ÜBER SUMMEN VON GRÖSSTEN GANZEN

VON

JACOB HACKS

in BONN.

Stellt man sich die Aufgabe, mit zwei ganzen Zahlen a und b die Division mit zugehöriger Restbestimmung auszuführen, so tritt sofort der Begriff der grössten in einer Zahl enthaltenen ganzen Zahl auf. Der Quotient mit Vernachlässigung des Restes, ist die grösste in der Zahl $\frac{a}{b}$ enthaltene ganze Zahl. Diese Operation, zu deren Bezeichnung man ein besonderes Zeichen eingeführt hat, findet in den verschiedensten Zweigen der Zahlentheorie vielfache Anwendung. Es sind insbesondere *Summen* von grössten Ganzen, welche in der Zahlenlehre von grosser Wichtigkeit sind. Man denke nur an die Ausdrücke für die Summen von Divisoren sowie an den Algorithmus im dritten GAUSS'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

Betrachtet man nun diese Summen von grössten Ganzen, so fällt ein characteristischer Unterschied ins Auge. Gewisse Summen von grössten Ganzen, und zwar namentlich diejenigen, welche in der Lehre von der Teilbarkeit der Zahlen auftreten, sind so beschaffen, dass die unter dem Zeichen befindliche Function mit wachsendem Argument fortwährend abnimmt, während andere, z. B. die in der Theorie der quadratischen Reste auftretenden Summen von grössten Ganzen die Eigenschaft haben, dass die unter dem Zeichen befindliche Function mit wachsendem Argument fortwährend zunimmt. Diese Unterscheidung ist für specielle Fälle schon von ZELLER gemacht worden. ZELLER untersucht nämlich in der Abhandlung *Über Summen von grössten Ganzen bei arithmetischen Reihen* (Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1879, p. 243) zunächst Summen der zweiten Art und sagt dann, indem er zu der Untersuchung von Summen der ersten Art übergeht: »Diese Reihen haben mit den oben besprochenen das gemein, dass es sich dabei um eine Summe von grössten Ganzen handelt, wobei der Fortschritt zwischen den einzelnen Gliedern durch eine arithmetische Reihe bestimmt wird; aber während dort die Bruch*zähler* und darum auch die Brüche selbst eine arithmetische Progression bilden, so ist nun das letztere bei den Bruch*nennern* der Fall ohne Veränderung des Zählers und die Einzelbrüche sind reciproke Werte einer arithmetischen Progression oder mit anderen Worten — und hierin scheint gerade die Eigentümlichkeit dieser Art von Reihen zu bestehen — die Brüche, deren grösste Ganze zu summieren sind, bilden nicht eine arithmetische, sondern eine harmonische Reihe.» Die beiden Arten von Reihen unterscheiden sich eben dadurch, dass die Glieder der einen Art mit wachsender Stellenzahl zunehmen, während die der andern Art das entgegengesetzte Verhalten zeigen. Dass der hervorgehobene Unterschied nicht bloss äusserlicher Natur ist, sondern in der That das Wesen der Sache trifft, wird sich im Verlaufe der vorliegenden Arbeit ergeben. Demgemäss teilen wir dieselbe in zwei Abschnitte, und stellen an die Spitze eines jeden Abschnitts einen allgemeinen Satz, von denen der erste von LEJEUNE-DIRICHLET herrührt, während der zweite nach Analogie des DIRICHLET'schen Satzes gebildet ist.

Wir folgen der von GAUSS (*Theorematis arithmetici demonstratio nova,* GAUSS' Werke, Bd. 2, p. 3) eingeführten Bezeichnungsweise, nach der $[x]$ die unmittelbar unter x liegende ganze Zahl darstellt. Für den Fall, dass x eine ganze Zahl ist, definieren wir $[x] = x$. Die französischen Mathematiker gebrauchen statt der eckigen Klammern das Zeichen $E(x)$ (LEGENDRE, *Théorie des nombres,* p. 10: »l'entier le plus grand contenu dans la fraction x»).

I.

Über Summen von grössten Ganzen von Functionswerten, bei denen die Function mit wachsendem Argument fortwährend abnimmt.

§ 1.

Es sei $y = f(x)$ eine Function, welche immerfort abnimmt, während x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst. Dann hat die durch Umkehrung aus $y = f(x)$ entstehende Function $x = F(y)$ offenbar die Eigenschaft, gleichfalls immer abzunehmen, während y von $y = f(p)$ bis $y = f(\mu)$ wächst. Sind nun μ und p ganze Zahlen und setzt man zur Abkürzung $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$, so ist in der Reihe

$$\nu = [f(\mu)],\ [f(\mu + 1)],\ \ldots,\ [f(s)],\ \ldots,\ [f(p)] = q$$

jedes Glied grösser oder wenigstens nicht kleiner als das folgende. Nun entsteht die Frage: Welche Glieder der Reihe sind einer gegebenen zwischen ν und q liegenden ganzen Zahl t gleich? Es sei s der Zeiger desjenigen Gliedes, welches $\geqq t$ ist, während das folgende $< t$ ist. Dann gelten die Ungleichheiten

$$[f(s)] \geqq t, \qquad [f(s + 1)] < t,$$

oder

$$f(s) \geqq t, \qquad f(s + 1) < t.$$

Hieraus folgt kraft der über die Function $f(x)$ gemachten Voraussetzung

$$s \leqq F(t), \qquad s + 1 > F(t),$$

oder

$$s = [F(t)].$$

Ebenso findet man, dass der Wert $t + 1$ noch demjenigen Gliede zukommt, dessen Zeiger $s' = [F(t + 1)]$, dem folgenden aber nicht mehr, und es ergibt sich, dass die Glieder, denen der Wert t zukommt, der doppelten Bedingung genügen müssen

$$s > [F(t+1)], \qquad s \leqq [F(t)].$$

Für $t = \nu$ erhält die erste Bedingung die Gestalt $s \geqq \mu$, für $t = q$ lautet die zweite Bedingung $s \leqq p$.

In die Sprache der Geometrie übersetzt heisst dies: Wenn eine Curve $y = f(x)$ auf einer gewissen Strecke in Bezug auf die positive x-Axe fortwährend nach unten geneigt ist, so ist sie auch auf derselben Strecke in Bezug auf die positive Seite der y-Axe fortwährend nach unten geneigt. Zieht man durch die Punkte $x = \mu, \mu + 1, \ldots, p - 1, p$ Parallelen zur y-Axe, so wird die Anzahl der auf den von der Abscissenaxe und der Curve begrenzten Stücken dieser Parallelen liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten (Gitterpunkte) um so kleiner, je weiter sich die Parallelen von der y-Axe entfernen; wenigstens ist es unmöglich, dass eine Parallele, welche der Ordinatenaxe näher liegt, als eine andere, weniger Gitterpunkte enthält, als diese. Etwaige auf der Curve selbst liegende Punkte mit ganzzahligen Coordinaten sind natürlich zu den Gitterpunkten mitzurechnen. Die einzelnen Glieder der Reihe

$$[f(\mu)],\ [f(\mu+1)],\ \ldots,\ [f(s)],\ \ldots,\ [f(p)]$$

werden offenbar dargestellt durch die Anzahl der auf den entsprechenden Parallelen liegenden Gitterpunkte. Ein gegebener Wert t kommt denjenigen Gliedern zu, deren Zeiger s auf der Abscissenaxe zwischen den Durchschnittspunkten derselben mit den Geraden $x = F(t)$ und $x = F(t+1)$ liegen. Sollte $F(t)$ einen ganzzahligen Wert besitzen, so ist derselbe mitzurechnen, während ein ganzzahliger Wert für $F(t+1)$ auszuschliessen ist.

In dieser geometrischen Deutung leuchtet die Wahrheit der bis jetzt aufgestellten Behauptungen unmittelbar ein.

Betrachtet man jetzt die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\, \varphi(s),$$

wo $\varphi(s)$ eine ganz beliebige Function ist, so sieht man, dass derjenige

Teil der Summe, in welchem $[f(s)]$ einen und denselben Wert t hat, wenn $g < t < \nu$ ist, den Ausdruck hat

$$t\{\Psi[F(t)] - \Psi[F(t+1)]\},$$

wo $\Psi(s) = \sum_1^s \varphi(s)$ ist. Die Partialsummen, welche den Werten $t = \nu$ und $t = q$ entsprechen, haben resp. die Werte

$$\nu\{\Psi[F(\nu)] - \Psi(\mu)\}$$

und

$$q\{\Psi(p) - \Psi[F(q+1)]\}.$$

Bei der Addition aller dieser Partialsummen erscheint abgesehen von den beiden Gliedern $-\nu\Psi(\mu)$ und $q\Psi(p)$ jedes Glied $\Psi[F(s)]$ mit der positiven Einheit multipliziert; es ergibt sich also die Gleichung

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)]. \tag{1}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varphi(s) = 1$, so wird $\Psi(s) = s$, und es kommt

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] = qp - \nu\mu + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)]. \tag{2}$$

Addiert man in (1) und (2) auf beiden Seiten resp. die Ausdrücke

$$\sum_1^{\mu}[f(s)]\varphi(s) \quad \text{und} \quad \sum_1^{\mu}[f(s)],$$

so ergeben sich die weiteren Gleichungen

$$\sum_1^{p}[f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_1^{\mu}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)]; \tag{3}$$

$$\sum_1^{p}[f(s)] = qp - \nu\mu + \sum_1^{\mu}[f(s)] + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)]. \tag{4}$$

Konstruiert man die Curve $y = f(x)$ und zieht in den Entfernungen μ und p Parallelen zur y-Axe, in den Entfernungen $f(p)$ und $f(\mu)$ Parallelen zur x-Axe, so genügt der Anblick der Figur, um uns von der Richtigkeit der Gleichungen (2) und (4) zu überzeugen.

Wir haben diesen von DIRICHLET in der Abhandlung *Über ein die Division betreffendes Problem* (CRELLE'S Journal Bd. 47, p. 151) bewiesenen Satz mit seinem Beweise hier reproduziert, weil derselbe für das folgende von so grosser Wichtigkeit ist.

§ 2.

Bezeichnet $f(m)$ die Anzahl, $g(m)$ die Summe der Divisoren der Zahl m, und setzt man

$$F(m) = f(1) + f(2) + \ldots + f(m),$$

$$G(m) = g(1) + g(2) + \ldots + g(m),$$

so hat man die bekannten Gleichungen

$$(1) \qquad F(m) = \sum_{s=1}^{s=m} \left[\frac{m}{s}\right],$$

$$(2) \qquad G(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\left[\frac{m}{s}\right].$$

Ist m eine ungerade Zahl und

$$\mathfrak{F}(m) = f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(m),$$

$$\mathfrak{G}(m) = g(1) + g(3) + g(5) + \ldots + g(m),$$

so ist[1]

$$\mathfrak{F}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right],$$

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right].$$

Man bezeichne mit $k(m)$ die Summe aus den ungeraden und den

[1] Cf. Acta Mathematica Bd. 9, p. 178, wo die Zeichen $F(m)$ und $G(m)$ an folgenden Stellen in $\mathfrak{F}(m)$ und $\mathfrak{G}(m)$ umzuändern sind: p. 178, Z. 5, 11, 14, 15, 18; p. 179, Z. 16; p. 180, Z. 17, 22, 24.

halben geraden Divisoren der Zahl m, mit $l(m)$ die Differenz aus den geraden und ungeraden Divisoren der Zahl m, und setze

$$K(m) = k(1) + k(2) + \ldots + k(m),$$

$$L(m) = l(1) + l(2) + \ldots + l(m).$$

Dann ist

$$K(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\left[\frac{m}{s}\right] - \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s\left[\frac{m}{2s}\right],$$

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m} (-1)^s s\left[\frac{m}{s}\right].$$

Bevor wir dazu übergehen, auf die eben besprochenen Functionen die allgemeinen Transformationsgleichungen des § 1 anzuwenden, wollen wir die Darstellungen des § 1 verallgemeinern.

Bedeutet $f_2(m)$ die Anzahl, $g_2(m)$ die Summe der quadratischen Teiler von m und ist

$$F_2(m) = f_2(1) + f_2(2) + \ldots + f_2(m),$$

$$G_2(m) = g_2(1) + g_2(2) + \ldots + g_2(m),$$

so ist

$$F_2(m) = \sum_{s=1}^{s=[\sqrt{m}]} \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$G_2(m) = \sum_{s=1}^{s=[\sqrt{m}]} s^2\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

und ist allgemein $F_\alpha(m)$ die Anzahl, $G_\alpha(m)$ die Summe sämtlicher Divisoren von der Form n^α aller Zahlen von 1 bis m, so gelten die Gleichungen

$$F_\alpha(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[\alpha]{m}\right]} \left[\frac{m}{s^\alpha}\right], \tag{3}$$

$$G_\alpha(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[\alpha]{m}\right]} s^\alpha\left[\frac{m}{s^\alpha}\right]; \tag{4}$$

ein zweiter Ausdruck für $F_\alpha(m)$ ist der folgende

$$F_\alpha(m) = \sum_{s=1}^{s=m} \left[\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{s^{\frac{1}{\alpha}}} \right]. \tag{5}$$

Beide Darstellungen sind nur für $\alpha = 1$ identisch.

Die Gleichungen (3), (4) und (5) dieses sowie (1) des folgenden Paragraphen finden sich im 2. Bande der Acta Mathematica (*Sur quelques points de la théorie des nombres*, par R. Lipschitz, p. 301 sqq.).

§ 3.

Wendet man auf den Ausdruck (3) die Gleichung (4) des § 1 an, so ergibt sich

$$F_\alpha(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m}{s^\alpha} \right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{s^{\frac{1}{\alpha}}} \right], \tag{1}$$

wo μ eine beliebige zwischen 1 und $\left[m^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ liegende ganze Zahl und $\nu = \left[\frac{m}{\mu^\alpha}\right]$ ist.

Es dürfte erwähnenswert sein, dass für $\mu = 1$ die Formel (1) in (5) des vorigen Paragraphen übergeht, indem für $\mu = 1$, $\nu = m$ und $\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s^\alpha}\right] = m$ wird. Umgekehrt kann man natürlich auch mit Hülfe der Transformationsgleichung von (5) zu (1) gelangen.

Setzt man in (1) $\mu = \left[m^{\frac{1}{1+\alpha}}\right]$, so erhält man, wie Lipschitz an der erwähnten Stelle nachgewiesen hat, die Gleichung

$$F_\alpha(m) = -\mu^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m}{s^\alpha} \right] + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{s^{\frac{1}{\alpha}}} \right]. \tag{2}$$

Die Formeln (1) und (2) nehmen für $\alpha = 1$ resp. die Gestalt an

$$F(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m}{s}\right], \tag{3}$$

$$F(m) = -\mu^2 + 2\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right]. \tag{4}$$

In der letzten Gleichung ist $\mu = [\sqrt{m}]$.

Die Gleichung (3) hat zuerst Dirichlet gefunden (v. die Abhandlung *Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* Abhdlg. der Berl. Akad. 1849); die Gleichung (4) findet sich in einer schon genannten Abhandlung von Zeller und im 2. Bande der Acta Mathematica (in der Note von Ch. Hermite p. 299).

Alle Formeln dieses Paragraphen lassen sich auch geometrisch beweisen. Der Kürze wegen möge der geometrische Beweis für die Gleichungen (3) und (4) genügen.

$y = \frac{m}{x}$ ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, welche die x- und y-Axe zu Asymptoten hat. Die Anzahl der in dem von den Asymptoten und der Hyperbel eingeschlossenen Flächenstücke liegenden Gitterpunkte ist augenscheinlich gleich $F(m)$. Denn die Anzahl der Gitterpunkte, welche auf der durch den Punkt ($x = 1$, $y = 0$) zur y-Axe gezogenen Parallele liegen, ist gleich $\left[\frac{m}{1}\right]$, auf der durch den Punkt ($x = 2$, $y = 0$) gehenden Parallele zur y-Axe liegen $\left[\frac{m}{2}\right]$ Gitterpunkte u. s. w., kurz, die Anzahl der Gitterpunkte ist $\left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{m}\right]$, und dies ist gerade der Ausdruck für die Function $F(m)$. Die Zahl

$$\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right]$$

wird dargestellt durch die Anzahl der Gitterpunkte, welche von der Abscissenaxe, den Ordinaten $x = 0$ und $x = \mu$ und der Hyperbel eingeschlossen sind, wobei die auf der Geraden $x=\mu$ liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten natürlich mitzurechnen sind. Die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m}{s}\right]$$

ist gleich der Anzahl der von der Ordinatenaxe, den Abscissen $y=0$ und $y=\nu$ und der Hyperbel eingeschlossenen Gitterpunkte, wobei die auf der Geraden $y=\nu$ liegenden Gitterpunkte wiederum mitzurechnen sind. Es liegt dies daran, dass man der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel auch die Form $x=\frac{m}{y}$ geben kann, wodurch x und y ihre Rollen vertauschen. $\mu\nu$ ist die Anzahl derjenigen Gitterpunkte, welche in dem von den Axen, der Ordinate $x=\mu$ und der Abscisse $y=\nu$ gebildeten Rechteck liegen, und diese Anzahl ist, wie man unmittelbar sieht, von der Anzahl der schon betrachteten Gitterpunkte abzuziehen, um jeden Gitterpunkt einmal und nur einmal zu erhalten. Dies ist aber der Inhalt der zu beweisenden Gleichung (3).

Um die Gleichung (4) geometrisch zu beweisen, ziehen wir die Geraden $x=\mu$ und $y=\mu$, deren Durchschnittspunkt innerhalb des von den Axen und der Curve begrenzten Flächenstücks liegen muss. Auf der Verbindungslinie des zuletzt genannten Punktes mit dem Coordinatenanfangspunkte liegen μ und nur μ Gitterpunkte, weil der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der Hyperbel die Coordinaten $x=\sqrt{m}$, $y=\sqrt{m}$ hat. Nachdem dies festgestellt ist, verhelfen ähnliche Betrachtungen wie die oben angestellten leicht zu dem gewünschten Beweise.

Will man nur einen Teil der Summe transformieren, so dient dazu die von Dirichlet (Crelle's Journal Bd. 47 p. 153) aufgestellte Gleichung

$$(5)\qquad \sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{m}{s}\right]=pq-\mu\nu+\sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{m}{s}\right],$$

welche man aus (2), § 1 erhält, indem man $f(s)=\frac{m}{s}$ setzt.

Die Gleichung (5) ist gleichfalls einer sehr anschaulichen geometrischen Deutung fähig.

§ 4.

Es möge jetzt der Ausdruck

$$G_\alpha(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[\alpha]{m}\right]} s^\alpha \left[\frac{m}{s^\alpha}\right]$$

durch Anwendung der Gleichung (1) des § 1 transformiert werden. Zunächst ist klar, dass man die Summation bis $s = m$ ausdehnen darf, ohne den Wert der Summe zu ändern. Setzt man in (1), § 1

$$f(s) = \frac{m}{s^\alpha}, \qquad \varphi(s) = s^\alpha,$$

$$\mu = 1, \qquad p = m,$$

so wird $\nu = m$ und wenn $\alpha > 1$ ist, $q = 0$. Wir machen die Voraussetzung, dass α die Einheit übertrifft; dann ergibt sich

$$\sum_{s=2}^{s=m} s^\alpha \left[\frac{m}{s^\alpha}\right] = -m + \sum_{s=1}^{s=m} \psi\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right].$$

$$= -m + \sum_1^m \sum_1^{\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right]} s^\alpha,$$

oder

$$\begin{aligned} G_\alpha(m) = {} & \sum_1^m \sum_1^{\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right]} s^\alpha \\ = {} & 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{1}}\right]^\alpha \\ & + 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{2}}\right]^\alpha \\ & + \ldots\ldots \\ & + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{m}}\right]^\alpha. \end{aligned}$$

Beispiel $m = 7$, $\alpha = 2$.

$$\sum_{s=1}^{s=7} s^2 \left[\frac{7}{s^2}\right] = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 11.$$

$$\sum_{s=1}^{s=7} \sum_{1}^{\left[\sqrt{\frac{7}{s}}\right]} s^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 11.$$

Bevor wir die Umformung für den Fall $\alpha = 1$ ausführen, wollen wir die Transformationsgleichungen für den Fall hinschreiben, dass die Function $f(s)$ die Gestalt $\frac{m}{s}$ hat. Es ergeben sich die Relationen

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right],$$

$$(2) \qquad \sum_{1}^{p} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{1}^{\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right];$$

für $p = m$ wird $q = 1$ und $q\Psi(p) = \Psi(m)$, also

$$(3) \qquad \sum_{1}^{m} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = -\nu\Psi(\mu) + \sum_{1}^{\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) + \sum_{1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right].$$

Setzt man in (3) $\mu = 1$, so wird $\nu = m$, die beiden ersten Glieder der rechten Seite heben sich auf, und es kommt

$$(4) \qquad \sum_{1}^{m} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = \sum_{1}^{m} \Psi\left[\frac{m}{s}\right].$$

Diese vier Formeln sind der Abhandlung DIRICHLETS *Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie* entnommen.

Wenn man in (4) $\varphi(s) = s$ setzt, so ergibt sich

$$(5) \qquad \sum_{1}^{m} s \left[\frac{m}{s}\right] = \sum_{1}^{m} \sum_{1}^{\left[\frac{m}{s}\right]} s = \frac{1}{2} \sum_{1}^{m} \left\{ \left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right] \right\},$$

oder

$$G(m) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{\left[\frac{m}{2}\right]\left\{\left[\frac{m}{2}\right] + 1\right\}}{2} + \dots + \frac{\left[\frac{m}{m}\right]\left\{\left[\frac{m}{m}\right] + 1\right\}}{2}.$$

Die oben aufgestellte Formel behält also ihre Gültigkeit auch für $\alpha = 1$.

Wir hatten die Gleichung

$$\mathfrak{F}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right].$$

Aus

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{m+2x-1}{2x-1}$$

folgt

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{m+2y-1}{2y-1},$$

und hierauf beruht die Umformung

$$\mathfrak{F}(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right],$$

wo μ eine beliebige zwischen 1 und $\frac{m+1}{2}$ liegende ganze Zahl und $\nu = \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2\mu-1}{2\mu-1}\right]$ ist.

Der Ausdruck

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]$$

erhält durch Anwendung von (3), § 1 die Gestalt

$$\mathfrak{G}(m) = -\nu\mu^2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=2}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2,$$

indem für $\varphi(s) = 2s-1$, $\Psi(s) = s^2$ wird. Vereinigt man das zweite Glied der rechten Seite mit dem letzten, so ergibt sich

$$\mathfrak{G}(m) = -\nu\mu^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2.$$

Für $\mu = 1$ wird $\nu = \frac{m+1}{2}$, die beiden ersten Glieder der rechten Seite zerstören sich, und man erhält die Gleichung

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2.$$

Beispiel $m = 13$.

$$\sum_{s=1}^{s=7}(2s-1)\left[\frac{1}{2}\,\frac{7+2s-1}{2s-1}\right] = 1\left[\frac{14}{2}\right] + 3\left[\frac{16}{6}\right] + 5\left[\frac{18}{10}\right] + 7\left[\frac{20}{14}\right] + 9\left[\frac{22}{18}\right]$$

$$+ 11\left[\frac{24}{22}\right] + 13\left[\frac{26}{26}\right] = 7 + 6 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 58.$$

$$\sum_{s=1}^{s=7}\left[\frac{1}{2}\,\frac{7+2s-1}{2s-1}\right]^2 = 7^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 58.$$

Es ist

$$K(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\,.\left[\frac{m}{s}\right] - \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s\,.\left[\frac{m}{2s}\right].$$

Nun ist nach (5)

$$\sum_{s=1}^{s=m} s\,.\left[\frac{m}{s}\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}\left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\},$$

ferner ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s\,.\left[\frac{m}{2s}\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{m}{2s}\right]\left\{\left[\frac{m}{2s}\right] + 1\right\}.$$

Demnach ergibt sich die Darstellung

$$K(m) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}\left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left\{\left[\frac{m}{2s}\right]^2 + \left[\frac{m}{2s}\right]\right\},$$

der man auch folgende Gestalt geben kann

$$K(m) = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{m}{1}\right]^2 + \left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{3}\right]^2 + \left[\frac{m}{3}\right] + \left[\frac{m}{5}\right]^2 + \left[\frac{m}{5}\right] + \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m+1}{2}\right]}\left\{\left[\frac{m}{2s-1}\right]^2 + \left[\frac{m}{2s-1}\right]\right\}.$$

Beispiel $m = 10$.

$$\left[\frac{10}{1}\right] + \left[\frac{10}{2}\right] + 3\left[\frac{10}{3}\right] + 2\left[\frac{10}{4}\right] + 5\left[\frac{10}{5}\right] + 3\left[\frac{10}{6}\right] + 7\left[\frac{10}{7}\right] + 4\left[\frac{10}{8}\right]$$

$$+ 9\left[\frac{10}{9}\right] + 5\left[\frac{10}{10}\right] = 66.$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{10}{1}\right]^2 + \left[\frac{10}{1}\right] + \left[\frac{10}{3}\right]^2 + \left[\frac{10}{3}\right] + \left[\frac{10}{5}\right]^2 + \left[\frac{10}{5}\right] + \left[\frac{10}{7}\right]^2 + \left[\frac{10}{7}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{10}{9}\right]^2 + \left[\frac{10}{9}\right]\right\} = \frac{1}{2}.\,132 = 66.$$

Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s . s\left[\frac{m}{s}\right]$$

mit Hülfe der Gleichung (4) umformen, indem wir $\varphi(s) = (-1)^s . s$ setzen.

Es ergibt sich sofort

$$\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s . s\left[\frac{m}{s}\right] = \sum_{s=1}^{s=m}\sum_{1}^{\left[\frac{m}{s}\right]}(-1)^s . s.$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{s}\right]}(-1)^s . s = (-1)^{\left[\frac{m}{s}\right]}\left[\frac{\left[\frac{m}{s}\right]+1}{2}\right],$$

mithin

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m}(-1)^{\left[\frac{m}{s}\right]}\left[\frac{\left[\frac{m}{s}\right]+1}{2}\right].$$

Beispiel $m = 7$.

$$L(7) = -\left[\frac{7}{1}\right] + 2\left[\frac{7}{2}\right] - 3\left[\frac{7}{3}\right] + 4\left[\frac{7}{4}\right] - 5\left[\frac{7}{5}\right] + 6\left[\frac{7}{6}\right] - 7\left[\frac{7}{7}\right] = -9.$$

Anderseits ist auch

$$-4 - 2 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -9.$$

II.

Über Summen von grössten Ganzen von Functionswerten, bei denen die Function mit wachsendem Argument fortwährend wächst.

§ 5.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, wie aus dem Dirichlet'schen Satze eine Reihe von Folgerungen sich ergeben, indem derselbe sich auf die Summenfunctionen, die bei der Betrachtung der Teilbarkeit der Zahlen auftreten, ohne Mühe anwenden lässt. In ähnlicher Weise lassen sich der dritte Gauss'che Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, verschiedene von Zeller in den Nachrichten der Gött. Ges. d. W. vom Jahre 1879 veröffentlichte Sätze, ein allgemeiner Satz von Sylvester und eine Reihe anderer Folgerungen aus einem Satze ableiten, den wir jetzt beweisen wollen.

Eine Function $y = f(x)$ möge, während x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst, immerfort zunehmen. Dann wird die durch Umkehrung aus $y = f(x)$ entstehende Function $x = F(y)$ ebenfalls wachsen, wenn y von $y = f(\mu)$ bis $y = f(p)$ wächst. μ und p seien ganze Zahlen, ferner sei

$$[f(\mu)] = \nu, \qquad [f(p)] = q.$$

Wir bilden die Reihe

$$[f(\mu)], \qquad [f(\mu + 1)], \quad \ldots \quad [f(s)], \quad \ldots \quad [f(p)],$$

wo jedes Glied kleiner als das folgende oder demselben gleich ist. Wir machen zunächst die Voraussetzung, dass keiner der in Betracht kommenden Werte $f(s)$ gleich einer ganzen Zahl ist, so dass immer $f(s) > [f(s)]$ ist mit Ausschluss der Gleichheit. Welche Glieder der obigen Reihe sind einer gegebenen zwischen ν und q liegenden ganzen Zahl t gleich? Zur Beantwortung dieser Frage suchen wir den völlig bestimmten Zeiger desjenigen Gliedes auf, dessen Wert unter t liegt, während der des folgenden über t liegt oder demselben gleich ist. Es ist also

$$[f(s)] < t, \qquad [f(s+1)] \geqq t,$$

oder

$$f(s) < t, \qquad f(s+1) > t.$$

Hieraus folgen vermöge der über die Function $y = f(x)$ gemachten Voraussetzung die Ungleichheiten

$$s < F(t), \qquad s + 1 > F(t),$$

oder, was dasselbe ist

$$s = [F(t)].$$

In derselben Weise ist der Zeiger des vom Anfange entferntesten Gliedes, dessen Wert unter $t + 1$ liegt, gleich $[F(t+1)]$; es kommt also der Wert t denjenigen Gliedern zu, deren Zeiger der doppelten Bedingung genügen

$$[F(t+1)] \geqq s > [F(t)].$$

Wegen des gegebenen Anfangs und Endes der Reihe erhält diese Bestimmung für $t = \nu$ die Modifikation, dass an Stelle der zweiten Bedingung $s \geqq \mu$ tritt, während für $t = q$ an Stelle der ersten Bedingung $s \leqq p$ tritt.

Wir wollen nun die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)] \varphi(s)$$

dadurch transformieren, dass wir zuerst alle Glieder vereinigen, in denen $[f(s)]$ einen und denselben Wert hat, und dann die so erhaltenen Partialsummen addieren. Die Summe der Glieder in denen $[f(s)]$ einen bestimmten zwischen ν und q liegenden Wert hat, erhält, wenn man

$$\sum_{1}^{s} \varphi(s) = \Psi(s)$$

setzt, den Ausdruck

$$t\{\Psi[F(t+1)] - \Psi[F(t)]\};$$

für $t = \nu$ und $t = q$ treten an Stelle dieses Ausdrucks bezw. die Werte

$$\nu\{\Psi[F(\nu+1)] - \Psi(\mu)\}$$

und

$$q\{\Psi(p) - \Psi[F(q)]\}.$$

Bei der Addition aller dieser Partialsummen erscheint abgesehen von den beiden Gliedern $-\nu\Psi(\mu)$ und $q\Psi(p)$ jedes Glied mit der negativen Einheit multipliziert; es ergibt sich also

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p) - \sum_{\nu+1}^{q}\Psi[F(s)]$$

oder

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{\nu+1}^{q}\Psi[F(s)] = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p).$$

Setzt man $\varphi(s) = 1$, so wird $\Psi(s) = s$ und es kommt

$$(2) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)] = -\mu\nu + pq.$$

Diese Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass keiner der betrachteten Werte $f(s)$ einen ganzzahligen Wert hat. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen und untersuchen in welcher Weise sich die Gleichungen (1) und (2) für den Fall ändern, dass unter den in Betracht kommenden Werten von $f(s)$ einige gleich einer ganzen Zahl sind. Ein ganzzahliger Wert von $f(\mu)$ vermag offenbar den Wert des Ausdruckes $\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s)$ nicht zu beeinflussen; es seien demgemäss $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\rho$ diejenigen zwischen $\mu+1$ und p mit Einschluss beider Grenzen liegenden ganzen Zahlen, für welche $f(s)$ gleich einer ganzen Zahl wird. Wiederholt man die Betrachtung, welche zu der Gleichung (1) geführt hat, so stellt sich heraus, dass die Werte $\varphi(s_1), \varphi(s_2), \varphi(s_3), \ldots, \varphi(s_\rho)$ sämtlich einmal zu wenig mitgerechnet sind, es ist demnach auf der rechten Seite von (1) das Aggregat

$$\varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \varphi(s_3) + \dots + \varphi(s_\rho)$$

zu addieren.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Eine Function $y = f(x)$ möge mit wachsendem x von $x = \mu$ bis $x = p$ fortwährend zunehmen, wo μ und p ganze Zahlen bedeuten. $x = F(y)$ sei die aus $y = f(x)$ durch Umkehrung entstehende Function, ferner sei $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$ und $\varphi(s)$ eine beliebige Function. Wenn alsdann $s_1, s_2, \dots, s_\rho$ diejenigen ganzzahligen zwischen $\mu + 1$ und p mit Einschluss beider Grenzen liegenden Argumente sind, für welche die Function $y = f(x)$ gleich einer ganzen Zahl wird, so ist

$$\begin{aligned}(3)\qquad & \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)] \\ & = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p) + \varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \dots + \varphi(s_\rho),\end{aligned}$$

wo $\Psi(s) = \sum_{1}^{s}\varphi(s)$ ist.

Für $\varphi(s) = 1$ gestaltet sich dieses Resultat wesentlich einfacher. Ist ρ diejenige Zahl, welche angibt, wie viele unter den Functionswerten $f(\mu + 1), f(\mu + 2), \dots, f(p)$ ganze Zahlen sind, so ist

$$(4)\qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)] = -\mu\nu + pq + \rho.$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf folgende Art beweisen.

Die Function $y = f(x)$ sei zunächst nicht im Stande, für ganzzahlige Werte von x ganzzahlige Werte anzunehmen, die Zahl ρ sei also gleich Null, und die Gleichung

$$(5)\qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)] = -\mu\nu + pq$$

werde für einen bestimmten Wert von p als richtig angenommen. Dann fügen wir der ersten Summe der linken Seite von (2) das Glied

$$[f(p + 1)] = q + l,$$

der zweiten Summe die Glieder $[F(q+1)]$, $[F(q+2)]$, ..., $[F(q+l)]$ zu. Hierdurch erhält die linke Seite die Gestalt

$$\sum_{\mu+1}^{p+1}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q+l}[F(s)]. \tag{6}$$

Nun folgt aus $[f(p)] = q$, $[f(p+1)] = q + l$ die Richtigkeit folgender Ungleichheiten

$$q + 1 > f(p) > q,$$

$$q + l + 1 > f(p+1) > q + l,$$

oder

$$f(p) = q + \theta,$$

$$f(p+1) = q + l + \theta_1,$$

wo θ und θ_1 positive echte Brüche bezeichnen. Hieraus folgt weiter

$$p = F(q + \theta),$$

$$p + 1 = F(q + l + \theta_1),$$

und hieraus ergeben sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass auch die Function $x = F(y)$ mit zunehmendem Argument beständig wächst, die Beziehungen

$$[F(q+1)] = p,$$

$$[F(q+2)] = p,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$[F(q+l)] = p.$$

Es ist also

$$\sum_{s=q+1}^{s=q+l}[F(s)] = pl.$$

Demnach erhält der Ausdruck (6) den Wert

$$-\mu\nu + pq + q + l + pl = -\mu\nu + (p+1)(q+l),$$

also

$$\sum_{\mu+1}^{p+1}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q+l}[F(s)] = -\mu\nu + (p+1)(q+l).$$

Ist somit die Gleichung (5) für einen bestimmten Wert von p richtig, so ist sie auch für jeden über p liegenden ganzzahligen Wert richtig. Sie ist aber offenbar richtig für $p = \mu$, indem alsdann $q = \nu$ wird und in der Gleichung

$$(7) \qquad \sum_{\mu+1}^{\mu}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{\nu}[F(s)] = -\mu\nu + \mu\nu$$

die Summen der linken Seiten überhaupt keine Glieder enthalten, und die rechte Seite identisch verschwindet.

Lässt man die Möglichkeit offen, dass $f(s)$ für ganzzahlige Werte von s gleich einer ganzen Zahl werde, so wird das obige Verfahren nur in so weit alteriert, als für einen ganzzahligen Wert von $f(p+1)$ die Zahl $[F(q+l)]$ gleich $p+1$ wird. Es ist also für jeden ganzzahligen Wert von $f(s)$ rechts eine Einheit zu addieren. Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (7) sofort die Richtigkeit von (4).

Dieser Beweis ist einem Verfahren nachgebildet, welches Sylvester anwendet, um eine speciellere Gleichung zu beweisen, von welcher weiter unten (p. 27) die Rede sein wird.

Vielleicht verdient es erwähnt zu werden, dass auch die Gleichung (2) des § 1 eines ganz ähnlichen Beweises fähig ist.

§ 6.

Die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen lässt sich auf eine einfache Weise geometrisch beweisen. Man konstruiere die Curve $y = f(x)$. Dieselbe wird infolge der über die Function $y = f(x)$ gemachten Voraussetzung von $x = \mu$ bis $x = p$ fortwährend nach oben geneigt sein. Dann ziehe man in den Entfernungen μ und p Parallelen zur y-Axe und in den Entfernungen $f(\mu)$ und $f(p)$ Parallelen zur x-Axe. Die erstgenannten Parallelen bezeichne man resp. mit ST und PQ, die letztgenannten Parallelen resp. mit UT und RQ. Nun stellt offenbar das erste Glied der linken Seite der zu beweisenden Gleichung die Anzahl derjenigen Gitterpunkte dar, welche in dem Flächenstück $PQTS$ liegen, wobei die auf der Geraden PQ und der Curve QT liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten mitzurechnen sind (mit Ausschluss des Punktes T, falls dieser ein Gitterpunkt sein sollte).

Das zweite Glied der linken Seite gibt in ganz entsprechender Weise die Anzahl derjenigen Gitterpunkte an, welche von dem Viereck $QRUT$ eingeschlossen werden, wobei etwaige auf den Linien QT und QR liegende Gitterpunkte wiederum mitzurechnen sind. Die in Bezug auf den Punkt T oben gemachte Bemerkung gilt auch hier. Hieraus ist ersichtlich, dass man die Anzahl pq der in dem Rechteck $OPQR$, jedoch mit Ausschluss der beiden Axen, enthaltenen Gitterpunkte erhält, indem man einerseits die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)]$$

um die Anzahl ρ derjenigen Gitterpunkte vermindert, welche auf dem in Betracht kommenden Stücke der Curve $y = f(x)$ liegen, und anderseits die Anzahl $\mu\nu$ der in dem Rechteck $OSTU$ liegenden Gitterpunkte addiert. Dies ist aber der Inhalt des in Rede stehenden Satzes.

§ 7.

Nunmehr wollen wir von dem so eben auf analytischem und geometrischem Wege bewiesenen Satze einige Anwendungen machen. Um zunächst ein Beispiel zu wählen, in welchem die Function $y = f(x)$ transcendent ist, setzen wir

$$y = e^x.$$

Hieraus entsteht durch Umkehrung

$$x = \log y.$$

Setzt man dies in (4), § 5 ein und nimmt die Zahl $\mu = 0$, so wird $\nu = [e^0] = 1$. Da, wie Hermite in der Abhandlung *Sur la fonction exponentielle* nachgewiesen hat, die Basis e der natürlichen Logarithmen auf eine ganzzahlige Potenz s erhoben, niemals eine ganze Zahl werden kann (natürlich abgesehen von $s = 0$), oder, was dasselbe ist, da der natürliche Logarithmus einer ganzen Zahl s (mit Ausnahme von $s = 1$)

niemals gleich einer ganzen Zahl sein kann, so ist im vorliegenden Falle die Zahl $\rho = 0$. Da ferner $\log 1 = 0$, so ergibt die Anwendung von (4), § 5 die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=p}[e^s] + \sum_{s=1}^{s=q}[\log s] = pq,$$

wo p eine beliebige positive ganze Zahl und $q = [e^p]$ ist. Das Aggregat auf der linken Seite ist also stets gleich dem Produkt aus den Gliederanzahlen der beiden Summen.

Die wirkliche Ausführung der Rechnung bestätigt dieses Resultat. Für $p = 5$ z. B. wird $q = [e^5] = 148$, ferner ist

$$\sum_1^5[e^s] = 231, \qquad \sum_1^{148}[\log s] = 509,$$

also

$$\sum_1^5[e^s] + \sum_1^{148}[\log s] = 740 = 5 \cdot 148.$$

Ein ähnlicher Satz gilt für jede beliebige Basis eines Logarithmensystems. Für die Basis 10 z. B. gilt die Gleichung

$$\sum_1^p 10^s + \sum_1^q[\log s] = p(q+1),$$

wo $q = 10^p$ ist. Die Zahl ρ hat hier den Wert p. So hat man z. B. für $p = 3$, $q = 1000$

$$\sum_1^3 10^s + \sum_1^{1000}[\log s] = 1110 + 1893 = 3003 = 3 \cdot (1000 + 1).$$

Wir wenden uns jetzt zu solchen Summen von grössten Ganzen, bei denen $y = f(x)$ eine rationale ganze Function von x ist, und zwar beschränken wir die Untersuchung auf solche Functionen, bei denen die Variable x nur in einem einzigen Gliede vorkommt. Es sei demgemäss

$$y = \frac{ax^\alpha + d}{m},$$

wo a, α und m beliebige positive ganze Zahlen mit Ausschluss der Null, und d zunächst eine positive unter m liegende ganze Zahl bedeuten möge. Die durch Umkehrung entstehende Function hat die Form

$$x = \sqrt[a]{\frac{my - d}{a}}.$$

Die Function $y = \frac{ax^a + d}{m}$ hat von dem Werte $x = 0$ an die Eigenschaft, mit wachsendem x stets zuzunehmen; es ist daher gestattet, bei Anwendung unseres Satzes die Zahl μ gleich Null zu nehmen. Dann wird $\nu = \left[\frac{d}{m}\right] = 0$, und es ergibt sich

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a + d}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] - \rho = pq.$$

Hier bedeutet p eine beliebige positive ganze Zahl; ferner ist

$$q = \left[\frac{ap^a + d}{m}\right]$$

und ρ die Anzahl derjenigen unter den Brüchen

$$\frac{a \cdot 1^a + d}{m}, \quad \frac{a \cdot 2^a + d}{m}, \quad \ldots \quad \frac{a \cdot p^a + d}{m},$$

welche ganzzahlige Werte haben.

Es ist klar, dass die Zahl ρ auch gleich der Anzahl derjenigen unter den Wurzelwerten

$$\sqrt[a]{\frac{m \cdot 1 - d}{a}}, \quad \sqrt[a]{\frac{m \cdot 2 - d}{a}}, \quad \ldots \quad \sqrt[a]{\frac{m \cdot q - d}{a}}$$

ist, welche ganze Zahlen sind. Statt nun die Zahl ρ auf der linken Seite von (1) zu subtrahieren, kann man auch unter dem Wurzelzeichen zum Zähler die negative Einheit hinzufügen. Denn für den Fall, dass $\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}$ keine ganze Zahl ist, ist $\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] = \left[\sqrt[a]{\frac{ms - d - 1}{a}}\right]$; ist aber $\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}$ eine ganze Zahl, so ist $\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] - 1 = \left[\sqrt[a]{\frac{ms - d - 1}{a}}\right]$, und da der

Ausdruck $\sqrt[a]{\dfrac{ms-d}{a}}$ ρ mal zu einer ganzen Zahl wird, während s die Reihe der Werte $1, 2, \ldots, q$ durchläuft, so ergibt sich

$$\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d}{a}}\right]-\rho=\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right].$$

Somit erhält man die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a+d}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right]=pq. \tag{2}$$

Für $d \geqq m$ hat $\nu=\left[\dfrac{d}{m}\right]$ einen von Null verschiedenen Wert; es ist alsdann

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a+d}{m}\right]+\sum_{\nu+1}^{q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right]=pq. \tag{3}$$

Diese Gleichung welche die Gleichung (2) als speciellen Fall enthält, gilt auch dann noch, wenn d negativ ist.

Für $a=1$ erhält die Gleichung (3) die Gestalt

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^a+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{ms-d-1}\right]=pq. \tag{4}$$

Indem man den Zahlen α und d specielle Werte beilegt, kann man aus (3) und (4) eine Reihe von Sätzen ableiten, welche ZELLER in der schon mehrfach erwähnten Abhandlung veröffentlicht hat.

Es sei z. B. $\alpha=1$, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\frac{ms-d-1}{a}\right]=pq, \tag{5}$$

$$q=\left[\frac{ap+d}{m}\right].$$

Setzt man $\alpha = 2$, so geht (4) in die folgende Gleichung über

$$(6)\qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^2+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\sqrt{ms-d-1}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{p^2+d}{m}\right].$$

Für $d = 0$ endlich nehmen (4), (5), (6) resp. die Gestalt an

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^\alpha}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[\alpha]{ms-1}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{p^\alpha}{m}\right];$$

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\frac{ms-1}{a}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{ap}{m}\right];$$

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^2}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt{ms-1}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{p^2}{m}\right].$$

§ 8.

Bekanntlich beruht der dritte Gauss'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, welcher im Jahre 1808 in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis veröffentlicht worden ist (Gauss' Werke Bd. II. p. 3 sqq.), auf dem Satze:

Wenn p und q positive ungerade relative Primzahlen sind, so ist

$$(1)\qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{p}{q}s\right]+\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{q}{p}s\right]=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Diese Gleichung hat man seitdem auf verschiedene Arten bewiesen und verallgemeinert; aber alle mir bekannten Verallgemeinerungen sind nur specielle Fälle des in § 5 bewiesenen allgemeinen Satzes, wie im einzelnen nachgewiesen werden soll.

GAUSS selbst leitet die Gleichung (1) aus folgendem Satze ab:

Ist x eine positive Grösse, welche so beschaffen ist, dass unter den Vielfachen derselben $x, 2x, \ldots, nx$ keine einzige ganze Zahl vorkommt, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=n}[sx] + \sum_{s=1}^{s=h}\left[\frac{s}{x}\right] = nh, \tag{2}$$

wo $h = [nx]$ ist.

Nimmt man in (4), § 5 die Function $f(s) = xs$, so hat die durch Umkehrung aus $f(s)$ entstehende Function die Gestalt $F(s) = \frac{s}{x}$; die Zahl ρ verschwindet infolge der Voraussetzung, und es folgt ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichung (2), wenn man $\mu = 0$ nimmt.

Aus (2) leitet nun GAUSS die Gleichung (1) ab, indem er $x = \frac{p}{q}$ setzt und annimmt, dass p kleiner sei als q, was offenbar gestattet ist. Alsdann ist

$$\left[\frac{\frac{q-1}{2}p}{q}\right] = \left[\frac{qp-p}{2q}\right] = \left[\frac{p-\frac{p}{q}}{2}\right] = \frac{p-1}{2},$$

und hieraus ergibt sich sofort die Richtigkeit von (1).

ZELLER hat die Gleichung (1) in der Weise erweitert, dass er an Stelle der Ausdrücke

$$\frac{1\cdot p}{q}, \quad \frac{2\cdot p}{q}, \quad \frac{3\cdot p}{q}, \quad \ldots,$$

welche eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, arithmetische Reihen höherer Ordnung treten liess. Die betreffenden Sätze sind im vorigen Paragraphen besprochen und aus unserem allgemeinen Satze abgeleitet worden.

SYLVESTER leitet in dem Aufsatze *Sur la fonction* $E(x)$ (Comptes Rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, tome L, p. 732) das Reciprocitätsgesetz aus folgendem Satze ab:

Wenn p und q zwei beliebige positive Grössen sind und λ eine positive Grösse bezeichnet, welche kleiner ist, als der kleinste Wert a, welcher zur selben Zeit ap und aq zu ganzen Zahlen macht, so besteht die Gleichung

$$(3) \qquad \sum_{s=0}^{s=[\lambda q]} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=0}^{s=[\lambda p]} \left[\frac{sq}{p}\right] = [\lambda p] \cdot [\lambda q].$$

Den Beweis dieses Satzes führt SYLVESTER in folgender Weise. Die Gleichung (3) sei richtig für alle Werte von λ, welche unter einer gewissen Grösse liegen. Von dieser Grösse aus lassen wir λ allmählich stetig wachsen. Kein einziges Glied unserer Gleichung wird seinen Wert ändern, bis λp oder λq ganze Zahlen werden, was nach Voraussetzung nicht gleichzeitig geschehen kann. Gesetzt nun, λp werde zuerst eine ganze Zahl. Dann nimmt die zweite Summe der linken Seite zu um das Glied $\left[\lambda p \frac{q}{p}\right] = [\lambda q]$, während die erste ungeändert bleibt. Auf der rechten Seite bleibt $[\lambda q]$ ungeändert, während $[\lambda p]$ um eine Einheit zunimmt, es wächst also auch die rechte Seite der Gleichung um $[\lambda q]$. Unser Satz besteht also für den ersten Wert von λ, welcher eine Veränderung in unserer Gleichung hervorbringt, also auch für den 2^{ten}, 3^{ten} Wert, u. s. w., und da die Gleichung für $\lambda = 0$ richtig ist, so gilt sie allgemein für jeden unter der angegebenen Grenze liegenden Wert von λ.

Lässt man die der Grösse λ auferlegte Beschränkung fallen, so nimmt jedesmal, wenn λp und λq gleichzeitig ganze Zahlen werden, der Ausdruck

$$\sum_{s=0}^{s=[\lambda q]} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=0}^{s=[\lambda p]} \left[\frac{sq}{p}\right]$$

um die Summe $[\lambda p] + [\lambda q] = \lambda p + \lambda q$ zu, während $[\lambda p] \cdot [\lambda q]$ nur den Zuwachs

$$\lambda p \cdot \lambda q - (\lambda p - 1)(\lambda q - 1) = \lambda p + \lambda q - 1$$

erhält. Folglich hat man für jeden beliebigen Wert von λ die Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{s=0}^{s=[\lambda q]} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=0}^{s=[\lambda p]} \left[\frac{sq}{p}\right] = [\lambda p] \cdot [\lambda q] + L,$$

wo L diejenige Zahl bedeutet, welche angibt, wie oft px und qx gleichzeitig ganze Zahlen werden, während x von o bis λ wächst.

Die Gleichung (3) ergibt sich, wie STERN bemerkt hat (v. die Abhandlung *Über einige Eigenschaften der Function* $E(x)$, CRELLE's Journal, Bd. 59, p. 146) sofort aus der GAUSS'schen Gleichung (2), wenn man in dieser $x = \frac{p}{q}$ und $n = [\lambda q]$ setzt. Denn wir dürfen annehmen, dass eine der beiden Grössen λp und λq eine ganze Zahl sei. Sollte dies nämlich nicht von vornherein der Fall sein, so lassen wir λ abnehmen, bis eine der beiden Grössen λp und λq eine ganze Zahl wird, und halten den Wert von λ fest, bei dem dies zuerst geschieht. Durch das beschriebene Verfahren hat keine einzige der in Betracht kommenden grössten ganzen Zahlen ihren Wert verändert. Es sei also λq eine ganze Zahl. Dann wird $\left[\frac{[\lambda q] p}{q}\right] = [\lambda p] = h$, und hiermit ist (3) aus (2) abgeleitet.

Sodann kann man die Gleichungen (3) und (4) auch unmittelbar aus (4), § 5 erhalten, indem man die Function $f(s) = \frac{p}{q} s$, die Zahl μ gleich Null und die dortige Zahl p gleich $[\lambda q]$ nimmt. Aus der zuletzt erwähnten Gleichung folgt sofort

$$\sum_{s=1}^{s=[\lambda q]} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right]} \left[\frac{sq}{p}\right] = [\lambda q]\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] + \rho,$$

wo die Zahl ρ angibt, wie viele von den vorkommenden Brüchen $\frac{sp}{q}$ ganzzahlige Werte haben.

Nun könnten wir wieder den eben eingeschlagenen Weg befolgen, um zu zeigen, dass man unter den beiden Grössen p und q stets die eine, q, so auswählen kann, dass $\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = [\lambda p]$ wird; wir ziehen es aber vor, diesen Beweis auf einem von STERN (a. a. O.) angegebenen Wege zu führen. Wir setzen

$$\lambda q = [\lambda q] + e, \qquad \lambda p = [\lambda p] + f;$$

dann ist

$$\frac{p}{q}[\lambda q] = \lambda p - \frac{ep}{q} = [\lambda p] + \frac{fq - ep}{q}.$$

Ist nun $fq = ep$, so folgt sofort

$$\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = [\lambda p],$$

andernfalls kann man für q denjenigen der beiden Werte p und q nehmen, für welchen $fq > ep$ ist, so dass $0 < \frac{fq - ep}{q} < 1$ wird. Es ist also wiederum

$$\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = \left[[\lambda p] + \frac{fq - ep}{q}\right] = [\lambda p].$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass die Zahl p mit der obigen Zahl L übereinstimmt. Es folgt dies daraus, dass jedesmal, wenn xp und xq gleichzeitig ganze Zahlen werden, auch $[xq]\frac{p}{q} = xp$ und $[xp]\frac{q}{p} = xq$ ganze Zahlen sein müssen.

Aus (3) zieht nun Stern eine Reihe von Folgerungen. Sind p und q relative Primzahlen und e und f resp. die kleinsten positiven Reste von p und q nach den Moduln m und n, also $\frac{p-e}{m}$ und $\frac{q-f}{n}$ ganze Zahlen, ist ferner k eine positive ganze Zahl von der Beschaffenheit, dass $ke < m$ und $kf < n$ ist, so besteht, wie sich leicht zeigen lässt, die Relation

$$(5)\qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-f)}{n}} \left[\frac{spn}{qm}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{sqm}{pn}\right] = \frac{k^2(q-f)(p-e)}{mn}.$$

Für $k = 1$ ist die Bedingung $ke < m$, $kf < n$ erfüllt; es ist demnach

$$(6)\qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{q-f}{n}} \left[\frac{spn}{qm}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-e}{m}} \left[\frac{sqm}{pn}\right] = \frac{(q-f)(p-e)}{mn}.$$

Für $m = n$ geht (5) über in

$$(7)\qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-f)}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{k^2(q-f)(p-e)}{m^2},$$

und für den Fall, dass $e = f = 1$ ist, kommt

$$(8)\qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-1)}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-1)}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{k^2(p-1)(q-1)}{m^2}.$$

Die Gleichung (8) ist zuerst von SYLVESTER (a. a. O.) aufgestellt worden; sie enthält als speciellen Fall folgenden Satz von EISENSTEIN (CRELLE's Journal XXVII, p. 281):

Sind p und q relative Primzahlen und beide $\equiv 1 \pmod{m}$, so ist

$$(9)\qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{m^2};$$

hieraus ergibt sich für $m = 2$ die Gleichung (1).

Selbstverständlich lassen sich die Relationen (1) und (5) bis (9) auch unmittelbar aus dem in § 5 bewiesenen Satze herleiten. Die unter dem zweiten Summenzeichen befindliche Function ist jedesmal die Umkehrung der unter dem ersten Summenzeichen befindlichen Function, ferner steht auf der rechten Seite überall das Produkt aus den Gliederanzahlen der beiden Summen, und die Zahl ρ verschwindet infolge der gemachten Voraussetzungen mit Notwendigkeit. Da ausserdem für $\mu = 0$ überall auch $\nu = 0$ wird, so handelt es sich jedesmal nur um den Nachweis, dass man unter den völlig gleichberechtigten Zahlen p und q stets die eine, q, so auswählen kann, dass das letzte Glied der ersten Summe auf der linken Seite gleich der Anzahl der Glieder der zweiten Summe wird. So ist z. B. in (9), wenn man die grössere der beiden Zahlen p und q gleich q nimmt

$$\left[\frac{(q-1)p}{mq}\right] = \left[\frac{p - \frac{p}{q}}{m}\right] = \frac{p-1}{m},$$

und damit ist die Gleichung (9) gerechtfertigt.

EISENSTEINS Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste (CRELLE's Journal XXVIII, p. 246) ist ein specieller Fall der in § 6 angestellten geometrischen Betrachtung; er beruht darauf, dass $y = \frac{p}{q}x$ die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden ist, der man auch die Form $x = \frac{q}{p}y$ geben kann, und dass, wenn p und q relative Primzahlen sind, kein einziger der in Betracht kommenden Gitterpunkte in die Gerade selbst hineinfällt.

§ 9.

Die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen kann man auch, wenn man die Zeichen p und q resp. durch m und n ersetzt, in folgender Weise schreiben

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{m}{n}s\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{n}{m}s\right] = \left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right].$$

In dieser Form gilt die Gleichung allgemein für zwei beliebige relative Primzahlen m und n, wie zuerst GAUSS bemerkt hat (*Theorematis arithmetici demonstratio nova,* GAUSS' Werke, Bd. II, p. 8; eine Anwendung findet sich in der *Theoria residuorum biquadraticorum* ibid. p. 145).

Es sei eine der beiden relativen Primzahlen gerade, die andere also ungerade. Die erstere bezeichne man mit n, die letztere mit m. Dann ist

$$\left[\left[\frac{n}{2}\right]\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{n}{2}\,\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m}{2}\right],$$

und damit ist die Richtigkeit von (1) auch für diesen Fall dargethan.

Bezeichnet man die auf der linken Seite von (1) befindlichen Summen mit S resp. T, so hat man

$$S + T = \left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right].$$

Nunmehr können wir den Wert der Summe $S + T$ auch für den Fall angeben, dass m und n einen gemeinsamen Teiler haben. Es sei δ der grösste gemeinsame Teiler beider Zahlen, so dass die durch die Gleichungen

$$m = m'\delta,$$
$$n = n'\delta$$

definierten Zahlen m' und n' relativ prim zu einander sind. Wenn m und n beide $\equiv 1 \pmod 2$ sind, so setzen wir $m < n$ voraus; andernfalls nehmen wir n als gerade an. Alsdann führt die Wiederholung der oben angestellten Betrachtung leicht zu der Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{m}{n}s\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{n}{m}s\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right] + \rho.$$

Die Zahl ρ gibt an, wie viele von den Brüchen $\frac{ms}{n}$ einen ganzzahligen Wert haben, während s die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ durchläuft, oder was dasselbe ist, ρ ist die Zahl, welche angibt, wie viele Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ Vielfache von n' sind. Folglich ist

$$\rho = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n'}\right] = \left[\frac{\left[\frac{\delta n'}{2}\right]}{n'}\right],$$

oder vermöge der leicht zu beweisenden Gleichung

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{c}{ab}\right]$$

(v. Dirichlet, *Zahlentheorie*, p. 28),

$$\rho = \left[\frac{\delta}{2}\right].$$

Es ist also in allen bisher betrachteten Fällen

$$S + T = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{\delta}{2}\right];$$

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo m und n ungerade und einander gleich sind. Dieser Fall lässt sich auf eine ähnliche Weise erledigen; kürzer aber führt die direkte Behandlung zum Ziel. Es ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{m}{m}s\right]+\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{m}{m}s\right]=2\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}s=\left[\frac{m}{2}\right]^2+\left[\frac{m}{2}\right].$$

Nun ist aber der grösste gemeinsame Teiler von m und m die Zahl m selbst. Es gilt somit immer, was für positive ganze Zahlen m und n auch bedeuten mögen, die Gleichung

$$S+T=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{\delta}{2}\right]. \tag{2}$$

(1) ist in (2) als specieller Fall enthalten, da der grösste gemeinsame Teiler zweier relativer Primzahlen die Einheit und $\left[\frac{1}{2}\right]=0$ ist.

Beispiel $m=9$, $n=18$; $\delta=9$.

$$S=\left[\frac{9}{18}\right]+\left[\frac{18}{18}\right]+\left[\frac{27}{18}\right]+\left[\frac{36}{18}\right]+\left[\frac{45}{18}\right]+\left[\frac{54}{18}\right]+\left[\frac{63}{18}\right]+\left[\frac{72}{18}\right]+\left[\frac{81}{18}\right]$$

$$=0+1+1+2+2+3+3+4+4=20.$$

$$T=\left[\frac{18}{9}\right]+\left[\frac{36}{9}\right]+\left[\frac{54}{9}\right]+\left[\frac{72}{9}\right]=2+4+6+8=20.$$

$$S+T=40=4\cdot 9+4=\left[\frac{9}{2}\right]\cdot\left[\frac{18}{2}\right]+\left[\frac{9}{2}\right].$$

Die Gleichung (2) kann man in folgender Weise geometrisch beweisen. Man konstruiere die Gerade $y=\frac{m}{n}x$, welche Gleichung man auch in der Form $x=\frac{n}{m}y$ schreiben kann. Hieraus folgt

$$S+T=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\rho, \tag{3}$$

wo ρ die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnet, die auf der Diagonale des durch die Axen und durch die Geraden $y=\frac{m}{2}$ und $x=\frac{n}{2}$ gebildeten

Rechtecks liegen; hierbei ist der Schnittpunkt der beiden letztgenannten Geraden, falls derselbe ein Gitterpunkt sein sollte, mitzurechnen. Von diesen Punkten erhält man, wie leicht einzusehen ist, jeden einmal und nur einmal, indem man den Bruch $\frac{m}{n}$ auf seine kleinste Benennung $\frac{m'}{n'}$ bringt, dann $\frac{m'}{n'}$ der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., $\left[\frac{\delta}{2}\right]$ multipliziert und jedesmal den Zähler der so gewonnenen Brüche zur y-Coordinate, den Nenner zur x-Coordinate eines Punktes macht. Wollte man $\frac{m'}{n'}$ mit einer ganzen Zahl r multiplizieren, die über $\left[\frac{\delta}{2}\right]$, also auch über $\frac{\delta}{2}$ liegt, so würden die Coordinaten des betreffenden Punktes $y = rm'$, $x = rn'$ resp. die Werte $\frac{m'\delta}{2} = \frac{m}{2}$ und $\frac{n'\delta}{2} = \frac{n}{2}$ übertreffen, folglich der Punkt zwar in die Gerade $y = \frac{m}{n}x$, aber ausserhalb des oben bezeichneten Rechtecks fallen. Es ist also die gesuchte Anzahl $\rho = \left[\frac{\delta}{2}\right]$, und infolge dessen geht (3) in die zu beweisende Gleichung (2) über.

§ 10.

Es soll jetzt versucht werden, gewisse Summen von grössten Ganzen analytisch auszudrücken, mit Benutzung einer oft angeführten Arbeit von Zeller und einer Reihe von Untersuchungen von Bouniakowsky (*Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique $E(x)$*. Bulletin de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg, tome 28, p. 257 etc., p. 411 etc.; tome 29, p. 250 etc.).

Wir beschäftigen uns zunächst mit Summen von der Form

$$P_\alpha = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left[\frac{s^\alpha}{p}\right],$$

wo p eine Primzahl und α eine positive ganze Zahl mit Ausschluss der Null bedeutet. Setzt man

$$Q_\alpha = \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right]} \left[\sqrt[\alpha]{sp}\right],$$

so ist nach dem in § 5 bewiesenen Satze

$$(1) \qquad P_\alpha + Q_\alpha = (p-1)\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right].$$

Der Ausdruck $\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right]$ ist eine rationale ganze Function $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Grades von p; es ist nämlich für $\alpha \equiv 0 \pmod 2$

$$\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha-1} - \alpha p^{\alpha-2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} p^{\alpha-3} \mp \ldots - \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots (\alpha-1)},$$

und für $\alpha \equiv 1 \pmod 2$

$$\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha-1} - \alpha p^{\alpha-2} \pm \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots (\alpha-1)} - 1.$$

Beide Gleichungen lassen sich in folgender Weise in eine einzige zusammenfassen

$$\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha-1} - \alpha p^{\alpha-2} \pm \ldots + (-1)^{\alpha-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots (\alpha-1)} - 2\left\{\frac{\alpha}{2} - \left[\frac{\alpha}{2}\right]\right\}.$$

Die rechte Seite von (1) ist demnach eine rationale ganze Function von p. Stellt man nun folgende Reihe von Gleichungen auf (Zeller, Nachr. d. Götting. Ges. d. W. 1879, p. 254)

$$(2) \qquad \left|\begin{aligned} 1^\alpha &= \left[\frac{1^\alpha}{p}\right] p + r_1, \\ 2^\alpha &= \left[\frac{2^\alpha}{p}\right] p + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1)^\alpha &= \left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] p + r_{p-1} \end{aligned}\right.$$

und addiert, so kommt

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1} s^\alpha = p \cdot P_\alpha + \sum_{s=1}^{s=p-1} r_s.$$

Der Ausdruck $\sum\limits_{s=1}^{s=p-1} s^\alpha$, den wir mit S_α bezeichnen wollen, lässt sich nach dem Newton'schen Satze rational und ganz ausdrücken durch die symmetrischen Grundverbindungen der Elemente $1, 2, 3, \ldots, p-1$, und diese Grundverbindungen sind nach dem WILSON'schen Satze alle durch p teilbar mit Ausnahme der einen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$, für welche die Kongruenz gilt

$$(-1)^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \pmod{p}.$$

S_α wird also in allen denjenigen Fällen durch p teilbar sein, in denen die Zahl $\underline{|p-1}$ zur Darstellung der Summen gleich hoher Potenzen der $p-1$ Elemente nicht erforderlich ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn $\alpha < p-1$. Wir machen jetzt die Annahme $\alpha < p-1$. Alsdann ist S_α und somit auch $\sum\limits_{s=1}^{s=p-1} r_s$ durch p teilbar. In denjenigen Fällen also, wo es gelingt $\sum\limits_{s=1}^{s=p-1} r_s$ als rationale ganze Function von p darzustellen, ist P_α eine rationale ganze Function von p, von der man auch den Grad bestimmen kann. P_α lässt sich alsdann mit Hülfe der Gleichung (3) direkt bestimmen; aber es ist auch die Methode der unbestimmten Coefficienten anwendbar, so dass es nicht nötig ist, S_α und $\sum\limits_{s=1}^{s=p-1} r_s$ wirklich zu berechnen.

Ein solcher Fall ist z. B. der, wo α und $p-1$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben (ZELLER, a. a. O. p. 255). Dann erscheinen nämlich, wie aus der Lehre von den Potenzresten bekannt ist (cf. DIRICHLET's *Zahlentheorie*, ed. 1879, p. 73), auf der rechten Seite der Gleichungen (2) die sämtlichen kleinsten positiven Reste von p mit Ausschluss der Null. Es wird also $\sum\limits_{s=1}^{s=p-1} r_s = \frac{p(p-1)}{2}$, und P_α ist rational und ganz durch p darstellbar, und zwar wird die betreffende Function in p vom α^{ten} Grade sein, indem nach einer bekannten Formel

$$\begin{aligned} S_\alpha = {} & \frac{(p-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(p-1)^\alpha}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1} B_1 (p-1)^{\alpha-1} \\ & - \frac{1}{4} B_2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (p-1)^{\alpha-3} \\ & + \frac{1}{6} B_3 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (p-1)^{\alpha-5} \mp \ldots, \end{aligned}$$

wo $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die auf einander folgenden BERNOULLI'schen Zahlen sind.

Auch Q_α ist, wie Gleichung (1) zeigt, unter den oben gemachten Voraussetzungen eine rationale ganze Function von p, die durch die Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden werden kann.

Es sei jetzt $\alpha = 2$ und p eine beliebige Primzahl. Die Primzahlen 2 und 3 brauchen nicht ausgeschlossen zu werden, da für jede positive Zahl p die Gleichung gilt

$$S_2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} s^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}.$$

Nun ist

$$P_2 + Q_2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left[\frac{s^2}{p}\right] + \sum_{s=1}^{s=p-1} [\sqrt{sp}] = (p-1)^2, \tag{4}$$

indem $[\sqrt{(p-1)p}] = p - 1$ ist, ferner ist

$$S_2 = p \cdot P_2 + \sum_{s=1}^{s=p-1} r_s. \tag{5}$$

Bezeichnet man mit R die Summe der quadratischen Reste von p, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s = 2R.$$

Ist nun p von der Form $4n + 1$, so ergänzen sich je zwei quadratische Reste zu p, es ist also

$$R = \frac{(p-1)p}{4}.$$

Da nun S_2 eine Function 3. Grades von p ist, welche kein konstantes Glied enthält, so sind P_2 und Q_2 rationale ganze Functionen von p. Hieraus folgt die Berechtigung zu schreiben

$$\begin{aligned} P_2 &= Ap^2 + Bp + C, \\ Q_2 &= A_1p^2 + B_1p + C_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen p der Reihe nach gleich 5, 13, 17, so ergeben sich je drei lineare Gleichungen für A, B, C und A_1, B_1, C_1, durch deren Auflösung man folgende Formeln gewinnt

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1}\left[\frac{s^2}{p}\right] = \frac{p^2}{3} - p + \frac{2}{3} = \frac{(p-1)(p-2)}{3}$$

$$(8) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1}[\sqrt{sp}] = \frac{2p^2}{3} - p + \frac{1}{3} = \frac{(p-1)(2p-1)}{3},$$

welche resp. mit den von BOUNIAKOWSKY im »article 2$^{\underline{d}}$» der oben genannten Abhandlung p. 424 angegebenen Formeln (20) und (21) übereinstimmen.

Es versteht sich von selbst, dass uns der direkte Weg schneller zum Ziel geführt haben würde, wir haben hier die Methode der unbestimmten Coefficienten nur deshalb gewählt, um ein Beispiel davon zu geben.

Anders gestaltet sich die Sache für eine Primzahl q von der Form $4n + 3$. Auch dann ist natürlich $\sum_{s=1}^{s=q-1} r_s = 2R$ durch q teilbar, aber die Abhängigkeit der Zahl R von q ist nicht so einfach, dass sie sich durch eine rationale ganze Function von q ausdrücken liesse. Aus (4), (5) und (6) ergeben sich für P_2 und Q_2 leicht die Ausdrücke

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}\left[\frac{s^2}{q}\right] = \frac{(q-1)(2q-1)}{6} - \frac{2R}{q},$$

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(4q-5)}{6} + \frac{2R}{q}.$$

Diese beiden Formeln gelten allgemein für jede Primzahl q; sie enthalten (7) und (8) als speciellen Fall.

Bezeichnet man mit R' die Summe der quadratischen Nichtreste von q, so ist

$$R + R' = \frac{q(q-1)}{2}$$

$$\frac{2R}{q} = q - 1 - \frac{2R'}{q},$$

also

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}\left[\frac{s^2}{q}\right] = \frac{(q-1)(2q-7)}{6} + \frac{2R'}{q},$$

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(4q+1)}{6} - \frac{2R'}{q}.$$

Wir gehen jetzt über zu der Betrachtung der Summen

$$\sum_{s=1}^{s=m-1}[\sqrt{sm}] \quad \text{und} \quad \sum_{s=1}^{s=m-1}\left[\frac{s^2}{m}\right],$$

wo m eine beliebige positive ganze Zahl ist. Es gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1}[\sqrt{sm}] + \sum_{s=1}^{s=m-1}\left[\frac{s^2}{m}\right] = (m-1)^2 + \rho, \tag{9}$$

wo die Zahl ρ angibt, wie viele unter den Produkten $1 . m$, $2 . m$, $3 . m, \ldots$, $(m-1)m$ volle Quadrate sind. Wenn m aus lauter verschiedenen Primzahlen besteht, so ist offenbar $\rho = 0$. Ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo $a, b, c \ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen und die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle gerade sind, ist also m eine volle Quadratzahl, so enthält die Reihe $1 . m$, $2 . m$, $\ldots$, $m . m$ offenbar ebenso viele Quadratzahlen als die Reihe $1, 2, \ldots, m$, ihre Anzahl ist also $\sqrt{m} = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots$, mithin ist in diesem Falle

$$\rho = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots - 1.$$

Ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gerade, $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ ungerade sind, so muss eine Zahl s, welche mit m multipliziert ein volles Quadrat ergeben soll, den Faktor $a'b'c' \ldots$ und ausserdem nur noch einen quadratischen Faktor enthalten. Befreit man also die Zahl s von dem Faktor $a'b'c' \ldots$, so muss ein volles Quadrat übrig bleiben. Legt man mithin den Zahlen s ausserdem noch die Bedingung auf, nicht grösser als m zu sein, so stimmt ihre Anzahl überein mit der Anzahl der in der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots a'^{\alpha'-1} b'^{\beta'-1} c'^{\gamma'-1} \ldots$$

enthaltenen Quadratzahlen, sie ist also gleich $a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\frac{\alpha'-1}{2}} b'^{\frac{\beta'-1}{2}} c'^{\frac{\gamma'-1}{2}}$ oder gleich $a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\left[\frac{\alpha'}{2}\right]} b'^{\left[\frac{\beta'}{2}\right]} c'^{\left[\frac{\gamma'}{2}\right]} \ldots$

Demnach ist in diesem Falle

$$\rho = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\left[\frac{\alpha'}{2}\right]} b'^{\left[\frac{\beta'}{2}\right]} c'^{\left[\frac{\gamma'}{2}\right]} \ldots - 1.$$

Beide Werte für ρ lassen sich in einen Ausdruck vereinigen. Sind $a, b, c \ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen, und ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, so ist

$$\rho = a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1.$$

Die Zahl m möge jetzt aus lauter verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n + 1$ bestehen. Dann handelt es sich darum, $\sum\limits_{s=1}^{s=m-1} r_s$ zu bestimmen. Zunächst ist klar, dass jeder quadratische Rest r von m durch einen andern quadratischen Rest r' von m zu m ergänzt wird. Denn aus der Möglichkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv r \pmod m$$

folgt sofort die Möglichkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv -r \pmod m,$$

da die negative Einheit quadratischer Rest jedes einzelnen der in m enthaltenen Primfaktoren ist. Anderseits hat die Kongruenz

$$x^2 \equiv r \pmod m$$

genau ebenso viele Wurzeln als die Kongruenz

$$x^2 \equiv -r \pmod m.$$

Setzt man also

$$r + r' = m$$

und stellt die Gleichungen auf

$$1^2 = \left[\frac{1^2}{m}\right] m + r_1$$

$$2^2 = \left[\frac{2^2}{m}\right] m + r_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(m-1)^2 = \left[\frac{(m-1)^2}{m}\right] m + r_{m-1},$$

so kommt jeder Rest r genau so oft vor, als der zugehörige Rest r'. Hieraus folgt

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s = \frac{m(m-1)}{2},$$

und da die Zahl ρ unter der gemachten Voraussetzung verschwindet, so dürfen wir mit Berücksichtigung der Gleichung (9) und der für jede Zahl m geltenden Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} s^2 = m \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$$

folgenden Satz aussprechen:

Wenn eine Zahl m aus lauter verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n+1$ besteht, so gelten die Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-2)}{3}, \tag{10}$$

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(2m-1)}{3}. \tag{11}$$

Es sei jetzt $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo die verschiedenen in m enthaltenen Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ alle die Form $4n+1$ haben. Dann wird die oben zur Berechnung von $\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$ angestellte Betrachtung nur insofern alteriert, als r auch gleich Null werden kann, und zwar geschieht dies so oft, als die vorhin mit ρ bezeichnete Zahl angibt. Die Zahl ρ, deren

Wert gleich $a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ gefunden wurde, ist offenbar gerade; denkt man sich demnach $\frac{\rho}{2}$-mal statt des Restes Null den Rest m, so ergänzen sich wiederum stets zwei Reste r und r' zu m, und jeder Rest r wird ebenso oft erscheinen als der zugehörige Rest r'. Hierbei ist die Zahl m jedoch $\frac{\rho}{2}$-mal zu viel mitgerechnet worden, wir erhalten also die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s = \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m\rho}{2},$$

und es wird

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} s^2 = m \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m\rho}{2},$$

oder

$$\frac{(m-1)(2m-1)}{6} = \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m-1}{2} - \frac{\rho}{2}.$$

Mit Hülfe einer einfachen Rechnung ergibt sich hieraus

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-2)}{3} + \frac{\rho}{2}, \tag{12}$$

und vermöge der Gleichung (9)

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(2m-1)}{3} + \frac{\rho}{2}. \tag{13}$$

Die Gleichungen (10) und (11) gehen resp. aus (12) und (13) hervor, indem man $\rho = 0$ setzt.

Beispiel $m = 25 = 5^2$.

Die direkte Berechnung ergibt

$$\sum_{s=1}^{s=24} \left[\frac{s^2}{25}\right] = 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11$$
$$+ 12 + 14 + 16 + 17 + 19 + 21 + 23 = 186.$$

Die Berechnung nach (12) ergibt, da ρ den Wert $5^1 - 1 = 4$ hat,

$$\sum_{s=1}^{s=24}\left[\frac{s^2}{25}\right] = \frac{24 \cdot 23}{3} + \frac{4}{2} = 186.$$

Wir betrachten jetzt die Summen

$$P = \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{s^2}{p}\right]$$

und

$$Q = \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{4}}\left[\sqrt{sp}\right],$$

wo p eine Primzahl von der Form $4n + 1$ bedeutet. Da, wie leicht zu sehen

$$\left[\sqrt{\frac{(p-1)p}{4}}\right] = \frac{p-1}{2}$$

ist, so gilt die Gleichung

$$P + Q = \frac{(p-1)^2}{8}.$$

Anderseits erhält man durch ein schon mehrfach benutztes Verfahren die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} s^2 = p \,.\, P + R,$$

wenn man mit R wiederum die Summe der quadratischen Reste von p bezeichnet. Nun ist

$$R = \frac{p(p-1)}{4}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} s^2 = \frac{p(p-1)(p+1)}{24},$$

mithin

$$P = \frac{(p-1)(p-5)}{24},$$

$$Q = \frac{p^2-1}{12}.$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit (11) sofort die von BOUNIAKOWSKY aufgestellten Gleichungen (Bulletin de l'acad. imp. de S:t Pétersbourg, tome 28, p. 257, 263)

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-5}{4}}[\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)(p-5)}{12},$$

$$\sum_{s=\frac{p-1}{4}}^{s=p-1}[\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)(7p+1)}{12}.$$

Für eine Primzahl von der Form $4n+3$ hat man zunächst, da

$$\left[\frac{(q-1)^2}{4q}\right] = \left[\frac{q-2}{4} + \frac{1}{4q}\right] = \frac{q-3}{4}$$

ist, die Relation

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{q-1}{2}\,\frac{q-3}{4}.$$

Ferner ist, wie leicht zu beweisen,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right] = \frac{q^2-1}{24} - \frac{R}{q},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(q-5)}{12} + \frac{R}{q},$$

und vermöge der Relation

$$R + R' = \frac{q(q-1)}{2},$$

wo R' die Summe der quadratischen Nichtreste von q bezeichnet,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{q^2-1}{12} - \frac{R'}{q}.$$

(BOUNIAKOWSKY, a. a. O. p. 415). Da nun, wie pag. 39 gezeigt,

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(4q-5)}{6} + \frac{2R}{q},$$

$$= \frac{(q-1)(4q+1)}{6} - \frac{2R'}{q},$$

so folgt

$$\sum_{s=\frac{q+1}{4}}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(7q-5)}{12} + \frac{R}{q},$$

$$= \frac{(q-1)(7q+1)}{12} - \frac{R'}{q}.$$

(a. a. O. p. 419, 420).

Es sei wiederum $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ eine Zahl, deren Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ alle die Form $4n+1$ haben. Dann ist

$$(14) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)^2}{8} + \rho',$$

wo die Zahl ρ' angibt, wie viele unter den Produkten $1.m$, $2.m, \ldots, \frac{m-1}{4}.m$ volle Quadrate sind, oder was dasselbe ist, wie viele unter den Quadraten $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ durch m aufgehen. Diese Zahl ist aber gleich der Hälfte derjenigen Zahl, welche oben mit ρ bezeichnet und gleich $a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ gefunden worden ist, indem zu jeder zwischen 1 und $\frac{m-1}{2}$ liegenden Zahl λ, deren Quadrat durch m aufgeht, eine zwischen $\frac{m+1}{2}$ und $m-1$ liegende Zahl $m-\lambda$ gehört, deren Quadrat ebenfalls durch m aufgeht und umgekehrt. Denn (cf. DIRICHLET, *Zahlentheorie*, p. 76) wenn r irgend eine ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$(m-r)^2 = m^2 - 2rm + r^2 \equiv r^2 \pmod{m}.$$

Hieraus folgt aber weiter, dass die Quadrate $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2, \left(\frac{m+3}{2}\right)^2, \ldots, (m-1)^2$

dieselben Reste nach dem Modul m liefern, wie die Quadrate $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Jetzt braucht man sich blos der pag. 42 angestellten Betrachtungen zu erinnern, um zu erkennen, dass die Gleichung besteht

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} s^2 = m\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m(m-1)}{4} - \frac{m\rho}{4},$$

und da die linke Seite den Wert $\frac{m(m-1)(m+1)}{24}$ hat, so folgt

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-5)}{24} + \frac{\rho}{4},$$

folglich durch Anwendung von (14)

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{m^2-1}{24} + \frac{\rho}{4}.$$

$\rho = a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ ist durch 4 teilbar; es verschwindet, sobald die verschiedenen in m enthaltenen Primfaktoren alle nur in der ersten Potenz erscheinen. Für solche Zahlen, welche dieser Bedingung genügen, gelten also dieselben Relationen, die oben für Primzahlen von der Form $4n+1$ angegeben wurden, nämlich

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-5)}{24}, \tag{15}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-5}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(m-5)}{12}. \tag{16}$$

Hierin liegt die Erklärung für die von Bouniakowsky (a. a. O. p. 265) beobachtete Thatsache dass die Gleichung (16) für $m = 25$ nicht richtig ist, wohl aber für $m = 65$. Für $m = 65$ ist eben $\rho = 0$, so dass

$$\sum_{s=1}^{s=15}[\sqrt{65\,s}] = \frac{64 \cdot 60}{12} = 320$$

ist, während für $m = 25$ die Zahl ρ den Wert 4 hat, so dass

$$\sum_{s=1}^{s=5} [\sqrt{25\,s}] = \frac{24 \cdot 20}{12} + 1 = 41$$

wird.

Die obere Grenze der Summation möge jetzt bis zu einem Vielfachen von m ausgedehnt werden. Für zwei beliebige positive ganze Zahlen m und k gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=km} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=k^2 m} [\sqrt{sm}] = k^3 m^2 + \rho'',$$

wo ρ'' angibt, wie viele unter den Brüchen $\frac{1^2}{m}, \frac{2^2}{m}, \frac{3^2}{m}, \ldots, \frac{k^2 m^2}{m}$ ganze Zahlen sind. Es mögen nun sämtliche in $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ enthaltenen Primfaktoren die Form $4n + 1$ haben. Dann ist

$$\rho'' = k(\rho + 1) = k a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots .$$

Denn es sind zunächst die k Quadrate m^2, $(2m)^2$, $(3m^2)$, $\ldots$, $(km)^2$ durch m teilbar; ferner ist die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m - 1$, deren Quadrate durch m aufgehen, gleich ρ; es liegen aber zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Vielfachen von m (mit Ausschluss beider Grenzen) ebenfalls ρ Zahlen deren Quadrate durch m teilbar sind, wie aus der Gleichung hervorgeht

$$(\mu m + r)^2 = \mu^2 m^2 + 2\mu m r + r^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass ρ'' in der That den Wert $k(\rho + 1)$ hat. Bildet man nun die Gleichungen

$$1^2 = \left[\frac{1^2}{m}\right] m + r_1,$$

$$2^2 = \left[\frac{2^2}{m}\right] m + r_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$k^2 m^2 = \left[\frac{k^2 m^2}{m}\right] m + r_{km}$$

und addiert, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=km} s^2 = m\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=km} r_s.$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=km} s^2 = \frac{km(km+1)(2km+1)}{6},$$

$$\sum_{s=1}^{s=km} r_s = k\sum_{s=1}^{s=m} r_s = k\frac{m(m-1)}{2} - k\frac{m\rho}{2},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{k(m+1)(2km+1)}{6} - \frac{k(m-1)}{2} + \frac{k\rho}{2},$$

und vermöge (17) nach einfacher Rechnung

$$\sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = \frac{k}{6}[4k^2m^2 - 3m(k-1) + 2] + \frac{k\rho}{2}.$$

Fügt man zu den bisherigen Bedingungen noch die neue hinzu, dass alle in m enthaltenen Primfaktoren von einander verschieden seien, so verschwindet ρ, und es ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = \frac{k}{6}[4k^2m^2 - 3m(k-1) + 2],$$

welche Bouniakowsky für den Fall abgeleitet hat, dass m eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Ausdrücke $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}]$, $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[a]{s}]$ zu berechnen, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist. Setzt man $[\sqrt{n}] = m$, so gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}] + \sum_{s=1}^{s=m}[s^2] = mn + m,$$

da sämtliche m Glieder der zweiten Summe auch nach Weglassung der eckigen Klammern ihren ganzzahligen Wert behalten. Nun hat das zweite Glied der linken Seite den Wert $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, es ist also

$$(18)\qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}] = m(n+1) - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Ebenso folgt, wenn man $[\sqrt[3]{n}] = m$ setzt, aus den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{s}] + \sum_{s=1}^{s=m} s^3 = mn + m,$$

$$\sum_{s=1}^{s=m} s^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

die Richtigkeit der Formel

$$(19)\qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{s}] = m(n+1) - \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Da für einen beliebigen positiven ganzen Exponenten α die Gleichung besteht

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{s}] + \sum_{s=1}^{s=m} s^\alpha = mn + m,$$

wo $m = [\sqrt[\alpha]{n}]$ ist, und da sich $\sum_{s=1}^{s=m} s^\alpha$ vermittelst der EULER'schen Summenformel ausdrücken lässt, so leuchtet ein, dass man in ganz derselben Weise die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{s}]$ berechnen kann.

Die Formeln (18) und (19) unterscheiden sich nur der Form nach von den entsprechenden von BOUNIAKOWSKY aufgestellten Gleichungen (Bulletin de l'acad. imp. de S:t Pétersbourg, tome 29, p. 252 und 270).

Ebenso wie die Summe

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n}]$$

lassen sich auch die Summen

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{2n-1}]$$

und

$$[\sqrt{2}] + [\sqrt{4}] + [\sqrt{6}] + \dots + [\sqrt{2n}]$$

auf eine einfache Weise darstellen. Setzt man $[\sqrt{2n-1}] = m$, so ist

$$\sum_{s=2}^{s=n}[\sqrt{2s-1}] + \sum_{s=2}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right] = -1 + mn + \left[\frac{m-1}{2}\right],$$

weil unter den vorkommenden Werten von $\frac{s^2+1}{2}$ sich $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ ganze Zahlen befinden. Fügt man auf beiden Seiten zwei Einheiten hinzu, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}] + \sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right] = mn + \left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{m(m+1)(2m+1)}{12},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] - \frac{m(m+1)(2m+1)}{12}. \tag{20}$$

Zur Berechnung der Summe $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]$ schlagen wir den nämlichen Weg ein. Setzt man $[\sqrt{2n}] = m$, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}] + \sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2}{2}\right] = mn + \left[\frac{m}{2}\right],$$

weil unter den Quadraten $1^2, 2^2, \ldots, m^2$ sich $\left[\frac{m}{2}\right]$ gerade Zahlen befinden. Es ist aber

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{12} - \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Demnach ist

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}] = mn + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] - \frac{m(m+1)(2m+1)}{12}. \tag{21}$$

Die den Formeln (20) und (21) entsprechenden Darstellungen der Summen $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}]$ und $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]$, finden sich bei Bouniakowsky (a. a. O. p. 260 sqq.)

Auf demselben Wege, auf dem die Formeln (20) und (21) gewonnen wurden, gelangt man zu den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

$$m = [\sqrt[3]{2n-1}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{2s}] = mn + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

$$m = [\sqrt[3]{2n}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^{\alpha},$$

$$m = [\sqrt[\alpha]{2n-1}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{2s}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^{\alpha},$$

$$m = [\sqrt[\alpha]{2n}].$$