Acta Math., 183 (1999), 145–169

Lemme de Schwarz réel et applications géométriques

par

GÉRARD BESSON
Université de Grenoble I
Saint-Martin d'Hères, France

GILLES COURTOIS
École Polytechnique
Palaiseau, France

et

SYLVESTRE GALLOT
Université de Grenoble I
Saint-Martin d'Hères, France

1. Introduction

Le lemme de Schwarz (replacé dans un contexte géométrique par Pick) montre que toute application holomorphe du disque unité de **C** dans lui-même est contractante lorsque le disque est muni de la métrique hyperbolique (de courbure constante -1). De plus, si la différentielle est isométrique en au moins un point, l'application est une isométrie hyperbolique (globale) du disque dans lui-même, c'est-à-dire une homographie.

Ce lemme a suscité de nombreuses extensions en dimension supérieure (citons pour mémoire les travaux de L. Ahlfors, S. T. Yau, N. Mok, ...). Nous ne retiendrons ici que le résultat suivant, énoncé dans [Mo], dont nous donnons une preuve en appendice ; c'est en effet celui qui est le plus proche de l'esprit du présent article.

1.1. PROPOSITION. — *Soient X et Y deux variétés kählériennes de même dimension, Y étant supposée compacte. Supposons qu'en tout point les courbures de Ricci de X et Y vérifient :*

$$\mathrm{Ricci}_{g_Y} \geqslant -g_Y \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ricci}_{g_X} \leqslant -g_X,$$

où g_Y et g_X sont les métriques riemanniennes respectives de Y et de X. Alors toute application holomorphe $F: Y \to X$ vérifie

$$|\operatorname{Jac} F(y)| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout } y \in Y.$$

De plus si, en un point $y \in Y$, on a $|\operatorname{Jac} F(y)| = 1$, alors $d_y F$ est isométrique.

Lorsque X et Y sont compactes, et si X est de courbure sectionnelle négative, chaque classe d'homotopie d'applications de Y dans X contient exactement une application harmonique (cf. [ES]).

Dans le cas où X et Y sont supposées kählériennes et si l'application harmonique entre X et Y est holomorphe, la proposition 1.1 montre que cette application est le bon candidat pour contracter la mesure de volume parmi les applications appartenant à une même classe d'homotopie.

En revanche, lorsque l'application harmonique entre X et Y n'est pas holomorphe, en particulier lorsque X et Y ne sont pas kählériennes, on ne sait pas si elle contracte la mesure de volume (sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 1.1).

Dans le théorème suivant, nous construisons, dans chaque classe d'homotopie d'applications entre deux variétés riemanniennes compactes (Y, g_Y) et (X, g_X) vérifiant des hypothèses analogues à celles de la proposition 1.1, une application qui contracte la mesure de volume.

1.2. THÉORÈME. — *Soient (Y, g_Y) et (X, g_X) des variétés riemanniennes (réelles) complètes vérifiant* $\dim X = \dim Y = n \geqslant 3$. *Supposons que la courbure de Ricci de Y et la courbure sectionnelle K_{g_X} de X vérifient :*

$$\mathrm{Ricci}_{g_Y} \geqslant -(n-1) g_Y \quad \text{et} \quad K_{g_X} \leqslant -1.$$

Alors :

(i) *Dans toute classe d'homotopie d'applications $f: Y \to X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on construit une application F_ε, lipschitzienne, qui vérifie*

$$|\mathrm{Jac}(F_\varepsilon(y))| \leqslant 1 + \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

(ii) *Si de plus Y et X sont compactes, homotopiquement équivalentes, et si la courbure sectionnelle de Y est négative, alors toute équivalence d'homotopie peut être déformée en une application C^∞ construite de manière canonique, notée F, telle que* $|\mathrm{Jac}(F)| \leqslant 1$. *Si de plus, en un point $y \in Y$, on a $|\mathrm{Jac}\, F(y)| = 1$, alors $d_y F$ est isométrique.*

1.3. *Remarque.* — Lorsque $K_{g_X} \equiv -1$, le théorème 1.2 est prouvée dans [BCG1], [BCG2, Proposition 5.2 et Proposition 6.1], et la généralisation au cas $K_{g_X} \leqslant -1$ est immédiate, cf. 2.21.

Par intégration le théorème 1.2 donne le corollaire suivant, déjà prouvé dans [BCG1, cf. Théorème 9.1], dans le cas où X est de courbure sectionnelle constante égale à -1.

1.4. COROLLAIRE. — *Soient Y et X deux variétés riemanniennes compactes vérifiant* $\dim Y = \dim X \geqslant 3$. *Supposons que la courbure de Ricci de Y vérifie* $\mathrm{Ricci}_{g_Y} \geqslant -(n-1) g_Y$ *et que la courbure sectionnelle de X vérifie $K_{g_X} \leqslant -1$. Alors, pour toute application continue $f: Y \to X$, on a*

$$\mathrm{Vol}(Y, g_Y) \geqslant |\deg f|\, \mathrm{Vol}(X, g_X).$$

De plus, l'égalité dans l'inégalité ci-dessus implique que f est homotope à un revêtement riemannien.

Un corollaire immédiat de 1.4 est la propriété de maximalité du volume des variétés hyperboliques réelles compactes :

1.5. THÉORÈME. — *Soit* (Y, g_Y) *une variété hyperbolique réelle compacte de dimension* $n \geqslant 3$ *et* X *une variété compacte de même dimension. Soit* $f: Y \to X$ *une application de degré* $d \neq 0$. *Alors, pour toute métrique* g_X *sur* X *dont la courbure sectionnelle vérifie* $K_{g_X} \leqslant -1$, *on a* $\mathrm{Vol}(Y, g_Y) \geqslant |d| \, \mathrm{Vol}(X, g_X)$. *De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si,* (X, g_X) *est hyperbolique et* (Y, g_Y) *est un revêtement riemannien de* (X, g_X).

En particulier, on a :

1.6. COROLLAIRE. — *Soit* (Y, g_Y) *une variété hyperbolique réelle compacte de dimension* $n \geqslant 3$. *Pour toute métrique* g *sur* Y *dont la courbure sectionnelle vérifie* $K_g \leqslant -1$, *on a* $\mathrm{Vol}(Y, g_Y) \geqslant \mathrm{Vol}(Y, g)$ *et l'égalité a lieu si, et seulement si,* g *est isométrique à* g_Y.

1.7. *Remarque.* — En dimension $n=2$, les théorèmes 1.5 et 1.6 restent vrais et découlent directement de la formule de Gauss–Bonnet.

La construction des applications F_ε et F du théorème 1.2 peut se faire de la même façon lorsque les dimensions de X et Y ne sont pas supposées égales et ne dépend que de la représentation induite entre les groupes fondamentaux. De plus, ces applications contractent *les* p*-volumes*, $p \geqslant 3$, cf. le théorème 1.10.

1.8. *Définition.* — Soient (X, g_X) et (Y, g_Y) deux variétés riemanniennes et $F: Y \to X$ une application différentiable. Le p-jacobien $\mathrm{Jac}_p F$ est défini par

$$\mathrm{Jac}_p F(y) = \sup \|d_y F(u_1) \wedge \ldots \wedge d_y F(u_p)\|_{g_X},$$

où $\{u_i\}_{i=1}^{p}$ parcourt l'ensemble des p-repères g_Y-orthonormés en y.

Soit (Y, g_Y) une variété riemannienne complète et Γ un groupe d'isométries de (Y, g_Y). On note $\delta(\Gamma)$ l'exposant critique de la série de Poincaré de Γ, i.e.

$$\delta(\Gamma) = \inf\left\{ s > 0 : \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(y, \gamma(y))} < +\infty \right\} \tag{1.9}$$

où d est la distance induite par g_Y sur Y et y un point arbitraire de Y. On vérifie facilement que le terme de droite de (1.9) ne dépend pas de y.

1.10. THÉORÈME. — *Soient* (Y, g_Y) *et* (X, g_X) *deux variétés riemanniennes complètes, de dimensions éventuellement différentes, et* Γ, Γ' *deux groupes discrets d'isométries de* Y *et* X *respectivement. On suppose que la courbure sectionnelle de* (X, g_X) *vérifie* $K_{g_X} \leqslant -1$ *et que* X *est simplement connexe. Soit* $\varrho: \Gamma \to \Gamma' = \varrho(\Gamma)$ *une représentation.*

(i) *Pour tout* $\varepsilon>0$, $p\geqslant 3$, *il existe une application lipschitzienne*, $F_\varepsilon: Y\to X$, ϱ-*équivariante telle que pour tout* $y\in Y$,

$$\operatorname{Jac}_p F_\varepsilon(y)\leqslant\left(\frac{\delta(\Gamma)}{p-1}(1+\varepsilon)\right)^p.$$

Si on suppose de plus que la courbure sectionnelle de (Y,g_Y) *est strictement négative, que* Y *est simplement connexe, que* Γ,Γ' *sont convexes cocompacts* (*cf. la définition* 1.12), *et que* ϱ *est injective, alors* :

(ii) *Il existe une application* C^∞, $F: Y\to X$, ϱ-*équivariante telle que pour tout* $p\geqslant 3$, *et tout* $y\in Y$, *on ait* $\operatorname{Jac}_p F(y)\leqslant(\delta(\Gamma)/(p-1))^p$. *Si* $\|d_yF(u_1)\wedge\ldots\wedge d_yF(u_p)\|=(\delta(\Gamma)/(p-1))^p$ *pour un* p-*repère orthonormé* $(u_1,\ldots,u_p)$ *en* y, *la restriction de* d_yF *au sous-espace de* T_yY *engendré par les* u_i *est une homothétie.*

(iii) *Si* $\dim Y\geqslant\dim X=n\geqslant 3$ *et si* X *est un espace symétrique de courbure comprise entre* -1 *et* -4, *alors l'application* F *de* (ii) *vérifie* $\operatorname{Jac}_n F(y)\leqslant(\delta(\Gamma)/(n+k-2))^n$ *où* k *est la dimension réelle du corps ou de l'algèbre de base définissant l'espace hyperbolique* X. *Si l'égalité est atteinte, alors* d_yF *est une homothétie du sous-espace de* T_yY *orthogonal à* $\ker(d_yF)$ *sur* $T_{F(y)}$.

1.11. *Remarque.* — (1) Dans le théorème 1.10 (ii), (iii), les groupes Γ,Γ' sont supposés convexes cocompacts. La définition est donnée ci-dessous, cf. 1.12.

(2) La construction de F est identique à celle de la proposition 6.1 de [BCG2], cf. 2.1.

(3) Les inégalités (i) et (ii) ne sont intéressantes que dans le cas

$$3\leqslant p\leqslant\inf[\dim(X),\dim(Y)]$$

puisque dans le cas où $p>\inf[\dim(X),\dim(Y)]$, $\operatorname{Jac}_p F\equiv 0$.

Les inégalités 1.10 (ii) et (iii) sont optimales. En particulier, nous donnons comme application une preuve simple d'un théorème de M. Bourdon, P. Pansu, D. Sullivan et C. Yue concernant les dimensions de Haussdorff des ensembles limites de représentations quasi-fuchsiennes de réseaux hyperboliques cocompacts (cf. Théorème 1.14) et un résultat d'isolation (cf. Théorème 1.16). Avant d'énoncer ces résultats, nous introduisons quelques définitions :

Soit (X,g_X) une variété simplement connexe de courbure sectionnelle $K_{g_X}\leqslant -1$ et Γ un groupe discret d'isométries de (X,g_X) agissant proprement discontinûment sur X. L'ensemble-limite $\Lambda(\Gamma)$ de Γ est défini comme l'ensemble des points d'accumulation sur le bord géométrique à l'infini ∂X de X, d'une orbite quelconque de l'action de Γ sur X (cf. [Y2]). Lorsque l'action de Γ est cocompacte, $\Lambda(\Gamma)$ est égal à ∂X tout entier ; cependant, dans le cas général, $\Lambda(\Gamma)$ est seulement un fermé Γ-invariant de ∂X. L'enveloppe convexe $C(\Gamma)$ de $\Lambda(\Gamma)$ dans X est un fermé, Γ-invariant pour l'action de Γ sur X.

1.12. *Définition.* — Le groupe Γ est convexe cocompact si $C(\Gamma)/\Gamma$ est compact.

Par ailleurs, il existe sur ∂X des familles de distances canoniquement associées à la métrique g_X qui permettent de définir une dimension de Haussdorff de $\Lambda(\Gamma)$, notée $\dim_H(\Gamma)$ (cf. [Y2, n° 1]). Lorsque Γ est convexe cocompact $\delta(\Gamma)=\dim_H(\Gamma)$ (cf. [Y2, théorèmes 5.5.1, 6.2.4 et 5.4.4]). On notera que $\delta(\Gamma)$ dépend de la métrique g_X ; en particulier, lorsque X/Γ est compact, la dimension de Haussdorff de ∂X est égale à *l'entropie volumique de la métrique* g_X définie par l'égalité

$$\mathrm{Ent}(X,g_X)=\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(\mathrm{Vol}(B(x,R)))\right)$$

où $B(x,R)$ est la boule géodésique de centre x et de rayon R de (X,g_X).

Γ désignera maintenant un réseau cocompact d'un espace symétrique Y de courbure négative, i.e. Y est l'espace hyperbolique réel, complexe, quaternionien ou de Cayley. Normalisons la métrique g_Y de Y de sorte que sa courbure sectionnelle vérifie

$$\begin{aligned} K_{g_Y}&\equiv -1 \quad \text{dans le cas hyperbolique réel,}\\ -4\leqslant K_{g_Y}&\leqslant -1 \quad \text{dans les autres cas.}\end{aligned}$$

1.13. *Définition.* — Une représentation $\varrho\colon\Gamma\to\mathrm{Isom}(X,g_X)$ est convexe cocompacte si $\Gamma'=\varrho(\Gamma)$ est un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{Isom}(X,g_X)$.

Une telle représentation est dite totalement géodésique lorsqu'il existe un plongement F_0 isométrique et totalement géodésique de (Y,g_Y) dans (X,g_X) qui entrelace les deux actions de Γ sur Y et sur X, i.e. $F_0\circ\gamma=\varrho(\gamma)\circ F_0$. Par exemple, lorsque X est un espace hyperbolique (réel, complexe, quaternionien ou de Cayley), de même type que Y et de dimension supérieure ou égale à celle de Y, il existe une injection canonique ϱ_0 de $\mathrm{Isom}(Y)$ dans $\mathrm{Isom}(X)$; elle induit une représentation $\varrho_0\colon\Gamma\to\mathrm{Isom}(X)$, dont l'image sera notée $\varrho_0(\Gamma)$. Cette représentation, ainsi que celles obtenues par conjugaison par un élément de $\mathrm{Isom}(X)$, donnent toutes les représentations totalement géodésiques dans $\mathrm{Isom}(X)$, caractérisées par l'existence d'une sous-variété totalement géodésique Z de X, invariante par $\varrho_0(\Gamma)$. Comme $\Lambda(\varrho_0(\Gamma))=\partial Z$, et comme Z est symétrique, on a

$$\delta(\varrho_0(\Gamma))=\mathrm{Ent}(Z)=n+k-2,$$

où k est la dimension réelle du corps de base ou de l'algèbre qui définit l'espace hyperbolique et où n est la dimension réelle de Y.

H. Poincaré avait remarqué, dans le cas où Y et X sont des variétés hyperboliques réelles de dimensions respectives 2 et 3 et lorsque la représentation ϱ n'est pas totalement géodésique, que l'ensemble-limite $\Lambda(\varrho(\Gamma))$ n'est pas une courbe rectifiable. Plus récemment R. Bowen [Bow] a prouvé que la dimension de Haussdorff de l'ensemble-limite est alors strictement plus grande que 1.

Le théorème suivant résulte des travaux de P. Pansu (cf. [P]), M. Bourdon (cf. [Bou]) et C. B. Yue (cf. [Y1]). Nous en donnons ici une nouvelle preuve lorsque (Y, g_Y) est hyperbolique réel et lorsque (Y, g_Y) et (X, g_X) sont hyperboliques complexes.

1.14. THÉORÈME ([P], [Bou], [Y1]). — (i) *Soit* (Y, g_Y) *un espace hyperbolique réel et soit* (X, g_X) *une variété riemannienne simplement connexe de courbure sectionnelle* $K_{g_X} \leqslant -1$ *tels que* $\dim Y \leqslant \dim X$. *Soit* Γ *un sous-groupe cocompact d'isométries de* Y *et* $\varrho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(X, g_X)$ *une représentation injective convexe cocompacte. Alors*

$$\delta(\varrho(\Gamma)) \geqslant \delta(\Gamma).$$

De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si, la représentation est totalement géodésique.

(ii) *Si* (Y, g_Y) *et* (X, g_X) *sont deux espaces hyperboliques réels ou complexes (tels que* $\dim Y \leqslant \dim X$*), alors, pour toute représentation* ϱ *injective d'un sous-groupe cocompact* Γ *d'isométries de* Y *dans* $\mathrm{Isom}(X, g_X)$ *dont l'image est convexe cocompacte, on a*

$$\delta(\varrho(\Gamma)) \geqslant \delta(\Gamma) = \delta(\varrho_0(\Gamma)).$$

De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si, la représentation est totalement géodésique et conjuguée à ϱ_0.

1.15. *Remarque*. — Le théorème ci-dessus est vrai si la représentation est seulement supposée fidèle et discrète. La preuve est alors une variante de celle donnée au chapitre 3.

Lorsque (X, g_X) est symétrique de courbure négative, une telle représentation ϱ est appelée « quasi-fuchsienne » (cf. ([P], [Bou], [Y1]). Il découle du théorème de super-rigidité de K. Corlette ([Co]) que toute représentation quasi-fuchsienne entre groupes d'isométries d'espaces hyperboliques quaternioniens ou de Cayley est totalement géodésique.

À l'opposé, il existe des exemples de représentations quasi-fuchsiennes entre groupes d'isométries d'espaces hyperboliques réels qui ne sont pas totalement géodésiques. De plus, dans ce cas, la valeur $\delta(\varrho_0(\Gamma))$ n'est pas isolée parmi toutes les dimensions de Haussdorff possibles d'ensembles-limites de représentations quasi-fuchsiennes.

Le problème est plus ouvert dans le cas complexe et il est conjecturé qu'il n'y a pas d'autre représentation quasi-fuchsienne (entre groupes d'isométries d'espaces hyperboliques complexes) que les représentations totalement géodésiques. Une preuve de cette conjecture est énoncée dans [Y1] lorsque $\dim_{\mathbf{C}}(X) \leqslant 2 \dim_{\mathbf{C}}(Y)$. Par ailleurs W. Goldman et J. J. Millson ([GM]) montrent, en toutes dimensions, qu'il n'y a pas de déformations de la représentation totalement géodésique ϱ_0.

Nous avons :

1.16. THÉORÈME. — *Soient Y un espace hyperbolique complexe de dimension complexe n et $\Gamma \subset PU(n,1) = \mathrm{Isom}(Y)$ $(n \geqslant 2)$ un réseau cocompact. Il existe une constante $C>0$ telle que toute représentation quasi-fuchsienne $\varrho : \Gamma \to PU(m,1)$ $(m \geqslant n)$ qui vérifie $\delta(\varrho(\Gamma)) < (1+C)\delta(\varrho_0(\Gamma))$ est totalement géodésique (donc conjuguée à ϱ_0). De plus, la constante C ne dépend que du volume de Y/Γ, de la dimension m et pas de la représentation.*

Dans le cas complexe, C. B. Yue ([Y1]), s'appuyant sur un résultat de Carlson et Toledo (cf. [CT]), a prouvé l'existence d'une sous-variété complexe Z de X, invariante par l'image $\varrho(\Gamma)$ de la représentation ϱ. Or, sur de telles sous-variétés, M. Gromov conjecture que, si la seconde forme fondamentale est petite, alors la sous-variété est totalement géodésique. Nous montrons que cette conjecture est fortement reliée au problème de l'isolation de la dimension de Haussdorff de l'ensemble-limite d'une représentation totalement géodésique (résolu par le théorème 1.16). En fait, l'entropie d'une sous-variété minimale d'un espace hyperbolique réel ou complexe est proche de $\delta(\varrho_0(\Gamma))$ dès que la seconde forme fondamentale est petite. Nous donnons ensuite une preuve d'une version L^2 de la conjecture de M. Gromov ci-dessus :

1.17. THÉORÈME. — *Il existe une constante universelle $C(m,d)$ (positive, explicitable) telle que toute sous-variété complexe compacte de dimension d d'un quotient X (éventuellement non compact) de l'espace hyperbolique complexe de dimension m, dont la seconde forme fondamentale est de normes L^2 et L^{2d} plus petites que $C(m,d)$, est en fait totalement géodésique.*

2. Preuves des théorèmes 1.10, 1.2 et du corollaire 1.4

2.1. *Preuve du théorème* 1.10 (ii). — Les groupes Γ et Γ' agissent de façon convexe cocompacte sur Y et X respectivement, et la représentation ϱ est injective. Alors ϱ induit une quasi-isométrie équivariante entre $C(\Gamma)$ et $C(\Gamma')$ (car leurs quotients respectifs par Γ et Γ' sont compacts). Cette quasi-isométrie se prolonge en un homéomorphisme $\bar{f}$ entre $\Lambda(\Gamma)$ et $\Lambda(\Gamma')$ (cf. [BP] et [GH]). On construit alors l'application F comme composée de deux applications, de la même façon que dans [BCG2] :

— Une première application $y \to \mu_y$ de Y dans l'espace des mesures finies sur ∂X, où μ_y est l'image directe par $\bar{f}$ de la mesure de Patterson–Sullivan ν_y de Γ, sur ∂Y. Rappelons (voir par exemple [Y2]) que la mesure de Patterson–Sullivan jouit des propriétés suivantes :

$$\nu_{\gamma(y)} = \gamma_*(\nu_y) \quad \text{pour tout élément } \gamma \in \Gamma, \tag{2.2i}$$

$$\nu_y = e^{-\delta(\Gamma) B_Y(y,\theta)} \nu_O, \tag{2.2ii}$$

où O est un point fixé arbitrairement sur Y que nous appellerons «origine», et où B_Y est la fonction de Busemann de Y, correspondant au choix de l'origine O, définie par $B_Y(y,\theta)=\lim_{t\to+\infty}(d(y,c(t))-t)$, pour toute géodésique c d'origine O et d'extrémité $c(+\infty)=\theta$.

— Une seconde application, définie sur l'espace des mesures finies sur ∂X et à valeurs dans X, appelée «application barycentre» et notée $\mathrm{bar}(\cdot)$, qui associe à toute mesure finie μ sur ∂X l'unique point où la fonction

$$\mathcal{B}\colon x \to \int_{\partial \tilde{X}} B_X(x,\theta)\, d\mu(\theta)$$

atteint son minimum, où B_X est la fonction de Busemann de X. La seule restriction sur la mesure μ est qu'aucun singleton ne soit de mesure supérieure ou égale à $\frac{1}{2}\mu(\partial X)$.

L'existence et l'unicité du barycentre est prouvée dans [DE] et [BCG1].

Nous posons donc $F(y)=\mathrm{bar}(\mu_y)$. La propriété (2.2i) et le fait que $\mathrm{bar}(\gamma_*\mu)=\gamma(\mathrm{bar}(\mu))$ (cf. [BCG2]) impliquent que F est ϱ-équivariante.

En fait, le barycentre d'une mesure μ est aussi l'unique point critique de la fonction strictement convexe $\mathcal{B}$ (voir [BCG1]), ce qui implique que F est également donnée par l'équation implicite :

$$\int_{\partial Y} dB_X|_{(F(y),\bar{f}(\theta))}(\,\cdot\,)\, e^{-\delta(\Gamma)\, B_Y(y,\theta)}\, d\nu_O(\theta)=0.$$

La régularité C^∞ de F résulte de manière immédiate de la régularité de $y\mapsto B_Y(y,\theta)$ pour tout θ et du théorème des fonctions implicites, cf. [BCG2].

En dérivant l'équation ci-dessus, nous obtenons l'équation qui donne la différentielle de F pour tout vecteur u tangent à Y en y (cf. [BCG2, paragraphe 5, (5.2)] :

$$\begin{aligned}\int_{\partial Y} D\, dB_X|_{(F(y),\bar{f}(\theta))}(\,\cdot\,, d_yF(u))\, d\nu_y(\theta)&\\ = \delta(\Gamma)\int_{\partial Y} dB_X|_{(F(y),\bar{f}(\theta))}(\,\cdot\,)\, dB_Y|_{(y,\theta)}(u)\, d\nu_y(\theta)&.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Tous les calculs qui suivent se font en des points y et $F(y)$ fixés.

Notons k_y, h_y et h'_y les formes quadratiques, définies sur $T_{F(y)}X$, $T_{F(y)}X$ et T_yY par les formules suivantes, valables pour tous les $v,w\in T_{F(y)}X$ et pour tous les $u,t\in T_yY$:

$$\begin{aligned} k_y(v,w) &= \int_{\partial Y} D\, dB_X|_{(F(y),\bar{f}(\theta))}(v,w)\, d\nu_y(\theta),\\ h_y(v,w) &= \int_{\partial Y} dB_X|_{(F(y),\bar{f}(\theta))}(v)\, dB_X|_{(F(y),\bar{f}(\theta))}(w)\, d\nu_y(\theta),\\ h'_y(u,t) &= \int_{\partial Y} dB_Y|_{(y,\theta)}(u)\, dB_Y|_{(y,\theta)}(t)\, d\nu_y(\theta).\end{aligned} \tag{2.4}$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz, appliquée au second membre de (2.3), donne alors

$$k_y(v, dF(u)) \leqslant \delta(\Gamma)\, h_y(v,v)^{1/2} h'_y(u,u)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Nous allons estimer le p-jacobien de F défini en 1.8.

Notons $U_y \subset T_y Y$ le sous-espace engendré par un p-repère $\{u_1, ..., u_p\}$ pour lequel le maximum est atteint et $V_{F(y)} = d_y F(U_y)$. Nous nous intéresserons ici au cas où $\mathrm{Jac}_p F(y) \neq 0$, ce qui implique que $\dim(V_{F(y)}) = \dim U_y = p$. En restreignant les formes quadratiques k_y, h_y et h'_y à $V_{F(y)}$, $V_{F(y)}$ et U_y respectivement, nous obtenons de nouvelles formes quadratiques, notées k_y^V, h_y^V et $h_y'^U$. Nous appellerons K_y^V, H_y^V et $H_y'^U$ les endomorphismes symétriques correspondants. Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire (cf. [BCG2, lemme 5.4]) permet de déduire de l'inégalité (2.5) l'inégalité suivante sur les déterminants :

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(K_y^V)\, \mathrm{Jac}_p F(y) &\leqslant \delta(\Gamma)^p (\mathrm{dét}\, H_y^V)^{1/2} (\mathrm{dét}\, H_y'^U)^{1/2} \\ &\leqslant \delta(\Gamma)^p (\mathrm{dét}\, H_y^V)^{1/2} \left[\frac{1}{p}\, \mathrm{trace}(H_y'^U)\right]^{p/2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La trace d'une forme quadratique φ (calculée dans une base orthonormée par rapport à une structure euclidienne g) étant notée $\mathrm{trace}_g\, \varphi$, en injectant dans les définitions (2.4) le fait que $\|dB_Y\|_{g_Y} = 1$ et que $\|dB_X\|_{g_X} = 1$, et en renormalisant ν_y de sorte que $\nu_y(\partial Y) = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}(H_y'^U) &= \mathrm{trace}_{g_Y}(h_y'^U) \leqslant \mathrm{trace}_{g_Y}(h'_y) = 1, \\ \mathrm{trace}(H_y^V) &= \mathrm{trace}_{g_X}(h_y^V) \leqslant \mathrm{trace}_{g_X}(h_y) = 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Par ailleurs, si la courbure sectionnelle de X est majorée par -1, le théorème de comparaison de Rauch permet de minorer chacune des courbures principales des horosphères par 1. Le fait que ∇B_X soit la normale unitaire à l'horosphère correspondante implique par ailleurs que les valeurs propres non triviales de DdB_X sont les courbures principales de cette horosphère, donc que $DdB_X \geqslant g_X - dB_X \otimes dB_X$. En rappelant que ν_y a été normalisée en mesure de probabilité, nous en déduisons que $k_y^V \geqslant g_X - h_y^V$ et que

$$\mathrm{dét}\, K_y^V \geqslant \mathrm{dét}(\mathrm{Id} - H_y^V). \tag{2.8}$$

En injectant les estimations (2.7) et (2.8) dans l'inégalité (2.6), nous obtenons

$$\mathrm{Jac}_p F(y) \leqslant \delta(\Gamma)^p p^{-p/2} \frac{(\mathrm{dét}\, H_y^V)^{1/2}}{\mathrm{dét}(I - H_y^V)}. \tag{2.9}$$

Lorsque $p \geqslant 3$, nous prouvons dans [BCG1, appendice B] que la fonction

$$H \mapsto \frac{(\mathrm{dét}\, H)^{1/2}}{\mathrm{dét}(I-H)},$$

définie sur les matrices $p\times p$ symétriques définies positives de trace égale à 1, atteint son maximum en l'*unique* point $H=(1/p)\,\mathrm{Id}_p$. Par ailleurs, si H est une telle matrice et $0\leqslant t\leqslant 1$ un nombre réel, on vérifie aisément que l'application $t\mapsto(\text{dét}\, tH)^{1/2}/\text{dét}(I-tH)$ est strictement croissante. Nous en concluons que la fonction $\mathcal{D}$: $A\mapsto(\text{dét}\, A)^{1/2}/\text{dét}(I-A)$, définie sur les matrices $p\times p$ symétriques définies positives de trace inférieure ou égale à 1, atteint son maximum en l'*unique* point $H=(1/p)\,\mathrm{Id}_p$, d'où

$$\frac{(\text{dét}\, H_y^V)^{1/2}}{\text{dét}(\mathrm{Id}-H_y^V)}\leqslant\frac{p^{p/2}}{(p-1)^p}. \tag{2.10}$$

De (2.9) et (2.10) on déduit

$$\mathrm{Jac}_p\, F(y)\leqslant\left(\frac{\delta(\Gamma)}{p-1}\right)^p, \tag{2.11}$$

i.e. l'inégalité (ii) du théorème 1.10. □

Étude du cas d'égalité dans (2.11). — L'égalité n'a lieu dans (2.11) que si H_y^V réalise le maximum de $\mathcal{D}$ (i.e. $H_y^V=(1/p)\,\mathrm{Id}_V$) et si toutes les inégalités, depuis (2.6) jusqu'à (2.9), sont des égalités. En particulier, l'égalité dans (2.8) implique que $K_y^V=I-H_y^V=((p-1)/p)\,\mathrm{Id}_V$. De même, l'égalité dans la seconde inégalité (2.6) et dans (2.7) implique que $H_y'^U$ est diagonale et égale à $(1/p)\,\mathrm{Id}_U$. Il s'ensuit que

$$k_y^V=\left(\frac{p-1}{p}\right)g_X,\quad h_y^V=\frac{1}{p}g_X\quad\text{et}\quad h_y'^U=\frac{1}{p}g_Y.$$

En reportant dans (2.3) et (2.5), nous obtenons, pour tout $u\in U_y$:

$$\begin{aligned} g_X(d_yF(u),d_yF(u))&=\frac{p\delta(\Gamma)}{p-1}\int_{\partial Y}dB_X|_{(F(y),\bar f(\theta))}(d_yF(u))\,dB_Y|_{(y,\theta)}(u)\,d\nu_y(\theta)\\ &\leqslant\frac{p\delta(\Gamma)}{p-1}h_y(d_yF(u),d_yF(u))^{1/2}h_y'(u,u)^{1/2}\\ &=\frac{\delta(\Gamma)}{p-1}g_X(d_yF(u),d_yF(u))^{1/2}g_Y(u,u)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

L'égalité $\mathrm{Jac}_p\, F=(\delta(\Gamma)/(p-1))^p$ implique qu'il y a égalité entre les deux membres extrêmes de (2.12), ce qui prouve :

2.13. LEMME. — *Si, pour un p-sous-espace U de T_yY, on a l'égalité*

$$\text{dét}((d_yF)|_U)=\left(\frac{\delta(\Gamma)}{p-1}\right)^p,$$

alors $(d_yF)|_U$ est une homothétie de rapport $\delta(\Gamma)/(p-1)$.

Preuve du théorème 1.10 (iii). — Elle est identique à celle de (ii) : on a d'après (2.6)

$$\mathrm{Jac}_n\, F(y)\leqslant(\delta(\Gamma))^n\frac{(\text{dét}\, H_y^V)^{1/2}}{\text{dét}\, K_y^V}\left(\frac{1}{n}\,\text{trace}\, H_y'^U\right)^{n/2}.$$

On se place dans le cas où d_yF est de rang maximum, et dans ce cas, comme $n=\dim X$, on a

$$V=T_{F(y)}X, \quad H_y^V=H_y \quad \text{et} \quad K_y^V=K_y=\mathrm{Id}-H_y-\sum_{i=1}^{k-1} J_iH_yJ_i,$$

où les J_i sont les endomorphismes orthogonaux canoniques de carré -1 (cf. [BCG1, 5.b, p. 751]). En normalisant comme dans (2.7), on a alors $\operatorname{trace} H_y=1$, $\operatorname{trace} H_y'^U\leqslant 1$ et

$$\frac{(\text{dét}\, H_y^V)^{1/2}}{\text{dét}\, K_y^V}\leqslant\frac{n^{n/2}}{(n+k-2)^n}$$

(cf. [BCG1, appendice B, proposition B.1]), d'où $\mathrm{Jac}_n F(y)\leqslant(\delta(\Gamma)/(n+k-2))^n$. Le cas d'égalité est identique au cas d'égalité (ii).

2.14. *Preuve du théorème* 1.10 (i). — On fixe une mesure μ positive bornée sans atome sur ∂X, et on considère, pour tout $\varepsilon>0$, la famille de mesures positives bornées sur ∂X définie par

$$\mu_{y,\varepsilon}=\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\delta(\Gamma)(1+\varepsilon)d_Y(y,\gamma(O))}\varrho(\gamma)_*\mu, \tag{2.15}$$

où O est un point fixé de Y et $d_Y(\,\cdot\,,\cdot\,)$ la distance associée à g_Y sur Y.

Cette famille de mesures est ϱ-équivariante,

$$\mu_{\gamma(y),\varepsilon}=\varrho(\gamma)_*(\mu_{y,\varepsilon}), \tag{2.16}$$

et les applications $F_\varepsilon\colon Y\to X$ définies par

$$F_\varepsilon(y)=\mathrm{bar}(\mu_{y,\varepsilon}) \tag{2.17}$$

sont ϱ-équivariantes et lipschitziennes.

L'estimation de $\mathrm{Jac}_p F_\varepsilon$ est semblable à celle de $\mathrm{Jac}_p F$.

Comme précédemment, on note $k_{\varepsilon,y}$, $h_{\varepsilon,y}$ et $h'_{\varepsilon,y}$ les formes quadratiques définies sur $T_{F_\varepsilon(y)}X$ et T_yY par les formules suivantes, valables pour $v,w\in T_{F_\varepsilon(y)}X$ et $u,t\in T_yY$:

$$\begin{aligned}
k_{\varepsilon,y}(v,w)&=\int_{\partial X} D\,dB_X|_{(F_\varepsilon(y),\theta)}(v,w)\,d\mu_{y,\varepsilon}(\theta),\\
h_{\varepsilon,y}(v,w)&=\int_{\partial X} dB_X|_{(F_\varepsilon(y),\theta)}(v)\,dB_X|_{(F_\varepsilon(y),\theta)}(w)\,d\mu_{y,\varepsilon}(\theta),\\
h'_{\varepsilon,y}(u,t)&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\partial X}\langle\nabla d_y|_{(y,\gamma(O))},u\rangle\langle\nabla d_y|_{(y,\gamma(O))},t\rangle\, e^{-\delta(\Gamma)(1+\varepsilon)d_Y(y,\gamma(O))}\,d(\varrho(\gamma)_*(\mu))(\theta).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De même, on note $U_{\varepsilon,y}$ le sous-espace de T_yY engendré par un p-repère $\{u_1,u_2,\dots,u_p\}$ tel que $\mathrm{Jac}_p F_\varepsilon(y)=\|d_yF_\varepsilon(u_1)\wedge\ldots\wedge d_yF_\varepsilon(u_p)\|_{g_X}$ et $V_{F_\varepsilon(y)}=d_yF_\varepsilon(U_{\varepsilon,y})$.

Si on note $k^V_{\varepsilon,y}$, $h^V_{\varepsilon,y}$ et $h'^U_{\varepsilon,y}$ les restrictions des formes quadratiques $k_{\varepsilon,y}$, $h_{\varepsilon,y}$ et $h'_{\varepsilon,y}$ à $V_{F_\varepsilon(y)}$ et $U_{\varepsilon,y}$ ainsi que $K^V_{\varepsilon,y}$, $H^V_{\varepsilon,y}$ et $H'^U_{\varepsilon,y}$ les endomorphismes symétriques associés, on obtient comme précédemment

$$\text{dét}\, K^V_{\varepsilon,y}\, \mathrm{Jac}_p\, F_\varepsilon(y) \leqslant ((1+\varepsilon)\delta(\Gamma))^p (\text{dét}\, H^V_{\varepsilon,y})^{1/2} \left(\frac{1}{p}\, \mathrm{trace}\, H'^U_{\varepsilon,y}\right)^{p/2}. \tag{2.19}$$

En normalisant $\mu_{\varepsilon,y}$ de sorte que $\mu_{\varepsilon,y}(\partial X)=1$, la trace de $H'^U_{\varepsilon,y}$ est inférieure ou égale à 1 puisque ∇d_y est de norme 1, et l'estimation de $\mathrm{Jac}_p\, F_\varepsilon(y)$ se poursuit de façon rigoureusement identique à celle de $\mathrm{Jac}_p\, F(y)$ dans 1.10 (ii) et conduit au résultat

$$\mathrm{Jac}_p\, F_\varepsilon(y) \leqslant \left(\frac{\delta(\Gamma)(1+\varepsilon)}{p-1}\right)^p. \tag{2.20}$$

2.21. *Preuve du théorème* 1.2. — En appliquant le théorème 1.10 (i) à la représentation $f_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$, induite par $f\colon Y \to X$, nous construisons, comme expliqué en (2.17), une application F_ε (entre les revêtements universels $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{X}$ de Y et X) telle que

$$|\mathrm{Jac}\, F_\varepsilon| \leqslant \left(\frac{\delta(\pi_1(Y))}{n-1}(1+\varepsilon)\right)^n.$$

L'équivariance de F_ε par rapport à la représentation f_* implique qu'elle passe au quotient en une application $Y \to X$.

Notons $b(R) = \#(\Gamma \cdot O) \cap B(\tilde{y}, R)$, où $\Gamma = \pi_1(Y)$ et où la boule $B(\tilde{y}, R)$ est prise dans le revêtement universel riemannien $(\widetilde{Y}, \tilde{g}_Y)$ de (Y, g_Y). Une intégration par parties donne

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-cd(y,\gamma(O))} \leqslant \sum_p e^{-cp} b(p+1).$$

Le théorème de comparaison de R. L. Bishop prouve que $b(p) \leqslant C' e^{(n-1)p}$. On en déduit que $\delta(\Gamma) \leqslant n-1$. Le théorème 1.2 (ii) se déduit alors immédiatement de cette inégalité et du théorème 1.10 (ii) (lorsqu'on fait $p=n$).

2.22. *Preuve du corollaire* 1.4. — Le théorème 1.2 (i) prouve que $|\mathrm{Jac}\, F_\varepsilon| \leqslant 1+\varepsilon$. Par intégration et passage à la limite, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{Vol}(Y, g_Y) \geqslant |\deg F_\varepsilon|\, \mathrm{Vol}(X, g_X).$$

Cas d'égalité dans le corollaire 1.4. — Si X et Y sont supposées compactes, de même dimension, et si leurs volumes sont reliés par $\mathrm{Vol}(Y)/\mathrm{Vol}(X) = |\deg f|$, la majoration uniforme (2.20), l'inégalité $\delta(\Gamma) \leqslant n-1$ et le fait que $\int_Y \mathrm{Jac}_n\, F_\varepsilon \geqslant |\deg f|\, \mathrm{Vol}(X)$ impliquent la convergence L^1 de $\mathrm{Jac}_n(F_\varepsilon)$ vers $\mathbf{1}$ quand $\varepsilon \to 0_+$, et donc la convergence presque sûre d'une sous-suite que nous noterons encore $\mathrm{Jac}_n(F_\varepsilon)$. Nous procédons alors comme dans [BCG1, sections 7 et 8]) :

— Ceci implique que $\mathrm{Jac}_n F_\varepsilon$ est presque partout proche de sa valeur maximale et par conséquent, par (2.19) et par la généralisation de (2.8) qui permet d'estimer $K_{\varepsilon,y}$ en fonction de $H_{\varepsilon,y}$, nous obtenons que $(\mathrm{dét}\, H_{\varepsilon,y})^{1/2}/\mathrm{dét}(I - H_{\varepsilon,y}) = \mathcal{D}(H_{\varepsilon,y})$ est presque partout proche de sa valeur maximale. Un argument de stabilité de ce maximum (cf. [BCG1, Lemme 7.4]) permet d'en déduire que $H_{\varepsilon,y}$ tend *presque partout* vers Id/n (point où la fonctionnelle $\mathcal{D}$ atteint son maximum).

— Le théorème de Rauch et le fait que la courbure K_{g_X} soit minorée (puisque X est fixée et compacte) impliquent que $\|DdB_X\|$ est majorée. Par une preuve identique à celle du lemme 7.5 de [BCG1], nous en déduisons une borne uniforme des variations de la fonction $y \mapsto H_{\varepsilon,y}$, ce qui implique que cette fonction converge *uniformément* vers Id/n.

— Les lemmes 7.6, 7.7 et 7.8 de [BCG1] étant vrais en toute généralité (i.e. ils ne supposent pas que X soit localement symétrique), leurs preuves restent valables dans la situation qui nous intéresse ici et nous obtenons que $F_\varepsilon^* g_0$ tend vers g presque sûrement et est uniformément bornée. Ceci implique (cf. [BCG1]) que F_ε converge vers une application contractante $F\colon Y \to X$, de degré égal à celui de f. Comme $\mathrm{Vol}(Y) = |\deg f|\, \mathrm{Vol}(X)$, la proposition C.1 de l'appendice C de [BCG1] permet d'en déduire que F est alors un revêtement riemannien. □

3. Représentations quasi-fuchsiennes : preuves du théorème 1.14, dans les cas hyperbolique réel et complexe, et du théorème 1.16

Rappelons le théorème 1.14 :

3.1. THÉORÈME. — (i) *Soit (Y, g_Y) un espace hyperbolique réel et (X, g_X) une variété riemannienne simplement connexe de courbure sectionnelle $K_{g_X} \leqslant -1$ tels que* $\dim Y \leqslant \dim X$. *Soit Γ un sous-groupe cocompact d'isométries de Y et $\varrho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(X, g_X)$ une représentation injective convexe cocompacte. Alors*

$$\delta(\varrho(\Gamma)) \geqslant \delta(\Gamma).$$

De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si, la représentation est totalement géodésique.

(ii) *Si (Y, g_Y) et (X, g_X) sont deux espace hyperboliques réels ou complexes (tels que* $\dim Y \leqslant \dim X$), *alors, pour toute représentation ϱ injective d'un sous-groupe cocompact*

Γ d'isométries de Y dans $\mathrm{Isom}(X, g_X)$ *dont l'image est convexe cocompacte, on a*

$$\delta(\varrho(\Gamma)) \geqslant \delta(\Gamma) = \delta(\varrho_0(\Gamma)).$$

De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si, la représentation est totalement géodésique et conjuguée à ϱ_0.

3.2. *Cas où* (Y, g_Y) *est hyperbolique réel* (*preuve de* 1.14 (i)). — D'après le théorème 1.10 (ii), il existe une application $F: Y \to X$, ϱ-équivariante, et vérifiant, pour tout $y \in Y$,

$$\mathrm{Jac}_n F(y) \leqslant \left(\frac{\delta(\Gamma)}{n-1}\right)^n \tag{3.3}$$

où la dimension n de Y est supposée supérieure ou égale à 3.

Comme Γ est un réseau cocompact de (Y, g_Y), l'exposant critique de Γ vérifie $\delta(\Gamma) = n-1$, et F vérifie donc, pour tout $y \in Y$,

$$\mathrm{Jac}_n F(y) \leqslant 1. \tag{3.4}$$

Posons $\Gamma' = \varrho(\Gamma)$, le théorème 1.10 (iii) s'applique à $\varrho^{-1}: \Gamma' \to \Gamma$ et donne une application $G: X \to Y$, ϱ^{-1}-équivariante, vérifiant, pour tout $x \in X$,

$$\mathrm{Jac}_n G(x) \leqslant \left(\frac{\delta(\Gamma')}{n-1}\right)^n. \tag{3.5}$$

L'application $G \circ F: Y \to Y$ est Γ-invariante et définit une application H de Y/Γ dans lui-même vérifiant, d'après (3.4) et (3.5),

$$\mathrm{Jac}_n H(y) \leqslant \left(\frac{\delta(\Gamma')}{n-1}\right)^n. \tag{3.6}$$

Comme H induit l'identité sur $\Gamma = \pi_1(Y/\Gamma)$, le degré de H est égal à 1 et on a

$$\mathrm{Vol}(Y/\Gamma) \leqslant \int_{Y/\Gamma} \mathrm{Jac}_n H(y)\, dy \leqslant \left(\frac{\delta(\Gamma')}{n-1}\right)^n \mathrm{Vol}(Y/\Gamma). \tag{3.7}$$

On en déduit $\delta(\Gamma') \geqslant n-1 = \delta(\Gamma)$.

Dans le cas d'égalité $\delta(\Gamma') = n-1 = \delta(\Gamma)$, nous déduisons de ce qui précède que, pour tout $y \in Y$, $\mathrm{Jac}_n F(y) = (\delta(\Gamma)/(n-1))^n = 1$. Le cas d'égalité 1.10 (ii) entraîne alors que F est une immersion isométrique. Nous allons voir que F est un plongement isométrique et totalement géodésique. En effet, comme dans la preuve du cas d'égalité du théorème 1.10 (ii), l'inégalité (2.12) est une égalité pour tout $y \in Y$, ce qui implique que

$$dB_X|_{(F(y), \bar{f}(\theta))}(d_y F(u)) = dB_Y|_{(y,\theta)}(u) \tag{3.8}$$

pour ν_y-presque tout θ. Les deux membres de cette dernière égalité sont continus par rapport à $\theta\in\partial Y$, et donc cette égalité, *a priori* valable ν_y-presque partout, est en fait valable pour *tout* $\theta\in\partial Y$. En effet, dans le cas où Y est hyperbolique réelle, la mesure ν_y est égale à la mesure de Lebesgue sur $\partial Y\simeq S^{n-1}$. Maintenant, toute géodésique c de Y rencontre ∂Y en un point θ_0, et nous avons donc

$$c'(t)=-\nabla B_Y|_{(c(t),\theta_0)}=-{}^t(d_{c(t)}F)(\nabla B_X|_{(F\circ c(t),\bar f(\theta_0))}).$$

Comme d_yF est une isométrie, $(d_yF)\circ{}^t(d_yF)$ est la projection g_X-orthogonale de $T_{F(y)}X$ sur $d_yF(T_yY)$, d'où

$$(F\circ c)'(t)=-\nabla B_X(F\circ c(t),\bar f(\theta_0))$$

puisque les deux membres de cette égalité sont des vecteurs unitaires ; ceci implique que la courbe $t\to F\circ c(t)$ est une géodésique de (X,g_X) et prouve que *l'immersion de Y dans X est totalement géodésique*. Cette immersion *est en fait un plongement* ; en effet, si $F(y)=F(y')$, l'image par F de la géodésique minimisante qui joint y à y' dans Y est un lacet-géodésique de X, or X ne contient aucun lacet-géodésique, et donc $y=y'$.

Remarque. — Le théorème 1.14 (i) est vrai si on suppose que la représentation est seulement fidèle et discrète. La preuve se fait comme ci-dessus en remplaçant les applications F et G par celles, notées F_ε et G_ε, construites dans 1.10 (i) ; la preuve du cas d'égalité suit alors les lignes de la preuve du cas d'égalité du corollaire 1.4. Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux prouvés dans [Sh], où une approche différente est développée et où, en particulier, Γ n'est plus supposé co-compact.

3.9. *Cas où (Y,g_Y) et (X,g_X) sont hyperboliques complexes (preuve des théorèmes 1.14 (ii) et 1.16).* — Il existe des applications ϱ-équivariantes de classe C^∞, $f\colon Y\to X$, par exemple nous pouvons choisir f harmonique d'après J. Eells, J.H. Sampson et K. Corlette, cf. [ES], [Co]. On pose alors

$$\operatorname{Vol}\varrho=\frac{1}{d!}\int_{Y/\Gamma}f^*(\textstyle\bigwedge^d\omega_X),\tag{3.10}$$

où ω_X est la forme de Kähler de (X,g_X) et où d est la dimension complexe de Y. Comme deux applications ϱ-équivariantes entre Y et X sont homotopes, la quantité $\operatorname{Vol}\varrho$ ne dépend pas du choix de f et ne dépend que de ϱ.

Par ailleurs, d'après le théorème 1.10 (iii), il existe une application C^∞, $G\colon X\to Y$, ϱ^{-1}-équivariante, telle que, pour tout $x\in X$,

$$(\operatorname{Jac}_{2d}G)(x)\leqslant\left(\frac{\delta(\varrho(\Gamma))}{2d}\right)^{2d}.\tag{3.11}$$

L'application $G\circ f\colon Y\to Y$ est Γ-équivariante, et donc homotope à l'identité, par construction et induit une application $H\colon Y/\Gamma\to Y/\Gamma$ de degré $+1$. En particulier, il existe au moins un point y de Y/Γ où $d_y f$ est de rang maximal. Donc, d'après le théorème de S. T. Siu, f est holomorphe (quitte à renverser une des deux structures complexes), cf. [Si], [CT, Théorème 7.2], [JY].

D'après la version du lemme d'Ahlfors–Schwarz donnée dans la proposition A.2, on a, pour tout $y\in Y$,

$$\mathrm{Jac}_{2d}\, f(y)\leqslant 1 \tag{3.12}$$

et donc

$$\mathrm{Vol}\,\varrho\leqslant \mathrm{Vol}(Y/\Gamma) \tag{3.13}$$

où l'égalité a lieu si et seulement si f est un plongement totalement géodésique (cf. Proposition A.2). Soit ω_Y la forme volume de Y. Comme f est holomorphe, f préserve l'orientation et on a

$$\mathrm{Vol}(Y/\Gamma)=\frac{1}{d!}\int_{Y/\Gamma}(G\circ f)^*\big(\textstyle\bigwedge^d\omega_Y\big)\leqslant\frac{1}{d!}\int_{Y/\Gamma}((\mathrm{Jac}_{2d}\,G)\circ f)\, f^*\big(\textstyle\bigwedge^d\omega_X\big),$$

ce qui entraîne, d'après (3.11),

$$\mathrm{Vol}(Y/\Gamma)\leqslant\left(\frac{\delta(\varrho(\Gamma))}{2d}\right)^{2d}\mathrm{Vol}\,\varrho \tag{3.14}$$

et avec (3.13)

$$\delta(\varrho(\Gamma))\geqslant\delta(\Gamma)=2d. \tag{3.15}$$

Dans le cas d'égalité, nous avons $\mathrm{Jac}_{2d}\, f(y)\equiv 1$, ce qui entraîne que f est un plongement totalement géodésique d'après la proposition A.2. Ceci achève la preuve du théorème 1.14 (ii).

Preuve du théorème 1.16. — Nous allons d'abord montrer que l'ensemble des valeurs prises par $\mathrm{Vol}\,\varrho$ et $\mathrm{Vol}(Y/\Gamma)$ est discret. Plus précisément, notons γ_Y et γ_X les formes de Ricci de (Y,g_Y) et (X,g_X) (cf. [Be, 2.44]). Les formes $(1/2\pi)f^*(\gamma_X)$ et $(1/2\pi)\gamma_Y$ sont des représentants de la première classe de Chern $c_1(f^*(T_{\mathbf C}X))$ et $c_1(T_{\mathbf C}(Y/\Gamma))$ des fibrés $f^*(T_{\mathbf C}X)$ et $T_{\mathbf C}(Y/\Gamma)$. Soient ω_Y et ω_X les formes de Kähler de Y et X. Comme

$$\frac{\gamma_Y}{2\pi}=-\frac{d+1}{\pi}\omega_Y\quad\text{et}\quad\frac{\gamma_X}{2\pi}=-\frac{m+1}{\pi}\omega_X$$

(où d et m sont les dimensions complexes respectives de Y et X), on déduit de ce qui précède que les nombres $N=|\langle c_1^d(f^*(T_{\mathbf C}X)),[Y/\Gamma]\rangle|$ et $N_0=|\langle c_1^d(T(Y/\Gamma)),[Y/\Gamma]\rangle|$ sont des entiers respectivement égaux à

$$\left(\frac{m+1}{\pi}\right)^d d!\,\mathrm{Vol}\,\varrho\quad\text{et}\quad\left(\frac{d+1}{\pi}\right)^d d!\,\mathrm{Vol}(Y/\Gamma).$$

Supposons maintenant que ϱ n'est pas une représentation totalement géodésique. Nous avons alors $\operatorname{Vol}\varrho<\operatorname{Vol}(Y/\Gamma)$ d'après le cas d'égalité de la proposition A2, ce qui implique que l'entier $(m+1)^d N_0-(d+1)^d N$ est au moins égal à 1. On en déduit que

$$\frac{\operatorname{Vol}(Y/\Gamma)}{\operatorname{Vol}\varrho}\geqslant 1+\frac{1}{N_0(m+1)^d-1}$$

et, avec (3.14),

$$\frac{\delta(\varrho(\Gamma))}{\delta(\Gamma)}\geqslant\left(1+\frac{1}{N_0(m+1)^d-1}\right)^{1/2d}.$$

3.16. *Rigidité des sous-variétés complexes presque totalement géodésiques des variétés hyperboliques complexes.* — Un des arguments utilisés dans la preuve précédente est que les rapports des volumes de Y/Γ et de ϱ sont des quotients d'entiers (en vertu de l'intégrité des classes de Chern). Cet argument était déjà utilisé par W. Goldman et J. Millson ([GM]) pour prouver que toute représentation « suffisamment proche » de « la » représentation totalement géodésique est, en fait, totalement géodésique.

Cet argument peut être systématisé et nous amène à prouver qu'une norme L^2 de la seconde forme fondamentale (normalisée par une constante universelle) est proche d'un entier. D'où :

3.17. THÉORÈME. — *Il existe une constante universelle $C(m)$ (positive, explicitable) telle que toute sous-variété complexe compacte de dimension $d<m$ d'un quotient X (éventuellement non compact) de l'espace hyperbolique complexe de dimension m, dont la seconde forme fondamentale est de normes L^2 et L^{2d} plus petites que $C(m)$, est en fait totalement géodésique.*

3.18. *Remarque.* — M. Gromov conjecture (voir [Gr2, p. 185, paragraphe d']) que toute sous-variété compacte d'un quotient de l'espace hyperbolique complexe dont la seconde forme fondamentale est petite est homotope à une sous-variété totalement géodésique. Le théorème 3.17 en donne une version complexe lorsque la petitesse de la seconde forme fondamentale est mesurée par la norme L^2.

Preuve du théorème 3.17. — La seconde forme fondamentale (notée II) de la sous-variété complexe M étant à valeurs vectorielles, nous lui associerons la forme quadratique (scalaire), notée $\widetilde{\mathrm{II}}$, définie par

$$\widetilde{\mathrm{II}}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n=2d}\langle\mathrm{II}(e_i,X),\mathrm{II}(e_i,Y)\rangle$$

où $\{e_i\}$ est une base g-orthonormée de l'espace tangent à M muni de la métrique induite, notée g. Comme le 2-tenseur symétrique $\widetilde{\mathrm{II}}$ se comporte comme le carré de la seconde forme fondamentale, nous noterons η_i^2 ses valeurs propres (relativement à la métrique g). On remarquera que $\sum_{i=1}^{2d} \eta_i^2 = \|\mathrm{II}\|^2$.

Les formules de Gauss–Codazzi donnent

$$\mathrm{Ricci}_g = -2(d+1)g - \widetilde{\mathrm{II}}. \tag{3.19}$$

Cette formule et l'invariance par J de la courbure de Ricci impliquent que chaque valeur propre de $\widetilde{\mathrm{II}}$ est double et que

$$\mathrm{Ricci}_g = -\sum_{1\leqslant i\leqslant d} (2d+2+\eta_i^2)(e_i^*\otimes e_i^* + (Je_i)^*\otimes(Je_i)^*)$$

pour toute base hermitienne $\{e_i\}$ de T_mM qui diagonalise Ricci_g. Ceci conduit à la formule

$$\bigwedge^d \gamma = (-1)^d \prod_{i=1}^{d} (2d+2+\eta_i^2) \bigwedge^d \omega,$$

où γ est la 2-forme associée à la courbure de Ricci de g (cf. la preuve du théorème 1.16) et où ω est la forme de Kähler de (M,g). En intégrant sur M nous obtenons

$$\langle c_1(T_{\mathbf{C}}M)^d, [M]\rangle = (-1)^d \left(\frac{d+1}{\pi}\right)^d \int_M \prod_{1\leqslant i\leqslant d} \left(1+\frac{1}{2d+2}\eta_i^2\right) \bigwedge^d \omega. \tag{3.20}$$

En effet, $\gamma/2\pi$ est un représentant de la première classe de Chern de (M,J), notée $c_1(T_{\mathbf{C}}M)$. Remarquons que $-2(m+1)\omega$ est la restriction à M de la forme de Ricci, notée γ_X, de X. Ainsi, $-((m+1)/\pi)\omega$ est un représentant de la première classe de Chern de la restriction E à M du fibré tangent $T_{\mathbf{C}}X$ de X, que nous noterons $c_1(E)$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned}(m+1)^d &\langle c_1(T_{\mathbf{C}}M)^d, [M]\rangle - (d+1)^d \langle c_1(E)^d, [M]\rangle \\ &= (-1)^d \left[\frac{[(d+1)(m+1)]^d}{4(d+1)\pi^d} \int_M \|\mathrm{II}\|^2 \bigwedge^d \omega + \int_M P(\eta_1^2, \dots, \eta_d^2) \bigwedge^d \omega\right],\end{aligned} \tag{3.21}$$

où P est un polynôme universel positif dont chaque monôme est de degré $\geqslant 2$ en les η_i^2.

Comme $c_1(T_{\mathbf{C}}M)$ et $c_1(E)$ sont des classes entières, le second membre de l'égalité ci-dessus est donc un entier. Si le plongement n'est pas totalement géodésique, ceci donne des constantes universelles $A_1, \dots, A_d$ telles que l'intervalle

$$\left[A_1\|\mathrm{II}\|_{L^2}^2,\ A_1\|\mathrm{II}\|_{L^2}^2 + \dots + A_d\|\mathrm{II}\|_{L^{2d}}^{2d}\right]$$

contienne toujours un entier positif. Ceci achève la preuve. □

Ce raisonnement montre également :

3.22. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.17 :

(i) *Lorsque* M *est de dimension complexe égale à* 1, *alors* $((m+1)/8\pi)\int_M \|\mathrm{II}\|^2\, dv_g$ *est un entier.*

(ii) *En dimension quelconque, il existe une constante positive universelle* $c(m)$ *telle que, si*

$$\|\mathrm{II}\|^2_{L^\infty}\,|\langle c_1(T_{\mathbf{C}}M)^d,[M]\rangle| < c(m),$$

alors M *est une sous-variété totalement géodésique.*

En particulier, lorsque M *est de dimension complexe égale à* 1, M *est totalement géodésique dès que* $|\chi(M)|\cdot\|\mathrm{II}\|^2_{L^\infty} < 16/(m+1)$.

Preuve. — La propriété (i) est une conséquence directe du fait que le premier membre de l'égalité (3.21) est un entier pair.

La propriété (ii) découle du fait que

$$\int_M \bigwedge^d \omega \leqslant \Big(\frac{\pi}{d+1}\Big)^d |\langle c_1(T_{\mathbf{C}}M),[M]\rangle|$$

d'après (3.20), ce qui permet de majorer le second membre de (3.21) par

$$\frac{1}{c(m)}\,\|\mathrm{II}\|^2_{L^\infty}\,|\langle c_1(T_{\mathbf{C}}M),[M]\rangle|,$$

le premier membre restant un entier (pair en dimension 2), qui est strictement positif dès que M n'est pas totalement géodésique. □

4. Sous-variétés minimales d'un espace localement symétrique

Il est naturel de se demander si le groupe-image $\varrho(\Gamma)$ laisse globalement invariante une sous-variété de dimension n. La résolution de ce problème dans le cas complexe est le principal argument pour démontrer que toute représentation quasi-fuchsienne d'un réseau de $SU(n,1)$ dans $SU(m,1)$ est totalement géodésique dès que $m\leqslant 2n$ (cf. [Y1]).

Cette question n'est pas résolue dans le cas réel, c'est pourquoi, dans ce qui précède, nous remplaçons cette sous-variété (putative) par l'image de « l'application naturelle » F, qui contracte les volumes comme le ferait une immersion holomorphe. Une telle immersion holomorphe aurait pour image une sous-variété complexe de l'espace hyperbolique complexe, qui est donc minimale. Il est naturel, pour poursuivre l'analogie entre les cas complexe et réel, de s'intéresser aux rapports entre pincement de l'entropie (en relation avec le théorème 1.16) et petitesse de la seconde forme fondamentale (en relation avec le théorème 3.17 et le corollaire 3.22) dans le cas général d'une sous-variété minimale d'un espace hyperbolique réel ou complexe.

Pour toute sous-variété Y de $H^m(\mathbf{R})$ ou de $H^m(\mathbf{C})$, de dimension (réelle) n, nous noterons $\bar{\delta}_Y(y)$ (resp. $\underline{\delta}_Y(y)$) la limite supérieure (resp. la limite inférieure), quand R tend vers $+\infty$, de la quantité

$$\frac{1}{R}\log[\mathrm{Vol}(B(y,R)\cap Y)],$$

où $B(y,R)$ désigne la boule de l'espace ambiant. Remarquons que, lorsque Y est totalement géodésique, on a

$$\bar{\delta}_Y=\underline{\delta}_Y\equiv h_0=\begin{cases} n-1 & \text{si } Y\subset H^m(\mathbf{R}),\\ n & \text{si } Y \text{ est une sous-variété complexe de } H^m(\mathbf{C}).\end{cases}$$

Comme dans la section 3, la comparaison avec la situation totalement géodésique donne :

4.1. PROPOSITION. — *Si Y est une sous-variété minimale complète de dimension n, proprement immergée, de $H^m(\mathbf{R})$ (resp. une sous-variété complexe de $H^m(\mathbf{C})$), alors $\underline{\delta}_Y\geqslant h_0$. Si de plus sa seconde forme fondamentale vérifie $\|\mathrm{II}\|_{L^\infty}\leqslant\varepsilon<1$ en dehors d'un compact, alors $h_0\leqslant\bar{\delta}_Y\leqslant h_0/(1-\varepsilon)$.*

Preuve. — La preuve est presque classique ; au moins en ce qui concerne la minoration $\bar{\delta}_Y\geqslant h_0$, elle est analogue à la preuve de l'inégalité isopérimétrique sur les sous-variétés minimales ([HS]), elle-même inspirée de la preuve classique de la croissance du volume des boules pour les sous-variétés minimales de l'espace euclidien. Cependant, la majoration $\bar{\delta}_Y\leqslant h_0/(1-\varepsilon)$ exige d'être plus précis dans les estimées. Rappelons-en les grandes étapes.

Posons

$$\theta(r)=\begin{cases}(\operatorname{sh} r)^{n-1} & \text{dans le cas hyperbolique réel,}\\ (\operatorname{sh} r)^{n-1}\operatorname{ch} r & \text{dans le cas hyperbolique complexe,}\end{cases}$$

qui représente la densité de la forme volume riemannienne (exprimée en coordonnées polaires exponentielles) pour une sous-variété totalement géodésique, de dimension réelle n, de l'espace hyperbolique réel ou complexe.

Posons

$$f(r)=\int_0^r\frac{1}{\theta(s)}\left(\int_0^s\theta(t)\,dt\right)ds.$$

Si $\varrho(x)$ désigne la distance (dans l'espace hyperbolique ambiant) de x à un point fixé $y\in Y$, un calcul direct donne :

$$D\,d\varrho=\begin{cases}\dfrac{1}{\operatorname{th}\varrho}(g-d\varrho\otimes d\varrho) & \text{dans le cas hyperbolique réel,}\\[2mm] \dfrac{1}{\operatorname{th}\varrho}(g-d\varrho\otimes d\varrho)+(\operatorname{th}\varrho)(d\varrho\circ J)\otimes(d\varrho\circ J) & \text{dans le cas hyperbolique complexe.}\end{cases}$$

Si Δ_Y désigne le Laplacien de Y, muni de la métrique induite, on en déduit :

$$-\Delta_Y(f\circ\varrho)=1+(a\circ\varrho)\|\nabla\varrho^N\|^2, \tag{4.2}$$

où

$$a(r)=\begin{cases}\dfrac{n}{\operatorname{th} r}\cdot\dfrac{1}{\theta(r)}\displaystyle\int_0^r\theta(t)\,dt-1 & \text{dans le cas hyperbolique réel,}\\ 0 & \text{dans le cas hyperbolique complexe,}\end{cases}$$

et où $\nabla\varrho^N$ désigne la composante du gradient de ϱ normale à Y (signalons que la minimalité permet de calculer Δ_Y comme une trace partielle de $D\,d\varrho$). Remarquons que, dans le cas réel, $a(r)\in]0,1/(n-1)[$ et tend vers $1/(n-1)$ quand r tend vers $+\infty$. De même, $f'(r)=(\operatorname{th} r)/n$ dans le cas complexe, et $\lim_{r\to+\infty}f'(r)=1/(n-1)$ dans le cas réel.

En intégrant (4.2) sur $B_R=B(y,R)\cap Y$ et en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{gathered}\frac{\operatorname{th} R}{n}\int_{\partial B_R}\sqrt{1-\|\nabla\varrho^N\|^2}=\operatorname{Vol}(B_R)\quad\text{dans le cas hyperbolique complexe,}\\ \operatorname{Vol}(B_R)\leqslant f'(R)\int_{\partial B_R}\sqrt{1-\|\nabla\varrho^N\|^2}\leqslant\operatorname{Vol}B_R+\frac{1}{n-1}\int_{B_R}\|\nabla\varrho^N\|^2.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Posons $A(R)=\operatorname{Vol}(B_R)$. La formule de la co-aire donne

$$A'(R)=\int_{\partial B_R}\frac{1}{\sqrt{1-\|\nabla\varrho^N\|^2}}\geqslant\operatorname{Vol}\partial B_R\geqslant\int_{\partial B_R}\sqrt{1-\|\nabla\varrho^N\|^2}. \tag{4.4}$$

Si B_R^0 désigne la boule de rayon R de l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) de dimension (réelle) n, les estimées (4.3) et (4.4) donnent, pour *tout* $R>0$,

$$\frac{A'(R)}{A(R)}\geqslant\frac{\operatorname{Vol}(\partial B_R)}{\operatorname{Vol}(B_R)}\geqslant\frac{\theta(R)}{\int_0^R\theta(t)\,dt}=\frac{\operatorname{Vol}(\partial B_R^0)}{\operatorname{Vol}(B_R^0)}$$

et, par intégration, $\operatorname{Vol}(B_R)\geqslant\operatorname{Vol}(B_R^0)$, l'inégalité $\underline{\delta}_Y\geqslant h_0$ n'en étant que la version asymptotique.

Par ailleurs nous avons :

4.5. LEMME. — *Si $\|\mathrm{II}\|_{L^\infty}\leqslant\varepsilon<1$ en dehors de B_{R_0}, alors, pour tout $R>R_0$,*

$$\|\nabla\varrho^N\|(x)\leqslant\frac{\operatorname{sh} R_0-\varepsilon\operatorname{ch} R_0}{\operatorname{sh} R}+\frac{\varepsilon}{\operatorname{th} R}$$

en tout point x de ∂B_R.

Pour une estimation analogue dans le cas hyperbolique réel, voir [O].

Preuve du lemme. — Considérons une géodésique c de Y qui sort de B_{R_0} et telle que $c(0)=y$. On a

$$\frac{d}{dt}d\varrho[\dot{c}(t)] = D\,d\varrho(\dot{c},\dot{c}) - \langle(\nabla\varrho)^N, \mathrm{II}(\dot{c},\dot{c})\rangle.$$

Posons $z(\varrho\circ c(t)) = \sqrt{1-d\varrho(\dot{c}(t))^2}$. Ce changement de variable est justifié sur tout intervalle I sur lequel on a $z<1$ et donne, sur I,

$$\frac{dz}{dr} + \frac{1}{\operatorname{th} r}z \leqslant b(r), \quad \text{où } b[\varrho(c(t))] = \|\mathrm{II}_{c(t)}\|.$$

On en déduit que $I=[R_0,+\infty[$ dès que $\varepsilon<1$. Comme $\|\nabla\varrho^N\|\leqslant z(R)$ lorsque $\varrho[c(t)]=R$, ceci achève la preuve du lemme. □

Fin de la preuve de la proposition 4.1. — Les formules (4.3) et (4.4) et le lemme 4.5 donnent l'existence d'un choix de R_1 tel que on ait : $A'(R)\leqslant(h_0/(1-\varepsilon))A(R)$ pour $R\geqslant R_1$, d'où l'inégalité $\bar{\delta}_Y(y)\leqslant h_0/(1-\varepsilon)$. □

Appendice

Dans cet appendice nous nous proposons de prouver la proposition 1.1 dont nous rappelons l'énoncé :

A.1. PROPOSITION. — *Soient X et Y deux variétés kählériennes de même dimension complexe d, Y étant supposée compacte. Supposons qu'en tout point les courbures de Ricci de X et Y vérifient*

$$\mathrm{Ricci}_{g_Y} \geqslant -g_Y \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ricci}_{g_X} \leqslant -g_X,$$

où g_Y et g_X sont les métriques riemanniennes respectives de Y et de X. Alors toute application holomorphe $F\colon Y\to X$ vérifie

$$|\operatorname{Jac} F(y)| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout } y\in Y.$$

De plus si, en un point $y\in Y$, on a $|\operatorname{Jac} F(y)|=1$, alors d_yF est isométrique.

Preuve. — La compacité de Y nous permet de nous placer en un point y où $|\operatorname{Jac} F|$ atteint son maximum, ce maximum étant supposé strictement positif (sinon le théorème est trivialement vérifié). L'application F est alors biholomorphe d'un voisinage U de y sur un voisinage V de $F(y)$. Notons g' la métrique F^*g_X, définie sur U. Notons φ une carte complexe sur U, à valeurs dans $\mathbf{C}^d$. Par construction de g', on a

$$\frac{|\operatorname{Jac}_{g_Y}\varphi|}{|\operatorname{Jac}_{g'}\varphi|} = |\operatorname{Jac} F|.$$

Par ailleurs les calculs classiques de la courbure de Ricci (voir par exemple [SP]) donnent, en coordonnées complexes,

$$\mathrm{Ricci}_{g'}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \frac{\partial^2(\mathrm{Log}\,|\mathrm{Jac}_{g'}\,\varphi|)}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_j}.$$

En lui soustrayant la formule analogue associée à la métrique g_Y et en développant, on obtient :

$$\mathrm{Ricci}_{g'}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \mathrm{Ricci}_{g_Y}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -2\,\frac{\partial^2(\mathrm{Log}\,|\mathrm{Jac}\,F|)}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_i}.$$

Les hypothèses de courbure et le fait que y soit un maximum impliquent, au point y,

$$g' - g_Y \leqslant \mathrm{Ricci}_{g_Y} - \mathrm{Ricci}_{g'} \leqslant 0.$$

Nous en déduisons, pour tout $z \in Y$,

$$|\mathrm{Jac}\,F|^2(z) \leqslant |\mathrm{Jac}\,F|^2(y) = (\mathrm{dét}_{g_Y}\,g')(y) \leqslant 1.$$

En tout point où $|\mathrm{Jac}\,F|$ est égal à 1, la fonction $|\mathrm{Jac}\,F|$ atteint son maximum, nous avons donc, en ce point,

$$g' = g_Y \quad \text{et} \quad \mathrm{Ricci}_{g_Y} = \mathrm{Ricci}_{g'}.$$

Ceci implique que d_yF est isométrique. □

A.2 PROPOSITION. — *Soit (Y, g_Y, J) une variété kählérienne compacte, de dimension complexe d, dont la courbure de Ricci vérifie $\mathrm{Ricci}_{g_Y} \geqslant -2(d+1)g_Y$.*

Alors toute application holomorphe du revêtement universel $\widetilde{Y}$ de Y dans un espace hyperbolique complexe X de dimension $m \geqslant d$, qui commute avec une représentation ϱ de $\pi_1(Y)$ dans $\mathrm{Isom}(X)$, vérifie $|\mathrm{Jac}_{2d}\,F| \leqslant 1$ en tout point.

De plus, si $|\mathrm{Jac}_{2d}\,F| \equiv 1$, alors F est isométrique et totalement géodésique.

Preuve. — Nous nous plaçons en un point y où $|\mathrm{Jac}_{2d}\,F|$ est maximal et non nul. Alors F est une application biholomorphe entre deux variétés : un ouvert U de Y contenant y et son image $V = F(U)$. Comme V est une sous-variété complexe de X, sa métrique induite g vérifie, d'après les formules de Gauss–Codazzi (3.19),

$$\mathrm{Ricci}_g \leqslant -2(d+1)g. \tag{A.3}$$

La proposition précédente donne donc que $|\mathrm{Jac}_{2d}\,F| \leqslant 1$ et que l'égalité n'a lieu que si F est une immersion isométrique et l'inégalité (A.3) est une égalité. Ceci implique que le terme $\widetilde{\mathrm{II}}$ de la formule (3.19) s'annule, donc que la seconde forme fondamentale du plongement de V dans X est nulle. □

Bibliographie

[BCG1] BESSON, G., COURTOIS, G. & GALLOT, S., Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5 (1995), 731–799.

[BCG2] — Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16 (1996), 623–649.

[Be] BESSE, A. L, *Einstein Manifolds*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 10. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1987.

[Bou] BOURDON, M., Sur le birapport au bord des CAT(−1)-espaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 83 (1996), 95–104.

[Bow] BOWEN, R., Haussdorff dimension of quasi-circles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50 (1979), 11–25.

[BP] BENEDETTI, R. & PETRONIO, C., *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[BZ] BURAGO, YU. D. & ZALGALLER, V. A., *Geometric Inequalities*. Grundlehren Math. Wiss., 285. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988.

[Co] CORLETTE, K., Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. *Ann. of Math.*, 135 (1992), 165–182.

[CT] CARLSON, J. & TOLEDO, D., Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 69 (1989), 173–201.

[DE] DOUADY, E. & EARLE, C., Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math.*, 157 (1986), 23–48.

[ES] EELLS, J. & SAMPSON, J. H., Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86 (1964), 109–160.

[GH] GHYS, E. & HARPE, P. DE LA (éditeurs), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* (Bern, 1988). Progr. Math., 83. Birkhaüser Boston, Boston, MA, 1990.

[GM] GOLDMAN, W. & MILLSON, J., Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space. *Invent. Math.*, 88 (1987), 495–520.

[Gr1] GROMOV, M., Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 56 (1981), 213–307.

[Gr2] — Asymptotic invariants of infinite groups, in *Geometric Group Theory*, Vol. 2 (Sussex, 1991), pp. 1–295. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[HS] HOFFMANN, W. & SPRUCK, J., Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1975), 715–727; Erratum. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1975), 765–766.

[JY] JOST, J. & YAU, S. T., Harmonic mappings and Kähler manifolds. *Math. Ann.*, 262 (1983), 145–166.

[Mo] MOK, N., *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Manifolds*. Ser. Pure Math., 6. World Sci. Publishing, Singapore, 1989.

[O] OLIVEIRA FILHO, G. DE, Compactification of minimal submanifolds of hyperbolic space. *Comm. Anal. Geom.*, 1 (1993), 1–29.

[P] PANSU, P., Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 14 (1989), 177–212.

[Sa] SAMBUSETTI, A., Best constants for a real Schwarz lemma. Prépublication de l'Institut Fourier n° 422. Grenoble, 1998.

[Sh] SHALOM, Y., Rigidity and cohomology of unitary representations. *Internat. Math. Res. Notices*, 16 (1998), 829–849.

[Si] SIU, Y. T., Complex analyticity of harmonic maps and strong rigidity of complex Kähler manifolds. *Ann. of Math.*, 112 (1980), 73–111.

[SP] SÉMINAIRE PALAISEAU 1978, Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi. *Astérisque* n° 58.

[Su] SULLIVAN, D., The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50 (1979), 171–202.

[Y1] YUE, C. B., Dimension and rigidity of quasi-Fuchsian representations. *Ann. of Math.*, 143 (1996), 331–355.

[Y2] — The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (1996), 4965–5005.

GÉRARD BESSON
Institut Fourier
Université de Grenoble I
UMR 5582 CNRS-UJF
B.P. 74
FR-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
France
besson@mozart.ujf-grenoble.fr

GILLES COURTOIS
Centre de Mathématiques
École Polytechnique
UMR 7640 CNRS
FR-91128 Palaiseau Cedex
France
courtois@math.polytechnique.fr

SYLVESTRE GALLOT
Institut Fourier
Université de Grenoble I
UMR 5582 CNRS-UJF
B.P. 74
FR-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
France
gallot@mozart.ujf-grenoble.fr

Reçu le 9 octobre 1998