Acta Math., 168 (1992), 249–272

Sur l'application de Wahl des courbes satisfaisant la condition de Brill–Noether–Petri

par

CLAIRE VOISIN

Université de Paris-Sud
Orsay, France

§ 0. Introduction

Ce travail était motivé initialement par la lecture de [15] et la remarque que les courbes contenues dans une surface K3 S, telle que $\operatorname{Pic} S$ est engendré par la classe de C, possèdent des fibrés vectoriels de rang 2, stables, de déterminant égal à K_C, et exceptionnels par leur nombre de sections. Par exemple, si g est pair, $g=2s$, le théorème 3 de [15] entraîne :

0.1. THÉORÈME. *Il existe sur une telle surface* K3 S *un fibré* E *de rang* 2 *stable, tel que* $\det E=\mathcal{O}_S(C)$, $c_2(E)=s+1$, $h^0(E)=s+2$.

Utilisant les techniques de [10], [17], il est facile de voir que si $C\subset S$ est générique, C a un nombre fini de $g^1_{s+1}|L|$, sans points fixes, et que pour chacun d'eux $E|_C$ peut s'écrire comme une extension : $0\to L\to E|_C\to K_C-L\to 0$, telle que $h^0(E_C)=h^0(L)+h^0(K_C-L)$. Cette extension ne peut pas être scindée (puisqu'il y a plusieurs g^1_{s+1} sur C), et fournit une classe $e\in H^1(2L-K_C)$ envoyée sur 0 dans le groupe $\operatorname{Hom}(H^0(K_C-L),H^1(L))$.

0.2. L'existence d'une telle classe est donc une condition nécessaire pour que C soit contenue dans une surface K3 S, avec $\operatorname{Pic} S=C$. On a évidemment un critère analogue en genre impair. (Le rapporteur m'informe que cette observation a été également faite par Mukai, dans un travail non publié.)

Il est alors naturel de se demander si le critère 0.2 est impliqué par le critère de Wahl [18], [3] :

0.3. THÉORÈME. *Si C est contenue dans une surface* K3, *l'application de Wahl* Ψ_C *de C n'est pas surjective.*

(On rappelle (cf [5], [7]) que $\Psi_C\colon \Lambda^2H^0(K_C)\to H^0(K_C^{\otimes 3})$ peut se définir comme la restriction à $\Lambda^2 H^0(K_C)\subset\operatorname{Ker}(H^0(K_C)^{\otimes 2}\to H^0(K_C^{\otimes 2}))$ de la duale de l'application $(\Phi_{K_C})_*$: $H^1(T_C^{\otimes 2})\to H^1(T_C\otimes T\mathbf{P}^{g-1})$, où Φ_{K_C} est l'application canonique.)

Une réponse affirmative est fournie dans ce travail sous l'hypothèse que C est générique au sens de Brill–Noether–Petri (i.e. $\dim W_d^r(C)=\varrho(g,d,r)$ pour tout couple (d,r), et W_d^r est lisse en dehors de W_d^{r+1}), qui est naturelle au vu du résultat principal de [10]. Les résultats précis sont donnés en § 2 pour le cas du genre impair (proposition 2.2) et en § 3 pour le cas du genre pair (proposition 3.2). Ce dernier cas nécessite une hypothèse supplémentaire, qui est discutée en § 4. Dans ce paragraphe 3, consacré à l'étude du cas g pair, on obtient par ailleurs des informations précises sur le corang de l'appliation de Wahl (propositions 3.3 et 3.4).

Le paragraphe 4 est enfin consacré à la discussion du critère 0.2, dont on montre aisément qu'il est non-trivial pour g pair $\geqslant 10$, et g impair $\geqslant 13$, ce qui donne une autre démonstration du théorème principal de [5] :

0.4. Théorème. *L'application de Wahl Ψ_C est surjective pour C générique de genre $\geqslant 10$ ou impair $\geqslant 13$.*

0.5 *Rappels et notations*. Soit $C\subset\mathbf{P}^{g-1}$ une courbe plongée canoniquement; soit $\mathbf{P}^{g-1}\subset\mathbf{P}^g$ défini par l'équation linéaire $X=0$. Une courbe $C_2\subset\mathbf{P}^g$ est une extension infinitésimale de C si C_2 est un schéma de multiplicité deux supporté sur C, localement intersection complète, tel que C soit l'intersection schématique de C_2 et $\mathbf{P}^{g-1}$. La donnée d'une telle extension est équivalente à la donnée d'un élément u dans $U:=\operatorname{Ker}(H^1(T_C^{\otimes 2})\to H^1(T_C\otimes T\mathbf{P}^{g-1})$, qu'on obtient comme la classe d'extension associée à la suite exacte : $0\to K_C^{-1}\to\Omega_{C_2}\otimes\mathcal{O}_C\to K_C\to 0$, provenant de la suite exacte : $0\to K_C^{-1}\xrightarrow{X}\mathcal{O}_{C_2}\to\mathcal{O}_C\to 0$.

§1

1.0. On considère dans ce paragraphe la version infinitésimale de la construction décrite dans [10] :

Soit $C\subset\mathbf{P}^{g-1}$ une courbe plongée canoniquement, et soit $C_2\subset\mathbf{P}^g$ une extension de C correspondant à un élément $u\in U$. Soit L un fibré inversible sur C, tel que $h^0(L)=2$, et L est engendré par ses sections globales. On définit un faisceau cohérent $\tilde{F}_L$ sur C_2 par la suite exacte : $0\to\tilde{F}_L\to H^0(L)\otimes\mathcal{O}_{C_2}\to L\to 0$, et on pose : $\tilde{E}_L=\tilde{F}_L\otimes H$, où $H=\mathcal{O}_{C_2}(1)$, $F_L=\tilde{F}_L\otimes\mathcal{O}_C$, $E_L=\tilde{E}_L\otimes\mathcal{O}_C=F_L\otimes K_C$.

$\tilde{F}_L$ et $\tilde{E}_L$ ne sont pas localement libres sur C_2 mais on a :

1.1. Lemme. *E_L est localement libre de rang 2 sur C.*

Démonstration. Soit $c \in C$, et soit (s_1, s_2) une base de $H^0(L)$ telle que s_1 ne s'annule pas en c. s_1 trivialise localement L, et posant $\alpha = s_1/s_2$, fonction holomorphe sur C au voisinage de c, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to M & \longrightarrow & \mathcal{O}^2_{C_2} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_C \to 0 \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ 0 \to \tilde{F}_L & \to & H^0(L) \otimes \mathcal{O}_{C_2} & \to & L \to 0 \end{array}$$

où les deux derniers isomorphismes verticaux sont donnés respectivement par les bases (s_1, s_2) et s_1, et où, pour $(f, g) \in \mathcal{O}^2_{C_2}$, $\varphi(f, g) = f|_C + \alpha g|_C$. Choisissant une extension $\tilde{\alpha}$ de α à C_2, on obtient immédiatement un isomorphisme $\gamma : I_C \otimes \mathcal{O}_{C_2} \simeq M$, en posant : $\gamma(f_1, g_1) = (f_1 - \tilde{\alpha} g_1, g_1) \in \mathcal{O}^2_{C_2}$. Comme I_C est isomorphe comme $\mathcal{O}_{C_2}$-module à $\mathcal{O}_C(-H) = K_C^{-1}$, $I_C \otimes \mathcal{O}_C$ est localement libre de rang un sur C, ce qui montre le lemme.

Les lemmes suivants décrivent plus précisément le fibré E_L :

1.2. LEMME. (a) *E_L est naturellement donné comme une extension :*

$$0 \to L \to E_L \to K_C - L \to 0.$$

(b) *La classe d'extension correspondant à cette suite exacte est égale à $R_L \cdot u$ où u est défini en* 1.0 *et $R_L \in H^0(K_C + 2L)$ est la section (définie à un coefficient près) correspondant au diviseur de ramification de l'application $\Phi_L : C \to \mathbf{P}^1$, associée au pinceau $|L|$.*

Démonstration. (a) Complétant la suite exacte définissant $\tilde{F}_L$, on a le diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & H^0(L) \otimes K_C^{-1} & = & H^0(L) \otimes K_C^{-1} & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{F}_L & \longrightarrow & H^0(L) \otimes \mathcal{O}_{C_2} & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & -L & \longrightarrow & H^0(L) \otimes \mathcal{O}_C & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

On déduit de la première colonne la suite exacte :

$$\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_{C_2}}(-L,\mathcal{O}_C)\xrightarrow{i} H^0(L)\otimes K_C^{-1}\to \tilde{F}_L\otimes\mathcal{O}_C\xrightarrow{j} -L\to 0.$$

D'autre part, de la suite exacte : $0\to K_C^{-1}\to\mathcal{O}_{C_2}\to\mathcal{O}_C\to 0$, on déduit immédiatement $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_{C_2}}(\mathcal{O}_C,\mathcal{O}_C)=K_C^{-1}$, d'où $\mathrm{Tor}^1(-L,\mathcal{O}_C)=K_C^{-1}-L$.

Enfin, comme $\tilde{F}_L\otimes\mathcal{O}_C$ est libre de rang 2 par le lemme 1.1, $\mathrm{Ker}\, j$ est libre de rang 1 ce qui entraîne que i est une injection de fibrés vectoriels (sur C), et que $\mathrm{coker}\, i$ est isomorphe à $K_C^{-1}+L$, ce qui donne bien la suite exacte :

$$0\to K_C^{-1}+L\to F_L\to -L\to 0,$$

annoncée dans (a).

(b) On a la suite exacte : $0\to\tilde{F}_L\to H^0(L)\otimes\mathcal{O}_{C_2}\xrightarrow{\eta} L\to 0$; considérons le composé

$$\tilde{\nu}: H^0(L)\otimes\mathcal{O}_{C_2}\xrightarrow{d} H^0(L)\otimes\Omega_{C_2}\xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{Id}} L\otimes\Omega_{C_2};$$

il est facile de voir que la restriction de $\tilde{\nu}$ à $\tilde{F}_L$ est $\mathcal{O}_{C_2}$-linéaire et fournit donc, puisque $\Omega_{C_2}\otimes L$ est un $\mathcal{O}_C$-module, une application $\nu: F_L\to\Omega_{C_2}\otimes L$, $\mathcal{O}_C$-linéaire. De même, de la suite exacte :

$$0\to -L\to H^0(L)\otimes\mathcal{O}_C\xrightarrow{\eta_0} L\to 0,$$

on tire le composé

$$\nu_0: H^0(L)\otimes\mathcal{O}_C\xrightarrow{d} H^0(L)\otimes K_C\xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{Id}} K_C(L),$$

dont la restriction à $-L$ fournit une injection $\mathcal{O}_C$-linéaire $\nu_1\colon -L\to K_C+L$; il est facile de voir que ν_1 est la multiplication par R_L. D'autre part, il est clair par construction que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & K_C^{-1}+L & \longrightarrow & F_L & \longrightarrow & -L & \to 0\\
 & \| & & \nu\downarrow & & \downarrow\nu_1 & \\
0\to & K_C^{-1}+L & \to & \Omega_{C_2}\otimes L & \to & K_C+L & \to 0,
\end{array}$$

et cela fournit immédiatment le résultat puisque la classe d'extension correspondant à la seconde ligne est égale à u.

1.3. Lemme. *On a* $h^0(E_L)=h^0(L)+h^0(K_C-L)$.

Démonstration. On a la suite exacte de $\mathcal{O}_{C_2}$-modules

$$0 \to \tilde{E}_L \to H^0(L) \otimes H \to K_C + L \to 0$$

qui identifie $H^0(\tilde{E}_L)$ au noyau du produit $\tilde{\mu}: H^0(L) \otimes H^0(H) \to H^0(K_C+L)$. Notant μ le produit $H^0(L) \otimes H^0(K_C) \to H^0(K_C+L)$, on voit facilement qu'on a la suite exacte : $0 \to H^0(L) \xrightarrow{X} \operatorname{Ker} \tilde{\mu} \to \operatorname{Ker} \mu \to 0$. Enfin, la ruse du pinceau sant point fixe identifie $\operatorname{Ker} \mu$ à $H^0(K_C - L)$, ce qui donne : $h^0(\tilde{E}_L) = \dim \operatorname{Ker} \tilde{\mu} = h^0(L) + h^0(K_C - L)$. Par ailleurs, reprenant la démonstration de 1.2 (a), il est facile de voir que le noyau de la restriction $r : \tilde{E}_L \to E_L$ est isomorphe à $-L$, et donc r est injective au niveau des sections globales, ce qui entraîne : $h^0(E_L) \geq h^0(L) + h^0(K_C - L)$, tandis que la suite exacte établie en lemme 1.2 (a) donne l'inégalité inverse.

Le lemme précédent montre que la suite exacte de 1.2 (a) induit une suite exacte au niveau des sections globales, ce qui est intéressant dés qu'elle n'est pas scindée. Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite soit scindée :

1.4. LEMME. *La suite exacte $0 \to L \to E_L \to K_C - L \to 0$ est scindée si et seulement si il existe un fibré inversible L_2 sur C_2 tel que $L_2|_C = L$, et les restriction*

$$H^0(H \otimes L_2^{-1}) \to H^0(K_C - L), \quad H^0(L_2) \to H^0(L)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Supposons que la suite exacte est scindée et soit $s : E_L \to L$ une rétraction; considérons le composé $\tilde{s} : \tilde{E}_L \to E_L \xrightarrow{s} L$: il est facile de vérifier que le noyau M de $\tilde{s}$ est inversible sur C_2 : posons $L_2 = H \otimes M^{-1}$; on a le diagramme exact :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & -L & = & -L & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \tilde{E}_L & \xrightarrow{\tilde{s}} & L & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & K_C - L & \to & E_L & \xrightarrow{s} & L & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Ceci entraîne immédiatement $M \otimes \mathcal{O}_C = K_C - L$, et donc $L_2|_C = L$; d'autre part, de

$h^0(\tilde{E}_L)=h^0(L)+h^0(K_C-L)$, et de la suite exacte $0\to M\to\tilde{E}_L\xrightarrow{s}L\to 0$, on tire immédiatement : $h^0(M)\geq h^0(K_C-L)$; de la première colonne du diagramme ci-dessus, on tire par ailleurs l'inégalité inverse et l'isomorphisme $h^0(M)\geq H^0(K_C-L)$. Enfin il est facile de voir que le composé $M\to\tilde{E}_L\to H^0(L)\otimes H$ est une injection de fibrés vectoriels sur C_2, dont le quotient est isomorphe à $H\otimes L_2$; on a donc une application surjective $H^0(L)\otimes\mathcal{O}_{C_2}\to L_2$, qui donne $h^0(L_2)\geq 2$. Enfin comme $h^0(L)=2$, et que C est plongée canoniquement, on a certainement $h^0(K_C^{-1}+L)=0$, et donc la restriction $H^0(L_2)\to H^0(L)$ est injective, et donc un isomorphisme puisque $h^0(L)=2$.

Inversement, soit L_2 un fibré inversible sur C_2 tel que $L_2|_C=L$, et $H^0(L_2)\simeq H^0(L)$. Alors L_2 est engendré par ses sections globales et l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to L_2^{-1} & \to & H^0(L_2)\otimes\mathcal{O}_{C_2} & \to & L_2 & \to 0. \\ \downarrow & & \| & & \downarrow & \\ 0\to\tilde{F} & \longrightarrow & H^0(L)\otimes\mathcal{O}_{C_2} & \to & L & \to 0 \end{array}$$

On en déduit immédiatement une suite exacte : $0\to L_2^{-1}\to\tilde{F}_L\to K_C^{-1}+L\to 0$ d'où une application surjective : $F_L\to K_C^{-1}+L$; le fait que cette application donne bien un scindage de la suite exacte de 1.2(a) se vérifie localement à l'aide d'une trivialisation comme en 1.1.

§2

Dans la suite, on supposera que C satisfait la condition de Brill–Noether–Petri, c'est-à-dire que $W_d^r(C)$ est de dimension $g-(r+1)(g-d+r)$, et est lisse en dehors de $W_d^{r+1}(C)$.

2.1. Pour g impair, $g\geq 7$, $g=2s+1$, la condition de Brill–Noether–Petri entraîne que W_{s+2}^1 est une courbe lisse : de plus W_{s+1}^1 et W_{s+2}^2 sont vides, et donc tout élément L de W_{s+2}^1 satisfait : $h^0(L)=2$, et L est engendré par ses sections globales. Soit maintenant $u\in U\subset H^1(T_C^{\otimes 2})$: d'après le § 1, la donnée de u permet d'associer à chaque $L\in W_{s+2}^1$ une classe $e_L^u\in H^1(K_C^{-1}+2L)$, définie à un coefficient près par $e_L^u=R_L\cdot u$, et envoyée sur 0 dans $\mathrm{Hom}(H^0(K_C-L),H^1(L))$. On a alors la proposition suivante :

2.2. Proposition. *Si $e_L^u=0$ pour L générique dans W_{s+2}^1, alors $u=0$.*

Démonstration. On va réécrire d'une manière un peu différente le lemme 1.4 et se ramener à la théorie de Brill–Noether classique.

Soit B un élément générique de $|K_C^{\otimes 2}|$ et soit $\tilde{C}\xrightarrow{r}C$ le revêtement double de C ramifié le long de B et tel que $r_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}\simeq\mathcal{O}_C\oplus K_C^{-1}$. On a : $K_{\tilde{C}}=r^*(K_C^{\otimes 2})$ et donc

$H^1(T_{\tilde{C}}) \simeq H^1(T_C^{\otimes 2}) \oplus H^1(T_C^{\otimes 3})$, où le premier facteur est anti-invariant pour l'involution naturelle agissant sur $H^1(T_{\tilde{C}})$ et correspond aux déformations de $\tilde{C}$ qui ne préservent pas l'involution de $\tilde{C}$ au-dessus de C. Le vecteur $u \in H^1(T_C^{\otimes 2})$ définit donc un élément $u \in H^1(T_{\tilde{C}})$ anti-invariant; la variation infinitésimale de structure de Hodge de $\tilde{C}$ injecte $H^1(T_{\tilde{C}})$ dans $\mathrm{Hom}(H^0(K_{\tilde{C}}), H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}))$, et le sous-espace $H^1(T_C^{\otimes 2})$ dans

$$\mathrm{Hom}(H^0(K_C^{\otimes 2}), H^1(\mathcal{O}_C)) \oplus \mathrm{Hom}(H^0(K_C), H^1(K_C^{-1})),$$

ce qui composé avec la projection sur le premier facteur donne encore l'injection : $H^1(T_C^{\otimes 2}) \to \mathrm{Hom}(H^0(K_C^{\otimes 2}), H^1(\mathcal{O}_C))$, qu'on peut interpréter comme l'application $H^1(T_{\tilde{C}})^- \to \mathrm{Hom}(H^0(K_{\tilde{C}})^-, H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})^+)$, les symboles + et − désignant les espaces invariants et antiinvariants respectivement pour l'action naturelle de l'involution sur chacun des espaces considérés.

Il suffit donc de montrer que u va sur 0 dans $\mathrm{Hom}(H^0(K_{\tilde{C}})^-, H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})^+)$, sous l'hypothèse de la proposition.

Considérons la courbe $r^*W^1_{s+2} \subset J^{2s+4}(\tilde{C})$. On a les lemmes suivants :

2.3. Lemme. *$r^*W^1_{s+2}$ est une composante connexe lisse de $W^1_{2s+4}(\tilde{C})$.*

2.4. Lemme (cf. Lemme 1.4). *Si u satisfait la condition de la proposition, la déformation u de $\tilde{C}$ induit une déformation de $J^{2s+4}(\tilde{C})$ qui préserve la sous-variété $r^*W^1_{s+2}$.*

2.5. *Démonstration du lemme* 2.3. Soit $L \in W^1_{s+2}(C)$; on a $h^0(r^*L)=2$ car $h^0(L \otimes K_C^{-1})=0$ par raison de degré. Comme $r^*W^1_{s+2}$ est de dimension un et contenu dans $W^1_{2s+4}(\tilde{C})$ il suffit de vérifier que le corang de l'application

$$\mu_0(r^*L): H^0(r^*L) \otimes H^0(K_{\tilde{C}} - r^*L) \to H^0(K_{\tilde{C}})$$

est égal à un, puisque son image est l'orthogonal de l'espace tangent de Zariski à $W^1_{2s+4}(\tilde{C})$ au point r^*L (cf. [1]). Mais de $K_{\tilde{C}} = r^*K_C^{\otimes 2}$, on tire les décompositions :

$$H^0(K_{\tilde{C}}) = H^0(K_C) \oplus H^0(K_C^{\otimes 2}) \quad \text{et} \quad H^0(K_{\tilde{C}} - r^*L) = H^0(K_C - L) \oplus H^0(K_C^{\otimes 2} - L),$$

et $\mu_0(r^*L)$ s'identifie alors à la somme directe des applications

$$\mu_0(L): H^0(L) \otimes H^0(K_C - L) \to H^0(K_C) \quad \text{et} \quad \mu_0^2(L): H^0(L) \otimes H^0(K_C^{\otimes 2} - L) \to H^0(K_C^{\otimes 2}).$$

La première application est de corang un, puisque $W^1_{s+2}(C)$ est lisse de dimension un, et la seconde est surjective, car comme L est sans point fixe, son conoyau s'injecte dans $H^1(K_C^{\otimes 2} - 2L)$, qui est nul par raison de degré, et parce que $g \geq 7$.

2.6. *Démonstration du lemme* 2.4. L'hypothèse $e_L^u=0$ pour L générique entraîne $e_L^u=0$ pour tout L, car $h^1(K_C^- + 2L)$ est constant, si $g\geq 7$. Soit $\pi : \tilde{J}_\varepsilon^{2s+4} \to \Delta_\varepsilon$ la déformation de $\tilde{J}^{2s+4}$ induite par u, où $\Delta_\varepsilon := \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\varepsilon]/\varepsilon^2$. Considérons le sous-schéma $\tilde{W}^1_{2s+4,\varepsilon} \subset \tilde{J}_\varepsilon^{2s+4}$, représentant le foncteur qui à un schéma $S \xrightarrow{\varphi} \Delta_\varepsilon$ associe l'ensemble des faisceaux inversibles $\tilde{L}_\varepsilon^\varphi$ sur la courbe $\tilde{C}_\varepsilon \times_{\Delta_\varepsilon} S$, dont la restriction à $\tilde{C}$ est un élément de $W^1_{2s+4}(\tilde{C})$, dont au moins deux sections s'étendent en des sections de $\tilde{L}_\varepsilon^\varphi$. Son intersection avec la fibre centrale $\tilde{J}^{2s+4}$ a pour composante connexe lisse la courbe $r^* W^1_{s+2}$, et il suffit de voir que la différentielle $\pi_* : T\,\tilde{W}^1_{2s+4,\varepsilon} \to T\,\Delta_\varepsilon$ est surjective en chaque point r^*L de $r^*W^1_{s+2}$.

Or la théorie de Brill–Noether dit que cela est le cas si et seulement si le vecteur $u \in H^1(T_{\tilde{C}})$ est orthogonal à l'image de $\mu_1(r^*L) : \operatorname{Ker} \mu_0(r^*L) \to H^0(K_{\tilde{C}}^{\otimes 2})$ (cf. [4], p. 163). On a $H^0(K_{\tilde{C}}^{\otimes 2}) = H^0(K_C^{\otimes 3}) \oplus H^0(K_C^{\otimes 4})$, et bien sûr u est orthogonal au second facteur. Enfin, reprenant les notations introduites en 2.5, on a :

$$\operatorname{Ker} \mu_0(r^*L) = \operatorname{Ker} \mu_0^2(r^*L) = H^0(K_C^{\otimes 2} - 2L),$$

et il est facile de voir que la première composante de $\mu_1(r^*L) : H^0(K_C^{\otimes 2} - 2L) \to H^0(K_C^{\otimes 3})$ s'identifie alors au produit par R_L. L'hypothèse $R_L \cdot u = 0$ dans $H^1(K_C^{-1} + 2L)$ se dualise finalement en : u est orthogonal à $R_L \cdot H^0(K_C^{\otimes 2} - 2L)$, soit par ce qui précède $u \in (\operatorname{Im} \mu_1(r^*L))^\perp$, ce qui achève la preuve du lemme 2.4.

2.7. *Fin de la preuve de la proposition* 2.2. On veut montrer que $u \in H^1(T_{\tilde{C}})$ va sur 0 dans $\operatorname{Hom}(H^0(K_C^{\otimes 2}), H^1(\mathcal{O}_C))$. Or le composé $\alpha : H^0(K_C^{\otimes 2}) \to H^0(K_{\tilde{C}}) \to H^0(\Omega_{\tilde{J}^{2s+4}})$ identifie $(H^0(K_C^{\otimes 2})$ à $\operatorname{Ker} j^* : H^0(\Omega_{\tilde{J}^{2s+4}}) \to H^0(\Omega_{r^*W^1_{s+2}})$ du fait que la courbe W^1_{s+2} engendre $J^{s+2}(C)$; pour la même raison, le composé $j^* \circ \beta$:

$$\underbrace{H^1(\mathcal{O}_C) \to H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})}_{\beta} \simeq H^1(\mathcal{O}_{\tilde{J}^{2s+4}}) \xrightarrow{j^*} H^1(\mathcal{O}_{r^*W^1_{s+2}})$$

est injectif; soit $v \in H^1(T\tilde{J}^{2s+4})$ la déformation infinitésimale de $\tilde{J}^{2s+4}$ induite par u; par le lemme 2.4, la restriction de v à $r^*W^1_{s+2}$ provient d'un élément w de $H^1(T_{r^*W^1_{s+2}})$ et l'on a alors la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
u : H^0(K_C^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_C) \\
{\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow \\
v : H^0(\Omega_{\tilde{J}^{2s+4}}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{\tilde{J}^{2s+4}}) \\
{\scriptstyle j^*}\downarrow & & {\scriptstyle j^*}\downarrow \\
w : H^0(\Omega_{r^*W^1_{s+2}}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{r^*W^1_{s+2}}).
\end{array}$$

Comme par ce qui précède $j^* \circ \alpha = 0$ et $j^* \circ \beta$ est injectif, la nullité de la première application en résulte immédiatement.

Dualisant la proposition 2.2, on obtient le corollaire suivant :

2.8. COROLLAIRE. *Soit C une courbe satisfaisant la condition de Brill–Noether–Petri, de genre $g = 2s+1 \geqslant 7$. Si l'application de Wahl de C est non surjective, l'application $\mu_L : H^0(K_C - L)^{\otimes 2} \to H^0(K_C^{\otimes 2} - 2L)$ est non surjective, pour tout $K \in W^1_{s+2}(C)$.*

2.9. On a $\dim H^0(K_C - L) = s$, et $\dim H^0(K_C - 2L) = 2g - 6$, pour $L \in W^1_{s+2}(C)$ et $g = 2s+1$. On peut donc s'attendre à la surjectivité de μ_L, pour un couple (C, L) satisfaisant ces conditions, dès que $s(s+1)/2 \geqslant 4s - 4$, soit $s \geqslant 6$ et $g \geqslant 13$. En § 4, on montrera en effet la surjectivité de μ_L pour un couple (C, L) générique comme en 2.2 et pour $g \geqslant 13$. On en déduit une autre preuve du théorème de [5] :

2.10. THÉORÈME. *Soit C une courbe générique de genre impair $\geqslant 13$. Alors l'application de Wahl de C est surjective.*

§ 3

3.0. Dans ce paragraphe, C est une courbe de genre $g = 2s \geqslant 10$ satisfaisant la condition de Brill–Noether–Petri. C possède alors un nombre fini de g^1_{s+1}, complets et sans points fixes. Pour chaque $L \in W^1_{s+1}$, la lissité de W^1_{s+1} en L signifie exactement que la multiplication $\mu_0(L) : H^0(L) \otimes H^0(K_C - L) \to H^0(K_C)$ est un isomorphisme.

3.1. On fera les hypothèses supplémentaires suivantes sur C :

(i) Pour $L \neq L'$ dans W^1_{s+1} on a $h^0(L + L') = 4$.

(ii) L'image de C dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ par l'application $(\Phi_L, \Phi_{L'})$ associée aux pinceaux $|L|$ et $|L'|$ est une courbe nodale. (Comme C satisfait la condition de Brill–Noether–Petri, cette application est de degré un sur son image.)

(iii) Pour L, L', L'' trois éléments distincts de $W^1_{s+1}(C)$, l'application naturelle : $H^0(2L) \otimes H^0(2L') \otimes H^0(2L'') \to H^0(2L + 2L' + 2L'')$ est injective.

On montrera en § 4 que ces hypothèses sont satisfaites par une courbe générique. Elles ne sont peut-être pas nécessaires pour la suite, mais elles permettent une démonstration simple des propositions suivantes :

3.2. PROPOSITION. *Soit C une courbe de genre pair $\geqslant 10$ satisfaisant la condition de Brill–Noether–Petri et les hypothèses 3.1. Si l'application de Wahl Ψ_C n'est* *pas surjective, alors pour tout* $L \in W^1_{s+1}(C)$ *l'application produit* $\mu_L : H^0(K_C - L)^{\otimes 2} \to H^0(K_C^{\otimes 2} - 2L)$ *n'est pas surjective.*

Une étude un peu plus précise de l'application μ_L et la méthode utilisée pour montrer 3.2 permettent également de donner la majoration suivante du corang de l'application de Wahl.

3.3. PROPOSITION. *Sous les mêmes hypothèses, on a pour* $L, L' \in W^1_{s+1}(C)$, $\operatorname{corang} \mu_L = \operatorname{corang} \mu_{L'} \leq 1$, *et le* corang *de l'application de Wahl* Ψ_C *est* ≤ 3.

Ces propositions sont des conséquences de la proposition suivante :

3.4. PROPOSITION. *Notons, pour* $L \in W^1_{s+1}(C)$.

$$U_L = \operatorname{Ker}(H^1(K_C^{-1} + 2L) \to \operatorname{Hom}(H^0(K_C - L), H^1(L)).$$

Alors, pour L, L', L'' *distincts dans* $W^1_{s+1}(C)$, *l'application (déduite de* § 1) $\alpha : U \to U_L \times U_{L'} \times U_{L''}$, *qui à* $u \in U$ *associe le couple* $\alpha(u) = (R_L \cdot u, R_{L'} \cdot u, R_{L''} \cdot u)$ *est injective.*

3.5. On peut réinterpréter géométriquement la proposition 3.4 de la façon suivante, à l'aide du lemme 1.4. Soit $C_2 \subset \mathbf{P}^g$ une extension infinitésimale de C, correspondant à $u \in U$. La condition $R_L \cdot u = 0$ signifie d'après le lemme 1.4 qu'il existe un fibré inversible L_2 sur C_2, tel que $L_2|_C = L$, et $h^0(L_2) = 2$, $h^0(H \otimes L_2^{-1}) = s$. Considérons la multiplication $\mu_0(L_2) : H^0(L_2) \otimes H^0(H \otimes L_2^{-1}) \to H^0(H)$; elle est injective, puisque sa restriction à C est l'isomorphisme $\mu_0(L)$ de 3.0. Son image est donc un hyperplan $H_L \subset H^0(H)$, isomorphe à $H^0(K_C)$ par la restriction, qui définit donc un point $O_L \in \mathbf{P}^g$, tel que $O_L \notin \mathbf{P}^{g-1}$.

L'isomorphisme $\mu_0(L) : H^0(L) \otimes H^0(K_C - L) \simeq H^0(K_C)$ fournit par ailleurs le plongement de Segre $K_L \subset \mathbf{P}^{g-1}$, où $K_L := \mathbf{P}(H^0(L)^\vee) \times \mathbf{P}(H^0(K_C - L)^\vee)$, et l'on voit facilement que ce qui précède se traduit par : C_2 est contenue dans le cône sur K_L de sommet O_L.

La proposition 3.4 admet donc la formulation suivante :

3.4′. PROPOSITION. *S'il existe des points* $O_L, O_{L'}, O_{L''}$ *dans* $\mathbf{P}^g \setminus \mathbf{P}^{g-1}$, *tels que* C_2 *soit contenue dans les cônes sur* K_M *de sommet* O_M *pour* $M = L, L', L''$ *alors* C_2 *est contenue dans un cône sur* C.

Avant de prouver la proposition (3.4)′, nous allons décrire la géometrie des variétés K_L et de leurs intersections dans les lemmes 3.6–3.9.

3.6. LEMME. *Pour* $L \neq L' \in W^1_{s+1}$, *l'intersection* $K_L \cap K_{L'}$ *est une surface lisse* $\Sigma_{L,L'}$

isomorphe à l'éclatement de $Q_{L,L'}:=\mathbf{P}(H^0(L)^\vee)\times\mathbf{P}(H^0(L')^\vee)$ *le long de* $B_{L,L'}$, *lieu singulier de la courbe* $\Phi_L\times\Phi_{L'}(C)\subset Q_{L,L'}$.

Démonstration. On se contentera d'établir le lemme du point de vue ensembliste pour ne pas alourdir le texte. Notons $\pi:\Sigma_{L,L'}\to Q_{L,L'}$ le produit des restrictions des premières projections $K_L\to\mathbf{P}(H^0(L)^\vee)$ et $K_{L'}\to\mathbf{P}(H^0(L')^\vee)$ à $\Sigma_{L,L'}:=K_L\cap K_{L'}$. Soit (t,t') un point de $Q_{L,L'}$ et soit $s\in H^0(L)$, $s'\in H^0(L')$, des équations définissant respectivement t et t'; il est facile de voir que la fibre de π au-dessus de (t,t') s'identifie à l'intersection des deux espaces projectifs $\mathbf{P}_t^{s-1}\subset\mathbf{P}^{g-1}$ et $\mathbf{P}_{t'}^{s-1}\subset\mathbf{P}^{g-1}$ définis respectivement par les sous-espaces $s\cdot H^0(K_C-L)$, $s'\cdot H^0(K_C-L')$ de $H^0(K_C)$. Le lemme 3.6 résulte alors du sous-lemme suivant :

3.7. SOUS-LEMME. *Avec* t, t', s, s' *comme ci-dessus on a :*

(i) *Si* s *et* s' *n'ont pas de zéro commun sur* C, $\mathbf{P}_t^{s-1}\cap\mathbf{P}_{t'}^{s-1}$ *est constitué d'un point.*

(ii) *On a la même conclusion si* s *et* s' *ont un seul zéro commun sur* C.

(iii) *Si* s *et* s' *s'annulent sur un diviseur de degré deux de* C (*i.e.* (t,t') *est un point double de* $\Phi_L\times\Phi_{L'}(C)$), *l'intersection* $\mathbf{P}_t^{s-1}\cap\mathbf{P}_{t'}^{s-1}$ *est une droite.*

Notons que (i), (ii) et (iii) épuisent toutes les possibilités par l'hypothèse 3.1(ii).

Démonstration. (i) $\mathbf{P}_t^{s-1}\cap\mathbf{P}_{t'}^{s-1}$ est défini par le sous-espace linéaire $s\cdot H^0(K_C-L)+s'\cdot H^0(K_C-L')$ de $H^0(K_C)$; si s et s' n'ont pas de zéro commun sur C, on a la suite exacte :

$$0\to K_C-L-L'\to K_C-L\otimes K_C-L'\xrightarrow{(s,s')}K_C\to 0.$$

On a donc : $\dim(s\cdot H^0(K_C-L)+s'\cdot H^0(K_C-L')=2s-h^0(K_C-L-L')$. Mais l'hypothèse 3.1(i) entraîne $h^0(K_C-L-L')=1$, et donc $2s-h^0(K_C-L-L')=2s-1=g-1$, ce qui prouve (i).

(ii) De même si s et s' ont un seul zéro commun $c\in C$, la suite exacte précédente devient :

$$0\to K_C-L-L'+c\to K_C-L\otimes K_C-L'\xrightarrow{(s,s')}K_C-c\to 0$$

et l'on trouve $\dim((s\cdot H^0(K_C-L)+s'\cdot H^0(K_C-L'))=2s-h^0(K_C-L-L'+c)$; mais de $h^0(L+L')=4$ et $|L+L'|$ sans point fixe, on tire $h^0(L+L'-c)=3$ et $h^0(K_C-L-L'+c)=1$, ce qui entraîne (ii).

(iii) Enfin si s et s' s'annulent sur un diviseur D de degré 2 de C, on a

$h^0(L+L'-D)=3$, d'où $h^0(K_C-L-L'+D)=2$, et cela entraîne comme ci-dessus que $\dim(s\cdot H^0(K_C-L)+s'\cdot H^0(K_C-L'))=2s-2=g-2$, prouvant (iii).

3.8. *Remarque.* Il est facile de voir que l'éclatement de $Q_{L,L'}$ le long de $B_{L,L'}$ est envoyé sur $\Sigma_{L,L'}\subset\mathbf{P}^{g-1}$ par le système linéaire : $\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s-1))\otimes\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s-1))(-E)$, où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement et les π_i sont les deux projections correspondant à l'isomorphisme de 3.6 : $Q_{L,L'}\simeq\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ (c'est-à-dire les deux composantes de π).

Toujours sous les hypothèses 3.1 (i) et (ii), on étudie maintenant les cônes $\tilde{K}_L$ sur K_L de sommet $O_L\in\mathbf{P}^g\setminus\mathbf{P}^{g-1}$ et leurs intersections. Soient $O_L, O_{L'}$ deux points distincts et soit $x\in\mathbf{P}^{g-1}$ le point d'intersection de la droite $\langle O_L, O_{L'}\rangle$ et de l'hyperplan $\mathbf{P}^{g-1}\subset\mathbf{P}^g$. On notera $Z_{L,L'}$ le diviseur de l'unique section de K_C-L-L' (hyp. 3.1(i)), et $\langle Z_{L,L'}\rangle$ le sous-espace projectif de $\mathbf{P}^{g-1}$ engendré par $Z_{L,L'}$. On a les lemmes suivants :

3.9. LEMME. *Si $x\notin\langle Z_{L,L'}\rangle$, la surface $\Sigma_{L,L'}$ de* 3.6 *est une composante réduite de l'intersection $\tilde{K}_L\cap\tilde{K}_{L'}$, et c'est la seule composante de $\tilde{K}_L\cap\tilde{K}_{L'}$ qui contient C.*

Démonstration. Il suffit de montrer que génériquement le long de C, les espaces tangents de $\tilde{K}_L$ et $\tilde{K}_{L'}$ ont pour intersection l'espace tangent $T\Sigma_{L,L'}$ de $\Sigma_{L,L'}$. Or on a pour $c\in C, (T\tilde{K}_L)_c=\langle(TK_L)_c, O_L\rangle$ et $(T\tilde{K}_{L'})_c=\langle(TK_{L'})_c, O_{L'}\rangle$; il est facile de voir que $(T\tilde{K}_L)_c\cap(T\tilde{K}_L)_c=(TK_L)_c\cap(TK_{L'})_c$ si et seulement si le point x n'appartient pas à l'espace $\langle(TK_L)_c,(TK_{L'})_c\rangle$; or on montre aisément que ce dernier espace est un hyperplan de $\mathbf{P}^{g-1}$, contenant $Z_{L,L'}$ (précisément défini par la section $s_c\cdot s'_c\cdot\varphi_{L,L'}$, où s_c (resp. s'_c) est la section de L (resp. L') qui s'annule en c, et $\varphi_{L,L'}$ est la section de K_C-L-L') et que l'intersection de ces hyperplans, lorsque c parcourt C, est égale $\langle Z_{L,L'}\rangle$. Ceci entraîne immédiatement le lemme.

3.10. LEMME. *Si $x\in\langle Z_{L,L'}\rangle$, l'intersection $X=\tilde{K}_L\cap\tilde{K}_{L'}$ a une seule composante X_0 de dimension trois et ses autres composantes sont ponctuelles et ne rencontrent pas* $\mathbf{P}^{g-1}$.

Démonstration. Notons $\tilde{\pi}: X\to Q_{L,L'}=\mathbf{P}(H^0(L)\check{\ })\times\mathbf{P}(H^0(L')\check{\ })$, l'application rationelle définie en dehors des points $O_L, O_{L'}$ (qui sont éventuellement sur X) dont les composantes $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ sont définies comme les composés :

$$\tilde{\pi}_1: X\xrightarrow{\pi_{O_L}} K_L\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}\mathbf{P}(H^0(L)\check{\ }),$$

(où π_{O_L} est la projection depuis O_L et pr_1 la première projection (cf. 3.5)), et

$$\tilde{\pi}_2 : X \xrightarrow{\pi_{O_{L'}}} K_{L'} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathbf{P}(H^0(L')^\check{}).$$

La fibre de $\tilde{\pi}$ au-dessus de $(t,t') \in Q_{L,L'}$ est l'intersection $\tilde{\mathbf{P}}_t^{s-1} \cap \tilde{\mathbf{P}}_{t'}^{s-1}$, où $\tilde{\mathbf{P}}_t^{s-1} = \langle \mathbf{P}_t^{s-1}, O_L \rangle, \tilde{P}_{t'}^{s-1} = \langle \tilde{\mathbf{P}}_{t'}^{s-1}, O_L \rangle$, et $\mathbf{P}_t^{s-1}, \mathbf{P}_{t'}^{s-1}$ sont définis comme en 3.6. D'après 3.7, si (t,t') est générique, et $\mathbf{P}_{t'}^{s-1}$ se coupent en un point $y \in K_L \cap K_{L'}$, et donc engendrent un hyperplan de $\mathbf{P}^{g-1}$, qui doit s'identifier à l'hyperplan $\langle (TK_L)_y, (TK_{L'})_y \rangle$ (cf. 3.9). Ce dernier contient d'après 3.9 l'espace $\langle Z_{L,L'} \rangle$, et donc contient x. Il en résulte immédiatement que la fibre générique de $\tilde{\pi}$ est une droite, donc que X a une seule composante X_0 de dimension trois, qui domine $Q_{L,L'}$. Le reste résulte de ce que $X \cap \mathbf{P}^{g-1} = \Sigma_{L,L'}$ qui est une surface lisse d'après 3.6. On peut d'ailleurs préciser que X_0 est lisse au voisinage de $\Sigma_{L,L'}$ et donc a un nombre fini de points singuliers, non situés sur $\mathbf{P}^{g-1}$.

3.11. *Preuve de la proposition* (3.4)' : Supposons d'abord que $O_L = O_{L'} =: O$. Alors l'intersection des cônes $\tilde{K}_L$ et $\tilde{K}_{L'}$ est le cône sur la surface $\Sigma_{L,L'}$ de sommet 0. La projection depuis 0 envoie donc C_2 dans $\Sigma_{L,L'}$, et sa différentielle fournit une application $\mathcal{O}_C$-linéaire : $K_C \simeq N_C C_2 \to N_C \Sigma_{L,L'}$, ou encore une section de $K_{\Sigma_{L,L'}}^{-1}|_C$; or avec les notations de 3.8, on a :

$$K_{\Sigma_{L,L'}} = \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2))(E), \quad \text{avec} \quad (E \cdot C) = 2\,\mathrm{card}\,(B_{L,L'}) = 2s(s-2).$$

Il vient donc : $d^0(K_{\Sigma_{L,L'}}|_C) = 2(s^2-4s-2)$ qui est strictement positif dès que $s \geqslant 5$. Donc $h^0(K_{\Sigma_{L,L'}}^{-1}|_C) = 0$ et la projection de C_2 depuis 0 est en fait contenue dans C, ou encore C_2 est contenue dans le cône sur C de sommet 0; la proposition est donc prouvée dans ce cas.

(b) Raisonnant désormais par l'absurde, on peut donc supposer $O_L \neq O_{L'} \neq O_{L''}$; posons comme précédemment $x = \langle O_L, O_{L'} \rangle \cap \mathbf{P}^{g-1}$. Comme par hypothèse $C_2 \subset \tilde{K}_L \cap \tilde{K}_{L'}$ et n'est pas contenue dans $\mathbf{P}^{g-1}$, on déduit du lemme 3.9 que $x \in \langle Z_{L,L'} \rangle$; d'après le lemme 3.10, $\tilde{K}_L \cap \tilde{K}_{L'}$ a donc essentiellement une composante X_0 de dimension trois, lisse au voisinage de $\Sigma_{L,L'}$, et qui doit contenir C_2. Quitte à modifier X_0 en X_0' aux éventuels points O_L et $O_{L'}$, on a sur X_0' les deux fibrés inversibles $\tilde{\pi}_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))$ et $\tilde{\pi}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))$, et bien sûr $H := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^g}(1)|_{X_0'}$. La courbe $C \subset \Sigma_{L,L'}$ appartient au système linéaire $\tilde{\pi}_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s+1) \otimes \tilde{\pi}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s+1))(-2E)$, tandis que par 3.8 on a : $H_{\Sigma_{L,L'}} = \tilde{\pi}_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s-1) \otimes \tilde{\pi}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s-1))(-E)$. On en déduit immédiatement : il existe un fibré inversible $\mathcal{O}_{X_0'}(\tilde{C})$ dont la restriction à $\Sigma_{L,L'}$ est $\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)$. Soit $\Sigma_{L,L'}^{(2)} \subset X_0'$ la surface définie par l'équation

$X^2=0$; on a : $C_2 \subset \Sigma^{(2)}_{L,L'}$, et il est facile de voir que C_2 est un élément du système linéaire $\mathcal{O}_{X'_0}(\tilde{C})|_{\Sigma^{(2)}_{L,L'}}$; définissant $\Sigma^{(k)}_{L,L'} \subset X'_0$ par l'équation $X^k=0$, on va déduire du lemme 3.12 suivant que pour tout $k \geqslant 2$ il existe un élément $C_k \in |\mathcal{O}_{X'_0}(\tilde{C})|_{\Sigma^{(k)}_{L,L'}}$ dont l'intersection avec $\Sigma_{L,L'}$ est C.

3.12. LEMME. *Pour $k \geqslant 2$, on a : $H^1(\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)(-k)=0$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement des formules données plus haut pour $\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(1)$ et $\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)$, qui entraînent :

$$\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)(-k) = \tilde{\pi}_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s+1-k(s-1)) \otimes \tilde{\pi}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s+1-k(s-1))((-2+k)E);$$

le résultat est alors clair pour $k=2$ et il suffit de montrer que pour $k \geqslant 2$, et $\eta \in H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(1))$, l'application $\eta : H^1(\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)(-k-1)) \to H^1(\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)(-k))$ est injective. Mais cela résulte immédiatement du fait qu'on peut choisir η de sorte que son diviseur soit une courbe irréductible et réduite F, et qu'on a $d^0(\mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)(-k)|_F)<0$.

3.13. L'existence de $C^{(k)} \subset \Sigma^{(k)}_{L,L'}$ pour tout k résulte alors immédiatement du lemme 3.12 puisqu'il entraîne que les suites exactes :

$$0 \to \mathcal{O}_{\Sigma_{L,L'}}(C)(-k) \to \mathcal{O}_{\Sigma^{(k+1)}_{L,L'}}(C) \to \mathcal{O}_{\Sigma^{(k)}_{L,L'}}(C) \to 0$$

induisent une surjection

$$H^0(\mathcal{O}_{\Sigma^{(k+1)}_{L,L'}}(C)) \to H^0(\mathcal{O}_{\Sigma^{(k)}_{L,L'}}(C)) \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2.$$

On en déduit alors par des raisonnements « standard » l'existence d'une surface $T_{L,L'} \subset X_0$ telle que $T_{L,L'} \cap \mathbf{P}^{g-1}=C$ schématiquement. Il est facile de voir que le degré de $\tilde{\pi}|_{T_{L,L'}}$ est $\leqslant 2$.

En raisonnant de façon analogue avec les couples (L',L'') et (L,L''), on obtient de la même façon des surfaces $T_{L',L''}$, $T_{L,L''}$, contenues dans $\tilde{K}_{L'} \cap \tilde{K}_{L''}$ et $\tilde{K}_L \cap \tilde{K}_{L''}$ respectivement. Le lemme suivant implique facilement que ces trois surfaces sont égales :

3.14. LEMME. *La surface $T_{L,L'}$ est contenue dans $\tilde{K}_{L''}$.*

Démonstration. Par hypothèse, C_2 est contenue dans $\tilde{K}_{L''}$; soit y un point de $T_{L,L'}$, non situé sur $\mathbf{P}^{g-1}$; il est facile de voir que l'intersection des quadriques contenant $\tilde{K}_{L''}$ et y est constituée de deux composantes, dont l'une est $\tilde{K}_{L''}$, et l'autre un espace projectif de dimension quatre. Or la restriction de chacune de ces quadriques à $T_{L,L'}$ s'annule sur

C_2 et y, et donc s'annule en fait sur $T_{L,L'}$. Comme $T_{L,L'}$ n'est pas contenue dans un $\mathbf{P}^4$, $T_{L,L'}$ est donc bien contenue dans $\tilde{K}_{L''}$.

La surface $T:=T_{L,L'}=T_{L,L''}=T_{L',L''}$, contenue dans les trois cônes $\tilde{K}_L, \tilde{K}_{L'}, \tilde{K}_{L''}$ admet alors une application naturelle dans $\mathbf{P}(H^0(L)\check{\ })\times\mathbf{P}(H^0(L')\check{\ })\times\mathbf{P}(H^0(L'')\check{\ })$ (dont les composantes sont définies comme en 3.10), et comme par ce qui précède, elle est de degré au plus deux au-dessus de chacun des facteurs $Q_{L,L'}, Q_{L,L''}, Q_{L',L''}$, et que son image contient $\Phi_L\times\Phi_{L'}\times\Phi_{L''}(C)$, cela contredit en fait l'hypothèse 3.1(iii) (en remarquant que comme C est une courbe de Brill–Noether–Petri, on a $H^0(2L)\sim S^2H^0(L)$ pour $L\in W^1_{s+1}(C)$).

3.15. Pour prouver les propositions 3.2 et 3.3 on va établir quelques propriétés supplémentaires de l'application μ_L : On a d'abord le lemme suivant :

3.16. Lemme. *Le corang de l'application* $\mu_L: H^0(K_C-L)^{\otimes 2}\to H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$ *est indépendant de* $L\in W^1_{s+1}(C)$, *si* C *satisfait l'hypothèse* 3.1(i).

Démonstration. Dualement, on considère le noyau U_L de l'application naturelle $H^1(K_C^{-1}+2L)\to\mathrm{Hom}(H^0(K_C-L), H^1(L))\cdot\mathbf{P}(U_L)$ paramètre les extensions non triviales :

$$0\to L\to E\to K_C-L\to 0,$$

satisfaisant la condition : $h^0(E)=h^0(L)+h^0(K_C-L)=s+2$. Soit $0\neq e\in U_L$, soit $L'\in W^1_{s+1}(C)$, $L'\neq L$, et soit $\phi_{L,L'}$ l'unique section de K_C-L-L'; considérant la suite exacte :

$$0\to L-L'\to\mathrm{Hom}(E, K_C-L')\to K_C-L-L'\to 0,$$

on va montrer : il existe une unique section de $\mathrm{Hom}(E, K_C-L')$ qui se projette sur $\phi_{L,L'}$. Il suffit pour cela de prouver que $\phi_{L,L'}\cdot e=0$ dans $H^1(L-L')$. Dualement, soit $K\subset H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$ l'horthogonal de e; il faut vérifier que K contient $\phi_{L,L'}\cdot h^0(K_C-L+L')$. Mais par hypothèse K contient l'image de μ_L et il suffit donc de voir que $\phi_{L,L'}\cdot H^0(K_C-L+L')\subset\mathrm{Im}\,\mu_L$. Mais l'hypothèse $h^0(K_C-L-L')=1$ entraîne que la multiplication $H^0(L')\otimes H^0(K_C-L)\to H^0(K_C-L+L')$ est surjective; on a donc

$$\phi_{L,L'}\cdot H^0(K_C-L+L')\subset\phi_{L,L'}\cdot H^0(K_C-L)\cdot H^0(L')\subset\mathrm{Im}\,\mu_L,$$

comme désiré. On dispose donc d'une application non nulle $\eta: E\to K_C-L'$. Soit $D\subset K_C-L'$ l'image de η; on a une suite exacte :

$$0\to K_C-D\to E\to D\to 0,$$

avec $h^0(E)=s+2$ et donc $h^0(D)+h^0(K_C-D)\geqslant s+2$; d'autre part, on a $D\leqslant K_C-L'$ et $K_C-D\leqslant K_C-L$ donc D et K_C-D satisfont $h^0(\cdot)\leqslant s$ (et donc aussi $h^0(\cdot)\leqslant 2$); enfin comme C satisfait la condition de Brill–Noether–Petri, on a $h^0(D)\cdot h^0(K_C-D)\leqslant g=2s$. On en déduit : on a soit $h^0(D)=2$ et $h^0(K_C-D)=s$, soit $h^0(K_C-D)=2$ et $h^0(D)=s$. Mais dans le premier cas D est de degré $s+1$, et on a donc $d^0(K_C-D)=d^0(K_C-L)$: K_C-D est donc envoyé isomorphiquement sur K_C-L, ce qui contredit le fait que e est non-nulle; dans le second cas K_C-D est un g^1_{s+1} et donc par raison de degré, D est en fait égal à K_C-L'. E peut donc s'écrire également comme une extension $0\to L'\to E\to K_C-L'\to 0$ et ceci de façon unique car $h^0(K_C-2L')=0$. Il est évident que cette extension ne peut pas se scinder car sinon E contiendrait un sous-fibré isomorphe à K_C-L', qui devrait donc admettre une application non nulle dans K_C-L ou dans L, ce qui est absurde.

On a donc construit une application naturelle $\alpha_{L,L'}:\mathbf{P}(U_L\to\mathbf{P}(U_{L'})$ qui admet clairement $\alpha_{L',L}$ comme réciproque, et donc on a bien $\dim\mathbf{P}(U_L)=\dim\mathbf{P}(U_{L'})$.

3.17. La proposition 3.2 découle alors de la proposition 3.4 et du lemme 3.16; en effet, si l'application de Wahl Ψ_C n'est pas surjective il existe un $L\in W^1_{s+1}$, tel que μ_L n'est pas surjective, et donc pour tout L, μ_L n'est pas surjective.

La proposition 3.3 résulte enfin de la proposition 3.4 et du lemme suivant :

3.18. Lemme. *Toujours sous l'hypothèse* 3.1(i) *on a :* $\operatorname{corang}\mu_L\leqslant 1$.

En effet U_L est le dual de $\operatorname{coker}\mu_L$ et la proposition 3.4 fournit une injection $\alpha: U\to U_L\times U_{L'}\times U_{L''}$, ce qui donne par le lemme précédent : $\operatorname{corang}\Psi_C=\dim U\leqslant 3$.

Preuve du lemme 3.18. On reprend la notation $\phi_{L,L'}$ de 3.16; soit $Z_{L,L'}$ le diviseur de $\phi_{L,L'}\in H^0(K_C-L-L')$; d'après la preuve de 3.16, un élément $e\in U_L$ satisfait la condition $\phi_{L,L'}\cdot e=0$ dans $H^1(L-L')$ et donc provient d'un élément ε de $H^0(L-L'|_{Z_{L,L'}})$, uniquement déterminé par e. Notons

$$\alpha: H^0(K_C-L)\to H^0(K_C-L|_{Z_{L,L'}})\quad\text{et}\quad \beta: H^0(K_C-L')\to H^0(K_C-L'|_{Z_{L,L'}})$$

les restrictions. Alors l'image de e dans $\operatorname{Hom}(H^0(K_C-L),H^1(L))$ est obtenue par le composé :

$$H^0(K_C-L)\to H^0(K_C-L|_{Z_{L,L'}})\xrightarrow{\varepsilon} H^0(K_C-L'|_{Z_{L,L'}})\xrightarrow{\delta} H^1(L),$$

où $\ker\delta=\operatorname{Im}\beta$. La condition $e\in U_L$ s'écrit donc : $\varepsilon\cdot\operatorname{Im}\alpha\subset\operatorname{Im}\beta$. Supposons maintenant que ε s'annule en un point de $Z_{L,L'}$; soit $D_1\subset Z_{L,L'}$ le sous-schéma défini par ε, considéré comme un cycle sur C et soit $D_2=Z_{L,L'}-D_1$. On a : $\varepsilon\cdot\operatorname{Im}\alpha$ s'annule sur D_1 et est contenu dans $\operatorname{Im}\beta$, et donc est contenu dans $\beta(H^0(K_C-L'-D_1)$; d'autre part, le noyau de $\varepsilon|_{\operatorname{Im}\alpha}$ est égal à $\alpha(H^0(K_C-L-D_2))$; il vient donc :

$$\dim(\operatorname{Im}\alpha)-\dim(\alpha(H^0(K_C-L-D_2))\leqslant\dim(\beta(H^0(K_C-L'-D_1)),$$

soit encore : $h^0(K_C-L)-h^0(K_C-L-D_2)\leqslant h^0(K_C-L'-D_1)-2$, car $\operatorname{Ker}\beta\simeq H^0(L)$ est de dimension 2. On a donc $h^0(K_C-L-D_2)+h^0(K_C-L'-D_1)\geqslant s+2$ avec $K_C-L-D_2+K_C-L'-D_1=K_C$, et $D_2, D_1, K_C-L-D_2, K_C-L'-D_1$ effectifs. On conclut alors par le même argument qu'en lemme 3.16 que ceci n'est possible que si D_2 est vide (puisque D_1 ne l'est pas), c'est-à-dire $D_1=Z_{L,L'}$. Donc si ε, correspondant à un élément de U_L, s'annule en un point de $Z_{L,L'}$, ε est en fait identiquement nulle, ce qui entraîne bien que $\dim U_L\leqslant 1$.

3.19. Comme dans le paragraphe 2, on peut retrouver à l'aide des résultats de ce paragraphe le théorème de [5] :

En effet, on montrera en paragraphe 4 que les hypothèses faites en 3.1 sont satisfaites par une courbe générique. D'après la proposition 3.2, si C satisfait ces hypothèses et si l'application de Wahl n'est pas surjective, l'application

$$\mu_L: h^0(K_C-L)^{\otimes 2}\to H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$$

n'est pas surjective pour $L\in W^1_{s+1}(C)$. D'autre part on a : $\dim H^0(K_C-L)=s$, et $\dim H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)=2g-5$, avec $g=2s$, et $s(s+1)/2\geqslant 2g-5$ exactement lorsque $g\geqslant 10$. On peut donc s'attendre à la surjectivité générique de μ_L dés que $g\geqslant 10$. On montrera en paragraphe 4 (proposition 4.2) qu'elle a effectivement lieu, et ceci donne une autre preuve du théorème de [5] (cas g pair) :

3.20. Théorème. *Soit C une courbe générique de genre pair $\geqslant 10$. Alors l'application de Wahl de C est surjective.*

§4

On étudie dans cette section les hypothèses faites en 3.1, et les applications μ_L de 2.8, 3.2. On va montrer :

4.1. Proposition. *Soit C une courbe générique de genre pair $g=2s\geqslant 4$, et L, L' des éléments distincts de $W^1_{s+1}(C)$; alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $h^0(K_C-L-L')=1$;

(ii) *l'application produit* $\Phi_L \times \Phi_{L'} : C \to Q_{L,L'}$ *envoie* C *birationnellement sur une courbe nodale de* $Q_{L,L'}$.

4.2. PROPOSITION. *Soit* C *une courbe générique de genre pair* $g=2s\geq 10$ *et* $L \in W^1_{s+1}(C)$; *alors l'application* $\mu_L : H^0(K_C-L)^{\otimes 2} \to H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$ *est surjective.*

4.3. PROPOSITION. *Soit* C *une courbe générique de genre impair* $g=2s+1\geq 13$ *et* $L \in W^1_{s+1}(C)$ *générique; alors l'application* $\mu_L : H^0(K_C-L)^{\otimes 2} \to H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$ *est surjective.*

4.4 On sait que la variété $\mathscr{G}^1_{d,g}$ constituée des courbes lisses de genre g munies d'un pinceau de degré d est irréductible lorsque le nombre de Brill–Noether $\varrho=g-2(g-d+1)$ est supérieur ou égal à zéro. D'autre part, dans le cas $\varrho=0$, i.e. lorsque $g=2s$ et $d=s+1$, il est prouvé dans [8] que la monodromie agit comme le groupe symétrique sur l'ensemble (fini) des g^1_{s+1} d'une courbe générique. Enfin les propriétés 4.1, 4.2 et 4.3 sont clairement ouvertes; il suffit donc dans chacun des cas d'exhiber un couple (C, L) ou un triplet (C, L, L') satisfaisant la propriété en question pour prouver l'énoncé (l'argument de monodromie n'intervient que dans la preuve de 4.1 et dira que si la propriété est satisfaite par un triplet (C, L, L') générique, alors pour C générique, elle est satisfaite par tous les triplets (C, L, L').

4.5. *Preuve de la proposition* 4.1. On utilise les résultats de [10], [12], [17] : Soit S une surface K3 munie d'un diviseur très ample H engendrant $\operatorname{Pic} S$, tel que $H^2=2g-2$. Il existe alors sur S un unique fibré vectoriel stable E avec : $\operatorname{rang}(E)=2$, $\det(E)=H$, $c_2(E)=s+1$; E satisfait alors $h^0(E)=s+2$, et si $C\subset S$ est un élément générique de H, L un des g^1_{s+1} de C, on peut reconstruire E comme en § 1, en posant $E=F\otimes H$, et en définissant F par la suite exacte

$$0 \to F \to H^0(L)\otimes \mathcal{O}_S \to L \to 0.$$

Une section générique de E correspond à un zéro-cycle Z générique de degré $s+1$ satisfaisant la condition : $h^0(I_Z(H))=s+1$. Soit maintenant x un point générique de S et soit s, s' deux sections génériques de E s'annulant en x : soit Z et Z' le lieu d'annulation de s et s' respectivement; alors on a $Z\cap Z'=x$ et il existe une section lisse C de H s'annulant sur Z et Z' (il est facile de voir que Z et Z' engendrent au plus un $\mathbf{P}^{g-1}\subset\mathbf{P}^g=\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_S(H)))$. Z et Z' définissent alors deux g^1_{s+1} distincts sur C. En effet, comme s et s' sont génériques (comme sections de $E\otimes I_x$), Z et Z' satisfont $h^0(H\otimes I_Z)=h^0(H\otimes I_{Z'})=s+1$, et donc $h^0(K_C-Z)=h^0(K_C-Z')=s$, ce qui donne bien

$h^0(Z)=h^0(Z')=2$; si Z et Z' sont linéairement équivalent sur C, comme Z et Z' ont le point x en commun, $Z-x\equiv Z'-x$ sont des éléments d'un g_s^1 sur C, ce qui n'existe pas par [10]. D'autre part, C possède un nombre fini de g_{s+1}^1 : en effet, si tel n'était pas le cas, l'application naturelle $\Phi_E : \text{Grass}(2, H^0(E))\to\mathbf{P}^g$ associée à l'application linéaire

$$\Lambda^2 H^0(E) \xrightarrow{\det} H^0(H)$$

aurait une fibre de dimension positive puisque les g_{s+1}^1 sur C correspondent bijectivement à des pinceaux de sections de E (cf. [17]). Or ceci est impossible car cette application est partout définie puisque E est stable. Soit maintenant $k=\dim I_Z(H)\cap I_{Z'}(H)$ pour (s,s') générique dans $\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))\times\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))$. Considérons

$$Y\subset\mathbf{P}^{g-1}\times\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))\times\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))$$

la sous-variété constituée des triplets (C,Z,Z'), tels que C est un élément de $|H|$ passant par x et contenant les zéro-cycles Z et Z'; soit Y_0 la composante de Y dominant le produit $\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))\times\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))$: On a :

$$\dim Y_0=2s-2+k-1=g+k-3;$$

comme la première projection $\mathrm{pr}_1 : Y_0\to\mathbf{P}^{g-1}$ est finie par l'analyse précédente, on a $k\leqslant 2$, ce qui donne bien : Pour (Z,Z') générique dans $\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))\times\mathbf{P}(H^0(E\otimes I_x))$ et C générique contenant Z et Z', $h^0(K_C-Z-Z'+x)\leqslant 1$, et a fortiori $h^0(K_C-Z-Z')\leqslant 1$, ce qui montre (i) puisqu'on sait aussi que Z et Z' ne sont pas linéairement équivalents sur C, ce qui entraîne facilement l'inégalité inverse.

4.6. *Preuve de la proposition* 4.1(ii). Il suffit d'exhiber une courbe nodale irréductible de type $(s+1,s+1)$ et dont le genre de la normalisée est $g=2s$, contenue dans $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$. Soit C_1 une courbe lisse de type $(s-1,2)$ et C_2 une courbe lisse de type $(2,s-1)$ dans $Q:=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, telles que C_1 et C_2 se coupent transversalement en B : La suite exacte :

$$0\to\mathcal{O}_Q\to\mathcal{O}_Q(C_1\otimes\mathcal{O}_Q(C_2)\to I_B(C_1+C_2)\to 0$$

montre que $H^1(I_B(C_1+C_2))=0$, ce qui entraîne la surjectivité de la restriction :

$$H^0(\mathcal{O}_Q(C_1+C_2))\to H^0(\mathcal{O}_B(C_1+C_2)).$$

Pour tout $N\leqslant\#B=(s-1)^2+4$, on peut donc construire une courbe de type $(s+1,s+1)$ sur Q possédant exactement N nœuds, et irréductible dès que $N<\#B$. Comme

$s(s-2)<(s-1)^2+4$, on peut donc en particulier trouver une courbe irréductible nodale de type $(s+1, s+1)$ possédant exactement $s(s-2)$ nœuds et dont la normalisée est donc de genre $g=2s$; la restriction des deux pinceaux de droites de Q à cette courbe fournit deux g^1_{s+1}, dont il est aisé de montrer qu'ils ne sont pas linéairement équivalents sur la normalisée, ce qui prouve 4.2(ii).

4.7. *Preuve des propositions* 4.2 *et* 4.3. C'est un cas particulier de la conjecture du rang maximal, mais à ma connaissance celle-ci n'est prouvée que pour les courbes non spéciales [2]. On va appliquer les techniques de [2], [9], pour obtenir le résultat.

Si d'abord $g=Io$, $s=5$, l'application $\mu_L: H^0(K_C-L)^{\otimes 2} \to H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$ n'est pas surjective si et seulement si elle n'est pas injective, si et seulement si l'image de C dans $\mathbf{P}^4$ par l'application Φ_{K_C-L} est contenue dans une quadrique; il est facile de voir que C est contenue dans au moins 6 cubiques et donc si Φ_L n'est pas surjective, C est contenue dans une surface intersection complète d'une cubique et d'une quadrique; il est facile de voir que cela n'est pas le cas générique (cette remarque est d'ailleurs déjà faite dans [4]), bien que cette dernière surface ne soit peut-être pas une surface K3; (en fait, il est vraisemblable qu'on obtienne bien une surface K3, peut-être singulière, sous l'hypothèse que C est générique au sens de Brill–Noether–Petri?). De même, si $g=12$, on a $s=6$, et l'application $\mu_L: H^0(K_C-L)^{\otimes 2} \to H^0(K_C^{\otimes 2}-2L)$ n'est pas surjective si et seulement si l'image de C dans $\mathbf{P}^5$ par le morphisme Φ_{K_C-L} est contenue dans au moins trois quadriques; C a donc tendance à être contenue dans une surface K3, sous la même réserve que précédemment, et encore une fois il est aisé de prouver directement que cela n'est pas le cas générique.

Partant du cas $g=12$, on va montrer les propositions 4.2 et 4.3 par récurrence sur g à l'aide des lemmes suivants :

4.8. LEMME. *Soit g pair $\geqslant 12$; si la proposition* 4.2. *est vraie pour g, la proposition* 4.3 *est vraie pour $g+1$.*

4.9. LEMME. *Soit g impair; si la proposition* 4.3 *est vraie pour g, la proposition* 4.2 *est vraie pour $g+1$.*

4.10. *Preuve du lemme* 4.8. Soit (C, L) tel que C est de genre $g=2s$, $L \in W^1_{s+1}(C)$, $L \notin W^2_{s+1}(C)$, et μ_L est surjectif. On peut bien sûr par hypothèse supposer que C est générique, et donc, par le théorème de Gieseker–Petri, on a, pour le plongement

$$\Phi_{K_C-L}: C \to \mathbf{P}^{s-1}, \quad H^1(N_C\mathbf{P}^{s-1}) = 0;$$

Comme $g \geqslant 12$, C est certainement contenue dans au moins une quadrique de $\mathbf{P}^{s-1}$, et comme C est non dégénerée dans $\mathbf{P}^{s-1}$ cette quadrique ne contient pas la variété balayée par les bisécantes de C. Soit Δ une bisécante de C coupant C transversalement en exactement deux point et non contenue dans l'intersection des quadriques contenant C. Posons $C' = C \cup \Delta$. On a :

(i) $g(C') = g+1$,

(ii) l'application $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{s-1}}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_{C'}(1))$ est un isomorphisme,

(iii) l'application $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{s-1}}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{C'}(2))$ est surjective,

(iv) $d^0(K_{C'}(-1)) = s+2$.

De plus, par [9], on a : C' se déforme sur une courbe lisse C' de $\mathbf{P}^{s-1}$.

Pour $C'' \subset \mathbf{P}^{s-1}$ lisse assez proche de C les conditions (i) à (iv) restent satisfaites, et $L'' = K_{C''}(-1)$ fournit alors un g^1_{s+2} sur C'' satisfaisant la propriété 4.3.

4.11. *Preuve du lemme* 4.9. Soit C une courbe générique du genre $g = 2s+1$, et soit $L \in W^1_{s+2}(C)$ satisfaisant la propriété 4.3. Comme C satisfait la condition de Gieseker–Petri, on a : $H^0(K_C - 2L) = 0$, d'où $h^0(2L) = 4$, et le morphisme Φ_{2L} envoie C birationellement sur son image dans $\mathbf{P}^3$, au moins pour L générique. On peut donc trouver $x, y \in C$ tels que :

(i) $h^0(L-x-y) = 1$;

(ii) $h^0(2L-x-y) = h^0(2L) - 2$.

Soit $C' \subset \mathbf{P}^s$ l'image de C par le système linéaire $|K_C - L + x + y|$. La courbe C' est nodale, isomorphe à $C/x=y$. L'hypothèse (ii) entraîne facilement $H^1(T\mathbf{P}^s|_{C'}) = 0$. Or ceci entraîne que C' peut être lissifiée dans $\mathbf{P}^s$; soit $C'' \subset \mathbf{P}^s$, une courbe lisse assez proche de C'; on a :

(i) $g(C'') = 2s+2$,

(ii) $d^0(K_{C''}(-1)) = s+2$,

(iii) $h^0(\mathcal{O}_{C''}(1)) = s+1$, et donc $L'' := K_{C''}(-1)$ est un g^1_{s+2} sur C''. Enfin il est facile de voir que l'hypothèse « μ_L *surjectif* » entraîne que la restriction : $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{C'}(2))$ est surjective, puis que $\mu_{L''}$ est surjectif.

4.12. Finalement, pour conclure, comme annoncé en 3.19, que les hypothèses 3.1 sont satisfaites par une courbe générique de genre pair $\geqslant 10$, il reste simplement à étudier la condition 3.1(iii); notons que pour des raisons de dimension celle-ci ne peut pas être satisfaite par une courbe générique de genre plus petit; en genre au moins égal à dix, le résultat résulte facilement d'un calcul de dimensions d'espaces de modules (intuitivement, C est contenue dans une surface K3 dont le groupe de Picard et de rang au moins quatre).

4.13. *Remarques ; questions.* (a) Il est vraisemblable qu'une étude plus poussée du fibré vectoriel E introduit dans la preuve de 4.1(i) permette de montrer que 4.1(ii) a également lieu pour une courbe générique C de genre pair contenue dans une surface K3 dont elle engendre le groupe de Picard. Notons que l'introduction de fibrés vectoriels de ce type a déjà permis à Lazarsfeld de montrer qu'une telle courbe satisfait la condition de Brill–Noether–Petri; ceci, et la proposition 3.3 entraîneraient alors : le corang de l'application de Wahl est inférieur ou égal à 3 pour une courbe générique contenue dans une surface K3 dont elle engendre le groupe de Picard.([1])

(b) En genres 10 et 12, on a noté au début de la preuve des propositions 4.2 et 4.3 que la non-surjectivité de l'application μ_L entraîne que C est contenue dans une surface K3 « *virtuelle*», à savoir l'intersection d'une cubique et d' une quadrique dans $\mathbf{P}^4$, et l'intersection de trois quadriques dans $\mathbf{P}^5$, dont il ne doit pas être trop difficile de montrer que ce sont effectivement des modèles de surface K3. On peut se demander généralement si la non-surjectivité de μ_L pour $g=2s$ et $L \in W^1_{s+1}$, ou $g=2s+1$ et pour tout $L \in W^1_{s+2}$, caractérise les courbes contenues dans une surface K3, au moins dans l'ouvert de $\mathcal{M}_g$ constitué des courbes satisfaisant la condition de Brill–Noether–Petri.

Le cas g pair est plus remarquable du fait des lemmes 3.16 et 3.18, qui montrent l'existence et l'unicité du fibré vectoriel E de rang 2, de déterminant K_C, satisfaisant $h^0(E)=s+2$, et qui peut s'écrire comme une extension de L par K_C-L pour tout $L \in W^1_{s+1}(C)$, sous l'hypothèse 3.1(i), si C satisfait la condition de Brill–Noether–Petri, et si μ_L n'est pas surjectif.

(c) Un autre point intéressant est l'étude des obstructions d'ordre supérieur à l'aide de la construction du § 1. Si $C_2 \subset \mathbf{P}^g$ est une extension de C, on a vu en § 1 qu'on pouvait construire un faisceau $\tilde{E}_L$ sur C_2 pour tout fibré inversible L sur C tel que $h^0(L)=2$ et L est engendré par ses sections globales, satisfaisant $h^0(\tilde{E}_L)=h^0(K_C-L)$. Si maintenant C_2 peut être étendue en $C_3 \subset \mathbf{P}^g$, il est facile de voir qu'il existe un fibré vectoriel de rang 2 sur C_2, $\tilde{\tilde{E}}_L$ tel que : $\tilde{\tilde{E}}_L|_C=\tilde{E}_L|_C$, il existe une application surjective $\tilde{\tilde{E}}_L \to \tilde{E}_L$, induisant l'isomorphisme précédent après tensorisation par $\mathcal{O}_C$, et $h^0(\tilde{\tilde{E}}_L)=h^0(\tilde{E}_L)$. On peut se demander quelle est la réciproque; par exemple, dans les cas g pair, suffit-il que l'on puisse construire $\tilde{\tilde{E}}_L$ pour chaque $L \in W^1_{s+1}$, satisfaisant les trois conditions précédentes, pour que l'obstruction à étendre C_2 en C_3 s'annule? On a bien sûr une question analogue en genre impair.

([1]) En genre g pair $\geqslant 12$; En effet 3.1(iii) est alors satisfait génériquement pour une courbe de genre $g \geqslant 12$ contenue dans une surface K3; cela n'est pas le cas en genre 10, pour lequel la conclusion de 4.13(a) est fausse (cf. [20]).

Note. Le travail de Lazarsfeld a déjà été mentionné comme référence à propos de l'introduction de fibrés de rang deux du type de ceux étudiés ici; on doit bien sûr citer également l'article « On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve », Invent. Math., 83, de Green et Lazarsfeld, où leur utilité dans l'étude des questions de normalité projective est mise en évidence.

Le rapporteur me signale par ailleurs que la question 4.13 (b) a été proposée par Mukai, avec les éléments d'une solution.

Références

[1] ARBARELLO, E., CORNALBA, M., GRIFFITHS, P. & HARRIS, J., *Geometry of Algebraic Curves,* vol. I. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 267. Springer-Verlag, 1984.

[2] BALLICO, E. & ELLIA, P., The maximal rank conjecture for non special curves in $\mathbf{P}^n$. *Math. Z.*, 197 (1987), 355–367.

[3] BEAUVILLE, A. & MERINDOL, J. Y., Sections hyperplanes des surfaces K3. *Duke Math. J.*, 55 (1987), 873–878.

[4] CARLSON, J., GREEN, M., GRIFFITHS, P. & HARRIS, J., Infinitesimal variations of Hodge structure. *Compositio Math.,* 50 (1983), 109–205.

[5] CILIBERTO, C., HARRIS, J. & MIRANDA, R., On the surjectivity of the Wahl map. *Duke Math. J.*, 57 (1988), 829–858.

[6] CILIBERTO, C. & MIRANDA, R., On the Gaussian map for canonical curves of low genus. Preprint.

[7] — Gaussian map for certain families of canonical curves. Preprint.

[8] EISENBUD, D. & HARRIS, J., Irreducibility and monodromy of some families of linear series. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 20 (1987), 65–87.

[9] HARTSHORNE, R. & HIRSCHOWITZ, A., Smoothing algebraic space curves, in *Algebraic Geometry*, Proceedings, Sitjes 1983. Lecture notes in Math., no. 1124, pp. 98–131.

[10] LAZARSFELD, R., Brill–Noether–Petri without degenerations. *J. Differential Geom.*, 23 (1986), 299–307.

[11] MORI, S. & MUKAI, S., The uniruledness of the moduli space of curves of genus II, in *Algebraic Geometry,* Proceedings, Tokyo/Kyoto, 1982. Lecture Notes in Math., no. 1016, pp. 334–353.

[12] MUKAI, S., On the moduli space of bundles on K3 surfaces I, dans *Vector bundles on algebraic varieties*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1984.

[13] — Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surfaces. *Invent. Math.*, 77 (1984), 101–116.

[14] — Curves, K3 surfaces and Fano manifolds of genus $\leqslant 10$, dans *Algebraic geometry and commutative algebra in honor of Nagata* (1987), pp. 357–377.

[15] — Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of co-index 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 86 (1989), 3000–3002.

[16] REID, M., Infinitesimal view of extending a hyperplane section-Deformation theory and computer algebra. À paraître dans *Hyperplane sections and related topics*. Springer Lecture Notes in Math.

[17] TJURIN, A. N., Cycles, curves and vector bundles on an algebraic surface. *Duke Math. J.*, 54 (1987), 1–26.

[18] WAHL, J., The Jacobian algebra of a Gorenstein singularity. *Duke Math. J.*, 55 (1987), 843–871.
[19] — Gaussian maps on algebraic curves. Preprint.
[20] CUKIERMAN, F. & ULMER, D., Curves of genus ten on K3 surfaces. Preprint 1991.

Reçu le 20 novembre, 1989