans ces suppositions on aura

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy = \lim_{n=\infty}.\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ddots-\cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

pour toutes les valeurs de z, qui ne sont pas sur le chemin d'intégration.

Rappelons[1] à ce but, que l'expression

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta}}}$$

se réduit à la fraction

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)},$$

dont le dénominateur $\varphi_n(z)$ est une fonction entière de z, de degré n, satisfaisant aux conditions

$$0 = \int_a^b \varphi_n(y) f(y)\,dy = \int_a^b y\varphi_n(y) f(y)\,dy = \ldots = \int_a^b y^{n-1}\varphi_n(y) f(y)\,dy,$$

et le numérateur $\psi_n(z)$ se détermine par la formule

$$\psi_n(z) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(y)}{z - y} f(y)\,dy.$$

On sait aussi, que l'équation

$$\varphi_n(z) = 0$$

n'a point de racines multiples ou imaginaires et que toutes ses racines

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

sont comprises entre a et b.

Il en résulte, que pour chaque fonction entière $\Omega(y)$, de degré moindre que $2n$, on aura

$$\int_a^b \Omega(y) f(y)\,dy = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}\,\Omega(y_i);$$

en particulier

$$\int_a^b f(y)\,dy = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}$$

---

[1] C. Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, 1886.

et

$$\frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} = \int_a^b \left\{ \frac{\varphi_n(y)}{(y - y_i)\varphi_n'(y_i)} \right\}^2 f(y)dy > 0.$$

D'autre côté l'égalité évidente

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \frac{1}{z - y_i}$$

nous donne

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y} dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \frac{f(y)}{z-y} dy - \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \frac{1}{z - y_i}$$

et par conséquent

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y} dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \left\{ \frac{1}{z-y} - \Omega(y) \right\} f(y) dy$$

$$- \sum \left\{ \frac{1}{z - y_i} - \Omega(y_i) \right\} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)},$$

quelle que soit la fonction entière $\Omega(y)$ de degré moindre que $2n$.

Après ces remarques prenons un nombre x quelconque, satisfaisant seulement à l'inégalité

$$\text{mod.} \frac{y-x}{z-x} < 1$$

pour tout le chemin d'intégration, et posons

$$\Omega(y) = \frac{1}{z-x} + \frac{y-x}{(z-x)^2} + \frac{(y-x)^2}{(z-x)^3} + \ldots + \frac{(y-x)^{2n-1}}{(z-x)^{2n}}.$$

Alors la différence

$$\frac{1}{z-y} - \Omega(y)$$

sera réduite à

$$\frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}}$$

et par suite on aura

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}} f(y)dy - \sum \frac{(y_i-x)^{2n}}{(z-y_i)(z-x)^{2n}} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}.$$

Quant aux expressions

$$\int_a^b \frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}} f(y)dy \quad \text{et} \quad \sum \frac{(y_i-x)^{2n}}{(z-y_i)(z-x)^{2n}} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)},$$

leurs modules sont plus petits que le produit de l'intégrale

$$\int_a^b f(y)dy$$

par le maximum du module de l'expression

$$\frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}}$$

sur le chemin de l'intégration.

Or, x étant constant, ce maximum sera si petit qu'on voudra, pour les valeurs de n assez grandes.

Donc la différence

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$$

tend vers zéro, à mesure que n croît infiniment. Les considérations précédentes peuvent aussi indiquer une limite supérieure au module de la différence

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}.$$

A cet effet il est important de choisir le nombre x en sorte, que le maximum du module de

$$\frac{y-x}{z-x}$$

soit le plus petit possible.

Conformément à cette condition nous posons

$$x = \frac{a+b}{2},$$

si z est réel, et

$$x = \frac{a+b}{2} - dt\sqrt{-1},$$

si z est un nombre imaginaire:

$$z = c + d\sqrt{-1},$$

en déterminant t comme la racine positive de l'équation

$$t^2 + \frac{d^2 + (c-a)(c-b)}{d^2}t - \left(\frac{b-a}{2d}\right)^2 = 0.$$

Avec la valeur de x choisie par nous, on trouvera que le module de la différence

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}$$

est inférieur à

$$\frac{2}{\sqrt{(c-a)^2 + d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \int_a^b f(y)\,dy \quad \text{ou à} \quad \frac{2}{\sqrt{(c-b)^2 + d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \int_a^b f(y)\,dy$$

$$\text{ou à} \quad \frac{2}{\sqrt{d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \int_a^b f(y)\,dy$$

pour

$$z = c + d\sqrt{-1}$$

et est inférieur à

$$\frac{1}{a-z}\left(\frac{b-a}{2z-a-b}\right)^{2n} \int_a^b f(y)\,dy \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z-b}\left(\frac{b-a}{2z-a-b}\right)^{2n} \int_a^b f(y)\,dy$$

pour les valeurs de z réelles satisfaisant à la condition

$$(z-a)(z-b)>0.$$

A propos de ces résultats, remarquons que pour les valeurs de z réelles un autre calcul nous donne comme une limite supérieure du même module le produit de

$$\frac{4(b-a)^{2n}\int_a^b f(y)dy}{\left\{2z-a-b+2\sqrt{(z-a)(z-b)}\right\}^{2n}+\left\{2z-a-b-2\sqrt{(z-a)(z-b)}\right\}^{2n}}$$

par $\frac{1}{a-z}$ ou par $\frac{1}{z-b}$.

La démonstration précédente suppose les limites a et b finies.

Nous allons donner maintenant, pour les valeurs de z réelles, une autre démonstration, laquelle s'étend aux plusieurs cas

$$\text{de } a=-\infty \text{ ou de } b=+\infty.$$

Soit pour fixer les idées

$$a<y_1<y_2<\ldots<y_{n-1}<y_n<b<z.$$

En posant

$$\Omega_0(y)=\frac{\varphi_n^2(z)-\varphi_n^2(y)}{(z-y)\varphi_n^2(z)}$$

et

$$\Omega_1(y)=\frac{(y-y_n)\varphi_n^2(z)-(z-y_n)\varphi_n^2(y)}{(z-y)(y-y_n)\varphi_n^2(z)},$$

on aura

$$\int_a^b \Omega_0(y)f(y)dy=\int_a^b \Omega_1(y)f(y)dy=\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)},$$

$$\Omega_0(y)\leqq\frac{1}{z-y}\quad \text{pour } a\leqq y\leqq b,$$

$$\Omega_1(y)\geqq\frac{1}{z-y}\quad \text{pour } a\leqq y\leqq y_n,$$

$$\Omega_1(y)\geqq\frac{1}{z-y}-\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(z-y)(b-y_n)\varphi_n^2(z)}\quad \text{pour } y_n<y\leqq b$$

et par suite

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy > \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} > \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy - \frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)}\int_{y_n}^b \frac{f(y)}{z-y}dy.$$

La première de ces inégalités suffit pour conclure la convergence de notre fraction continue, eu égard à l'inégalité

$$\frac{\psi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}(z)} > \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}.$$

Quant à la formule

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy = \cfrac{1}{\alpha_1 z + b_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ddots}}}$$

elle découle immédiatement de nos inégalités dans tous les cas, où l'on peut démontrer, qu'une (ou toutes les deux) des quantités

$$\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)} \quad \text{et} \quad \int_{y_n}^b \frac{f(y)}{z-y}dy$$

est infiniment petite pour $n = \infty$.

Il n'y a pas de difficulté, si a est fini, car

$$\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)} < \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^{2n-1}.$$

En passant au cas de

$$a = -\infty,$$

nous posons

$$b = 0, \qquad f(y) = e^y(-y)^\lambda g(y),$$

λ étant constant, et ajoutons les conditions $\lambda + 1 > 0$ et $g'(y) > 0$ pour $-\infty < y < 0$. Alors, en appliquant à la fonction

$$V(y, \xi) = e^y(-y)^\lambda \{g(y)\}^\xi$$

le théorème premier de ma seconde note[1] *Sur les racines de certaines équations,* on trouvera, que les racines

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

de l'équation

$$\varphi_n(y) = 0$$

sont plus grandes ($\xi = 1$) que les racines correspondantes ($\xi = 0$)

$$y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$$

de l'équation

$$e^{-y} y^{-\lambda} \frac{d^n}{dy^n} \{e^y y^{\lambda+n}\} = 0.$$

Par conséquent dans le cas considéré les valeurs de $\int\limits_{y_n}^{b} \frac{f(y)}{z-y} dy$ et de $\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)}$ sont respectivement inférieures à $\int\limits_{y_n^0}^{b} \frac{f(y)}{z-y} dy$ et à $\left(\frac{-y_1^0}{z-y_1^0}\right)^2 \cdots \left(\frac{-y_{n-1}^0}{z-y_{n-1}^0}\right)^2 \left(\frac{-y_n^0}{z-y_n^0}\right)$. Or l'expression

$$\left(\frac{-y_1^0}{z-y_1^0}\right)^2 \cdots \left(\frac{-y_{n-1}^0}{z-y_{n-1}^0}\right)^2 \left(\frac{-y_n^0}{z-y_n^0}\right),$$

égale à

$$\left(1 - \frac{z}{y_n^0}\right) \left\{ 1 + \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots \right\}^{-2},$$

est plus petite que la suivante

$$\left\{ 1 + \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \right\}^{-1},$$

laquelle devient infiniment petite pour $n = \infty$. Donc l'intégrale

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^y (-y)^\lambda g(y)}{z-y} dy$$

[1] Mathematische Annalen, Bd. 27.

se développe en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ddots}}}$$

convergente pour toutes les valeurs de z réelles et positives, si $g(y) > 0$ et si les intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} e^y(-y)^\lambda g(y)\,dy\,,\ \int_{-\infty}^{0} e^y(-y)^{\lambda+1} g(y)\,dy\,,\ \ldots$$

ont un sens.

Et nous pouvons assurer, que cette fraction continue est égale à l'intégrale considérée au moins dans les cas où l'on a

$$\lambda + 1 > 0 \quad \text{et} \quad g'(y) > 0 \quad \text{pour} \quad -\infty < y \leqq 0;$$

dans ces cas la différence

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}$$

est moindre que

$$\frac{\left(1 - \frac{z}{y_n^0}\right) \displaystyle\int_{y_n^0}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\,dy}{\left\{1 + \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right\}^2},$$

$-y_n^0$ étant la plus petite racine de l'équation

$$1 - \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1 \cdot 2} - \ldots = 0.$$

On peut aller plus loin en démontrant ce théorème important et simple:

Théorème. Si deux fonctions réelles

$$f^0(y) \quad \text{et} \quad f(y)$$

d'une variable réelle y satisfont aux inégalités

$$f^0(y) > f(y) > 0$$

pour toutes les valeurs de y, comprises entre a et b; en développant les intégrales

$$\int_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}\,dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

en les fractions continues

$$\cfrac{1}{\alpha_1^0 z + \beta_1^0 - \cfrac{1}{\alpha_2^0 z + \beta_2^0 - \cfrac{1}{\alpha_3^0 z + \beta_3^0 - \ddots}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ddots}}}$$

on aura

$$\int_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1^0 z+\beta_1^0 - \cfrac{1}{\alpha_2^0 z+\beta_2^0 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n^0 z+\beta_n^0}}} > \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

pour $z > b$ (dans le cas de $z < a$ on doit changer le signe $>$ en $<$).

Pour démontrer notre théorème posons

$$V(y, \xi) = f^0(y) + \xi[f(y) - f^0(y)]$$

et considérons la fraction

$$\frac{\psi_n(z, \xi)}{\varphi_n(z, \xi)},$$

dont le dénominateur $\varphi_n(z, \xi)$ est une fonction entière de z, de degré n, satisfaisant aux équations

$$0 = \int_a^b \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy = \int_a^b y\varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy = \dots$$
$$= \int_a^b y^{n-1} \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy,$$

et le numérateur $\psi_n(z, \xi)$ se détermine par la formule

$$\psi_n(z, \xi) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z, \xi) - \varphi_n(y, \xi)}{z - y} V(y, \xi) dy.$$

Cela posé, l'inégalité qu'il faut démontrer, deviendra

$$\int_a^b \frac{V(y, 0)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, 0)}{\varphi_n(z, 0)} > \int_a^b \frac{V(y, 1)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, 1)}{\varphi_n(z, 1)}.$$

Or on aura

$$\int_a^b \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, \xi)}{\varphi_n(z, \xi)} = \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy$$

et

$$\frac{d}{d\xi} \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy$$

$$= 2 \int_a^b V(y, \xi) \frac{\varphi_n(y, \xi)}{\varphi_n^3(z, \xi)} \frac{\varphi_n(z, \xi)\dfrac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \varphi_n(y, \xi)\dfrac{\partial \varphi_n(z, \xi)}{\partial \xi}}{z - y} dy$$

$$+ \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{\dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}}{z - y} dy$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{f(y) - f^0(y)}{z - y} dy < 0,$$

d'où l'on tirera notre inégalité immédiatement.

En s'arrêtant au cas, où

$$a = -\infty, \qquad b = 0, \qquad f^0(y) = e^y(-y)^\lambda, \qquad f(y) = e^y(-y)^\lambda g(y),$$

$$\lambda + 1 > 0\,,\ z > 0 \quad \text{et} \quad 0 < g(y) < 1 \quad \text{pour} \quad -\infty < y \leqq 0,$$

on trouvera, que la différence entre l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\, dy$$

et la réduite

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}}$$

de la fraction continue correspondante n'excède pas

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\Gamma(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)z}\left|1 + \frac{n}{\lambda+1}z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1\,.\,2} + \ldots\right|^{-2}.$$