DIE ERSTEN 40 JAHRE DES LEBENS VON WEIERSTRASS.

Vortrag, gehalten auf dem 4. skandinavischen Mathematiker-Kongreß in Stockholm (30. August—2. September 1916).

Von

G. MITTAG-LEFFLER.

Karl Weierstrass wurde am 31. Oktober 1815 in Ostenfelde, Kreis Warendorf, Regierungsbezirk Münster, geboren und starb in Berlin am 19. Februar 1897. Sein Vater, der Rendant Wilhelm Weierstrass (geb. 1790, gest. 1869), hatte sich im Jahre 1814 im Alter von 25 Jahren mit einem Fräulein von der Forst verheiratet, die Karl Weierstrass' Mutter wurde.

Karl war der älteste Sohn. Nach ihm wurde im Jahre 1820 ein weiterer Sohn, Peter, geboren, der seinen Bruder um etwa 7 Jahre überlebte (er starb 1904), und nach diesem zwei Töchter, Klara (geb. 1823, gest. 1896, 1 Jahr vor Karl) und Elise (geb. 1826, gest. 1898, 1 Jahr nach Karls Tod). Die Mutter starb im Jahre, da Elise geboren wurde, ganz kurze Zeit nach ihrer Niederkunft. Alle ihre Kinder sind unverheiratet geblieben. Ein Jahr darauf verheiratete sich der Vater zum zweiten Mal. Seine zweite Frau, die Stiefmutter der Kinder, starb 1859. Der Vater hatte sie um 10 Jahre überlebt, als er, achtzigjährig, im Hause Karls starb, wo er die letzten Jahre seines Lebens zugebracht hatte.

Zu der Zeit, als Karl Weierstrass geboren wurde, scheint der Vater als Zollbeamter in französischen Diensten gestanden zu haben. Er muß indessen vorher, und zwar seit 1808, damals nur 19jährig, als Lehrer tätig gewesen sein, wie aus einem Brief an seinen Sohn Peter hervorgeht.

Schon kurze Zeit nach Karls Geburt siedelten die Eltern nach Westernkotten in Westfalen über, wo der Vater bei der dortigen Saline Anstellung gefunden hatte. Die Salinen von Westernkotten haben hierdurch einen Platz in der Geschichte der Mathematik erhalten. Denn im Sommer 1841 datierte Karl Weierstrass von hier aus seine Arbeit „Über die Entwicklung der Modular-funktionen", und unter der Überschrift „Westernkotten" sind viele Briefe geschrieben und abgesandt worden, die wertvolle Beiträge für die Lebensgeschichte des großen Mathematikers liefern.

Weierstrass' Vater war ein feingebildeter Mann mit vielseitigen Kenntnissen, sowohl in Physik und Chemie wie in den humanistischen Wissenschaften. Französisch sprach und schrieb er wie seine Muttersprache. Verschiedene Briefe von ihm an seine Kinder sind noch vorhanden. Aus ihnen atmet hoher Idealismus, der jedoch mit einem entschieden praktischen Verstande gepaart ist. Er liebte und suchte Geselligkeit, und nach den Angaben seines Sohnes Peter verachtete er dabei auch nicht, tüchtig zu kneipen. Außerdem war er ein geübter Schachspieler, wenn auch nach Peters Ansicht, der hierin Meister war, ein ziemlich mittelmäßiger. Aus Gründen, die unbekannt geblieben sind, war er vom protestantischen zum katholischen Glauben übergetreten. Möglicherweise stand dies mit seiner ersten Heirat im Zusammenhang. Bigott wurde er nie. Sämtliche Kinder gehörten der katholischen Kirche an, ohne jedoch strenggläubig zu sein. Karl Weierstrass unterhielt übrigens in den ersten Jahren seiner Wirksamkeit, — besonders zu der Zeit, als er Lehrer am katholischen Gymnasium in Braunsberg war, — freundschaftliche Beziehungen mit ein paar hochgestellten und feingebildeten, vorurteilslosen katholischen Prälaten.

Über Weierstrass' Mutter weiß man so gut wie nichts. Als sie starb, waren die Kinder noch klein, mit Ausnahme von Karl, der jedoch damals auch erst 11 Jahre zählte. Die Ehe scheint nicht ganz harmonisch gewesen zu sein, wie aus einem Satze in einem Brief des Vaters an den Sohn Peter, geschrieben in Westernkotten, 13. Oktober 1853, hervorgeht: „Von der Liebschaft, die Du dort gehabt, hat uns Karl erzählt; es ist gut, daß die Sache aus ist. Ohne Vermögen und von anderer Konfession würde ich das Verhältnis niemals gut heißen können. Es gab allerdings auch bei mir eine Zeit, wo ich anders gesinnt war und sehr leichtsinnig gehandelt habe. Es ist mir zu jener Zeit auch nicht im Schlafe eingefallen, daß derjenige, welcher in den Ehestand treten will, nothwendig sich auch den Bereich der Verpflichtungen vergegenwärtige, welche er dadurch gegen seine eigne, gegen die Familie seiner Gattin und eine Anzahl noch Ungeborener zu übernehmen nolens volens durch die Macht der Verhältnisse gezwungen wird." Die Stiefmutter erzog die Kinder. Sie scheint eine tüchtige deutsche Hausfrau gewesen zu sein, die unter kümmerlichen wirtschaftlichen Verhältnissen, „sich immer ängstigend", — nach einem Briefwechsel zwischen den Kindern, — für Haus und Herd sorgte. Auf das Seelenleben der Kinder hat sie vermutlich keinen Einfluß gehabt. Aber es war ein gebildetes Heim mit reichen geistigen Interessen, jedoch mit geringen wirtschaftlichen Einkünften, wie es deren damals so viele in Deutschland gab, aus dem KARL WEIERSTRASS hervorgegangen ist. War das eine oder andere von den Geschwistern abwesend, so korrespondierten sie oft in ebenso fehlerfreiem Englisch oder Französisch miteinander, wie auf Deutsch. PETER schrieb auch lateinisch, und sein Briefwechsel handelte nicht selten über literarische Fragen und besonders über Musik. Es scheint, daß alle Kinder musikalisch waren, mit Ausnahme von KARL. Dieser unterschied sich hierdurch von so vielen der größten Mathematiker. PETER war auf eine ganz besondere Weise musikalisch: er las Noten und schrieb Musik. Genau so stand es mit seinem Schachinteresse. Er löste Schachaufgaben, aber spielte ungern Schach. In einem Brief von ELISE WEIERSTRASS an PETER (undatiert, vermutlich aus dem Jahre 1851 oder 1852) findet sich folgender Satz über KARLS Beziehungen zur Musik: „KARL hat es sich hier jetzt bequem gemacht; um seine Zeit auszufüllen oder vielleicht aus einem anderen Grunde will er Musik studieren und hat uns alle drei zu Lehrmeistern engagiert. Ich glaube aber nicht, daß wir gelehrt genug sind, ihm etwas beizubringen. Bis jetzt hat er noch keine sonderlichen Progresse gemacht."

Ein Bild von der gedrückten wirtschaftlichen Lage gibt ein Brief, den KLARA im Herbst 1853 an PETER schrieb und worin sie ihn ermahnt, nicht an Heirat zu denken, ehe er eine gesicherte Existenz habe: „Kennst Du den Stall, wo hinein viele geduldige Schafe gehen? Das ist das Wohnzimmer eines unbemittelten Bürgers im Winter. — Denkst Du noch an die traulichen Winterabende, wo wir im tiefsten Schweigen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 um ein Talglicht saßen? — Denkst Du noch an manches andere? — Kennst Du es wohl, wenn man nicht weiß, woher man dasjenige nehmen soll, was einem dringend fehlt? — Kennst Du all die häuslichen Freuden, die sich bei 4, 5, 6, 7, etc. hundert Thalers Familien so zahlreich einstellen und die darauf folgenden Schrecken, wenn das Getreide um 10, 20 Ggr im Preise steigt? Kennst Du es wohl, das Leben der Entsagung, Sorgen und Mühen? — dahin möchte ich mit keinem Geliebten dieser Erde ziehen, um das nochmals im zweiten Stadium durchzumachen". Das Bild, das sich hier entrollt, ist ja auch vielen in unseren nordischen Ländern wohlbekannt.

Vom Vater sind uns verschiedene Briefe hinterblieben, aus denen wir manches über seinen Charakter entnehmen können. Sie sind fast alle an den Sohn PETER gerichtet.

Die im besten Sinne des Wortes freisinnige Auffassung des Vaters von dem Verhältnis des Staats der Schule gegenüber tritt aus der folgenden Stelle eines Briefes an PETER, datiert: „Westernkotten, an meinem Namenstage 1849", hervor:

„Du willst etwas aus der deutschen Reform von mir wissen. Dessen kann ich mich wohl entheben, da sämmtlichen Gymnasien ja die Verhandlungen der Deputierten der Gymnasial-Lehrer zur Begutachtung des Gesetzes-Vorschlags wegen Reorganisation des Unterrichtswesens gedruckt und vollständig mitgetheilt werden und sie Dir also ohne Zweifel bereits zu Gesicht gekommen sind.

Mich haben diese Verhandlungen hauptsächlich nur in Bezug auf die Gehalts-Bestimmungen befriedigt; die meisten übrigen Abstimmungen riechen mir zu sehr nach Servilismus dem mir in den Tod zuwieder gewordenen Centralisations- und Staatsbevormundungs-Princip gegenüber, welches nach meiner Ansicht nirgends ungeeigneter ist, als in der Wirksamkeit der Geistesbildungsanstalten, und dessen Durchführung, wie ich nie bezweifelt habe, aber auch auf fast alle Staatstendenzen den traurigsten und zerstörendsten Einfluß äußert. Mich dünkt, die Beweise hievon liegen so nahe und machen sich so kenntlich, daß man mit Blindheit geschlagen sein müßte, wenn man es übersehen könnte.

Sind nicht die Haupt-Führer der Demokraten und Demagogen aus dem eigentlichen Stande der Philologen und Philosophen, so wie aus der durch die seitherige Regierungs-Bevormundung bis aufs äußerste empörten freiheitsliebenden Jugend herangereift?

Man mag die Regierungen vertheidigen und entschuldigen, so sehr man will und kann, die versuchte Fesselung der Geistesrichtungen mußte schon von vornherein dem Geschichts- und Menschenkenner als eine ungeheure Anmaßung erscheinen, und es kann daher eigentlich nicht wundern, daß sich in den Gemüthern von tausenden selbständiger und selbstdenkender Männer und Jünglinge mit der Allgewalt angestammter Vorurtheile ein glühender Ingrimm festgesetzt hat, der auf dem Wege der Regierungs-Bevormundung sicherlich nicht ausgetrieben wird und werden kann. Wie kurzsichtig oder aber wie schwächlich erscheint es also, wenn so viele, ja die meisten Mitglieder des so gedrückten Standes der Jugendbildner, wie sich bei Begutachtung der questionnirten Gesetzes-Vorlage ergeben hat, eines Theils sich noch so recht keine klare Idee von dem Reiche und der Macht der wahren Geistesfreiheit machen können oder wohl gar mit Verläugnung alles Vertrauens auf die göttliche Weltregierung in devotem Servilismus Maßnahmen huldigen, welche die Götter dieser Welt in ihrer Anmaßung ergreifen, um unserm lieben Herrgott ins Handwerk zu pfuschen. Ihr habt vom Staate weiter nichts zu fordern, als die äußere Stellung und den Lebensunterhalt; diese Verpflichtung gibt dem Staate aber noch keineswegs das Recht, sich auch um Unterricht und Erziehung im Allgemeinen so wenig als im Speciellen zu bekümmern.

Und warum soll dies auch nicht der Genossenschaft überlassen bleiben, wie es vordem Jahrhunderte lang war?"

Peter war zweifellos ein hochbegabter und kenntnisreicher Mann, aber es fehlte ihm, besonders während der Jugendzeit und im Anfang der Mannesjahre, die Ausgeglichenheit des Charakters, die nach Ansicht des Vaters seine bescheidenen äußeren Umstände hätten bedingen müssen. So schreibt der Vater in einem Briefe vom 24. Juni 1852:

„Ich habe Dir lange nicht geschrieben, ich wollte Dir dadurch andeuten, daß mir der Inhalt Deiner Briefe meistens nicht zusagt; ich wünsche von Dir Dein Thun, nicht Dein Denken und Fühlen zu erfahren; ersteres, mag es so geringfügig sein, als möglich, mag es auch nur in dem täglichen Wechsel der Beschäftigung und der geringsten Grüße bestehen, ist doch etwas Wirkliches, die Theilnahme und den Mitgenuß Erweckendes, und darum das echt Menschliche.

Im Ergehen und Hinschwimmen von Gefühlen und Betrachtungen verliert sich die Seele ins Nebelhafte und Unwahre und erzeugt, weil es im Grunde lediglich ein Kultus des Egoismus ist, zuletzt die widerwärtigste Blasirtheit.

Du hast Dir leider schon zu sehr angewohnt, Menschen, Zustand und Verhältnisse nur von diesem einseitigen Gesichtspunkte aus anzusehen, und scheinst es noch immer nicht zu merken, daß die Ursachen, weshalb Dir in Deinen Umgebungen so manches widerwärtig und miserabel erscheint, nicht so sehr in den Menschen und Zuständen selbst, auch nicht in der Individualität Deines Ichs, sondern vielmehr in der falschen und ausschließlich egoistischen Richtung Deines Seelenlebens liegt. Als studirter Philosoph solltest Du eigentlich dies besser erkennen als ich, und darum will ich mich auch auf diese Andeutungen beschränken, die aus dem innigsten Wunsche entspringen, daß Dir der Himmel bald Ruhe und Zufriedenheit am eigenen Heerde schenken möge. Nimm die Welt, wie sie ist, denke immer: ich bin ein Theil derselben und ein Wesen, wie die anderen, ohne Zweifel nicht schlechter, aber auch nicht besser, und bestimmt, dieselbe Bahn zu durchlaufen, zu essen, zu trinken, zu schlafen, zu lieben, zu heirathen und eine Familie zu gründen".

Peter charakterisiert sich selbst in einem Brief an Karl vom 28. April 1854. Die Einleitung bezieht sich auf philosophische Fragen und war lange liegen geblieben. Er fährt fort:

„Nachdem dieser Mischmasch, durch Zufall abgebrochen, lange Zeit gelegen — (denn wisse: für mich ist die größte Pein, Briefe zu schreiben. Geschäftsbriefe gern, nur keine vertrauten, worin man sich seinen Gedanken, Erinnerungen, Empfindungen überlassen darf, die mich nämlich (Du kennst sie aus alter Zeit, sie lauern wie Dämonen und Gespenster unter einer leichten Decke; nur leicht berührt surren sie auf, spuken aufs tollste und mißhandeln mich henkerhaft, und lassen nicht ab zu saugen, bis der letzte Tropfen Lebenslust und Muth ausgezogen ist von den Vampyren! Doch um Gotteswillen, genug davon — sie kommen schon — ich fühls an einem leichten Ziehen und Spannen in der Gegend des Zwölffinger-Darms) regelmäßig nicht nur in ein unheimliches Gebiet führen, sondern auch — Leibschmerzen macht. Es klingt dies komisch, aber es ist mehr: jeder Verdruß, materiell oder ideell oder phantasiell, endigt als Resultat mit Kneipen in den Eingeweiden; selbst alle edleren Gefühle — doch das gehört hier nicht her und geht Dich nichts an. Kurz und gut, ich sträube mich gegen alle Gefühle, wie ein Kind gegen Waschwasser; darum liebe ich nicht Freunde, nicht Feindschaft, nicht Veränderung, nicht Unruhe, nicht Hoffnung, nicht Bestrebungen, nicht Begeisterung; strebe nur nach einem friedlichen, ruhigen, möglichst monotonen Leben, ohne Denken und Empfinden und Trachten. — Begreifst Du nun etwa, wie es kommt, daß man keine Briefe schreibt? Daß einem Abrackern in einer mechanischen Klasse lieber ist, als Briefe schreiben? Daß man ein Stück Holz, einen Stein oder doch einen Wegerich mit Buckeln um sein Dasein beneidet? Gewiß, es ist nicht Trägheit, nicht Vergessenheit!) —, habe ich weder Lust, in den damaligen Gedankengang mich wieder hineinzustudieren, noch Macht dazu".

„Ein kahler, inhaltsleerer Brief nach so langem Zwischenraum; allein ich kann mal nicht anders. Ich bin radikal verdorben! Suche Nichts mir zuzureden; bei mir hilft Nichts, höchstens Rizinusöl, wenn ich Leibschmerzen habe. — Wenn wir mal wieder zusammenkämen, wir würden uns doch mehr zu erzählen haben! Thu mir nur den einzigen Gefallen, lieber Karl, schreibe mir bald wieder, und zwar, nachdem Du zuerst eine gute Flasche Weines getrunken hast, um in eine recht tolle, lustige Laune zu kommen, wie ich sie gern auch mal haben möchte, aber leider nie habe. Doch da es 12 Uhr ist, ich morgen 7 Uhr zum Orgeln muß, mein größtes Leidwesen in Krone — (er war Lehrer am dortigen Progymnasium) — so ist es verzeihlich, wenn ich schließe.

Lebewohl, lieber Bruder, bis Wiedersehn. Antworte, grolle nicht praeteritorum, bleibe gesund und freu Dich Deines Lebens, so gut Du kannst".

Leider ist in Peters Nachlass die Antwort Karls auf diesen Brief nicht mehr vorhanden. Es mag sein, daß Peter sich von ihr so betroffen gefühlt hat, daß er sie nicht aufbewahren wollte.

Dagegen ist uns ein Brief des Vaters, datiert Westernkotten, 3. August 1854, erhalten geblieben, der sowohl für den Vater als für Peter charakteristisch ist.

„Lieber Peter! Wenn Du vielleicht auf einen Brief von mir, als Antwort auf den Deinigen vom 25. Mai, gewartet hast, so hast Du Dich ebensowohl getäuscht, als uns Deine Zusage, regelmäßig jeden Monat schreiben zu wollen, wornach wir zunächst Deinen Brief pro Juni, und dann pro Juli abwarten zu müssen geglaubt haben, getäuscht hat. Aus dem Ausbleiben dieser Zusage-Briefe schließe ich oder folgere ich wenigstens, daß Du in dem nicht beneidenswerten Trubel des Konitzer Lebens Deine eigenen guten Vorsätze wieder vergessen hast. An sich rechne ich Dir das nicht hoch an, bin aber doch verpflichtet, zu bemerken, daß Du wahrlich nicht wohl daran thust, Dich nicht an solche kleine eingegangene Verpflichtungen ängstlich zu binden. Mich dünkt, Du müssest bereits erfahrungsmäßig zu der Einsicht gelangt sein, wie die Erfüllung der leichtern und kleinern Verpflichtungen zur Erfüllung der größern und wichtigern erst hinführt und sie alleine verbürgt; die Übung allein macht den Meister; nicht das Wissen und Wollen, das Thun ist die Hauptsache, und alles Thun muß eben im Kleinen, im beschränkten Maaße beginnen und seine Kraft gewinnen; es ist mit der psychischen Thätigkeit (meiner geringen Ansicht zufolge) wie mit der Bewegung der Welt- oder Himmels-Körper, die bloße Idee des Stoßes setzt keinen in Bewegung; eben so wenig bringt der bloße Vorsatz oder Wille eine psychische Erscheinung zuwege. Nehme ich eine oder mehrere sogenannte Kräfte als Ursachen der Bewegung sowohl in materiellen als immateriellen Dingen an, so gewinne ich nichts für meine Erkenntniß und bleibe also bei der Erfahrung in materiellen Dingen stehen, daß die Richtungen der Bewegung ihre Kulminationspunkte haben, von wo sie eigentlich ausgehen und wieder endigen, daß die Bewegungsgröße in den Kulminationspunkten $= 0$ ist, hier also die Bewegung erst entsteht, anfangs kaum merklich und unmeßbar klein ist, aber ganz allmählich wächst. Ihr wachsen gewissermaaßen im Fluge die Schwingen der Psyche.

Doch verlasse ich den Bereich dieser Reflexionen, die so schwer interessant zu machen sind und daher so leicht langweilig werden, und komme auf Gegenstände von practischerem Interesse zurück.

Was die Schilderung der Lebensweise und der Sitten dort betrifft, so mag dabei Dein Pinsel hie und da wohl etwas zu tief in die Farbe getüncht haben; im Wesentlichen ist es aber in den kleinen Städten Westfalens mit der ungebührlichen Verschwendung und dem luxuriösen Aufwande im gesellschaftlichen Verkehr, ebenso; und das hat auch sein Gutes, weil viele Leute davon leben. Thöricht und unverzeihlich ist es aber, wenn man auf die Idee kommt, dieses alles von Standes wegen mitmachen zu müssen, ohne die Mittel dazu zu besitzen, und Schulden deshalb zu machen; es beweiset zugleich evident, wie weit so viele Menschen noch von der wahren Freiheit, die nach meiner Ansicht hauptsächlich in Emancipation von Genuß-Sucht, Sinnen-Kitzel, Mode-Thorheiten, falschen

Ehre-Begriffen und eingewurzelten Vorurtheilen besteht, entfernt sind, so viel und so gern sie auch in Freiheitsträumen dahin leben und träumen.

Daß auch die Pfleger der Wissenschaft und die Bildner der intellectuellen Kräfte des Geistes, die Anreger der ästethischen und moralischen Gefühle der Jugend ebenfalls diesem Epicuräismus der Zeit huldigen oder auch nur bedauern sollten, aus Mangel an Fonds es nicht zu können, kann ich mir kaum denken, und, wenn es oder wo es wirklich der Fall ist, wird ihre Berufs-Ehre zu sehr dadurch tangirt, als daß sie sich nicht vor sich selbst deswegen schämen müßten. Darum, lieber Sohn, bleibe dabei, lebe zurückgezogen, bewege Dich daher mit Neigung innerhalb des Kreises Deiner beruflichen Wirksamkeit und der Pflege der Wissenschaften, beschränke nach wie vor Deinen Umgang auf Deine Berufsgenossen, und weise Aufforderungen zu luxuriösen Vergnügungen standhaft ab. Dabei bedenke wohl, daß es meistens eine Selbsttäuschung des eiteln Herzens ist, wenn man sagt und glaubt: „man dürfe sich doch nicht ganz vom gesellschaftlichen Verkehr ausschließen, es sey aus so vielen anderen Gründen rathsam, in dieser Beziehung dann und wann ein Opfer zu bringen". Dies weiß Dir am Ende Niemand Dank, und Du verfehlst dabei den Zweck sogar gänzlich.

Willst Du Dir eine gewisse Stellung und ein gewisses Ansehn und Gewicht in der Gesellschaft erwerben, so dient jenes stets Mitmachen wahrlich nicht dazu, um dahin zu gelangen, vielmehr würde zum Zweck führen, wenn Du Dich rar machst, eine seltene Erscheinung bist, und inmittelst durch angesträngte Thätigkeit und N.B. Sparsamkeit (deren Grundbedingungen Ordnungsliebe und Propretät sind) nach und nach eine bürgerliche oder fundirte sociale Stellung zu gewinnen suchst.

Doch es ist leicht predigen und Rath geben; ich weiß sehr gut, daß dies meine schwache Seite ist, daß gar wenig damit ausgerichtet wird, und doch kann ichs nicht gut lassen.

Nimm es daher nicht übel auf, lieber Peter, und laß mich hoffen, Du sehest darin nur ein Zeichen der väterlichen Liebe. Was das Heirathen anbetrifft, so bin ich weit entfernt, Dir darin einen speciellen Rath ertheilen zu wollen. Heirathen ist ein Lotterie-Spiel, in Bezug auf Gewinnen und Verlieren im Allgemeinen. Erfolgt eine Heirath aus Berechnung, sei es, indem man die Ehe als eine Versorgungs-Anstalt betrachtet, oder in der Erwartung, mit Frau und Kindern werde in den Neigungen und Gewohnheiten, insofern solche zu bedeutenden Mehrausgaben führten, eine plötzliche oder successive Änderung in entgegengesetzter Richtung eintreten, sei es, daß man meint, in der Ehe werde man seine Bequemlichkeit und Pflege, den englischen Komfort oder das reizende 'home' finden, so lehrt die Erfahrung, daß, und wenn die Berechnung auch mit aller mathematischen Schärfe angestellt worden ist und ein positives, vielleicht hoch potenzirtes x geliefert hat, dasselbe genau besehen $= 0$ und meistens sogar als eine negative Größe sich darstellt.

Wer zu heirathen die Absicht hat, hat sich zunächst zu fragen, vermagst Du den Zweck der Ehe und die Verpflichtungen des Ehestandes gehörig zu erfüllen? Also kannst Du Frau und Kinder ernähren, sie anständig ernähren, vermag Deine künftige Gattin die Kinder zu erziehen, werdet Ihr die Mittel erübrigen, um theils durch intellectuelle Bildung, theils pecuniäre Unterstützung die künftige bürgerliche Stellung der Kinder zu begründen?

Wer diese ernste Frage nach sorgfältiger und unpartheiischer Selbstprüfung bejahend beantworten kann, wozu allerdings in unserer Zeit ein bedeutendes auf vollkommen erreichte Selbstbeherrschung basirtes Selbstvertrauen gehört, der heirathe; wer sie nicht oder doch nur zweifelnd beantworten kann, thut besser, unverheirathet zu bleiben. Du mußt also offenbar selbst am besten wissen, was zu thun ist, und bist meiner Ansicht nach eines Raths auch nicht bedürftig, welcher in solchen Heirathsangelegenheiten ohnehin meistens zu früh oder zu spät kommt und wobei es meistens beschaffen ist, wie bei sonstigen Rathschlägen. Aus den Erfahrungen meines Lebens habe ich die Überzeugung gewonnen,

a) daß es keine leichtere, dummere und zwecklosere Beschäftigung gibt, als seine Zeit mit Ertheilen von sogenannten guten Rathschlägen zu vergeuden, und

b) daß, wenn vernünftige Menschen sich Raths erholen, sie sich meistens schon entschlossen haben, was sie thun wollen, aber doch zur Beruhigung von allerhand Gewissensbedenken gerne sähen, wenn ihnen der Rathgeber einen dem gedachten Entschlusse entsprechenden Rath gäbe, um im schlimmsten Falle sich selbst damit täuschen zu können, auf fremden Rath und Einfluß gehandelt zu haben.

Ach, das menschliche Herz ist ein durchtriebener Schalk, oft ohne es selbst zu wissen.

Nach dem Inhalte Deines Schreibens mußt Du noch immer sehr in Schulden stecken, obgleich ich, trotz alledem, was Du sagst, nicht einsehe, wie dies möglich ist, eher daß Du im eigentlichen Sinne verschwendet hast. Du sagst, Deine Kleidung koste Dir jährlich 100 Th.; ich sage Dir dagegen, für Mutter und mich kostet die Garderobe noch nicht voll die Hälfte. Wenn Du also nicht förmlich zu Grunde gehen und ein wirklicher Lump werden willst, so mußt Du absolut einen andern Weg einschlagen und nach reiflicher Überlegung plötzlich einen ernsten Entschluß fassen auf einen längern Zeitraum hinaus und solchen ernstlich durchführen.

Zur Hülfe und Unterstützung, insoweit solche unsern Verhältnissen nach zulässig ist, bin ich unter der Bedingung bereit, daß Du offen und wahrhaft, auch speciell, mit Deinen Verhältnissen in dieser Beziehung mich bekannt machst.

Wenn wir die Sache mündlich besprechen könnten, das wäre freilich am besten, und ich würde Dich auch bitten, diese Ferien uns zu besuchen, wenn Du im Stande wärest, die Reisekosten hieher zu bestreiten; Geld zur Rückreise würde ich wohl übrig haben.

Überlege Dir das, und fange endlich einmal an, ein practischer Mensch zu werden, und gib die Kindereien auf."

Daß ein Vater an einen Sohn, der das 34. Lebensjahr schon vollendet hat, einen solchen Brief schreibt, dürfte jedenfalls von schwedischem Gesichtspunkt aus als außergewöhnlich anzusehen sein. Peter war ja doch bereits Inhaber einer nicht unbedeutenden Stelle. So spricht wohl nirgends ein Vater, wenn er sich nicht im Besitz einer gewissen Autorität weiß, die nicht bloß auf der Vaterwürde, sondern zugleich auf wirklicher geistiger Überlegenheit beruht. Die wenigen noch vorhandenen Briefe an Karl sind in einem wesentlich anderen Ton gehalten.

Ein neuer Brief an Peter, datiert Westernkotten, 24. Juli 1855, trägt durch und durch das Gepräge der Weltklugheit des praktischen Mannes:

„Lieber Peter! Auf Deine Benachrichtigung wegen Erhebung des dortigen Pro- zu einem vollständigen Gymnasio beeile ich mich, Dir zu rathen und Dich anzuspornen, alles Mögliche aufzubieten und aufbieten zu lassen (z. B. durch den Director Peters), um zu einer höhern Stellung und ausreichenderm Diensteinkommen zu gelangen. Es kommt mir beinahe so vor, als wenn man Dir keineswegs abgeneigt sei, jedoch mehr Gefügigkeit und ein schickliches Eingehen in die zeitlichen Geschäfts-Ansichten gewärtige. Da das einzelne Individium den Weltlauf nicht ändern und aufhalten kann und durch Antagonismus und Widerstand nicht nur dieser Bewegung kein Hemmniß dargeboten wird, sondern dieselbe nach bekannten Naturgesetzen vielmehr dadurch nur befördert wird: so ist die alte apostolische Regel: Schicket euch in die Zeit! als ein physiologisch und psychologisch wohl begründetes Axiom und darum auch als eine nicht nur ästhetisch, sondern auch juristisch festgestellte Lehre der wahren Lebensweisheit zu betrachten.

Suche daher mit Sorgfalt jeden Verdacht, daß Du eine mehr als gewöhnliche Neigung verspürtest, die Zeit-Ansichten der herrschenden Bürokratie in Religion, Wissenschaft und Politik zu bezweifeln und zu bekämpfen, durchaus fern zu halten.

Ist in Bezug auf Deine Persönlichkeit ein Wunsch ausgesprochen, Dich bald verheirathet zu sehen, nun ja, so zeige Dich geneigt, und äußere dagegen das Verlangen, man möge Dir nur dazu Gelegenheit geben. Kannst Du durch eine Heirath zur schnelleren Beförderung und baldigern Vermehrung Deines Diensteinkommens gelangen, so gehe nur unbedenklich darauf ein; der Fortschritt und das Vorankommen in der Welt ist eine nothwendige Bedingung alles Kultur-Fortschritts. Jeder Mann aber ist befähigt, hierin seinen Weg zu bahnen, und je mehr er dabei mit Beharrlichkeit und Ausdauer verfährt, desto weiter wird er gelangen. Der Mensch ist seines Glückes Schmied.

Ich glaube am Ende auch für Dich in einer angemessenen Heirath eine Gunst des Schicksals zu erblicken. (Peter blieb indessen unverheiratet.) Nur mußt Du nicht glauben, in der Ehe den Himmel voller Geigen zu sehen, sondern zufrieden sein, wenn dieselbe neben dem Home nur eine eben erträgliche Existenz gewährt. Glück oder Zufriedenheit, Lebensfreude, Geistesheiterkeit und desgleichen muß sich ein jeder selbst bereiten, und nicht verlangen, daß dies sich selbst gegenüber von einem andern geschehe, und merkwürdiger Weise wird eben durch den Ausschluß dieses Verlangens bei egoistischer, aber vernünftig und consequent durchgeführter Verfolgung des Bestrebens grade derjenige Vortheil herbei geführt, den man von andern zu empfangen wünscht.

Da Karl in den nächsten Tagen Dich besuchen wird, so berathe Dich mit ihm sowohl über ein etwaiges Heiraths-Projekt als über Deine sonstigen Angelegenheiten, aber offen, wahrhaft und aufrichtig. Du bist wenigstens alt genug geworden, um die Kleinlichkeit der Zurückhaltung in allen solchen Dingen, die in der Regel jeder betreffende ohnehin kennt oder leicht erfahren kann, einzusehen und Dir dabei die Überzeugung zu verschaffen, daß man durch solche Zurückhaltung nicht nur die Gewinnung besserer Ansichten durch Austausch der Ideen ausschließt, sondern auch seine Angehörigen, Freunde und Gönner zum Beistande abgeneigt macht.

Wenn Du ein Mädchen von honetter Familie und erträglicher Bildung heirathen willst, so werde ich in Bezug auf Ausstattung gerne zu Hülfe kommen."

Nach dieser den Vater und den Bruder Weierstrass' betreffenden Abschweifung wende ich mich wieder zu Weierstrass selbst.

In Westernkotten gab es keine Schule, in die man Karl hätte bringen können. Er besuchte daher zuerst die Schule in dem nahegelegenen Münster und fand dann, 14 jährig, in der 6. Klasse des Katholischen Gymnasiums in Paderborn Aufnahme. Dort war der Lehrgang auf $6\frac{1}{2}$ Jahre berechnet, aber Karl übersprang die 3. Klasse und wurde von der 4. unmittelbar in die 2. Klasse versetzt, wodurch er die Schulzeit um 1 Jahr abkürzte. Mit glänzenden Zeugnissen verließ er im August 1834, 19 Jahre alt, das Gymnasium. Seine erste mathematische Wirksamkeit hatte darin bestanden, daß er, 15 jährig, für eine reiche Kaufmannsfrau, die einen einträglichen Handel mit Schinken und Butter betrieb, die Bücher geführt hatte. Als er bald darauf in die 2. Klasse kam, beschäftigte er sich eifrig mit Integralrechnung. Er führte darüber lebhafte Debatten mit einem interessierten Kameraden, der vielleicht auch daran gedacht hatte, Mathematiker zu werden, aber, wie dies nicht selten ist, abgeschreckt durch KARLS große Überlegenheit zu einem anderen Fach überging.

WEIERSTRASS gehörte, ebenso wie CARL FRIEDRICH GAUSS, LOUIS AUGUSTIN CAUCHY, HENRI POINCARÉ und so viele andere, zu den Mathematikern, deren Allgemeinbegabung das gewöhnliche Maß weit überstieg. Bei allen wirklich großen Männern unserer Wissenschaft war dies ja auch die Regel. Wenn weitere Kreise der Gebildeten manchmal über die Allgemeinbegabung der Mathematiker irrige Vorstellungen haben, so findet dies seine Erklärung in der intensiven, alles absorbierenden Denktätigkeit, die oft die Größten unter uns auszeichnet und die sie dazu treibt, alle ihre geistigen Kräfte auf die für das profanum vulgus so unverständlichen mathematischen Probleme zu konzentrieren. Archimedes' bekannter Ausspruch: „Störe meine Kreise nicht!" hat seitdem noch oft Widerklang gefunden und findet ihn auch heute noch. Wie könnte man von der Allgemeinheit Verständnis dafür beanspruchen, was diese Worte ihrem innersten Wesen nach bedeuten?

Das Gymnasium in Paderborn war nach französischem Muster darauf angelegt, den Ehrgeiz der begabtesten Schüler im höchsten Grade anzuspornen. Die gedruckten Programme des Gymnasiums enthielten in jedem Jahr die Namen der Schüler, die mit Preisen ausgezeichnet worden waren. Den Namen KARL WEIERSTRASS findet man stets, mehrmals als preisgekrönt in sechs verschiedenen Fächern, einmal sogar in sieben. Er erhielt immer den ersten Preis in seiner Muttersprache Deutsch und in zwei anderen Fächern, unter denen Lateinisch, Griechisch und Mathematik miteinander abwechselten. Gelegentlich erhielt er Preise auch in anderen Fächern, und zwar während seiner gesamten Schulzeit in allen Fächern außer einem, Schönschreiben. Ein eigentümliches Schicksal wollte es, daß er in einem späteren Abschnitt seines Lebens Lehrer auch im Schreiben wurde. — Wenn ein Schüler 3 Prämien erhalten hatte, spielte ihm zu Ehren eine Musikkapelle ein Stück. Für jede weitere Prämie wurde ein neues Stück gespielt, sodaß z. B. einmal zu Ehren des jungen KARL WEIERSTRASS hintereinander 4 Musikstücke gespielt wurden. Von seiner Schulzeit her bewahrte sich WEIERSTRASS immer die Erkenntnis, daß alle wirklichen Wissenschaftszweige als ein Ganzes zusammengehören. Als später in den siebziger Jahren die Frage auftauchte, ob man die philosophische Fakultät der Universität in

Berlin in zwei Abteilungen zerlegen sollte, sprach WEIERSTRASS sich dagegen aus: „Alle Fächer der Fakultät gehören zusammen, und die Philosophie bildet ihr gemeinsames Band“. WEIERSTRASS setzte seinen Willen durch, und noch heute ist Berlin eine der wenigen Universitäten, wo die übliche Zweiteilung nicht stattgefunden hat. Als WEIERSTRASS am 15. Oktober 1873 das Rektorat der Universität Berlin übernahm, brachte er seine Auffassung von der Stellung der Wissenschaften zueinander in folgenden Worten zum Ausdruck: „Der Forschungstrieb entspringt dem im innersten Wesen des menschlichen Geistes begründeten Bedürfnis, in dem Mit- und Nacheinandersein der Dinge Ordnung und gesetzmäßigen Zusammenhang zu entdecken. Die einzelnen wissenschaftlichen Disziplinen erhalten ihre Bedeutung dadurch, daß sie alle zu diesem Zwecke mitwirken, aber nicht zusammenhanglos, sondern gleichsam eine Kette bildend, welche von der Mathematik als dem einen äußersten Gliede ausgehend durch die verschiedenen Zweige der Naturkunde und der historischen Wissenschaften im weitesten Sinne des Wortes hindurch bis zu der Philosophie als dem Schlußgliede sich hinzieht. Mathematik und Naturwissenschaft beschäftigen sich beide mit den Erscheinungsformen des Seins in Raum und Zeit, jene mit den in der Idee existierenden, überhaupt möglichen, diese mit den in der Körperwelt verwirklichten. So ist die Mathematik für die Naturwissenschaft eine notwendige Voraussetzung, nicht eine Hilfsdisziplin im gewöhnlichen Sinne; umgekehrt liefert der beobachtende und experimentierende Naturforscher in seinen Resultaten dem Mathematiker mehr als eine bloße Aufgabensammlung. Die historischen Disziplinen, ferner Geschichtswissenschaft im engern Sinne, Sprachforschung usw., die im Entwicklungsgang des Menschengeschlechts die waltenden Gesetze und treibenden Kräfte zu erforschen und darzulegen haben, finden ihre Verbindung mit den Naturwissenschaften darin, daß die Entwicklung des Menschenlebens, in den Völkern wie in dem Einzelnen, durch die Wechselwirkung zwischen seinem eignen Sein und dem gesamten Sein außer ihm bedingt ist. Die Philosophie endlich, indem sie die Ergebnisse aller Wissenschaften zusammenfaßt, reinigt, vergeistigt, arbeitet an der Verwirklichung des wissenschaftlichen Ideals, in der unendlichen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen der Natur und des geistigen Lebens die Einheit, das Absolute zu erkennen. In diesem Sinne kann man sagen, daß Erkenntnis des Wesens der Dinge das letzte Ziel aller wissenschaftlichen Forschung sei und daß nach der Stufe, welche auf dem Wege zu diesem Ziele in jedem Zeitalter die Menschheit erreicht hat, der Grad der allgemeinen Bildung dieses Zeitalters bemessen werden müsse ...... Auch kann heutzutage, wo nicht nur alle wissenschaftlichen Disziplinen eine Überfülle des Stoffs darbieten, sondern auch viele in raschester Entwicklung begriffen sind, niemand mehr dazu gelangen, in dem gesamten Gebiet des Wissens in dem Maße heimisch zu werden, wie es in früherer Zeit wohl einzelnen besonders hoch begabten und unermüdlich tätigen Menschen gelungen ist. Gleichwohl ist es einem wohlvorbereiteten und fleißigen jungen Manne auch gegenwärtig möglich und, wenn er später den Sinn für ideale Zwecke nicht ganz verlieren, den Bestrebungen anderer nicht fremd gegenüberstehen und auch in den Bewegungen und Kämpfen des Lebens nicht haltlos hin und her schwanken will, unumgänglich notwendig, neben dem gründlichen Studium eines Hauptfachs auch mit denjenigen Disziplinen, die nicht gerade Hilfsdisziplinen der seinigen sind, sich wenigstens so weit zu beschäftigen, daß er von der Aufgabe und der wissenschaftlichen Bedeutung jeder einzelnen eine richtige Vorstellung erhält ....“

Es war natürlich, daß die Unterrichtsmethode, die in Paderborn zur Anwendung gelangte, sowohl KARLS Ehrgeiz wie die Erwartungen aller anderen bezüglich seiner späteren Entwicklung im höchsten Grade steigerte. Beim Vater scheint bezüglich seines Ältesten der praktische Verstand die Oberhand über den Idealismus gewonnen zu haben. Er wünschte seinem Sohne eine im äußeren Sinne des Wortes möglichst glänzende Zukunft und schickte ihn daher auf die Universität Bonn, die Pflanzstätte des höheren preußischen Beamtentums. Dort sollte er sich dem Studium der Kameralwissenschaften widmen und dabei gleichzeitig eine gründliche juristische Ausbildung erwerben. Es zeigte sich indessen bald, daß diese Studien für WEIERSTRASS nicht genug Wissenschaftliches enthielten, sondern für ihn nur ein Brotstudium bedeuten konnten; dazu aber konnte er sich nicht entschließen. Das Leben und die Kameradschaft lockten ihn. Er trat in das vornehme Korps Saxonia ein und rückte dort schnell zum Fuchsmajor auf. Auch erwarb er sich eine so hervorragende Geschicklichkeit in der Führung des bei studentischen Mensuren üblichen Schlägers, daß sein Gesicht nicht so wie das vieler ehemaliger Korpsstudenten von Schmissen entstellt oder, wie andere meinen, geziert war. Er war seinen Gegnern stets so überlegen, erzählte mir mehr als ein halbes Jahrhundert später mit Stolz sein Bruder PETER, daß er überhaupt niemals verwundet wurde.

Es war ein fröhliches Leben, voll von spannenden Jugendabenteuern, von Kneipen und Mensuren, wie es noch heute unter deutschen Korpsstudenten vorkommt. Die Mathematik ließ WEIERSTRASS jedoch niemals beiseite liegen. LAPLACES Mécanique céleste, JACOBIS Fundamenta nova und ein zufällig bekommenes Kollegheft über eine Vorlesung von GUDERMANN über elliptische Funktionen (nach GUDERMANNS Ausdrucksweise „Modularfunktionen“) gehörten zu seiner Hauslektüre. Mathematische Vorlesungen besuchte er ebenso selten wie kameralistische oder juristische, mit Ausnahme einer einsemestrigen Vorlesung des berühmten Geometers PLÜCKER, der seit 1836 Professor der Mathematik an der Universität Bonn war. Daß indessen WEIERSTRASS dank seiner schnellen Auffassungsgabe und seiner klaren Denkweise sich fast spielend auch einen bemerkenswerten Grad juristischer Schärfe erwarb, zeigte sich zum Staunen seiner Kameraden und juristischen Lehrer, als er bei einer Promotion als Opponent gegen einen seiner Freunde, den späteren Präsidenten des mecklenburgischen Obergerichts, Dr. BUDDE, auftrat.

Die Zeit verstrich. Volle vier Jahre waren vergangen, ohne daß WEIERSTRASS sich zum Examen gemeldet hätte. Seine Eltern, die in dieser langen Zeit nur spärliche Nachrichten von ihm erhalten hatten, begannen unruhig zu werden. Da fand er sich plötzlich im Spätherbst 1838 wieder im Elternhause ein. Man kann sich leicht die Bestürzung und die Sorge vorstellen, die alle ihm Nahestehenden beschlich. Ich bekam einen lebhaften Eindruck davon, als ich im Februar 1904, 7 Jahre nach KARLS Tod, Gelegenheit fand, PETER WEIERSTRASS in Breslau zu besuchen. Dieser hatte mir bei einem früheren Zusammentreffen, im Sommer des vorhergehenden Jahres, ein Jugendbildnis KARLS versprochen, das aus der Bonner Zeit stammte. Dieses Bild hatte eine eigentümliche Vorgeschichte. Kurze Zeit nach KARLS Tod [1] war es PETER WEIERSTRASS mit einem Zettel zugegangen, der besagte, daß es von Rechts wegen PETER gehöre. PETER holte nun das Bild heraus, das er in einem Schrank verschlossen verwahrt hielt. Mit dem Bild vor sich begann er von der Bonner Zeit und von der Heimkehr des Bruders im Jahre 1838 zu erzählen. Als er daran zurückdachte, vergoß er Tränen; er war bei meinem Besuch 84 Jahre alt und starb bald darauf im Frühjahr desselben Jahres. Er erzählte: „Wie elend sah KARL damals aus, als er wieder nach Hause kam! Welch tiefer Schmerz, meinen großen Bruder in so einem Zustand zu finden! Vier Jahre und kein Examen!“ usw. Ich brauchte eine gewisse Zeit, um PETER zu beruhigen und um seine Gedanken darauf zu lenken, wie glänzend doch alles am Ende abgelaufen war. Das Porträt, das sich jetzt in meiner Villa, dem zukünftigen mathematischen Institut, in Djursholm befindet, wurde mir gelegentlich dieses Besuches von PETER feierlichst geschenkt.

Vorher hatte ich PETER in Bad Cudowa am 28./29. Juni 1903 besucht. Hierüber habe ich in meinen Notizen folgende Aufzeichnungen gefunden:

„Gespräch mit PETER WEIERSTRASS am 28. Juni 1903 vor einer Konditorei im Kurpark von Bad Cudowa.

Nach Überwindung verschiedener Schwierigkeiten konnte ich endlich seiner habhaft werden, und wir verbrachten die Zeit von 8—10 Uhr zusammen bei

[1] An WEIERSTRASS' Berliner Wohnhause, Friedrich-Wilhelm-Straße, wurde 1915 eine Gedenktafel angebracht.

einem Glase Wein. Er ist jetzt 83 Jahre alt, läuft infolge eines Fußleidens nur mit Schwierigkeiten, geht aber noch ziemlich viel spazieren. Nach dem Tode seiner Schwester KLARA befiel ihn ein nervöses Leiden, das ihn besonders mit Schlaflosigkeit plagte und sich verschlimmerte, sobald er genötigt war, von seiner Familie zu sprechen. Deshalb habe er auch meinen Brief nicht beantwortet. Jetzt kommt er seit 4 Jahren nach Cudowa, wo sein Leiden sich gebessert hat. Die Kellnerinnen im Hotel Bellevue erzählten mir indessen, daß er nie vor 12 Uhr, oft nicht vor 2 Uhr nachts zu Bett ginge. Er sieht ziemlich schlecht aus und hört auch recht schwer, doch scheint er im Besitz seiner vollen Geisteskräfte zu sein. Er beschäftigt sich noch mit Schachaufgaben; gespielt hat er Schach ja niemals, das Spielen strengt ihn zu sehr an; aber er löst Schachprobleme umso lieber, je kniffliger sie sind, und stellt selbst neue auf. Auch der Vater war Schachspieler, aber nur mittelmäßig".

„Gespräch mit PETER WEIERSTRASS am 29. Juni 1903, Cudowa, Hotel Bellevue. Er empfing mich herzlich. Er wohnt in einem großen, schönen Zimmer mit Balkon; auf dem Tisch viele Blumen. Er ist heute 83 Jahre alt geworden. Während meiner Anwesenheit kam eine kleine, niedliche Kellnerin aus der Konditorei, wo er des Abends sein Butterbrot ißt und manchmal sein Glas Wein trinkt, um zu gratulieren und ihm ein schönes Bukett zu überreichen. Ein paar andere hübsche Mädchen begleiteten uns gestern abend zur Pension Viktoria, um ihm alsdann das Geleit auf dem Heimweg zu geben. Er scheint die am meisten beachtete Gestalt Cudowas zu sein, wegen seines hohen Alters, seiner körperlichen Gebrechlichkeit und seines scharfen Verstandes. Und noch dazu ist er ein Bruder des großen WEIERSTRASS! Mein Kommen hatte ein unerhörtes Aufsehen erregt, und wir wurden von Neugierigen umringt, die, nur um unser Gespräch zu belauschen, in der Konditorei Platz nahmen. Er hatte in der Nacht vorzüglich geschlafen, „wie ein Block". Aber trotz der Unterstützung der beiden hübschen Mädel war ihm der Rückweg von Viktoria nach Bellevue sehr sauer geworden. Der wahre Grund, weshalb er mir gefolgt war, war der, daß er befürchtete, keinen Schlaf zu finden, nach der inneren Erregung, in die ihn sein Gespräch mit mir über alles, was ihm im Leben teuer gewesen und was nun unwiederbringlich verloren war, gebracht hatte. Er steht ganz allein da, seine Haushälterin wird nach seinem Tode alles bekommen. Vielleicht wird er aus Pietät einen Teil der Andenken an seinen Bruder in sichere Verwahrung geben, vielleicht nicht. Mein Anerbieten, ihm eine photographische Kopie meines WEIERSTRASS-Bildnisses (ein Doppelstück des Bildnisses von WEIERSTRASS im 80. Jahre, welches sich in der Nationalgalerie befindet) zu schenken, lehnte er ab. „Teils regt es mich viel zu sehr auf, teils habe ich bereits mehr Photographien aus allen Abschnitten seines Lebens, als ich Platz habe". Vor einiger Zeit war ihm aus Berlin ohne Namensnennung ein Ölbild von WEIERSTRASS in seiner blühenden Jugend zugeschickt worden [1]. Er hatte nie davon gewußt, daß ein solches Porträt vorhanden war, ebensowenig hatte seine Schwester jemals etwas davon gehört oder gesehen. Eine Kopie des Ölbildes, das an einer Kante beschädigt war, hatte sich unter WEIERSTRASS' hinterlassenen Papieren befunden. KNOBLAUCH hatte sie sich ausgebeten und erhalten. „Was soll ich nun mit dem Original machen? Ich möchte es in treuen, pietätvollen Händen wissen. Wollen Sie es haben?" Er wagt indessen nicht, es abzusenden, bevor er im September nach Breslau zurückkommt, und dann muß ich ihm vorher schreiben und ganz genau meine Adresse angeben.

„Alle sind sie tot, ich darf nicht an die Meinen denken, da werde ich nervös und kann nicht schlafen, und das ist schrecklich. Ich versuche nur, meine Gesundheit annähernd auf der Höhe zu halten, daß ich nicht zu viel zu leiden habe. Dabei hilft mir CUDOWA. Allzulange kann es aber nicht mehr vorhalten, und das ist gut so. Leben Sie wohl! Ich möchte Sie gern noch einmal wiedersehen."

„Ich habe den gleichen Wunsch und werde versuchen, im September wieder nach Breslau zu kommen."

Was sollte nun geschehen nach KARLS Rückkehr aus Bonn? Das war das ernste Problem, das sich für KARL selbst wie für den Vater erhob. 4 Jahre der besten Jugendzeit vergeudet! Noch einmal von vorn anzufangen, erlaubte die wirtschaftliche Lage der Familie nicht. Indessen so völlig vergeudet war die Zeit doch nicht; denn WEIERSTRASS hatte die Mathematik nicht ganz beiseite gelassen. Der Präsident des Obergerichts in Paderborn, SCHLECHDENTHAL, der bei den Abschlußprüfungen der Schule in Paderborn den Vorsitz führte, war auf WEIERSTRASS aufmerksam geworden, umsomehr, als er sich selbst von seiner Jugend her ein gewisses Interesse für Mathematik bewahrt hatte. Während der ganzen Schulzeit war er WEIERSTRASS ein väterlicher Freund gewesen. Jetzt fand er mit WEIERSTRASS zusammen eine Lösung. Um an einer der größeren Universitäten mit dem Doktortitel als Endziel von neuem zu beginnen, reichten die Mittel nicht aus, aber an der nahegelegenen Akademie Münster konnte man in kürzerer Zeit als an einer Volluniversität ein Staatsexamen erreichen, das den Weg zum Lehrerberuf eröffnete, wenn auch ohne die Doktorwürde. Hierbei war es für WEIERSTRASS besonders verlockend, daß in Münster GUDERMANN war, mit

[1] Eben das oben erwähnte.

dem er schon durch das in Bonn geliehene Kollegheft eine angenehme Bekanntschaft gemacht hatte. So wurde beschlossen, daß er sich an der Akademie Münster immatrikulieren lassen sollte. Dies geschah denn auch und zwar am 22. Mai 1839, einem Tage, den die Universität Münster mit einer Pietät, wie sie gerade die deutschen Universitäten besonders auszeichnet, als einen ihrer großen Gedenktage in der Erinnerung bewahrt.

Gudermann war der einzige Lehrer, dessen Vorlesungen Weierstrass hörte. Bei der ersten Vorlesung waren 13 Zuhörer zugegen. Die Vorlesung stieg jedoch bald in solche Höhen, daß die Luft für einen so großen Zuhörerkreis zu dünn wurde. Zur zweiten Vorlesung meldete sich nur ein Zuhörer, Karl Weierstrass, zur dritten wieder derselbe eine, Karl Weierstrass, dessen glänzende Begabung und durchdringender Scharfsinn bald kein Geheimnis mehr für den Vortragenden blieben. Gudermann entschloß sich nun, für Weierstrass noch ein Privatissimum über „analytische Sphärik" zu lesen.

In seinem ganzen späteren Leben bewahrte sich Weierstrass tiefste Verehrung und wärmste Dankbarkeit für Gudermann. Bei allen wichtigen Anlässen betonte er seine Dankesschuld gegenüber seinem verehrten Lehrer.

Keiner der vielen Mathematiker Deutschlands und anderer Länder, die an Weierstrass' siebzigstem und später an seinem achtzigsten Geburtstage in Berlin versammelt waren, um ihm ihre Huldigungen darzubringen, wird jemals die warmen Worte vergessen, welche er dabei dem spendete, welchen er seinen Lehrer nannte. Dasselbe tat er, als er in die Berliner Akademie eintrat [1]; immer das Gleiche, sobald sich dazu Gelegenheit bot. Gudermann gehörte indessen nicht zu den Entdeckern neuer Wahrheiten, ebensowenig zu denen, welche alten Wahrheiten ihre endgültige und genaue Form zu geben vermögen. Unter seinen umfangreichen Arbeiten ist kaum eine nicht der Vergessenheit anheimgefallen, aber Weierstrass hat dafür gesorgt, daß der Name Gudermann immer mit Verehrung von allen Mathematikern und Freunden der Mathematik genannt werden wird. Dies ist nicht nur ein deutscher Charakterzug, wir haben dasselbe in Norwegen, wo Abel seinen Lehrer Holmboe für alle Zeiten unsterblich gemacht hat.

Weierstrass hatte sich im Frühjahr 1839 immatrikulieren lassen. Schon im Herbst des gleichen Jahres ließ er sich wieder exmatrikulieren, um sich zum Staatsexamen vorzubereiten. Das Schreiben, durch das er sich zu diesem anmeldete, ist sehr charakteristisch. Es ist datiert: Westernkotten, 29. Februar 1840, und an den Vorsitzenden der Prüfungskommission gerichtet:

„Als ich im Herbst 1834 die Universität bezog, wurde ich durch äußere

[1] Akademische Antrittsrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Berliner Akademie am 9. Juli 1857. Mathematische Werke, Band 1, p. 223—226.

Veranlassung bewogen, das kameralistische Fach zu ergreifen, obwohl ich mich, wenn ich meiner Neigung hätte folgen können, sicherlich für Mathematik und verwandte Wissenschaften entschieden haben würde. Der sehnliche Wunsch jedoch, mich auch mit diesen meinen Lieblingsgegenständen näher bekannt zu machen, führte mich immer wieder auf sie zurück, und je mehr ich mich mit ihnen beschäftigte, um so eifriger ward mein Bestreben, in einem Studium derselben meine Kräfte zu versuchen, wobei ich das Glück hatte, in dem verstorbenen Prof. v. MÜNCHOW[1] zu Bonn einen wohlwollenden und einsichtsvollen Ratgeber und Unterstützer zu finden. Die immer mehr sich befestigende Überzeugung, daß die Wahl meines zukünftigen Berufes ein Fehlgriff gewesen sei, indem ich fühlte, daß mir Anlage und Geschick zu einem tüchtigen Kameralisten oder Juristen abging, brachte mich endlich zu dem Entschluß, mich ganz einem Studium zu widmen, welches mit meiner Neigung übereinstimmte und das ich mit Hoffnung auf Erfolg betreiben zu können erwarten durfte. Mancherlei Verhältnisse jedoch, die niederdrückend und hemmend auf mich einwirkten, schwächten Lust und Kraft zu rüstigem Weiterstreben, und körperlich und geistig leidend beschränkte ich mich lange Zeit auf Selbststudium. Als ich Bonn verließ, glaubte ich wohl, manches gelernt und mir angeeignet zu haben; aber ich konnte mich nicht darüber täuschen, wie gar manches mir noch abging; erst nachdem ich ein halbes Jahr zu Hause zugebracht hatte, war es mir vergönnt, in Münster unter günstigen Umständen, ungestört von äußeren Einflüssen und ein festes Ziel im Auge behaltend, meine Studien fortzusetzen, und ich hoffe, diese Zeit nach bestem Vermögen benutzt zu haben. Gern würde ich noch längere Zeit auf meine weitere Ausbildung verwenden, ehe ich mich zur Prüfung melde; aber einerseits gestatten dies die Umstände nicht wohl, und dann ermuntert mich auch die Versicherung meines verehrten Lehrers, des Herrn Professors GUDERMANN, daß ich wohl fähig sei, das Examen zu bestehen, schon jetzt auf Zulassung zu demselben anzutragen. Dabei vertraue ich im Bewußtsein eines redlichen Strebens und von dem Wunsche beseelt, mir recht bald Gelegenheit zu nützlicher Wirksamkeit zu verschaffen, es werde mir aus dem Umstande, daß meinen Studien nicht von Anfang an die bestimmte Absicht einer Vorbereitung zum Lehrerberuf zum Grunde lag, kein Hindernis erwachsen, wenn ich anders meine Tüchtigkeit zu bewähren imstande bin, und ich wage daher an Ew. Hochwohlgeboren die angelegentlichste Bitte zu richten, geneigtest veranlassen zu wollen, daß mir baldigst Gelegenheit gegeben werde, mich über das letztere ausweisen zu können".

Man bemerke den treuherzigen, aufrichtigen Ton dieses Schreibens und die

[1] KARL DIETERICH VON MÜNCHOW, Professor der Astronomie, Mathematik und Physik an der Universität zu Bonn 1818—1836.

daraus sprechende Überzeugung, daß er bei den Betreffenden Verständnis und Sympathie gewinnen werde; so spricht ein Sohn zu seinem Vater.

Dieses Schreiben scheint mir ein Streiflicht auf die Zustände im damaligen Deutschland zu werfen. Ein Gegenstück dazu bietet sich in ABELS Gesuch an die Behörden in Kristiania[1] einige Jahrzehnte früher.

Das Examen war teils mündlich, teils schriftlich und scheint sehr gründlich und umfassend gewesen zu sein. Am 2. Mai 1840 wurden WEIERSTRASS von der Königl. Wissenschaftlichen Prüfungskommission in Münster die Aufgaben mitgeteilt, die er binnen 6 Monaten schriftlich bearbeiten sollte:

„Auf Ihr Anmeldungsgesuch um Prüfung pro facultate docendi werden Ihnen nunmehr, nachdem die K. Ministerial-Kommission zu Berlin Ihre Zulassung genehmigt hat, die Aufgaben zur schriftlichen Prüfung zugestellt.

1) *Philologische* Arbeit in lat. Sprache:
Explicitur, qui viri rempublicam Romanorum liberam domi militiaeque omnium maxime adiuverint atque auxerint;

2) *Mathematische* Arbeit in deutscher oder franz. Sprache:
Nach den Aufgaben auf anliegendem, den Arbeiten wieder beizufügendem Zettel;

3) *Pädagogische* Arbeit:
Unterschied des Nützlichkeits- und Humanitäts-Prinzips in der Erziehung und Nachweisung, wie das eine oder andere bei jedem Unterrichtsgegenstände in Anwendung gebracht werden kann (mit besonderer Beziehung auf den mathematischen Unterricht).

Die Arbeiten — in Fol. auf gebrochenen Bogen — sind binnen 6 Monaten einzusenden. Bei jeder ist am Schlusse die Versicherung hinzuzufügen, „daß die Arbeit von Ihnen selbst und ohne alle fremde Hilfe angefertigt sei". Auch sind alle benutzten literarischen Hilfsmittel vollständig und gewissenhaft anzugeben.

Nach Einsendung der Arbeiten wird der Termin zur mündlichen Prüfung und zu den Probelektionen bestimmt werden.

Münster, den 2. Mai 1840.

Königl. Wissenschaftliche Prüfungs-Kommission.
Wagner."

Die mathematische Arbeit bestand in der Lösung dreier verschiedener Aufgaben, die von GUDERMANN gestellt waren. Die erste dieser Aufgaben entsprach einem eigenen Wunsche WEIERSTRASS':

[1] Vergl. G. MITTAG-LEFFLER, NIELS HENRIK ABEL, La Revue du Mois 4 (1907), p. 5—25, p. 207—229.

„Mathematische Prüfungs-Aufgaben für den Kand. WEIERSTRASS.

1. Die Modular-Funktionen (elliptische F.) können als gebrochene Funktionen angesehen werden, und sowohl die Zähler als auch die Nenner sind als Produkte unendlich vieler Faktoren und auch als Reihen dargestellt worden auf verschiedene Arten, immer aber mittels der Grenzmethode. Da diese Methode manchen Einwürfen ausgesetzt ist, so wird eine auf zuvor hergeleitete Differentialgleichungen gegründete Darstellung derselben Größen in den genannten Formen verlangt. Außerdem wird eine Entwicklung derselben in Reihen, welche nach Potenzen des Arguments fortschreiten, gewünscht, und in diesem Falle sind außer der Rekursions-Formel auch die independenten Bestimmungen der unbekannten Koeffizienten bis zu einer angemessenen Weite hin anzugeben. Auch die bekannte Differentialgleichung für die Transformation der Modular-Funktionen ist herzuleiten.

Bemerkung: Diese Aufgabe, die im allgemeinen für einen jungen Analytiker viel zu schwierig ist, ist dem Kand. nur auf dessen ausdrücklichen Antrag mit Bewilligung der Kommission gestellt worden.

2. Aus der elementaren Geometrie: In ein Dreieck soll ein zweites dergestalt beschrieben werden, daß die Ecken des zweiten in den Seiten des ersten liegen und die Winkel des zweiten halbiert werden durch die geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Ecken der Dreiecke verbinden.

3. Aus der höheren Mechanik: Wenn eine anziehende Kraft als Zentralkraft so wirkt, daß sie sich umgekehrt verhält wie das Biquadrat der Entfernung von dem Sitze derselben, so wird die Gleichung zwischen Zeit und Raum, sowie auch die Bestimmung der Form der Bahn verlangt.

Der Kandidat hat im vorstehenden ein von ihm selbst begehrtes Thema mit Bewilligung der Kommission behandelt.“

„Beurteilung der gelieferten Arbeiten.

Ad 1) In der Arbeit hat der Verfasser nicht nur die Erwartung der Kommission erreicht, sondern ausgehend von einem Systeme bisher unbekannter Differentialgleichungen, die nicht verfehlen werden, das Interesse der Analytiker in hohem Maße zu erregen, und die er in ganz richtiger Weise teils neben, teils nach einander herleitet, hat er sich durch die Lehre von den Modular-Funktionen hindurch eine neue Bahn gebrochen und ist auf derselben, wie zu erwarten war, nicht nur zu den bekannten Darstellungen dieser Größen, sondern auch zu ganz neuen Resultaten gelangt. Der Kandidat tritt somit ebenbürtig mit in die Reihe der ruhmgekrönten Erfinder. Wenn man bedenkt, daß er zu der Zeit, als er in Münster die erste Vorlesung über Modular-Funktionen hörte, mit denselben so gut wie ganz unbekannt war, so tritt der Grund der Bewunderung so bedeutender Leistungen auf diesem noch ziemlich neuen Gebiete der Analysis um so mehr hervor, die nicht bloß durch einen anhaltend auf seine Wissenschaft gerichteten Fleiß des Kand., sondern vorzüglich durch die Annahme eines ausgezeichneten Talents ihre Erklärung finden, das, wofern es nicht zersplittert wird, ohne Zweifel auch in der Zukunft die Wissenschaft erfolgreich fördern wird.

Ad 2) Völlig befriedigend.

Ad 3) Auch diese Arbeit ist befriedigend.

Bei so ausgezeichneten Leistungen des Kandidaten bedarf es, was die Menge, den Umfang und die Begründung seiner mathematischen Kenntnisse angeht, keiner weiteren mündlichen Prüfung mehr, und wird er in derselben nur zu zeigen haben, daß er im Stande sei, den Unterricht in den Elementen nach einer wohldurchdachten Methode zu geben. Für ihn selbst und die Wissenschaft ist es aber garnicht zu wünschen, daß er Gymnasiallehrer werde, sondern daß günstige Umstände es dereinst ihm gestatten möchten, als akademischer Dozent zu fungieren.

GUDERMANN".

Die Arbeit, die als Lösung der ersten Aufgabe abgeliefert worden war und die von GUDERMANN in so hohen Worten gelobt wurde, sollte sogleich in Druck gegeben werden. Hierzu kam es jedoch erst 54 Jahre später, als WEIERSTRASS selbst sie als Nr. 1 seiner Gesammelten Werke publizierte. Nur einen Auszug hat WEIERSTRASS schon vorher, im Jahre 1856, veröffentlicht und zwar in der berühmten Arbeit „Theorie der ABELschen Funktionen" im 52. Bande von CRELLES Journal. WEIERSTRASS knüpfte seine Abhandlung an eine Bemerkung ABELS im „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" an, daß die Funktion

$$x = \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u = \lambda(u)$$

definiert durch das Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

immer als Quotient zweier beständig konvergierenden Potenzreihen dargestellt werden kann, die nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreiten und deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Konstanten k, des Moduls, sind, welcher die Funktion spezialisiert. Das Zitat aus dem „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" findet sich unter Nr. 10, Band 4, Seite 244 in CRELLES Journal. Es lautet:

„On pourra développer la fonction $\lambda(u)$ de la manière suivante:

$$\lambda(u) = \frac{u + a u^3 + a' u^5 + \cdots}{1 + b' u^4 + b'' u^6 + \cdots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes. En faisant

$$\varphi(u) = u + a u^3 + a' u^5 + \cdots,$$
$$f(u) = 1 + b' u^4 + b'' u^6 + \cdots,$$

ces deux fonctions auront la propriété exprimée par les deux équations

$$\varphi(u'+u) . \varphi(u'-u) = [\varphi(u) . f(u')]^2 - [\varphi(u') . f(u)]^2,$$
$$f(u'+u) . f(u'-u) = [f(u) . f(u')]^2 - c^2 [\varphi(u) . \varphi(u')]^2,$$

où u' et u sont deux variables indépendantes. Ainsi p. ex. si l'on fait $u' = u$, on a

$$f(2u) = [f(u)]^4 - c^2 [\varphi(u)]^4.$$

Ces fonctions jouissent de beaucoup de propriétés remarquables."

In einem Brief an Legendre vom 25. November 1828 wiederholt Abel dasselbe, fügt aber außerdem folgende Darstellungen der Funktionen φ und f hinzu:

$$„\varphi\left(x \frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right) = A\, e^{a x^2} \sin x \{1 - 2\cos(2x) q^2 + q^4\}\{1 - 2\cos(2x) q^4 + q^8\}\{1 - 2\cos(2x) q^6 + q^{12}\}\cdots,$$

$$\varphi\left(x \frac{\omega}{\pi}\right) = A'\, e^{a' x^2} (e^x - e^{-x})\{1 - p^2 e^{2x}\}\{1 - p^2 e^{-2x}\}\{1 - p^4 e^{2x}\}\{1 - p^4 e^{-2x}\}\cdots,$$

$$f\left(x \frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right) = B\, e^{a x^2} \{1 - 2\cos(2x) q + q^2\}\{1 - 2\cos(2x) q^3 + q^6\}\cdots,$$

$$f\left(x \frac{\omega}{\pi}\right) = B'\, e^{a' x^2} \{1 - p e^{-2x}\}\{1 - p e^{2x}\}\{1 - p^3 e^{-2x}\}\{1 - p^3 e^{2x}\}\cdots,$$

où A, A', B, B', a, a' sont des quantités indépendantes de x; $q = e^{-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\pi}$, $p = e^{-\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\pi}$; $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\tilde{\omega}}{2}$ enfin sont des fonctions complètes correspondantes aux modules $b = \sqrt{1 - c^2}$ et c".

Die ersten drei Kapitel vom „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" sind am 10. Juni 1829 veröffentlicht, das vierte und ein unvollständiger Anfang zum fünften Kapitel am 21. Juli 1829.

Der Brief an Legendre ist erst in Band 6 von Crelles Journal 1830 auf Seite 76 veröffentlicht worden.

Alles somit nach Abels Tod!

Abel hat indessen schon bei Lebzeiten Verschiedenes über die elliptischen Funktionen veröffentlicht. Seine Hauptarbeit trägt den Titel: „Recherches sur les fonctions elliptiques". Eine kurze Einleitung und die sieben ersten Paragraphen sind im 2. Bande von Crelles Journal am 20. September 1827 veröffentlicht, die Paragraphen 8—10 und ein Nachtrag im 3. Bande des gleichen Journals am 26. Mai 1828 (Crelle erhielt das Manuskript von Abel am 12. Februar 1828). Schon am 3. August 1823 — Abel datiert: Kopenhagen, im Jahre $\sqrt[3]{6064321219}$ — war indessen der eigentliche Grundgedanke in der Theorie der elliptischen Funktionen bei Abel lebendig geworden, nämlich die obere Grenze der Integrale als Funktion der Integrale selbst anzusehen. Er schreibt hierüber an Holmboe: „Le petit mémoire qui, comme tu te rappelles, traite des fonctions inverses de transcendantes elliptiques, et dans lequel j'avais prouvé une chose impossible, j'ai prié M. Degen de le parcourir; mais il ne pouvait trouver de vice de conclusion ni comprendre où était la faute. Du diable si je sais comment m'en tirer". Die Art, wie es Abel gelang, sich hier „herauszuziehen", aus einer Schwierigkeit, deren Natur wir im übrigen nicht kennen, sichert ihm, wie wir alle wissen, schon allein für alle Zeiten in der Geschichte der Wissenschaften einen der ersten Plätze. Seine Beweisführung, in welcher er vom Gegenteil der Wahrheit ausgeht, ist lehrreich und jetzt nicht ungewöhnlich. Es scheint ursprünglich in der Absicht Abels gelegen zu haben, seiner im 2. und 3. Bande von Crelles Journal erschienenen Abhandlung ein „second mémoire" folgen zu lassen. Das Manuskript hierzu, welches 4 Paragraphen und 14 verschiedene Theoreme umfaßt und vom 27. August 1828 datiert ist, befindet sich in meinem Besitz. Ich habe es aus Italien bekommen, es kann kaum anderswoher als aus dem Nachlaß Crelles stammen. Aber weshalb hat es dieser nicht publiziert? Ich habe es im Jahre 1902 veröffentlicht im 26. Band der „Acta Mathematica", dem ersten der drei Bände, den ich am hundertsten Geburtstage Abels seinem Andenken gewidmet habe. Abels Manuskript kaufte ich von einem Grafen Paliti-Flamini in Rom. Die Königl. Bibliothek in Stockholm hatte es sich im August 1898 erbeten. Angeblich rührt es aus den Sammlungen Libris her. Wie es in Libris' Besitz kommen konnte, ist schwer erklärlich.

Der größte Teil des Inhalts war schon vorher in einer anderen Form veröffentlicht worden und findet sich in Band 2 von Abels Werken wieder, in dem verschiedene Aufsätze oder Mitteilungen von ihm gesammelt und nach seinem Tode veröffentlicht worden sind. Es fehlt jedoch die 2. Hälfte von § 2, ebenso sind die Theoreme 15 und 16 früher nicht veröffentlicht worden. Sie enthalten jetzt jedoch nichts Neues mehr.

Die von Weierstrass eingereichte pädagogische Arbeit handelte über die „So-

KRATIsche Lehrmethode". Sie wurde im Jahresbericht des Progymnasiums in Deutsch-Krone vom Herbst 1844/Herbst 1845 abgedruckt und ist später in dem nach WEIERSTRASS' Tod herausgegebenen 3. Bande seiner Werke nochmals publiziert worden[1]. In meiner Bibliothek befindet sich ein Exemplar des ursprünglichen Abdrucks im Jahresbericht des Progymnasiums, den ich von WEIERSTRASS selbst mit einer Widmung erhalten habe. Diese Arbeit ist von allerhöchstem Interesse, da WEIERSTRASS schon hier die Auffassung des Lehrerberufs entwickelt, die später in seinem ganzen Leben für seine Lehrtätigkeit bestimmend war. Dieselben Gesichtspunkte, die hier von dem Jüngling ausgesprochen werden, der im Begriff steht, seine Lehrtätigkeit zu beginnen, finden sich bei dem gereiften Mann mit mehr als drei Jahrzehnte langer Erfahrung in der tiefdurchdachten Ansprache wieder, womit er das Rektorat an der Universität Berlin übernahm[2].

In meiner Antrittsvorlesung bei Übernahme der Professur für Mathematik in Helsingfors: „En method att komma i besittning af de elliptiska funktionerna" vom Jahre 1876 habe ich gezeigt, — ohne noch von WEIERSTRASS' Prüfungsarbeit mehr zu kennen als den im 52. Bande von CRELLES Journal veröffentlichten Auszug —, wie ABELS ursprünglicher Gedankengang in seiner zu seinen Lebzeiten veröffentlichten Abhandlung „Recherches sur les fonctions elliptiques", soweit es die elliptischen Funktionen betrifft, bis in die kleinsten Einzelheiten in die Ableitung der elliptischen Funktionen überführt werden kann, die später in WEIERSTRASS' Vorlesungen die maßgebende wurde. Daß WEIERSTRASS, sowohl was die elliptischen und ABELschen Funktionen angeht, wie bei vielen anderen Arbeiten, von ABEL beeinflußt worden ist, hat er selbst unablässig betont. „Lesen Sie ABEL", war der erste und letzte Rat, den er während der ersten Jahre seiner Berliner Zeit stets seinen Schülern gab. „ABEL, der Glückliche! Er hat etwas ewig Bleibendes geleistet! Seine Gedanken werden immer ihren befruchtenden Einfluß auf unsere Wissenschaft ausüben" usw.

KOENIGSBERGER, WEIERSTRASS' Schüler, hat im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 25, S. 393—424, einen hochinteressanten Aufsatz über WEIERSTRASS' erste Vorlesung über die elliptischen Funktionen veröffentlicht. Diese Vorlesung schließt sich weit enger an die Doktordissertation an, als dies bei späteren Vorlesungen der Fall war[3].

---

[1] „Über die Sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte". Der wissenschaftlichen Prüfungskommission zu Münster vorgelegt im Frühjahr 1841. Werke, Bd. 3, p. 315—329.

[2] „Ansprache bei der Übernahme des Rektorats der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 15. Oktober 1873". Werke, Bd. 3, p. 331—339.

[3] Ich benutze die Gelegenheit, einen Irrtum richtigzustellen, der sich in meinem Aufsatz „Sur les fondements arithmétiques de la théorie des fonctions d'après WEIERSTRASS", Seite 11 im

Nachdem die schriftliche Prüfung beendet war, fand im nächsten Frühjahr die mündliche statt und zwar am 23. April 1841 von 8—10 Uhr morgens, sodann folgten zwei Probelektionen in der Prima des Gymnasiums von 10—1 Uhr und von 3—5 Uhr; danach am 24. nochmals ein mündliches Examen von 3—6 Uhr nachmittags. Der Bericht über WEIERSTRASS' Examen ist lehrreich. Er wirft ein helles Licht auf das preußische Schulwesen und hiermit auf den oft laut gewordenen Ausspruch, daß es in erster Linie der deutsche Schulmeister ist, dem Deutschlands Siege auf verschiedenen Gebieten zu verdanken sind. Schließlich erhielt nun WEIERSTRASS die „Facultas docendi". In dem offiziellen Zeugnis, das darüber ausgestellt wurde, heißt es wie folgt: „Die erste mathematische Arbeit — nach einem vom Kandidaten selbst begehrten Thema — bekundet ein ausgezeichnetes Talent für die Probleme der höheren Analysis. Er hat bei Beantwortung der Aufgabe sich eine ganz neue Bahn in die Lehre von den Modular-Funktionen gebrochen und ist auf dieser, wie zu erwarten, zu den bisher bekannten Reihen- und Faktoren-Entwicklungen, aber auch zu ganz neuen Resultaten gelangt. Die Auflösung der beiden andern Aufgaben ist auch völlig befriedigend und zeugt ebenfalls von dem mathematischen Scharfsinn des Verfassers".

Die in GUDERMANNS Äußerung unterstrichenen Worte „Der Kandidat tritt hiermit ebenbürtig mit in die Reihe der ruhmgekrönten Erfinder" fehlen. KILLING[1] hat dies damit zu erklären gesucht, daß eine solche Äußerung nicht recht in ein offizielles Aktenstück hineinpasse. Das mag sein, aber was hinderte daran, GUDERMANN zu zitieren oder seine im übrigen ganz offizielle Äußerung beizufügen? Die Geschichte erinnert an eine ähnliche Begebenheit, die ABEL betrifft. HOLMBOE, ABELS Lehrer in der Kathedralschule in Kristiania, hatte im Jahre 1820 in einem Schulprotokoll über ABEL folgendes niedergeschrieben: „Mit einem ausgesprochenen Genie vereinigt er einen unstillbaren Eifer und ein Interesse für Mathematik, daß er der größte Mathematiker der Welt werden kann, wenn er lange genug

---

Compte Rendu du Congrès des Mathématiciens tenu à Stockholm, 22.—25. September 1909 (TEUBNER, Leipzig 1910) vorfindet. Ich zähle hier eine Reihe von WEIERSTRASS' Schülern auf, unter ihnen jedoch nicht L. KOENIGSBERGER. Dies erklärt sich daraus, daß die Namen einem Verzeichnis von WEIERSTRASS' Schülern entnommen wurden, das ich aus PETER WEIERSTRASS' Nachlaß erhielt, und daß in diesem Verzeichnis der Name KOENIGSBERGER fehlt. Der Korrekturleser meines Aufsatzes hatte den Auftrag, mit Hilfe des vorgenannten Verzeichnisses meine Namenliste nachzuprüfen; ich hatte jedoch vergessen, ihn darauf aufmerksam zu machen, daß L. KOENIGSBERGER in diesem Verzeichnis fehlte. Ich befand mich im Auslande, als mein Aufsatz gedruckt wurde, und war daher nicht in der Lage, den Fehler bei der letzten Korrekturlesung richtigzustellen.

Beiläufig möchte ich bemerken, daß der in meinem Verzeichnis aufgenommene LANDAU nicht der bekannte Göttinger Mathematiker ist. Dieser Name, der sich in dem Verzeichnis befindet, ist nur durch ein Misverständnis angeführt worden.

[1] Biographie. Diese Biographie scheint die vollständigste zu sein, die bis jetzt erschienen ist.

lebt. Die Worte: „der größte Mathematiker der Welt“ sind indessen ausradiert und an ihre Stelle die Worte: „ein großer Mathematiker“ eingefügt worden.

Kein Mathematiker, der WEIERSTRASS' erste Arbeit studiert hat, wird GUDERMANNS enthusiastische Äußerung verwerfen. In ihr findet sich außerdem — was GUDERMANN kaum vorausgesehen hat —, auch der erste Ansatz für WEIERSTRASS' spätere Entdeckungen über die ABELschen Funktionen.

Das glücklich bestandene Examen ermutigte WEIERSTRASS zu neuen Arbeiten. Aus dem Sommer 1841 und dem folgenden Schuljahr, als er sein Probejahr am Gymnasium zu Münster ablegte, stammt die Abhandlung „Darstellung einer analytischen Funktion, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt“ [1]. In ihr findet sich, soweit bekannt, der erste ohne Anwendung von Doppelintegralen oder Integration über eine Fläche streng durchgeführte Beweis für den CAUCHYschen Satz über die Integration zwischen zwei komplexen Grenzen; er ist so angelegt, daß man gleichzeitig den LAURENTschen Satz erhält, der erst zwei Jahre später durch eine Note von CAUCHY bekannt wurde [2].

Bei der Bedeutung des CAUCHYschen Integralsatzes als unübertroffenen Werkzeuges bei der Eröffnung von Wegen zu neuen mathematischen Wahrheiten möge es nicht als überflüssig angesehen werden, wenn ich hier an gewisse Daten aus der Geschichte seiner Entstehung erinnere [3].

CAUCHYS erste Mitteilung findet man in seinem „Mémoire sur les intégrales définies, lu à l'Institut le 22 Août 1814“. Er kommt in späteren Arbeiten mehrfach auf diese Abhandlung zurück, die er besonders hoch schätzt. Sie wurde indessen, „remis au Secrétariat pour être imprimé, le 14 septembre 1825“, erst in den „Mémoires des savants étrangers“, Serie 2, tome 1, 1827 [4] gedruckt

---

[1] Mathematische Werke, Bd. 1, p. 51—66.

[2] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 30 octobre 1843.

[3] Vergl. speziell über die Vorgeschichte des Satzes PAUL STÄCKEL, „Integration durch imaginäres Gebiet“, Bibliotheca Mathematica, Folge 3, Bd. 1, p. 109—128 und „Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert“, Folge 3, Bd. 2, p. 11—121; ERNST LINDELÖF, „Le calcul des résidus etc.“, Paris 1905, p. 7—9.

[4] Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Série II, Sciences mathématiques et physiques, tome I, 1827, p. 599—799. Die erste Abhandlung des Bandes ist CAUCHYS von der Akademie preisgekrönte Abhandlung vom Jahr 1815: „Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur infinie“ (p. 3—312). Von Interesse ist, daß GREEN in der Einleitung zu seiner bahnbrechenden Arbeit „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetisme“, Nottingham 1828, CAUCHYS preisgekrönte Arbeit zitiert und also CAUCHYS im selben Band der Mémoires des savants etc. gedruckte Arbeit über den Integralsatz gekannt haben kann.

Vergl. auch E. LINDELÖF „Le calcul des résidus etc.“, p. 7, Anm., und ALFRED PRINGSHEIM, (Oeuvres, série 1, A. 1). Die Abhandlung wird durch einen Bericht, unterzeichnet den 7. November 1814 von LACROIX und LEGENDRE, eingeleitet, der jedoch nach CAUCHYS Angabe von LEGENDRE geschrieben ist [1]. Ein tieferes Verständnis für die neuen von CAUCHY eröffneten Gesichtspunkte ist in diesem Bericht kaum zu finden. Indessen wird hervorgehoben: „L'introduction des intégrales singulières dont l'idée appartient à l'auteur peut être regardée comme une découverte en analyse". In der Tat findet sich CAUCHYS spätere Residuenrechnung in ihren wesentlichen Grundzügen in seinem Studium der „intégrales singulières".

In einem kurzgefaßten Referat über CAUCHYS Mémoire, gezeichnet P (POISSON) und veröffentlicht ungefähr gleichzeitig mit der Datierung von LEGENDRES Bericht, spricht der Verfasser eine ähnliche Auffassung aus wie LEGENDRE: „ce que le mémoire dont nous rendons compte contient, selon nous, de plus curieux, c'est l'usage que l'auteur fait des intégrales qu'il nomme singulières, pour exprimer d'autres intégrales prises entre des limites finies". Weiter wird angeführt, daß, wenn auch CAUCHYS Methode den bekannten und gewöhnlich angewandten Methoden nicht vorzuziehen sei, sie doch „très remarquable" und „digne de l'attention des géomètres" sei [2].

Die von CAUCHY 1814 benutzte Beweismethode ist wesentlich dieselbe wie bei RIEMANN in seiner Inauguraldissertation vom Jahr 1851 „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe" [3].

CAUCHY nimmt denselben Beweis für seinen Integralsatz wie in der Abhandlung der Jahre 1814—1827 in einem lithographierten Heft wieder auf: „Mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes, présenté à l'Académie des Sciences de Turin le 27 Novembre 1831" [4]. Er hat selbst in FERUSSACS Bulletin eine Zusammenfassung des Inhaltes dieses lithographierten Heftes gegeben, über „calcul de limite" im Maiheft [5] und über „les intégrales singulières" im Septemberheft [6]

„Über den CAUCHYschen Integralsatz", Münchener Berichte, Bd. 25, A. 1, 1895; „Zum CAUCHYschen Integralsatze", Münchener Berichte, Bd. 25, A. 2, 1895.

[1] L. c. „Avertissement de l'auteur".

[2] Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris, Année 1814, p. 187.

[3] Werke, 2. Aufl., p. 3.

[4] Die Lithographie scheint nach einem Manuskript angefertigt zu sein, das von CAUCHY eigenhändig geschrieben war. Ein Exemplar davon, das der Bibliothek BONCOMPAGNIS gehörte, befindet sich in meiner Bibliothek zu Djursholm.

[5] Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques . . . publ. sous la direction de M. le Baron de FERUSSAC, tome XV, p. 260—269.

[6] Tome XVI, „Formules extraites d'un mémoire présenté le 27 novembre 1831 à l'Académie des Sciences de Turin", p. 119—128.

des Jahres 1831. In einer Note in den Comptes rendus vom 3. August 1846[1] hat er weiter die Ergebnisse, die er vorher erhalten hatte und die in der Hauptsache aus seinem Mémoire vom Jahr 1814 stammen, nicht unwesentlich erweitert[2].

Cauchys Beweismethode in diesen verschiedenen Darstellungen bleibt immer dieselbe wie später bei Riemann[3], das heißt die Auswertung eines Doppelintegrals. Cauchy hatte indessen schon 1825 das Problem von einem andern Gesichtspunkt aus wieder aufgenommen. In seinem „Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal"[4] hatte er mit meisterhafter Klarheit und Schärfe die Bedeutung eines bestimmten Integrals zwischen reellen Grenzen festgelegt. Er erweiterte nun in seiner berühmten Arbeit „Mémoire sur les intégrales définies entre des limites imaginaires"[5] sein Studium auf Integrale zwischen imaginären Grenzen. Er äußert darüber:

> „Mais ni ce travail (eine Arbeit von Ostragradski), ni aucun des Mémoires publiés jusqu'à ce jour, sur les diverses branches du calcul intégral, n'ont fixé le degré de généralité que comporte une intégrale définie, prise entre des limites imaginaires, et le nombre des valeurs qu'elle peut admettre. Telle est la question qui va faire l'objet de nos recherches. On verra que sa solution dépend du calcul des variations, et de la théorie des intégrales singulières, et qu'elle fournit immédiatement un grand nombre de formules propres, soit à l'évaluation, soit à la transformation des intégrales définies. Ces formules comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai déjà mentionnées, et celles que quelques géomètres ont obtenues depuis peu par d'autres voies".

Statt wie in den vorerwähnten Veröffentlichungen über eine Fläche, integriert er hier längs einer zwischen zwei Endpunkten veränderlichen Kurve. Erst durch diese Abhandlung wurde der Cauchysche Integralsatz ein allgemeines Eigentum der Mathematik. Indessen ist gegen seine Beweismethode eingewandt worden, daß

---

[1] „Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée". Oeuvres, série I, t. X, p. 70—74.

[2] Diese Note ist teilweise, aber höchst wesentlich erweitert wiedergegeben in der Abhandlung „Mémoire sur les résultantes que l'on peut former, soit avec les cosinus des angles compris entre deux systèmes d'axes, soit avec les coordonnées de deux ou trois points", Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, t. 4, p. 7—86.

[3] „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe", Inauguraldissertation Göttingen 1851; 2. unveränd. Abdruck, Göttingen 1867; Werke, 2. Aufl., p. 3—48.

[4] Leçon 21, tome I, Paris 1823. Diese Arbeit scheint Malmstens Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung zugrunde gelegen zu haben, durch welche er wieder wirkliche mathematische Studien in Schweden eingeführt hat.

[5] Paris, août 1825.

er sich auf einen Satz aus der Variationsrechnung stütze, der ohne Beweis angeführt werde[1]. Ganz streng durchgeführte Beweise ohne Anwendung von Doppelintegralen sind von C. J. MALMSTEN[2] und von MATTS FALK „Démonstration du théorème de CAUCHY sur l'intégrale d'une fonction complexe“[3] gegeben worden. Beide Beweise sind indessen recht verwickelt. Von meiner eigenen Studienzeit in Uppsala erinnere ich mich, wie DAUG, ich glaube im Herbst 1865, ein ganzes Semester einer strengen Durchführung des Beweises für den CAUCHYschen Satz widmete, vermutlich in engem Anschluß an MALMSTEN.

STOLZ[4] führt als Beweise für den CAUCHYschen Satz, welche keine Doppelintegrale voraussetzen, die „fast zur gleichen Zeit“ veröffentlichten Beweise von FALK[5] und von GOURSAT[6] an. MALMSTENS Beweis[7] war indessen schon 19 Jahre früher gedruckt worden. Auch ich hatte 11 Jahre früher[8] einen Beweis veröffentlicht, der mir durchaus bindend erscheint und der von weniger Voraussetzungen ausgeht, als die andern Beweise. WEIERSTRASS' Beweis wie auch die späteren Beweise von MALMSTEN und FALK setzen indessen voraus, daß die Funktion unter dem Integralzeichen in einem Gebiete einschließlich des Randes überall eine stetige Ableitung hat oder daß $\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \right|$ überall in diesem Bereich beliebig klein ist. In GOURSATS Beweis fallen diese der Ableitung auferlegten Bedingungen fort; er setzt überall innerhalb des Bereiches nur das Vorhandensein einer Ableitung voraus. Die Beweisführung ist wesentlich dieselbe, die immer und immer wieder eine Hauptrolle bei WEIERSTRASS' Grundlegung der Funktionentheorie spielt[9].

Obwohl es bekannt und bewiesen war, daß CARL FRIEDRICH GAUSS schon seit seinen Jugendjahren nicht veröffentlichte Entdeckungen besaß, die erst Jahr-

---

[1] Vergl. C. J. MALMSTEN „Om definita integraler mellan imaginära gränser“. Vet. Akademiens Handlingar, Bd. 6, Nr. 3, 7. April 1865.

[2] L. c.

[3] Nova Acta Reg. Soc. Ups., Ser. 3, 1884, présentée 7 févr. 1883.

[4] „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“. Leipzig 1896. Bd. 2, p. 217, Anm.

[5] L. c.

[6] „Démonstration du théorème de CAUCHY. Extrait d'une lettre à M. HERMITE“. Imprimée 11 mars 1884. Acta Mathematica, t. 4.

[7] L. c.

[8] „Försök till ett nytt bevis för en sats inom de definita integralernas teori“. Kgl. Vet. Akademiens Öfversikt 8. Okt. 1873. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in den Göttinger Nachrichten, 24. Febr. 1875.

[9] Vergl. PRINGSHEIM „Zum CAUCHYschen Integralsatze“, Münchener Berichte 1895, p. 295—304; „Der CAUCHY-GOURSATsche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale“, ib. 1903, p. 673—682. KONRAD KNOPP, „Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen“, Sammlung GÖSCHEN, Bd. 668, p. 58 ff.

zehnte später allgemeines Eigentum wurden, erfuhr man doch mit staunender Bewunderung aus der Veröffentlichung von GAUSS' Briefwechsel mit BESSEL 1880, daß GAUSS schon am 18. Dezember 1811 oder 3 Jahre früher, als CAUCHY (im Jahr 1814) seine Mitteilung an das Institut machte, durchaus mit CAUCHYS Integralsatz vertraut war und auch seine Bedeutung voll zu schätzen wußte. Er schrieb an BESSEL auf Grund eines Aufsatzes desselben im Königsberger Archiv [1] über den Integrallogarithmus [2]:

„... Was soll man sich nun bei $\int \varphi x . dx$ für $x = a + bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehen will, muß man annehmen, daß x durch unendlich kleine Incremente (jedes von der Form $\alpha + \beta i$) von demjenigen Werthe, für welchen das Integral 0 sein soll, bis zu $x = a + bi$ übergeht und dann alle $\varphi x . dx$ summirt. So ist der Sinn vollkommen festgesetzt. Nun aber kann der Übergang auf unendlich viele Arten geschehen: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Größen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Größe $a + bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Übergang von einem Werthe von x zu einem andern $a + bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, daß das Integral $\int \varphi x . dx$ nach zweien verschiednen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentierenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Dies ist ein sehr schöner Lehrsatz (eigentlich ist hiebei noch angenommen, daß φx selbst eine einförmige Function von x ist, oder wenigstens für deren Werthe innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur Ein System von Werten ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird), dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen andern Wahrheiten, die Entwicklungen in Reihen betreffend, zusammen. Der Übergang nach jedem Punkte läßt sich immer ausführen, ohne jemals eine solche Stelle wo $\varphi x = \infty$ wird zu berühren. Ich verlange daher, daß man solchen Punkten ausweichen soll, wo offenbar der ursprüngliche Grundbegriff von $\int \varphi x . dx$ seine Klarheit verliert und leicht auf Widersprüche führt. Übrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi x . dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergange dahin um

---

[1] Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik. Bd. 1, Jahrg. 1811—1812, p. 1.

[2] Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, p. 156. GAUSS' Werke, Bd. 8, p. 90—91.

einen solchen Punkt wo $\varphi x = \infty$ entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann. Definirt man z. B. $log\, x$ durch $\int \frac{1}{x}\, dx$, von $x = 1$ anzufangen, so kommt man zu $log\, x$ entweder ohne den Punkt $x = 0$ einzuschließen oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedesmal kommt dann die Constante $+2\pi i$ oder $-2\pi i$ hinzu: so sind die vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar. Kann φx nie für einen endlichen Werth von x unendlich werden, so ist das Integral immer nur eine einförmige Function. Dieß ist z. B. der Fall für $\varphi x = \frac{e^x - 1}{x}$, so daß $\int \frac{e^x - 1}{x} \cdot dx$ gewiß eine einförmige Function von x ist, deren Werth durch die immer convergirende, also immer einen und nur Einen Sinn habende Reihe dargestellt wird

$$x + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{18} x^3 + \frac{1}{96} x^4 + \cdots \text{“}.$$

Wie man sieht, eine Darstellung des Satzes und seiner Bedeutung in so moderner und knapper Form, daß man glauben könnte, sie wäre heute geschrieben! KRONECKER äußert sich darüber[1]:

„In der Form (8) wird unser Satz am meisten benutzt; so wurde er 1814 zuerst von CAUCHY veröffentlicht; diesem also gebührt das Verdienst, ihn in die Analysis eingeführt zu haben. Er war freilich schon vorher GAUSS bekannt, der ihn in seinem Briefwechsel mit BESSEL (18. Dez. 1811) ausdrücklich erwähnt; aber es ist doch ein großer Unterschied, ob Jemand eine mathematische Wahrheit mit vollem Beweise und der Darlegung ihrer ganzen Tragweite veröffentlicht, oder ob ein Anderer sie nur so nebenher einem Freunde unter Diskretion mittheilt. Deshalb können wir den Satz mit Recht als das CAUCHYsche Theorem bezeichnen. — RIEMANN hat den Satz zuerst auf die schwierigeren Theile der Analysis angewendet und die ersten wichtigen Resultate gewonnen“.

Gegen diese Darstellung ist verschiedenes einzuwenden. Daß der Satz CAUCHY gehört und mit Recht seinen Namen trägt, habe ich schon hervorgehoben. Aber KRONECKERS Auffassung, daß GAUSS den Satz BESSEL „unter Diskretion“ mitgeteilt habe, kann ihre Ursache nur in einer persönlichen, für KRONECKER charakteristischen Auffassungsweise haben, die GAUSS[2] ebenso fremd gewesen ist, wie sie es WEIERSTRASS war. WEIERSTRASS sagte immer alles, was er wußte, und es bekümmerte ihn wenig, wenn ein anderer seine Mitteilungen veröffentlichte, selbst wenn es unter dessen Namen geschah, falls nur alles gut und

---

[1] „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale“, § 10, p. 52. Leipzig 1894.

[2] Vergl. GAUSS' Brief an BESSEL vom 4. Jan. 1839. L. c., pag. 523 ff.

richtig aufgefaßt war; sonst konnte er furchtbar zornig werden, besonders wenn die Mitteilung ihm aufgebürdet wurde. Nur wenn er eine bloße Vermutung aussprach, konnte er wünschen, daß sie nicht veröffentlicht wurde. Vor allem enthält indessen KRONECKERS Äußerung „RIEMANN hat den Satz zuerst auf die schwierigeren Teile der Analysis angewendet und die ersten wichtigen Resultate gewonnen" eine Übertreibung und damit eine Ungerechtigkeit gegen CAUCHY. CAUCHY hatte schon am 12. Okt. 1846[1] in einer Note in den Comptes Rendus „Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires" die fundamentale Bedeutung des Satzes sowohl für elliptische wie für ABELsche Funktionen hervorgehoben. Er leitet die Note u. a. mit folgenden Worten ein: „Mais en exposant ces théorèmes, dont les applications sont déjà si étendues, je ne m'attendais pas à ce qu'ils fussent eux-mêmes compris comme cas particuliers dans d'autres théorèmes plus généraux dont les applications s'étendaient encore beaucoup plus loin. C'est pourtant ce qui arrive, et ceux dont je vais entretenir un instant l'Académie me paraissent devoir contribuer notablement aux progrès de l'Analyse infinitésimale, puisqu'ils permettent d'établir avec la plus grande facilité une foule de propriétés remarquables des transcendantes représentées par les intégrales définies, et par conséquent, d'une multitude de fonctions, parmi lesquelles se trouvent comprises les fonctions elliptiques et les transcendantes abéliennes".

Man kann auch kaum einer Äußerung von PRINGSHEIM[2] zustimmen: „Denn wenn auch derselbe erst durch RIEMANNS Darstellung allgemeine Verbreitung gefunden hat, so läßt sich doch mit unbestreitbarer Sicherheit nachweisen, daß CAUCHY bereits fünf Jahre v o r dem Erscheinen der RIEMANNschen Dissertation ihn nicht nur gekannt, sondern in der Hauptsache auch publiziert hat[3].

PRINGSHEIMS Auffassung von CAUCHYS Priorität ist sicher ganz richtig, aber die Ansicht, daß der Satz erst durch „RIEMANNS Darstellung allgemeine Verbreitung" gewonnen habe, kann nicht unwidersprochen bleiben. Wenn es auch wahr ist, daß RIEMANNS grundlegende Inauguraldissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen usw." schon 1851 herauskam[4], so ist doch

[1] Oeuvres, série 1, t. X, p. 153.

[2] „Über den CAUCHYschen Integralsatz", l. c. p. 43—44.

[3] PRINGSHEIM scheint hier nur an CAUCHYS Note vom 3. August 1846, l. c., zu denken, aber nicht an seine vorhergehenden Mitteilungen.

[4] Wirklich bekannt wurden wohl RIEMANNS „Grundlagen" erst durch seine berühmte Abhandlungsserie im 54. Band des Journal für Mathematik 1857. Vergl. besonders „Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen", p. 105—106. RIEMANN setzt hier den Satz als allgemein bekannt voraus: „Bekanntlich ist usw." p. 105,

fraglich[1], ob nicht die beiden Abhandlungen von V. Puiseux, „Recherches sur les fonctions algébriques"[2] und „Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques"[3], welche sich aufs engste an Cauchys Note in den Comptes Rendus von 1846 anschlossen, in den nächsten Jahrzehnten ebenso viel wie Riemanns Doktordissertation zur „allgemeinen Verbreitung" des Cauchyschen Satzes beitrugen. Ganz besonderen Einfluß übte die Darstellung von Cauchys Satz aus, die Briot und Bouquet acht Jahre später 1859 in ihrer „Théorie des fonctions doublement périodiques etc." gaben. Briot und Bouquets Darstellung ist ganz unabhängig von derjenigen Riemanns und schließt sich wie diejenige von Puiseux direkt an Cauchy an. Ihre freilich nicht fehlerfreie Arbeit zeichnet sich durch große Eleganz und Klarheit aus, Eigenschaften, die ohne Zweifel in hohem Grade den neuen Ideen zum Durchbruch verhalfen.

Weierstrass' Abhandlung von 1841 enthält nicht nur den Cauchyschen, sondern auch den Laurentschen Satz[4]. Dieser wurde unter dem Titel: „Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable" in den Comptes Rendus vom 21. August 1843 gedruckt. Dabei wird eine vorhergehende Note von Cauchy erwähnt; vermutlich handelt es sich um Cauchys „Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives des variables"[5].

Zu Berichterstattern über Laurents Arbeit waren Cauchy und Liouville gewählt worden. Am 30. Oktober 1843 erstattete Cauchy seinen Bericht: „Rapport sur un mémoire de M. Laurent qui a pour titre etc." In diesem Bericht wird zum ersten Mal der Laurentsche Satz in Cauchys Formulierung mitgeteilt[6]. Cauchy

---

und beruft sich nicht auf seine Inauguraldissertation von 1851, welche höchstens durch die 1867 gedruckte zweite Auflage allgemein bekannt wurde.

[1] Was Schweden betrifft, verhält es sich unzweifelhaft so.

[2] Journal de Mathématiques, t. 15, 1850, p. 365—480.

[3] L. c., tome 16, 1851, p. 228—240.

[4] Pierre Laurent, geb. 1813, drei Jahre vor Weierstrass, gest. 1874. Er war Schüler der École Polytechnique, später Hauptmann im französischen Geniekorps und stand 1854 in Havre; nachher war er Bataillonschef in Paris.

[5] Comptes Rendus, 31. Juli 1843.

[6] „x désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de x pourra être représentée par la somme de deux séries convergentes, ordonnées, l'une suivant les puissances entières et ascendantes, l'autre suivant les puissances entières et descendantes de x, tant que le module de x conservera une valeur comprise entre deux limites entre lesquelles la fonction ou sa dérivée ne cesse pas d'être finie et continue", Comptes Rendus, 30 octobre 1843; Œuvres de Cauchy, série 1, t. 8, p. 116.

gibt an, daß das Theorem als Spezialfall in einem Theorem in den Exercices de Math., t. 1 einbegriffen sei. Vermutlich denkt er hierbei an ein Theorem in einem der Artikel „Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies“, p. 95—113, oder „Sur quelques formules relatives à la détermination du residu intégral d'une fonction donnée“, p. 133—139. Cauchy bemerkt dazu, daß Laurents Theorem „peut se déduire immédiatement d'une proposition établie dans la troisième livraison des Exercices d'Analyse etc., dont voici l'énoncé: Si une fonction et sa dérivée restent continues, pour un module de la variable renfermé entre deux limites données, la valeur moyenne de la fonction correspondante à un module compris entre ces limites, sera indépendante de ce module“. Dieser dritte Teil der Exercices d'Analyse war nicht gedruckt, als Cauchy seine Mitteilung an die Akademie schrieb. Er erschien erst 1843 im Druck. Ich habe das Theorem, so wie es Cauchy formuliert, nicht gefunden. Wahrscheinlich denkt er an die zweitletzte Abhandlung in Tome 3 oder an sein „Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires“, p. 361—387.

In der Weierstrassschen Funktionentheorie hat der Laurentsche Satz nicht den elementaren Platz und spielt nicht die grundlegende Rolle wie in der Cauchyschen. Zwar kann er mit Hilfe von konformer Abbildung wie auch ohne Heranziehung des Cauchyschen Integrals abgeleitet werden, aber die Herleitung ist weitläufig und setzt einige andere Sätze aus Weierstrass' Funktionentheorie voraus[1]. Pringsheim hat in einer Abhandlung „Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen“[2] einen dritten Beweis gegeben, worin er sich sog. Mittelwerte bedient, was jedoch im Grunde dasselbe ist wie die Verwendung des Cauchyschen Integrals.

Wenn Weierstrass bei der strengen Kritik, die er an seinen eigenen Arbeiten übte, seinen mehr als 40 Jahre früher abgefaßten Beweis für Cauchys und Laurents Sätze in seinen Mathematischen Werken[3] als Nr. 2 ohne irgend eine erklärende Anmerkung wie zum Beispiel bei Abhandlung Nr. 4 veröffentlichte, so kann der Grund kein anderer gewesen sein, als daß er seine Beweismethode in ihrer scharfen und knappen Art auch fernerhin für zwingend hielt.

Zur Charakterisierung des jungen Weierstrass am Anfang seiner Laufbahn ist die Abhandlung auf jeden Fall von hohem Wert. Weierstrass wurde erst 1842

[1] Vgl. meine Abhandlung „Démonstration nouvelle du théorème de Laurent“, Acta Math., Bd. 4. Scheeffer hat im selben Band der Acta Math. einen andern Beweis gegeben, „Beweis des Laurentschen Satzes“, der scheinbar einfacher ist als der meinige, aber in Wirklichkeit mehr voraussetzt.

[2] Mathematische Annalen, Bd. 47.

[3] Bd. 1, p. 51—66.

mit Arbeiten von CAUCHY bekannt. Nichts derartiges fand sich unter der sehr beschränkten mathematischen Literatur, die ihm vorher zugänglich war. Er hat selbst bei mehreren Gelegenheiten diesen Umstand hervorgehoben, nicht um dadurch irgendwelchen Anspruch auf Priorität zu erheben — nichts konnte ihm ferner liegen — sondern um zu beleuchten, weswegen CAUCHYS Gesichtspunkte und Methoden keinen Platz im Aufbau seiner Funktionentheorie gefunden hatten. Das Studium von ABEL in den früheren Bänden von CRELLES Journal, dessen erster Band 1826 herauskam, hat ihn dagegen wesentlich beeinflußt [1]. Und daß ABEL sowohl CAUCHY wie GAUSS gekannt und von ihren Untersuchungen in mehreren Fällen Anregungen empfangen hat, dürfte zweifellos sein.

Die Grundlagen zu WEIERSTRASS' eigener Funktionentheorie waren schon mit dem Jahre 1841 vollständig fertig. Auf diesem Boden baute er dann in seinem ganzen wissenschaftlichen Leben weiter, immer mit demselben durchdringenden Scharfsinn und derselben methodischen Gründlichkeit, die schon den Sechsundzwanzigjährigen auszeichneten.

WEIERSTRASS hat im ersten Band seiner Werke noch einen Aufsatz vom Jahr 1841 abdrucken lassen: „Zur Theorie der Potenzreihen", datiert Münster, im Herbst 1841 [2]. Der darin enthaltene Satz war schon im Jahr 1832 von CAUCHY in einem in Turin lithographierten, jetzt äußerst seltenen Heft veröffentlicht worden [3]. Gedruckt wurde er indessen erst im selben Jahr, als WEIERSTRASS seinen Aufsatz schrieb [4]. Der Satz rührt also ohne Zweifel von CAUCHY her, und es ist deshalb ganz richtig, ihn, wie es oft geschieht, nur CAUCHYS Satz zu nennen. Er ist bei CAUCHY eine so gut wie unmittelbare Folge des CAUCHYschen Integralsatzes. Daß WEIERSTRASS von einem andern Ausgangsgedanken aus unabhängig von CAUCHY ihn entdeckt und bewiesen hat, genügt nicht, um ihn CAUCHY-WEIERSTRASSschen Satz zu nennen. Der Grund ist ein anderer. Der Satz ist bei CAUCHY grundlegend in seinem Calcul des limites, nimmt aber andererseits in der ganzen WEIERSTRASSschen Funktionentheorie eine noch zen-

---

[1] Vergl. seine Arbeit „Über die Entwicklung der Modular-Funktionen", Werke, Bd. 1, p. 1—50.

[2] Werke, Bd. 1, p. 67—74.

[3] „Extrait du mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831 par M. AUGUSTIN CAUCHY, membre de l'Institut de France. Lithographié à Turin 1832", § 2, p. 8, formule (9). (Vergl. Note p. 50, t. 2, Exercices d'Analyse et de Phys. Math., 1841.)

ERNST LINDELÖF („Calcul des résidus etc.", l. c.) drückt sich dahin aus, daß diese Arbeit von CAUCHY „marque un des plus grands progrès qui aient jamais été réalisé dans l'Analyse".

[4] „Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites" (lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 11 octobre 1831). Formules pour le développement des fonctions en série. Calcul des limites, p. 53, formule (9) in Exercices d'Analyse et de Phys. Math., t. 2, 14 livraison, 1841).

tralere Stellung ein. Der Beweis für ihn ist wie immer in dieser Theorie rein elementar und setzt keinen Satz aus der Integralrechnung voraus. Er wird zuerst für Polynome hergeleitet, seine Gültigkeit für Potenzreihen wird nachher durch eine Grenzbetrachtung bewiesen, beim weiteren Aufbau der Funktionentheorie tritt er dann immer und immer wieder als eines ihrer vornehmsten Hilfsmittel auf.

Vom folgenden Jahr, 1842, stammt die Abhandlung Nr. 4 in Bd. 1 von WEIERSTRASS' mathematischen Werken: „Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen. (Auszug aus einer im Jahre 1842 verfaßten, bisher nicht veröffentlichten Abhandlung)“[1]. Die Abhandlung begleitet folgende Anmerkung: „Zur Zeit, als ich die vorstehende Abhandlung schrieb, war der in § 1 begründete Satz bereits von CAUCHY gefunden und veröffentlicht worden, wovon ich indeß keine Kenntnis hatte. Bei der gegenwärtigen Herausgabe meiner Abhandlung, deren Inhalt ich bisher nur bei meinen funktionentheoretischen Vorlesungen benutzt habe, konnte ich mich jedoch, was die genannten Paragraphen angeht, nicht an CAUCHYS Darstellung anschließen, weil ich dann § 2 und § 3, welche wichtige bei CAUCHY nicht vorkommende Sätze enthalten, hätte vollständig umarbeiten müssen und überdies mein Beweis des in § 1 enthaltenen Haupttheorems von dem CAUCHYschen abweicht“.

Der Satz (§ 1), den WEIERSTRASS im Auge hat, lautet: „Es sei vorgelegt das folgende System von n Differentialgleichungen, in denen $x_1, \ldots, x_n$ zu bestimmende Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t und

$$G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n)$$

gegebene ganze rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten sollen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= G_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= G_n(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Dann lassen sich zunächst n in einer gewissen Umgebung der Stelle $t = 0$ konvergierende (gewöhnliche) Potenzreihen,

$$\mathfrak{P}_1(t), \ldots, \mathfrak{P}_n(t)$$

angeben, welche für $x_1, \ldots, x_n$ gesetzt den vorstehenden Differentialgleichungen

[1] Werke, Bd. 1, p. 75—85.

genügen und zugleich für $t = 0$ beliebig vorgeschriebene Werte

$$a_1, \ldots, a_n$$

annehmen".

Cauchy scheint indessen erst im selben Jahr, als Weierstrass seine Abhandlung schrieb, im Jahr 1842, einen Satz „veröffentlicht" zu haben, der analog mit dem Weierstrassschen ist. Dies geschah im „Mémoire sur l'emploi du nouveau calcul, appelé calcul des limites, dans l'intégration d'un système d'équations différentielles" [1].

Wie es sich damit auch verhält, § 2 und § 3 in Weierstrass' Arbeit gehen weit über Cauchy hinaus.

In § 1 führt Weierstrass seinen Beweis so, daß er zuerst die Reihen

$$x_1 = \mathfrak{P}_1(t), \ \ldots, \ x_n = \mathfrak{P}_n(t)$$

bildet, wobei

$$a_1 = \mathfrak{P}_1(0), \ \ldots, \ a_n = \mathfrak{P}_n(0)$$

ist, die formell den Differentialgleichungen des Systems genügen. Hierauf werden n Funktionen gebildet

$$\bar{G}_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ \bar{G}_n(x_1, \ldots, x_n)$$

derart, daß jeder Koeffizient in $\bar{G}_\nu(\ )$ positiv und nicht kleiner als der absolute Betrag des entsprechenden Koeffizienten in $G_\nu(\ )$ ist. Weiter werden Zahlen

$$\alpha_1 \geqq |a_1|, \ldots, \alpha_n \geqq |a_n|$$

eingeführt.

Die Reihen $\bar{G}_1(\ ), \ldots, \bar{G}_n(\ )$ werden so gewählt, daß sich konvergente Integrale

$$\bar{x}_1 = \bar{\mathfrak{P}}_1(t), \ \ldots, \ \bar{x}_n = \bar{\mathfrak{P}}_n(t),$$
$$\alpha_1 = \bar{\mathfrak{P}}_1(0), \ \ldots, \ \alpha_n = \bar{\mathfrak{P}}_n(0)$$

ergeben. Hieraus geht dann sofort die Konvergenz des Reihensystemes

$$x_1 = \mathfrak{P}_1(t), \ \ldots, \ x_n = \mathfrak{P}_n(t)$$

hervor.

Soweit ist das Verfahren dasselbe wie bei Cauchy und in voller Übereinstimmung mit der grundlegenden Methode im Calcul des limites. Es ist auch nicht unwahrscheinlich, daß Weierstrass, der 1842 Bekanntschaft mit Cauchy machte, durch den Calcul des limites beeinflußt worden ist. Aus dem Bildungsgesetz für die Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ geht unmittelbar hervor, daß es nur ein System solcher Reihen gibt, die dem System von Differentialgleichungen genügen.

---

[1] Comptes Rendus, t. 15, p. 14 (4 juillet 1842). Oeuvres, série 1, t. 7, p. 5—17.

Als Beispiel für die Wahl von $\bar{G}_\nu(\ )$ führt WEIERSTRASS weiter ein

$$\bar{G}(x_1, \ldots, x_n) = g(1 + x_1 + \cdots + x_n)^m = \bar{G}_\lambda(x_1, \ldots, x_n); \quad \begin{matrix} \lambda = 1, \ldots, n, \\ g > 0, \end{matrix} \tag{2}$$

wobei die ganze Zahl m nicht kleiner ist als der höchste bei den Funktionen $G_1(\ )$, $G_2(\ )$, ..., $G_n(\ )$ auftretende Grad. Er erhält dann das Resultat, daß die Reihen $\mathfrak{P}_1(t)$, ..., $\mathfrak{P}_n(t)$ wenigstens in dem Bereich

$$|t| \leqq \frac{(1+\alpha)^{-m+1}}{ng(m-1)} \tag{3}$$

konvergieren. Dabei ist α größer gewählt als die Summe der absoluten Beträge von $a_1, \ldots, a_n$. Die positive Zahl g ist so groß gewählt, daß der Koeffizient für jedes Glied in $\bar{G}(\ )$ größer ist als der absolute Betrag für den Koeffizienten des entsprechenden Gliedes in jeder der Funktionen $G_\lambda(\ )$.

In § 2 wird nun angenommen: „Es mögen jetzt die Koeffizienten der in den Differentialgleichungen (1) vorkommenden Funktionen

$$G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n)$$

und ebenso die mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichneten Anfangswerte der zu bestimmenden Größen $x_1, \ldots, x_n$ eindeutige analytische Funktionen von beliebig vielen, einem zusammenhängenden Bereiche angehörigen unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots$ sein, und es werde angenommen, daß innerhalb dieses Bereiches die absoluten Beträge der genannten Koeffizienten, sowie auch der Größen $a_1, \ldots, a_n$, sämtlich unter einer endlichen Grenze liegen".

Ein derartiges eingehendes Studium des Integralsystems $\mathfrak{P}_1(t), \ldots, \mathfrak{P}_n(t)$ als Funktion der Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ haben wohl zuerst POINCARÉ in der mit dem Preise König OSKARS ausgezeichneten Abhandlung „Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique" [1] und PAINLEVÉ in seinen Vorlesungen an der Stockholms Högskola [2] aufgenommen. WEIERSTRASS war sich schon seit 1842 über die Wichtigkeit eines solchen Studiums völlig im klaren. Er beweist: „Die Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \ldots, \mathfrak{P}_n(t)$ konvergieren somit für die den angegebenen Bedingungen entsprechenden Wertsysteme der Veränderlichen $t, u_1, u_2, \ldots$ nicht nur unbedingt, sondern auch gleichmäßig, und bilden also ein System eindeutiger analytischer Funktionen dieser Veränderlichen". (Vgl. die Abhandlung „Zur Theorie der Potenzreihen"). Wir haben also hier schon eine ausdrückliche und klare Fixierung des Begriffes „gleichmäßige Konvergenz". Der Begriff findet sich frei-

[1] Acta Mathematica, t. 13, p. 5—270.

[2] „Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, septembre, octobre, novembre 1895" (Paris, A. HERMANN).

lich in nuce schon bei ABEL in seiner berühmten Abhandlung über die Binominalreihe [1], war aber zu der Zeit, als WEIERSTRASS seine Abhandlung schrieb, wie auch noch lange nachher der Allgemeinheit der Mathematiker unbekannt. WEIERSTRASS ist bekanntlich der erste, der diesen Begriff scharf definiert und gleichzeitig seine Bedeutung für alle wirklich tiefgehenden analytischen Untersuchungen gezeigt hat; CAUCHY hingegen wie auch später so scharfen Analytikern wie LEJEUNE-DIRICHLET und WEIERSTRASS' großem Mitbewerber RIEMANN scheint er unbekannt gewesen zu sein, was denn auch beide in bekannten Fällen zu unrichtigen Schlußfolgerungen verleitet hat.

In § 3 wird zum ersten Mal der Begriff „Fortsetzung" und damit auch der Begriff „analytische Funktion" definiert. Die Integrale des Systems von Differentialgleichungen werden geschrieben

$$(4)\qquad \begin{matrix} x_1 = \mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \ldots, a_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \ldots, a_n) \end{matrix} \qquad t = t_0: \begin{matrix} x_1 = a_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = a_n. \end{matrix}$$

Die $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ sind als Potenzreihen in $t-t_0$ definiert, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $a_1, \ldots, a_n$ sind. Die $a_1, \ldots, a_n$ sind beliebig gewählte endliche Größen. Mit T_0 werde der gemeinsame Konvergenzbereich der Reihen $\mathfrak{P}_1(\ ), \ldots, \mathfrak{P}_n(\ )$ bezeichnet. Ist der Bereich T_0 endlich und deshalb darstellbar durch das Innere eines um den Punkt t_0 beschriebenen Kreises, so variiert dieser Kreis mit den Konstanten $a_1, \ldots, a_n$. Innerhalb des Bereiches T_0 wird in diesem Fall ein Punkt t_1 gewählt, und die Reihen werden in ein neues System von Reihen umgebildet

$$(5)\qquad \begin{matrix} \mathfrak{P}_1(t-t_1;\ a_1', \ldots, a_n') = \mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \ldots, a_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{P}_n(t-t_1;\ a_1', \ldots, a_n') = \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \ldots, a_n), \end{matrix}$$

wobei

$$a_1' = \mathfrak{P}_1(t_1-t_0;\ a_1, \ldots, a_n),\ \ldots,\ a_n' = \mathfrak{P}_n(t_1-t_0;\ a_1, \ldots, a_n)$$

ist. Die neuen Reihen haben einen gemeinsamen Konvergenzkreis, dessen Radius *mindestens* nicht kleiner ist als die kleinste Entfernung zwischen t_1 und der Berandung von T_0. Dieser gemeinsame Konvergenzbereich kann jedoch auch über

[1] „Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3 \ldots\text{"},$$

Lehrsatz 4, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 1, p. 314—315; Œuvres complètes. 2e éd., t. 1, p. 223.

T_0 hinausragen. In diesem Fall sind die neuen Reihen eine „Fortsetzung" der ursprünglichen. Man bildet nun, wenn eine solche existiert, eine „Fortsetzung" der neuen Reihen, dann eine Fortsetzung der so erhaltenen usw.

Es wird weiter bewiesen, daß auf der Peripherie des gemeinsamen Konvergenzkreises der Reihen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ notwendig ein Punkt gelegen ist, der nie im Innern des Konvergenzbereichs aller Reihen enthalten sein kann (ein singulärer Punkt). Man kann nun „auf mannigfaltige Weise eine Reihe von beliebig vielen Komplexen

$$\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \ldots, a_n), \ldots, \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \ldots, a_n), \\ \mathfrak{P}_1(t-t_1;\ a_1', \ldots, a_n'), \ldots, \mathfrak{P}_n(t-t_1;\ a_1', \ldots, a_n'), \\ \mathfrak{P}_1(t-t_2;\ a_1'', \ldots, a_n''), \ldots, \mathfrak{P}_n(t-t_2;\ a_1'', \ldots, a_n''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

in der Art herstellen, daß jeder derselben, von dem zweiten an, aus dem unmittelbar vorhergehenden ebenso entsteht, wie nach dem obigen der zweite aus dem ersten. Durch die Gesamtheit dieser Komplexe wird dann ein (eindeutiges oder mehrdeutiges) System analytischer Funktionen der Veränderlichen t definiert." Man bemerke, daß die Koeffizienten in sämtlichen verschiedenen Systemen von Integralreihen immer dieselben Funktionen der Koeffizienten im System der Differentialgleichungen sind.

Läßt man die Bedingung fallen, daß die in einem gemeinsamen Bereich konvergierenden Reihen (4) das Integralsystem eines Systems von Differentialgleichungen bilden sollen, so erhält man die Definition eines Systems von analytischen Funktionen und speziell den Begriff „analytische Funktion" in seiner größten Allgemeinheit. Es steht außer Zweifel und ist von Weierstrass selbst bestätigt worden, daß er schon seit 1841 darüber vollkommen im klaren war.

Weierstrass hat in seinen Seminarvorträgen in Berlin wiederholt zu den Sätzen, die in den §§ 1, 2, 3 der Arbeit „Definition analytischer Funktionen usw." enthalten sind, ein paar andere hinzugefügt, die aus derselben Zeit stammen und in denselben Rahmen fallen und die deshalb als § 4 und § 5 hätten folgen können.

In § 4 hätte der Satz angeführt werden können: Ein System von reellen Funktionen, das unseren Differentialgleichungen genügt, ist bei gleichen Werten der Konstanten t_0 und $a_1, \ldots, a_n$ notwendig identisch mit dem eindeutig bestimmten System von analytischen Funktionen, das jenen genügt.

Weierstrass pflegte bei seinen Seminarvorträgen den Beweis im wesentlichen folgendermaßen zu führen.

Nimmt man einen Punkt t und eine Stelle $x_1, \ldots, x_n$ beliebig an, so erhält man, wie wir gesehen haben, ein eindeutig festgelegtes Integralsystem

$$\text{(a)} \qquad \left.\begin{cases} \xi_\nu = \mathfrak{P}_\nu(T-t;\ x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{d\xi_\nu}{dT} = G_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_n), \end{cases}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, n$$

das für genügend kleine Werte von $|T-t|$ konvergiert. Wenn andrerseits T und $\xi, \ldots, \xi_n$ fixiert werden, bekommt man

$$\text{(b)} \qquad \left.\begin{cases} x_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t-T;\ \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ \dfrac{dx_\nu}{dt} = G_\nu(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Beide Integralsysteme konvergieren für genügend kleine Werte $|T-t|$. Jeder endlichen Stelle $x_1, \ldots, x_n$ entspricht eine eindeutig gegebene endliche Stelle $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und umgekehrt. Wählt man $|T-t|$ genügend klein, so haben die Potenzreihen in $T-t, x_1, \ldots, x_n$ in (a) identisch dieselbe Form wie die Potenzreihen in $t-T, \xi_1, \ldots, \xi_n$ in (b).

Für genügend kleine Werte von $T-t$ erhalten die Potenzreihen in (a) bei fixiertem T, aber variabelm $t, x_1, \ldots, x_n$ denselben Wert.

Also ist identisch

$$\text{(c)} \qquad -\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(T-t;\ x_1, \ldots, x_n)}{\partial(T-t)} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(T-t;\ x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_\mu} G_\mu(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Nehmen wir nun an, daß

$$x_1 = \psi_1(t), \ \ldots, \ x_n = \psi_n(t)$$

ist, wobei

$$\psi_1(T) = \xi_1,$$
$$\psi_2(T) = \xi_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\psi_n(T) = \xi_n$$

gesetzt ist, unseren Differentialgleichungen genügt, wenn $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ für reelle Werte von t definiert, stetig und differenzierbar sind.

Man hat dann identisch

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(T-t;\ \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))}{\partial(T-t)} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(T-t;\ \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))}{\partial \psi_\mu(t)} \cdot \frac{d\psi_\mu(t)}{dt} = 0.$$

Es hat also

$$\mathfrak{P}_\nu(T-t;\ \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$$

für genügend kleine Werte von $|T-t|$ einen konstanten Wert, andererseits ist infolge der Gleichungen (a)

$$\xi_\nu = \mathfrak{P}_\nu(T-t;\ \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$$

und demnach infolge von (b)

$$\psi(t) = \mathfrak{P}_\nu(t-T;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

w. z. b. w.[1].

Einen andereren Satz, der als § 5 in die Abhandlung „Definition analytischer Funktionen usw." hätte aufgenommen werden können, pflegte WEIERSTRASS ungefähr folgendermaßen herzuleiten.

Sei r die obere Grenze für den Radius desjenigen Kreises, in dem sämtliche in § 1 definierten Integrale

$$x_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t;\ a_1, \ldots, a_n); \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\nu}{dt} = G_\nu(x_1, \ldots, x_n)$$

konvergent sind. Wir bezeichnen mit WEIERSTRASS diesen Kreis als den gemeinsamen Konvergenzkreis der Reihen $\mathfrak{P}_\nu(\ )$. In § 3 ist gezeigt worden, daß es auf dem Kreis $|t| = r$ immer eine singuläre Stelle, sagen wir t', der Integrale $\mathfrak{P}_\nu(\ )$ gibt. Nähern wir uns nun längs des Radius $(0t')$ dem Punkte t'. Wenn die obere Grenze für die Werte, die die Reihen $|\mathfrak{P}_\nu(\ )|$ dabei erhalten, endlich ist, hat man in Formel (3) α gleich dem n-fachen dieser oberen Grenze zu wählen und darauf auf dem Radius $(0t')$ einen Punkt t_1 so nahe an t' zu fixieren, daß der Abstand zwischen t_1 und t' kleiner ist als

$$\frac{(1+\alpha)^{-m+1}}{ng(m-1)}.$$

Die umgebildeten Reihen

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{P}_\nu(t-t_1;\ a'_1, \ldots, a'_n), \\ a'_\nu = {}&\mathfrak{P}_\nu(t_1;\ a_1, \ldots, a_n), \end{aligned}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, n$$

konvergieren dann alle in einem Kreise, der den Punkt t' einschließt, und dieser Punkt kann also nicht singulär sein. Wir erhalten damit den Satz:

Wenn man vom Innern des gemeinsamen Konvergenzkreises der Integrale $\mathfrak{P}_\nu(t;\ a_1, \ldots, a_n)$ aus sich einer singulären Stelle auf der Peripherie des Kreises nähert, so wächst dabei die obere Grenze für den absoluten Betrag der Integrale über jede Grenze.

---

[1] PAINLEVÉ, l. c., p. 396 hat, ohne WEIERSTRASS' Satz zu kennen, einen Beweis für einen allgemeineren Satz skizziert, der denselben Gedankengang verfolgt wie bei WEIERSTRASS.

Vergl. auch PICARD, Traité d'Analyse, t. 2 (1893), p. 314 und Enzyklopädie d. math. Wiss., Bd. 2, H. 3, p. 204.

Der Satz ist ausgesprochen und bewiesen in einem Brief an mich vom 7. Aug. 1885[1], worin WEIERSTRASS eine wichtige Anwendung für ihn auf das astronomische n-Körperproblem gibt. Dasselbe kann nämlich bekanntlich zurückgeführt werden auf ein System von Gleichungen

$$\frac{dx_\nu}{dt} = G_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Die Variabeln sind dabei die Geschwindigkeitskoordinaten der verschiedenen Körper und der Abstand und die Abstandskoordinaten für je zwei Körper. Führt man die Voraussetzung ein, daß nie zwei Körper zusammenstoßen, so erhält man WEIERSTRASS' Satz: „Wenn die Bewegung des n-Körperproblemes so ist, daß es eine untere, von Null verschiedene Grenze für den Abstand zwischen je zwei Körpern gibt, so sind die Geschwindigkeitskoordinaten der verschiedenen Körper und damit auch die Koordinaten selbst eindeutige Funktionen der Zeit innerhalb eines sich ins Unendliche erstreckenden Parallelstreifens, der die reelle Achse für die Zeitvariable einschließt“[2]. An dieses Theorem schloß WEIERSTRASS seine bekannte Preisfrage für den König-OSKAR-Preis zum 60. Geburtstag des Königs an. Ich komme darauf bei der Schilderung des späteren Teiles von WEIERSTRASS' Leben zurück.

Die drei Abhandlungen, deren Hauptinhalt wir wiederzugeben versucht haben, zeichnen sich alle durch die gleiche klare, einfache und scharfe Darstellungskunst aus, die man in allen späteren Arbeiten WEIERSTRASS' wiederfindet. Sie gehören zu den klassischen Schriften der Analysis. Mehr als ein halbes Jahrhundert behielt sie WEIERSTRASS für sich, und erst, als ihr Inhalt besonders durch seine eigene Lehrtätigkeit schon längst Allgemeingut der Mathematik geworden war, veröffentlichte er sie in seinen Werken, da er glaubte — eine Auffassung, die niemand verwerfen dürfte, — daß diese Abhandlungen durch die Art der Darstellung und die leitenden Gesichtspunkte auch weiterhin beachtenswert seien. Verschiedene andere Aufsätze, die außer den vier genannten zur selben Zeit ausgearbeitet vorlagen, wollte WEIERSTRASS nicht in seine Werke aufnehmen, weil er der Ansicht war, daß sie kein aktuelles Interesse mehr hätten. Alle diese Abhandlungen dürften übrigens kaum in der Absicht geschrieben worden sein, sie zu veröffentlichen. Vielmehr machte WEIERSTRASS derartige Ausarbeitungen, um in ihnen den Grund festzulegen, auf welchem er seine späteren Arbeiten aufbauen wollte.

Im Herbst 1842 wurde am Progymnasium in Deutsch-Krone in Westpreußen

[1] G. MITTAG-LEFFLER, „Zur Biographie von WEIERSTRASS“, p. 41, Acta Math., Bd. 35.
[2] L. c., p. 44—45.

eine Lehrerstelle für Mathematik und Physik neu eingerichtet. WEIERSTRASS wurde als auf Vergütung beschäftigter Hilfslehrer dorthin entsandt, doch rückte er ziemlich schnell zum „ordentlichen Lehrer“ auf. Er gab außerdem Unterricht in Deutsch, Erdkunde und im Schreiben, dem einzigen Fach, in welchem er während seiner Schulzeit in Paderborn nicht prämiiert worden war. Zu Ostern 1845 wurde außerdem Turnunterricht eingerichtet. WEIERSTRASS, der alte Korpsstudent, war der einzige Lehrer, der auch diesen Unterricht übernehmen wollte.

Im Herbst 1848 wurde er als „ordentlicher Lehrer“ an das Gymnasium in Braunsberg berufen. 6 Jahre hatte der „ruhmgekrönten Erfindern Ebenbürtige“ fast seine ganze Zeit dem Unterricht von Knaben in den ersten Elementen der Schulwissenschaften widmen müssen. Während dieser für ihn so ermüdenden Arbeit war es ihm doch gelungen, für Deutsch-Krone einen Platz in der Geschichte der Wissenschaften zu erwerben, indem er in der wissenschaftlichen Beilage zum Jahresbericht des Progymnasiums für das Schuljahr 1842—43 seinen Aufsatz „Bemerkungen über die analytischen Fakultäten“ zum Abdruck brachte. Diese Abhandlung ist die erste aus WEIERSTRASS' Feder, welche im Druck herausgegeben wurde, sie bildet einen Auszug aus einer größeren Arbeit „Über die Theorie der analytischen Fakultäten“, datiert vom 20. Mai 1854, die CRELLE im Jahre 1856 im 51. Bd. seines Journals veröffentlichte, die jedoch im wesentlichen schon 1842 vollständig durchdacht und fertig vorlag. Die sogenannten analytischen Fakultäten haben den früheren Mathematikern, die in der Form das Wichtigste und Wesentliche sahen und die nicht imstande waren, bis zum Kern des Problems durchzudringen, recht viel Kopfschmerzen verursacht. VANDERMONDE, KRAMP, CRELLE, GRUNERT, OHM, Namen, die gewiß unter Mathematikern keinen besonders hohen Klang haben, deren Träger aber doch zu ihrer Zeit großen Einfluß und eine geachtete äußere Stellung besaßen, wie auch ein wirklich bedeutender Mann, BESSEL, haben vergeblich versucht, aus all den Widersprüchen, in die man sich verwickelt hatte, einen Ausweg zu finden. Das Problem, aus all dem Wirrwarr, den die Literatur über diese Frage aufwies, den wirklichen Kern der Sache herauszuschälen, sah nicht sonderlich verlockend aus, aber WEIERSTRASS sollte nicht zu bedauern haben, daß er es in Angriff nahm. Für eine tiefergehende Erforschung war unbedingt erforderlich, zunächst eine wirkliche Funktionentheorie von Grund aus aufzubauen, und es war auch nur dieser Weg, der WEIERSTRASS zum Ziel führte. Der Fehler, den BESSEL beging, lag darin, daß er den von WEIERSTRASS zunächst klargelegten Unterschied zwischen „analytischem Ausdruck“ und „analytischer Funktion“ nicht verstand. Er behandelte einen analytischen Ausdruck wie eine einheitliche analytische Funktion. Daher kamen dann die Widersprüche, in die er sich verwickelte. Das war im Jahre 1812, und es hat lange Zeit gedauert, bis die Erkenntnis dieses wesentlichen Unterschieds sich Durchbruch verschaffte. HERMITE verstand ihn niemals. Ein so bedeutender Mann wie CHRISTOFFEL entwickelte mir mit großem Eifer einige Jahre nach der Veröffentlichung von WEIERSTRASS' Arbeit von 1880 „Zur Funktionenlehre“ [1], in welcher der grundsätzliche Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen zum ersten Mal im Druck auseinandergesetzt war, sein entschiedenes Abstandnehmen von WEIERSTRASS' Ansicht.

In diesem Zusammenhang mag es von Interesse sein, darauf hinzuweisen, daß POINCARÉ in seinen ersten Arbeiten [2] mit voller Klarheit und Schärfe den Unterschied zwischen den beiden Begriffen „analytische Funktion“ und „analytischer Ausdruck“ entwickelt, ohne WEIERSTRASS' Arbeit von 1880 zu kennen. Es ist nicht schwer zu sehen, wie das spätere Studium dieser Arbeit befruchtend auf gewisse Arbeiten POINCARÉS gewirkt hat [3]. POINCARÉ war jedoch bereits auf Grund seiner eingehenden eigenen Untersuchungen — er befaßte sich schon damals mit den automorphen Funktionen, — zur gleichen Erkenntnis gelangt, wie WEIERSTRASS 40 Jahre vorher. Die Mathematik war eben in diesen Jahrzehnten nicht stehengeblieben, und für einen scharfen Denker wie POINCARÉ mußte diese Auffassung eigentlich ein selbstverständliches Ergebnis sein. Anders lag das Problem für WEIERSTRASS bei dem Stande, den die Wissenschaft 40 Jahre vorher inne hatte.

Die ausführliche Abhandlung über die „analytischen Fakultäten“, die WEIERSTRASS im 51. Bd. von CRELLES Journal veröffentlichte, ist noch aus vielen Gründen über das schon Erwähnte hinaus von großem Interesse. Wir wollen mit dem rein Persönlichen beginnen. Sie wird mit einer Bemerkung von CRELLE eingeleitet:

„Anm. Mit wahrer, wissenschaftlicher sowohl als persönlicher Befriedigung habe ich die hier folgende Abhandlung empfangen, und, der Erlaubnis ihres Herrn Verfassers gemäß, in das gegenwärtige Journal aufgenommen, da sie zeigt, daß die so wichtige Theorie der analytischen Fakultäten, welche in älterer Zeit wenig berücksichtigt wurde und zu deren näherer und allgemeinerer Begründung auch ich seit 32 Jahren beizutragen mich bemüht habe, immer mehr die Aufmerksamkeit der Analysten in Anspruch nimmt, und jetzt wieder eine noch tiefer eindringende Erforschung durch einen so ausgezeichneten und scharfsinnigen

---

[1] Monatsberichte der Berliner Akademie vom 12. August 1880, Werke, Bd. 2, p. 201—233.

[2] „Sur les fonctions à espaces lacunaires“, Acta Soc. Sc. Fenn., t. 12, 1881, p. 343—350. Vergl. „Sur quelques points de la théorie des fonctions“ (Extrait d'une lettre de M. CH. HERMITE à M. MITTAG-LEFFLER), Acta Soc. Sc. Fenn., t. 12, p. 94, note.

[3] Vergl. Lettre de POINCARÉ à MITTAG-LEFFLER. Caen, 1 juin 1881, Acta Math., t. 38, p. 147.

Mathematiker, wie Herr WEIERSTRASS es ist, angeregt hat. Meine eigenen Arbeiten über den Gegenstand betreffend, so hätte ich zur Rechtfertigung der Unvollständigkeit, die Herr WEIERSTRASS daran bemerkt hat, wohl manches zu sagen; aber meine, durch hohes Alter und stete Krankheit geschwächten Arbeitskräfte reichen zu dergleichen nicht mehr hin. Ich muß also darauf verzichten; was aber auch sehr wohl angeht, da ich bei meinen wissenschaftlichen Bemühungen nie auf mich selbst Rücksicht genommen, nie nach Ruhm und Lob, sondern nur, nach meinen Kräften, nach Förderung der Wahrheit gestrebt habe, und es mir ganz gleich gilt, wer es sei, der der Wahrheit näher kommt: ob ich oder Jemand Anderer, wenn nur überhaupt eine weitere Annäherung an die Wahrheit erzielt wird." (Berlin, im August 1854, CRELLE.)

CRELLES Arbeit „Theorie der analytischen Fakultäten" stammt aus dem Jahre 1823. Er war schon 30 Jahre früher, bevor ihm WEIERSTRASS' Arbeit und Kritik zu Gesicht kamen, mit einem anderen Kritiker von Rang in Berührung getreten, mit NIELS HENRIK ABEL, als dieser als junger norwegischer Student bei CRELLE seinen ersten Besuch machte. Als CRELLE ihn über seine Studien befragte, antwortete ABEL, daß er u. a. auch CRELLES eigene, jüngst erschienene Arbeit, „Analytische Fakultäten" gelesen habe, die ungeachtet vieler Irrtümer ihn in hohem Maße interessiert habe. Bei der Erwähnung der „vielen Irrtümer" horchte CRELLE auf, und nun entspann sich eine Diskussion, die später zu einem näheren Verhältnis zwischen CRELLE und ABEL führen sollte [1]. Diese persönlichen Einzelheiten, so ehrenvoll sie sowohl für ABEL und WEIERSTRASS, wie nicht zum wenigsten für CRELLE sein mögen, sind indessen vom wissenschaftlichen Standpunkte aus nicht das, was in erster Linie mit WEIERSTRASS' Arbeit über die „analytischen Fakultäten" verknüpft ist. In ihr kommt beispielsweise eine mit meisterhafter Schärfe durchgeführte Darstellung der Konvergenzverhältnisse eines unendlichen Produkts vor, ferner das Studium der Gammafunktion mit der Produktformel als Definition. WEIERSTRASS hielt indessen nicht sehr viel von den „analytischen Fakultäten" an und für sich. Er äußert in einer Anmerkung [2]: „obwohl die Theorie der analytischen Fakultäten in meinen Augen durchaus nicht die Wichtigkeit hat, die ihr in früherer Zeit viele Mathematiker beimaßen, so habe ich doch die Abhandlung jetzt wieder drucken lassen, weil sie manches enthält, das auch gegenwärtig noch, wie ich glaube, angehenden Mathematikern von Nutzen sein kann". Weiter kommt ein Satz über die Integrale zu einem System von Differentialgleichungen vor, den ich oben angeführt habe (S. 37) und

[1] Vergl. G. MITTAG-LEFFLER, „Niels Henrik Abel", p. 20. Revue du Mois, Paris 1907.
[2] L. c., Werke, Bd. 1, p. 158.

der trotz seiner Wichtigkeit erst in neuerer Zeit die richtige Beachtung gefunden hat.

Die Formulierung, die WEIERSTRASS dem Satze gab, ist jedoch in dem Aufsatz „Über die analytischen Fakultäten" nicht durchweg so korrekt, wie es sonst immer in von ihm selbst herausgegebenen Schriften der Fall ist. Das Formelsystem, auf welches er den Satz zur Anwendung bringt, muß erst auf das oben angegebene reduziert werden, damit der Satz unbedingte Geltung hat. Er war verzweifelt über dieses Mißgeschick, und, wenn er in seinen Seminarvorträgen auf Differentialgleichungen zu sprechen kam, versäumte er niemals, sein pater peccavi auszusprechen und den Satz so zu formulieren, wie er von rechtswegen lauten mußte. In seinen Werken und in den „Abhandlungen aus der Funktionenlehre" (Berlin 1886) ist diese Stelle der Abhandlung gestrichen.

Im Herbst 1848 siedelte WEIERSTRASS, wie oben bemerkt, nach Braunsberg über. Daß er nach der unbedeutenden Stellung in Deutsch-Krone diesen Platz erhielt, muß als eine wichtige Beförderung bezeichnet werden und beruhte nach Angabe von KILLING auf dem glänzenden Examenszeugnis aus Münster. Der Rektor des Gymnasiums, FERDINAND SCHULTZ, war glücklicherweise ein Mann, der, wenn auch nicht WEIERSTRASS' Arbeiten, so doch seine Persönlichkeit verstand und wußte, wer WEIERSTRASS war. In Deutsch-Krone hatte WEIERSTRASS eine mathematische Bibliothek bitter vermißt. Jetzt stand eine solche zu seiner Verfügung, zwar sehr klein, aber doch mit einigen wenigen grundlegenden Werken versehen. Der Aufenthalt in Braunsberg währte 8 Jahre, vom Herbst 1848 bis zum Herbst 1856. Schon von Deutsch-Krone her brachte WEIERSTRASS die Aufgabe mit, die zu verfolgen und zum Abschluß zu bringen er sich seit der Ausarbeitung seiner Prüfungsarbeit zum Lebensziel gesetzt hatte. Er sagt hierüber selbst in seiner akademischen Antrittsrede [1]: „ABEL, der gewohnt war, überall den höchsten Standpunkt einzunehmen, hatte ein Theorem aufgestellt, welches, alle aus der Integration algebraischer Differentiale entspringenden Transzendenten umfassend, für diese dieselbe Bedeutung hatte wie das EULERsche für die elliptischen. In der Blüte seines Lebens dahingerafft, hatte er selbst seine große Entdeckung nicht verfolgen können; es war aber JACOBI gelungen, eine nicht minder wichtige daran zu knüpfen, indem er die Existenz periodischer Funktionen m e h r e r e r A r g u m e n t e nachwies, deren Fundamentaleigenschaften in dem ABELschen Theorem begründet sind, wodurch zugleich der wahre Sinn und das eigentliche Wesen desselben aufgeschlossen wurden. Diese Größen ganz

[1] L. c., Werke, Bd. 1, pag 224.

neuer Art, für welche die Analysis noch kein Beispiel hatte, wirklich darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu ergründen, ward von nun an eine der Hauptaufgaben der Mathematik, an der auch ich mich zu versuchen entschlossen war, sobald ich den Sinn und die Bedeutung derselben klar erkannt hatte. Freilich wäre es töricht gewesen, wenn ich an die Lösung eines Problems auch nur hätte denken wollen, ohne mich durch ein gründliches Studium der vorhandenen Hilfsmittel und durch Beschäftigung mit minder schweren Aufgaben dazu vorbereitet zu haben. So sind Jahre verflossen, ehe ich an die eigentliche Arbeit gehen konnte, die ich, gehemmt durch die Ungunst der Verhältnisse, auch seitdem nur langsam zu fördern vermocht habe".

Mit unerschütterlicher Konsequenz verfolgte WEIERSTRASS sein ganzes Leben hindurch die Aufgabe, das eigentliche Wesen der ABELschen Funktionen vollständig und gründlich zu erforschen, sie analytisch darzustellen und sie in allen wesentlichen Teilen ganz unter die Herrschaft der Analysis zu bringen. Unter seinen hinterlassenen Manuskripten finden sich mindestens drei verschiedene Darstellungen der Theorie. In jeder derselben schreitet er zu immer größerer Vollendung fort. In einer seiner Abhandlungen hat er einmal ausgesprochen, daß die Ergebnisse, welche er in ihr mitteile, „wenigstens diejenigen Mathematiker interessieren werden, welchen es Befriedigung gewährt, wenn es gelingt, irgendein Kapitel der Wissenschaft zu einem wirklichen Abschluß zu bringen". Das Bestreben, für die ABELschen Funktionen dieses Ziel zu erreichen, beherrscht WEIERSTRASS' ganzes wissenschaftliches Lebenswerk. Alle seine übrigen Entdeckungen, alles, was er sonst schuf und was er später bei seiner Lehrtätigkeit so freigebig um sich streute, sind Funde, die er auf dem Wege zu einem großen Ziele gemacht hat. Schon von vornherein kam er zu der klaren Erkenntnis, daß ohne eine eingehende Untersuchung der Anfangsgründe der Analysis und eine Ableitung der Funktionentheorie aus ihrem Grundbegriff, der ganzen Zahl, nicht durchzukommen sei. Hiermit war er, wie wir gesehen haben, schon während seiner Zeit in Münster und später in Deutsch-Krone in der Hauptsache fertig. Bei dieser Arbeit mußte er alles von Grund auf untersuchen. Falsche und unklare Vorstellungen mußten ausgemerzt, entstandene Lücken mit dem vorhandenen Material ausgefüllt werden. Es war eine Arbeit, die scharfes Denken, einen unermüdlichen Arbeitsfleiß und einen unbeugsamen Willen erforderte, um das Ziel nicht aus dem Auge zu verlieren. Aber das Ergebnis, die WEIERSTRASSsche Funktionentheorie, wurde auch eine der vollendetsten, in sich abgeschlossensten Schöpfungen, die irgendeine Wissenschaft aufzuweisen hat.

In einer Ansprache an KUMMER bei dessen fünfzigjährigem Doktorjubiläum richtete WEIERSTRASS an ihn Worte, die in jeder Beziehung auf ihn selbst zutreffen: „Spekulativ angelegt und darum an dem Besitz überlieferten Wissens allein kein Genüge findend, war Ihr Geist für produktive wissenschaftliche Tätigkeit auf das glücklichste organisiert; mit dem Drange nach Erkenntnis des Grundes und des Zusammenhanges der Wahrheiten verband sich in ihm die Fähigkeit, bei ausgedehnteren Untersuchungen die fundamentalen Fragen herauszufinden und auf deren Ergründung die ganze Kraft des Denkens zu konzentrieren, mit dem Eifer des Schaffens Stetigkeit und Sinn für planmäßiges Arbeiten, mit idealem, auf das Höchste und Allgemeinste gerichteten Streben ein klarer Blick für das im konkreten Fall Erreichbare und Notwendige".

Wie bekannt, stehen zwei andere funktionentheoretische Systeme dem Weierstrassschen zur Seite und sind jetzt bis in alle Einzelheiten durchgeführt, das von Cauchy und das von Riemann. Keines ist jedoch, wie Weierstrass' Funktionentheorie, vom Meister selbst hinreichend fest aufgebaut worden. In beiden fehlt u. a. der wesentliche Begriff der gleichmäßigen Konvergenz. Keines von beiden dringt zu dem eigentlichen Grund jeder Funktionentheorie durch, einer strengen Feststellung des Wesens der Zahlen, die nicht rationale Zahlen sind. Gauss kannte gewiß auch die wichtigsten Daten der Funktionentheorie, — beispielsweise hat sich ja, wie oben angeführt, herausgestellt, daß er schon im Jahre 1811 und vermutlich bereits lange vorher im vollen Besitz von Cauchys Integralsatz vom Jahre 1825 war, — aber bei den strengen Anforderungen, die er an seine Verfasserschaft stellte, wurde er wohl niemals fertig mit der Arbeit, eine einheitliche, in allen Einzelheiten mit voller mathematischer Schärfe durchgeführte Funktionentheorie zu schaffen. Meines Erachtens dürfte hierin der wahre Grund liegen, weshalb er drei Jahrzehnte hindurch mit der Mitteilung zögerte, daß er im Besitz der Hauptsätze für die Theorie der elliptischen Funktionen war. Daher konnte er dann, als Abel und Jacobi damit herauskamen, mit Bewunderung feststellen, daß Abel ihn von der Verpflichtung befreit habe, ein Drittel seiner eigenen Forschungen zu publizieren, und konnte auf Jacobis ersten tastenden Versuch mit einer gewissen Geringschätzung herabsehen.

Weierstrass leitete seine Publikation über die Abelschen Funktionen mit dem Aufsatz „Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale" ein, der im Jahresbericht des Königl. Katholischen Gymnasiums zu Braunsberg für das Schuljahr 1848/49[1] erschien. Es war natürlich, daß diese Arbeit so gut wie vollständig unbeachtet blieb. Man ist nicht gewohnt, in einem Schulprogramm eine Arbeit

[1] P. 3—23. Ein Exemplar hiervon, welches ich von Weierstrass erhielt, befindet sich in meiner Bibliothek. Die Abhandlung ist von Weierstrass selbst in seine Werke, Bd. 1, p. 111—131 wiederaufgenommen.

von der Bedeutung zu finden, wie es WEIERSTRASS' Erstlingswerk über die ABELschen Integrale war.

In den Sommerferien 1853 schrieb dann WEIERSTRASS in Westernkotten gelegentlich eines Aufenthalts im Vaterhause seine Abhandlung über die ABELschen Funktionen, die im 47. Bd. von CRELLES Journal[1] veröffentlicht wurde. CRELLES Journal stand in jener Zeit auf der Höhe des Ansehens, das es sich besonders durch die Veröffentlichung so vieler Entdeckungen ABELS im ersten Bande erworben hatte. Damals waren diese Arbeiten keinem Mathematiker mehr fremd. Das außerordentliche Aufsehen, welches WEIERSTRASS' Abhandlungen gleich von Anfang an in der Mathematikerwelt hervorriefen, läßt sich kaum beschreiben. KILLING sagt mit Recht: „Die überraschende Wahrnehmung, daß ein Lehrer am Gymnasium zu Braunsberg viele Jahre lang ganz in der Stille mit diesen abstrakten Untersuchungen sich beschäftigen, jeden Anlaß zur Publikation der einzelnen Fortschritte vermeiden und erst dann damit hervortreten konnte, wie ENCKE sagt, als das Ganze zu einer Abrundung sich hinneigte, das forderte die höchste Bewunderung, ja, rief in der ganzen mathematischen Welt ein Erstaunen hervor, das in der Geschichte unserer Wissenschaft fast einzig dasteht". Das Ergebnis war auch rein äußerlich von einschneidender Bedeutung für WEIERSTRASS. Die philosophische Fakultät der Universität Königsberg beschloß auf Antrag RICHELOTS sogleich, WEIERSTRASS den Doktorgrad honoris causa zu verleihen. Eine Deputation mit RICHELOT an der Spitze reiste nach Braunsberg ab, um das Doktordiplom persönlich zu überreichen. Dies geschah mit den folgenden Worten: „Wir alle haben in Herrn WEIERSTRASS unsern Meister gefunden". Für diesen kam das Ganze völlig überraschend, und die Erinnerung daran bewahrte er stets als eine seiner liebsten und teuersten. Noch an seinem achtzigsten Geburtstage, als er im Laufe der Jahre alle die äußeren Ehren empfangen hatte, welche die gelehrte Welt ihren Häuptern zu schenken pflegt, sprach er voll Rührung von RICHELOTS Besuch und der Verleihung des Königsberger Doktorgrades als seiner schönsten Erinnerung. Indessen knüpfte er daran die schmerzliche Betrachtung: „Alles im Leben kommt doch leider zu spät". Er war ja damals, als die Königsberger Deputation ihm ihre Aufwartung machte, schon 40 Jahre alt und hatte zwei Dezennien hindurch den größten Teil seiner Kräfte für Schulunterricht verwenden müssen. Sein Ausspruch ist jedoch keineswegs so aufzufassen, als ob er die Tätigkeit des Gymnasiallehrers irgendwie gering schätzte; er hatte damals wie stets nur warme und anerkennende Worte für diesen Beruf und seine Aufgaben.

[1] Werke, Bd. 1, p. 133—152.

Die Doktorpromotion hatte fast unmittelbar zur Folge, daß WEIERSTRASS zum Oberlehrer am Gymnasium zu Braunsberg ernannt wurde. Nachdem er gleichfalls in CRELLES Journal die Abhandlung „Über die Theorie der analytischen Fakultäten“ [1] veröffentlicht hatte, die ich schon oben erwähnte und die eine der Früchte seiner auf ein höheres Ziel gerichteten funktionentheoretischen Studien war, erhielt er für das Schuljahr 1855—56 Urlaub, um seine wissenschaftlichen Arbeiten zu vollenden. Er sollte jedoch auf seinen Platz in Braunsberg nie wieder zurückkehren. Am 1. Juli 1856 wurde er zum Professor am Königlichen Gewerbe-Institut in Berlin ernannt, im Herbst des gleichen Jahres außerdem zum außerordentlichen Professor an der Universität Berlin und ungefähr zur gleichen Zeit zum ordentlichen Mitglied der Berliner Akademie. ALEXANDER VON HUMBOLDT, der große Polyhistor, mit seinem hohen Verständnis für alle Wissenschaften, der drei Jahrzehnte zuvor zusammen mit GAUSS darum bemüht war, NIELS HENRIK ABEL einen Lehrstuhl in Berlin zu schaffen, war auch jetzt tätig gewesen und hatte seinen Teil an WEIERSTRASS' Berufung an die Universität Berlin.

Von diesem Augenblick an beginnt eine neue Periode in WEIERSTRASS' Leben. War er in den ersten 40 Jahren seines Lebens im Ganzen unbeachtet geblieben, so tritt er nun mit einem Schlage als einer der größten, nicht viel später als der größte in seiner Wissenschaft hervor, und sein Einfluß, der sich bisher nur über die engen Kreise von Deutsch-Krone und Braunsberg erstreckt hatte, geht nunmehr über die ganze gebildete Welt. Scharen von Schülern sammeln sich um seinen Lehrstuhl, und für alle steht er mit einem Mal da als der große, unerreichbare Meister, dem niemand sich ohne Verehrung und Bewunderung nähert. Die Abhandlung aus dem Jahre 1853 über die ABELschen Funktionen war, wie schon gesagt, nur eine orientierende Übersicht über das, was er später in einer Folge von Abhandlungen mitzuteilen beabsichtigte. Die erste von diesen wurde im Jahre 1856 unter dem Titel „Theorie der ABELschen Funktionen“ im 4. Heft des 52. Bandes von CRELLES Journal gedruckt [2].

Die Veröffentlichung der folgenden Abhandlungen kam indessen nur zum geringen Teil zu WEIERSTRASS' Lebzeiten zustande. Als solche Veröffentlichung können von gedruckten Schriften wohl nur die beiden Abhandlungen „Über die allgemeinsten eindeutigen und $2n$-fach periodischen Funktionen von n Veränderlichen“ im Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1869 [3], und „Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Funktionen von mehreren Veränderlichen“ im gleichen Monatsbericht 1876 [4] gelten;

[1] Bd. 51 (1856), p. 1—60; Werke, Bd. I, p. 153—221.

[2] Werke, Bd. 1, p. 297—356.

[3] Werke, Bd. 2, p. 45—48.

[4] Werke, Bd. 2, p. 55—69.

hingegen geschah die eigentliche Veröffentlichung durch seine periodisch abgehaltenen Vorlesungen über ABELsche Funktionen in den Sommersemestern 1863, 1866 und 1869, den Wintersemestern 1871—72, 1873—74, 1875—76, sowie im Sommer 1876 und im Winter 1877—78, 1879—80, 1881—82 und im Sommer 1887.

Als er gegen Ende seines achtzigsten Jahres sich dazu entschloß, seine gesammelten Werke im Druck herauszugeben, beabsichtigte er, in diese Sammlung seine Vorlesungen über verschiedene Gebiete mit aufzunehmen. Die ABELschen Funktionen vertraute er HETTNER und KNOBLAUCH gemeinsam an. Auf Grund der Veröffentlichung sollte man annehmen, daß die Vorlesungen vom Winter 1875—76 und vom Sommer 1876 als die ausführlichsten und am einheitlichsten durchgeführten anzusehen sind. Zu Lebzeiten von WEIERSTRASS waren jedoch nur die 18 ersten Bogen in Druck gekommen. Indessen war er weit entfernt, mit ihrer Abfassung zufrieden zu sein. Es fehlte die Genauigkeit, die durchsichtige Klarheit und die unerschütterliche Folgerichtigkeit, die er von seinen Arbeiten stets verlangte. Andererseits fühlte er sich aber nicht mehr länger imstande — und war es wohl auch kaum —, die für den Druck bestimmte Abfassung selbst so vorzunehmen, wie sie seinen Anforderungen entsprach. Wenn ich ihn zu dieser Zeit zuweilen aufsuchte, traf ich ihn oft mit der Korrektur der ABELschen Funktionen auf den Knien, tief unglücklich über die nicht zufriedenstellende Art, in der er seinen Vortrag darin aufgefaßt und ausgelegt fand. HETTNER und KNOBLAUCH gehörten ohne Zweifel zu den ergebensten Schülern WEIERSTRASS' und waren von dem Willen beseelt, das Bestmögliche zu tun. Aber keiner von beiden war ein Mathematiker von der Bedeutung, daß er die ihm anvertraute Aufgabe zufriedenstellend hätte lösen können. Das zeigt sich ganz besonders bei der Darstellung des Hauptteils der Theorie, dem tief durchdachten und geistreich ausgeführten Übergang zu den Θ-Funktionen. Die ganze Theorie kulminiert in der Lösung dieser Aufgabe, die WEIERSTRASS schon von Anfang an als sein Hauptproblem betrachtete.

Der eigentliche innere Grund, warum WEIERSTRASS sich so spät entschloß, seine Theorie druckfertig zu machen, oder — wie es schließlich wurde — druckfertig machen zu lassen, war, daß es ihm erst im hohen Alter gelang, den Schlußstein zu dem harmonischen, in sich abgeschlossenen Gebäude einzufügen, das er auf den ABELschen Funktionen aufführen wollte. In ihm fehlte noch ein Teil: er wollte die allgemeinsten Funktionen von drei verschiedenen Gesichtspunkten aus ableiten, aus dem Additionstheorem, aus der Periodizität und aus den algebraischen Differentialgleichungen. Diese drei Definitionen sollten einander decken. Man sollte von der einen oder der anderen ausgehen können und immer mit Notwendigkeit zu derselben, in sich abgeschlossenen Funktionenklasse gelangen. Nur wenn es voll und ganz gelang, diese Aufgabe zu lösen, dann konnte er volle Befriedigung darüber empfinden, daß es ihm gelungen war, „ein ganzes Kapitel der Wissenschaft zu einem wirklichen Abschlusse zu bringen". Die beiden ersten Gesichtspunkte erwiesen sich indessen als allgemeiner als der dritte.

Der Rang für eine algebraische Gleichung zwischen zwei Variablen der Ordnung p ist $3p-3$. Die Anzahl willkürlicher Konstanten einer Θ-Funktion mit p Variablen ist hingegen $\frac{p(p+1)}{2}$. Diese beiden Zahlen sind nur identisch, wenn $p=2$ und $p=3$ ist. Ist $p>3$, so ist die zweite größer als die erste. Es gibt somit periodische Funktionen, die allgemeiner sind als die, welche durch algebraische Differentialgleichungen definiert werden. Was soll nun dafür an die Stelle der algebraischen Differentialgleichungen treten? Mit dieser Frage rang WEIERSTRASS fast sein ganzes Leben hindurch. Er wartete mit seinen weiteren Publikationen, immer in der Hoffnung, diese schließliche Lösung zu finden. Dazu war gleich im Anfang noch ein äußerer Grund gekommen. BERNHARD RIEMANN, der mit WEIERSTRASS als der größte Analytiker seiner Zeit wetteiferte, hatte ein Jahr nach WEIERSTRASS, im Jahre 1857, im 54. Bd. von CRELLES Journal von einem von dem WEIERSTRASS schen wesentlich abweichenden Ausgangspunkte aus seine Theorie der algebraischen Funktionen veröffentlicht. In dieser fehlte dasselbe Glied wie bei WEIERSTRASS, und es war natürlich, daß WEIERSTRASS diesem Mangel abhelfen wollte, bevor er seine Veröffentlichung fortsetzte. Er äußert hierüber selbst[1]:

„Eine direkte Lösung meines Problems habe ich bereits im Sommer 1857 in einer ausführlichen Abhandlung der Berliner Akademie vorgelegt. Das schon der Druckerei übergebene Manuskript wurde aber von mir wieder zurückgezogen, weil wenige Wochen später RIEMANN eine Arbeit über dasselbe Problem veröffentlichte, welche auf ganz anderen Grundlagen als die meinige beruhte und nicht ohne weiteres erkennen ließ, daß sie in ihren Resultaten mit der meinigen vollständig übereinstimme. Der Nachweis hierfür erforderte einige Untersuchungen hauptsächlich algebraischer Natur, deren Durchführung mir nicht ganz leicht wurde und viel Zeit in Anspruch nahm. Nachdem aber diese Schwierigkeit beseitigt war, schien mir eine durchgreifende Umarbeitung meiner Abhandlung erforderlich. Andere Arbeiten, sowie Gründe, deren Besprechung gegenwärtig nicht von Interesse ist, bewirkten dann, daß ich erst gegen Ende des Jahres 1869 der Lösung des allgemeinen Umkehrungsproblems diejenige Form geben konnte, in der ich sie von da an in meinen Vorlesungen vorgetragen habe".

[1] Werke, Bd. 4, p. 9—10.

Ein Anfang zu der Lösung der allgemeinsten Aufgabe ist dann in einem Brief an BORCHARDT vom 5. November 1879 zum Vorschein gekommen, der im 89. Bd. von CRELLES Journal veröffentlicht wurde[1]. WEIERSTRASS spricht darin, doch ohne Durchführung des Beweises, den Satz aus, daß eine $2r$-fach periodische Funktion von rationalem Charakter von r Variabeln immer durch eine Θ-Funktion mit r Argumenten ausgedrückt werden kann[2].

Im Sommer 1888, den WEIERSTRASS, umgeben von einer großen Anzahl seiner Schüler, in Wernigerode am Harz verbrachte, sah er sich endlich in der Lage, mitzuteilen, daß er nunmehr im vollständigen Besitz der Lösung des Rätsels sei, das sein ganzes Leben in Anspruch genommen hatte. Diese war derart, daß die ganze Theorie, und zwar von Grund auf, wiederum eine Umgestaltung erheischte. Der Rang einer algebraischen Gleichung spielte keine Rolle mehr. Die wirkliche Klassenzahl war etwas ganz anderes, und durch deren Einführung erhielt die ganze Theorie einen Abschluß und gleichzeitig eine Vereinfachung, die alles übertraf, was WEIERSTRASS zu hoffen gewagt hatte. Die letzte Krankheit, die ihn dann fast ein Jahrzehnt hindurch an seinen Liegestuhl fesselte, hatte jedoch schon begonnen, sich bemerkbar zu machen. Man sah, daß er den Wunsch hatte, den Hauptzug der Entdeckung mitzuteilen, die die Krone seines Lebenswerkes bedeutete, aber daß er immer hoffte, wieder kräftig genug zu werden, um ihr mit gewohnter Lebhaftigkeit und Klarheit Gestalt zu geben. Hierzu kam es indessen niemals. Nur ein paar verstreute Fragmente seiner Arbeit konnten nach seinem Tode herausgegeben werden, im 3. Teil seiner Werke: „Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Funktionen von n Veränderlichen" und „Über die Convergenz der Θ-Reihen beliebig vieler Argumente". Diese Fragmente könnten jedoch eine wesentliche Unterstützung bieten bei einer Rekonstruktion der neuen Theorie in dem Gesamtumfange und der Vollendung, die WEIERSTRASS anstrebte. Indessen ist dies noch eine ungelöste Aufgabe, eine der größten, die den Mathematikern unserer Tage obliegt.

Verehrte Zuhörer! Die Zeit erlaubt nicht, meine Schilderung von WEIERSTRASS' Leben und Wirken weiter fortzusetzen, ich hoffe jedoch, später darauf zurückkommen zu können. Eine solche Aufgabe ist ungewöhnlich umfangreich, gilt es doch, WEIERSTRASS selbst und die Grundzüge seines Wirkens in vier Jahrzehnten zu schildern, von dem Zeitpunkte an, als er als Vierzigjähriger nach Berlin übersiedelte. Seine eigene Akademie, die Berliner Akademie, die sonst immer, wenn es sich um die größten ihrer Mitglieder handelte, bestrebt war, dieser Ehrenpflicht sobald als möglich nachzukommen, hat noch heute, nach 25 Jahren,

---

[1] p. 1—8. [2] L. c. p. 8.

bezüglich WEIERSTRASS nichts unternommen. Wenn ich gleichwohl nicht zögere, den Versuch zu machen, einen Beitrag zu WEIERSTRASS' Biographie zu liefern, so geschieht dies teils deshalb, weil ich den Verhältnissen, die auf WEIERSTRASS in jenen Jahren einen tiefen Einfluß ausgeübt haben, nahestand, teils auch deshalb, weil ich im Besitz einer großen Sammlung von Briefen und Dokumenten bin, die sowohl seine innere wie seine äußere Geschichte in jener späteren Zeit beleuchten, und vor allem auch deshalb, weil ich bis an mein Lebensende mit Verehrung, Dankbarkeit und Bewunderung die Erinnerung an den Mann bewahren möchte, der mir das Kostbarste gegeben hat, was ein Mann dem anderen schenken kann, eine klare Auffassung des eigenen Lebensziels. Mag es mir gestattet sein, heute damit abzuschließen, daß ich WEIERSTRASS selbst reden lasse. Ich wähle seine eigene Schilderung seiner Unterrichtsmethode. Kein anderer, glaube ich, hat tiefer und wahrer die rechten Grundzüge für das Wirken eines Universitätslehrers gezeichnet, keiner hat der studierenden Jugend bessere Leitsätze gegeben.

„Nichts ist bildender für den aufstrebenden Geist als die Betrachtung des Weges, den ein schon mehr ausgebildeter bei seinen Untersuchungen nimmt. Wenn also der Lehrer die Kunst versteht, nicht bloß Resultate mitzuteilen und a posteriori zu begründen, sondern die ganze Gedankenfolge, die zu ihnen geführt hat, anschaulich zu machen, so darf er, zumal bei schon vorgeschrittenen Schülern, eines guten Erfolges sicher sein . . . .

. . . . . . Vormachen hilft mehr als Vorsagen . . . . . .

. . . . . . Der Lehrer soll die Wissenschaft vor den Augen des Schülers entstehen lassen. Wie sie sich in dem Geiste des gereiften Denkers aus den ihm einwohnenden Grundvorstellungen entwickelt und gestaltet, so soll er sie, nur für die jugendliche Fassungskraft eingerichtet, darstellen und als ein organisch sich bildendes Produkt der Vernunfttätigkeit mitteilen . . . . .“ [1].

„. . . . . . Er darf nicht das Einsammeln sofort oder künftig praktisch verwertbarer Kenntnisse und Geschicklichkeiten als das Hauptziel seiner Studien betrachten, sondern muß vor allen Dingen, wie man es treffend bezeichnet hat, das Lernen zu erlernen suchen . . . . . .

Der Erfolg des akademischen Unterrichts beruht, wie Sie vernommen haben, zum großen Teile darauf, daß der Lehrer den Lernenden fortwährend zu eigener Forschung anleitet. Dies geschieht aber nicht etwa durch pädagogische Anweisung, sondern zunächst und hauptsächlich dadurch, daß der Lehrer beim Vortrag einer Disziplin in seiner Darstellung selbst durch Anordnung des Stoffes und

---

[1] L. c. „Über die Sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte“. Werke, Bd. 3, p. 315—329.

Hervorhebung der leitenden Gedanken angemessen den Lernenden erkennen läßt, auf welchem Weg der gereifte und das bereits Erforschte beherrschende Denker folgerichtig vorschreitend zu neuen Ergebnissen oder besserer Begründung schon vorhandener gelangt. Dann versäumt er es nicht, ihm die zur Zeit nicht überschrittenen Grenzen der Wissenschaft zu bezeichnen und diejenigen Punkte anzudeuten, von denen aus ein weiteres Vordringen zunächst möglich scheint. Auch einen tiefern Einblick in den Gang seiner eigenen Forschungen versagt er ihm nicht, verschweigt selbst nicht begangene Irrtümer und getäuschte Erwartungen ......

(JACOBI hat den folgenden Rat gegeben: „Nicht sich hinsetzen und Entdeckungen machen wollen ist der Weg, in die Wissenschaft einzudringen, sondern das Einzelne, Bekannte klar und durchsichtig machen, sich mit Problemen beschäftigen, welche es seien, das ist ganz einerlei; auf diesem Wege findet man die wahren Probleme der Wissenschaft und die Prinzipien, die zu Entdeckungen führen ......).

...... Für Sie, liebe Kommilitonen, mögen folgende Winke genügen. Zunächst steht fest, daß es keine unfruchtbarere Beschäftigung geben kann als Vielerlei treiben und Nichts ergründen; überdies werden Sie nur dadurch, daß Sie *einem* Hauptfache ein tiefer eindringendes Studium widmen, das Wesen wissenschaftlicher Forschung überhaupt verstehen lernen ......

...... Vor allem aber erfüllen Sie sich mit der Überzeugung, daß der der Wissenschaft höchsten Preis erringt, wer — um mit dem Dichter zu reden — in ihr die hohe, himmlische Göttin erblickt, nicht aber das Weib in ihr sucht oder gar die dienende Magd.

Freilich ist Wissen auch Ehre, ist Macht, ist die Wünschelrute, die zeigt, wo Schätze liegen, ist der Stein der Weisen, den die alten Alchimisten nicht auf dem richtigen Wege suchten. Darum kamen schon zu SOKRATES die jungen Männer von Athen, damit er die Kunst „zu herrschen über die Menschen" sie lehre; und so drängt sich auch in unsere Hörsäle eine Schar, welche Weisheit begehrt zu allerlei Gebrauch, den Schein der Wissenschaft, nicht sie selbst.

Aber alle diese bleiben — ich gebrauche ein altes Bild — in der Vorhalle des Tempels zurück, in dessen innerstem Heiligtum der reine Gottesdienst der Wahrheit gefeiert und nicht den bösen Dämonen der Zeit geopfert wird; wer dies innerste betreten will, erscheine reinen Sinnes, von lauterem Wissensdrang beseelt und voll echter Begeisterung für alles Große, das der Menschengeist schafft, und für alles Edle und Schöne, das im Menschengemüt seine Stätte hat"[1].

[1] Ansprache bei der Übernahme des Rektorats der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 15. Oktober 1873. Werke, Bd. 3, p. 331—339.