ÜBER FOLGEN UND SCHAREN VON ANALYTISCHEN UND MEROMORPHEN FUNKTIONEN MEHRERER VARIABELN, SOWIE VON ANALYTISCHEN ABBILDUNGEN.

VON

H. RUTISHAUSER
in ZÜRICH.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Teil der klassischen Ergebnisse von P. Montel über normale und quasinormale Scharen auf Funktionen mehrerer Variabeln (künftig: Fkt. m. Var.) übertragen.

Dabei knüpfe ich an die Arbeiten von G. Julia und W. Saxer an, welche bereits normale Scharen analytischer, bzw. meromorpher Fkt. m. Var. zum Gegenstand hatten. Die Ergebnisse dieser beiden Arbeiten sind zum Teil in § 1 dargestellt.

Da bekanntlich die irregulären Punkte einer Folge analytischer Fkt. m. Var. nicht isoliert auftreten können[1], kann die klassische Definition der quasinormalen Scharen nicht ohne weiteres auf Fkt. m. Var. übertragen werden.

> Man muss vielmehr eine Schar analytischer oder meromorpher Fkt. m. Var. dann quasinormal nennen, wenn man aus jeder Teilfolge der Schar eine weitere Teilfolge auswählen kann, deren irreguläre Punkte höchstens analytische Flächen bilden.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht in dieser Arbeit natürlich aus der Unmöglichkeit, die a-Stellen einer Funktion oder die irregulären Punkte einer Funktionsfolge zu zählen.

Diese Schwierigkeit wird nun dadurch behoben, dass man jeder in einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ singularitätenfreien analytischen Fläche (Vgl. Def. 1) eine

[1] Vgl. JULIA, Abschnitt 16.

natürliche Zahl n, die sogenannte Blätterzahl (Vgl. Def. 4, Zusatz) zuordnet. Es gilt dann:

Satz 2: *Eine Schar analytischer Flächen, deren Blätterzahl, oder deren Flächeninhalt im Bereich $\mathfrak{B}$ durchwegs unterhalb einer gewissen Grenze n, bzw. F bleibt, ist normal in $\mathfrak{B}$, d. h. man kann aus jeder Teilfolge dieser Schar eine weitere Teilfolge auswählen; die in $\mathfrak{B}$ gegen eine singularitätenfreie analytische Fläche konvergiert.*

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich nun fast alle Montel'schen Ergebnisse auf Fkt. m. Var. übertragen, z. B.:

Satz 9: *Eine Schar analytischer Fkt. m. Var., wobei die Blätterzahlen der Null- und Einsstellenflächen für alle Funktionen der Schar beschränkt sind, ist im betrachteten Bereich quasinormal von endlicher Ordnung.*

Entsprechendes gilt natürlich, mit 3 Quasiausnahmewerten a, b, c, auch für meromorphe Funktionen (Satz 18).

Man kann die Betrachtungen über die Konvergenz einer Folge analytischer Flächen durch Einführung der *Belegungszahl* (Satz 3 und Def. 8) noch verfeinern, es gelingt auf diese Weise, den Begriff der totalen Ordnung einer quasinormalen Schar auf Fkt. m. Var. zu übertragen (§ 8 für analytische, und § 12 für meromorphe Funktionen). Es gelten dann die bekannten Bedingungen, unter denen eine quasinormale Schar total endlicher Ordnung normal ist, (Satz 10), und die schliesslich zu den Sätzen von Schottky und Landau führen (Satz 11 und 12).

Im dritten Kapitel folgen dann die entsprechenden Sätze für meromorphe Funktionen, welche in der Regel etwas komplizierter sind, als bei analytischen Funktionen.

Im vierten Kapitel wende ich die erhaltenen Resultate auf ganze Funktionen und solche, die in jedem endlichen Bereich meromorph sind, an. Der Picard'sche Satz, wonach eine ganze transzendente Funktion höchstens einen Wert a_0 nicht ∞ oft annimmt, hat bei Fkt. m. Var. ein Analogon, wenn man statt der Zahl der a-Stellen die durch Formel (12) definierte Funktion $\Phi_a(R)$ betrachtet (Satz 23 und § 13, b).

Die Theorie der quasinormalen Scharen erlaubt auch eine Aussage über Julia-Geraden einer ganzen Funktion, *es zeigt sich* (Satz 24), *dass jede nicht konstante ganze Fkt. m. Var. Julia-Geraden besitzt.* Bei meromorphen Funktionen liegen die Verhältnisse etwas komplizierter, bei gewissen rationalen Funktionen fehlen die Julia-Geraden (§ 15, a). Ausserdem treten hier wie in der klassischen Theorie die sogenannten *Ausnahmefunktionen* auf, die aber nicht weiter betrachtet werden.

In den beiden folgenden Kapiteln komme ich noch auf Folgen und Scharen analytischer und meromorpher Abbildungen zu sprechen. Im Gegensatz zu den Arbeiten von C. Carathéodory und H. Cartan[1], welche im wesentlichen eindeutige Abbildungen zweier fester Bereiche aufeinander, sowie eines Bereiches auf sich selbst betrachten, habe ich für die Bildbereiche weder Schlichtheit noch Beschränktheit vorausgesetzt.

Dem Konvergenzbegriff lege ich die projektive Erweiterung des Bildraums zugrunde und definiere dann die reguläre Folge meromorpher Abbildungen durch Betrachtung der Punktfolgen $S_j(P_j)$, wobei P_j gegen P_0 konvergiert (Vgl. Def. 15 und 16).

Es zeigen sich hier zum Teil ganz ähnliche Erscheinungen wie bei Funktionsfolgen (Vgl. etwa die Sätze 7 & 30, sowie 16 & 32 miteinander), insbesondere treten an die Stelle der 3 Quasiausnahmewerte a, b, c der klassischen Theorie[2] die 6 Quasiausnahmeebenen in Satz 38. Entsprechend werden aus den 3 Ausnahmewerten $0, 1, \infty$ des Landau'schen Satzes die 6 Ausnahmeebenen (20) (S. 317) des Satzes von F. Bureau.

Hingegen können die irregulären Punkte bei einer Folge analytischer Abbildungen isoliert auftreten, was bei einer Folge analytischer Funktionen bekanntlich unmöglich ist.

Aus Satz 38 folgt übrigens ein schon von P. Myrberg[1] gefundenes Resultat:

> Die Schar aller projektiven Abbildungen ist im abgeschlossenen R^4 quasi-normal von erster Ordnung, d. h. jede Folge projektiver Abbildungen besitzt eine Teilfolge, die, mit Ausnahme höchstens einer analytischen Ebene, überall gleichmässig konvergiert.

Ich möchte an dieser Stelle darauf hinweisen, dass ich einen Teil der Ergebnisse bereits in zwei C–R-Noten publiziert habe.[3]

Konventionen.

Wo im folgenden von *Bereichen* die Rede ist, soll es sich immer um offene, beschränkte und schlichte Bereiche handeln.

---

[1] Vgl. Literaturverzeichnis.
[2] Montel, S. 149—151.
[3] Comptes rendus, Band 224, S. 1804, und Band 225, S. 33.

Die meisten Sätze lassen sich zwar vermöge des Diagonalverfahrens auch für allgemeinere Bereiche beweisen, wenn sie nur von innen durch eine Folge beschränkter, schlichter Bereiche approximiert werden können.[1]

Die in dieser Arbeit behandelten Probleme bringen es mit sich, dass man den Begriff der *analytischen Fläche* zweckmässig etwas weiter fasst:

Def. 1: Unter einer im Bereich $\mathfrak{B}$ singularitätenfreien analytischen Fläche verstehe ich die Gesamtheit aller in $\mathfrak{B}$ liegenden Punkte, die Nullstellen[2] einer geeigneten, in $\mathfrak{B}$ meromorphen Funktion sind.

Damit braucht also eine derart definierte analytische Fläche keine zusammenhängende Punktmenge zu sein, sie kann ausserdem in $\mathfrak{B}$ Doppel- und Verzweigungspunkte (sog. algebraische Singularitäten) besitzen. Hingegen sind natürlich wesentliche Randpunkte in $\mathfrak{B}$ nicht zulässig, und eventuelle hebbare Singularitäten müssen durch geeignete Ergänzung eliminiert worden sein.

Def. 1 umfasst den Begriff des ergänzten analytischen Flächenstücks im üblichen Sinn; aber auch die Vereinigungsmenge von endlich vielen solchen werde ich gemäss Def. 1 kurz als analytische Flächen bezeichnen.

Schliesslich wird in dieser Arbeit, um Verwechslungen zu vermeiden, durchwegs von *singulären Stellen einer Funktion*, und von *irregulären Stellen einer Folge oder Schar* gesprochen.

Die Bezeichnung regulär wird nie für eine Funktion gebraucht, ebensowenig singulär für eine Folge oder Schar.

Verzeichnis der definierten Begriffe.

Analytische Fläche	Def. 1,	Seite	252
Reguläre Funktionsfolge (auch merom)	» 2,	»	253
Häufungspunkt und Grenzpunkt einer Folge analytischer Flächen	» 3,	»	255
a-Stellenzahl einer Funktion, Blätterzahl einer analytischen Fläche	» 4,	»	256
Konvergenz einer Flächenfolge	» 5,	»	261
Zweig einer analytischen Fläche	» 6,	»	265
$T_\varepsilon(X)$, Schlauch	» 7,	»	266
Belegungszahl in Bezug auf eine Folge analytischer Flächen	» 8,	»	267
Reduzierte Flächenfolge	» 9,	»	269
Quasireguläre Funktionsfolge (auch merom)	» 10,	»	273

[1] Wie beim Beweis von Satz 12.

[2] Zu den Nullstellen einer meromorphen Funktion müssen in diesem Fall auch die Unbestimmtheitsstellen gerechnet werden.

Irreduzible Funktionsfolge (auch merom)	Def.	11,	Seite	274
Belegungszahl in Bezug auf eine Folge analytischer Funktionen	Satz	8,	»	275
Quasinormale Funktionsschar (auch merom)	Def.	12,	»	275
Totale Ordnung einer Funktionsschar	»	13,	»	278
Belegungszahl in Bezug auf eine Folge meromorpher Funktionen	»	14,	»	291
Grenzschwankungsbild	»	15,	»	299
Reguläre Abbildungsfolge	»	16,	»	299
Quasireguläre Abbildungsfolge	»	17,	»	308
Irreduzible Abbildungsfolge	»	18,	»	309
Belegungszahl bei Abbildungsfolgen	Satz	34,	»	313
Quasinormale Abbildungsschar	Def.	12,	»	275
Totale Ordnung einer Abbildungsschar	»	13,	»	278

§ 1. Die Ergebnisse von G. Julia und W. Saxer.

Die Einbeziehung der meromorphen Funktionen in den Kreis der Betrachtungen erfordert zunächst einmal eine Erweiterung des Konvergenzbegriffes, wir treffen für analytische und meromorphe Funktionen gemeinsam die folgende Festsetzung:[1]

Def. 2: Eine Folge θ von Funktionen heisst regulär im Bereich $\mathfrak{B}$, wenn für jedes abgeschlossene Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ folgendes zutrifft:

Die durch die Folge θ erzeugte Folge von Abbildungen von $\mathfrak{B}^*$ auf die Riemann'sche Zahlenkugel konvergiert gleichmässig.

Die Grenzfunktion einer regulären Folge analytischer Funktionen ist natürlich wieder analytisch in $\mathfrak{B}$, oder dann die Konstante ∞. (Diese zählen wir künftig zu den meromorphen Funktionen).

Die Grenzfunktion einer regulären Folge meromorpher Funktionen ist wieder meromorph in $\mathfrak{B}$ und hat keine Unbestimmtheitsstellen, denn in der Umgebung einer solchen könnte die Folge nicht regulär sein.[2]

Bekanntlich heisst nun eine Schar Σ von Funktionen normal in $\mathfrak{B}$, wenn jede aus Funktionen der Schar gebildete Folge eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Teilfolge besitzt.

Es gilt auch hier das klassische Kriterium:

a) Ist Σ eine Schar analytischer Funktionen, und nimmt keine Funktion dieser Schar einen der festen Werte a und b in $\mathfrak{B}$ an, so ist diese Schar normal in $\mathfrak{B}$.[3]

---

[1] Vgl. Def. I in der Arbeit von W. SAXER.
[2] Vgl. Hilfssatz (2), S. 260/61 von W. SAXER.
[3] Vgl. JULIA, Abschnitt 15, S. 67.

Es genügt natürlich, wenn keine Funktion der Schar die Werte a und b auf dem *Rande* von $\mathfrak{B}$ annimmt.

Für eine Schar meromorpher Funktionen gilt dasselbe, wenn 3 Ausnahmewerte vorhanden sind.

Irreguläre Punkte.

Ein Punkt X heisst ein irregulärer Punkt einer Folge (Schar), wenn diese in keiner Umgebung von X regulär (normal) ist.

Ist nun eine Folge (Schar) nicht regulär (normal) im Bereich $\mathfrak{B}$, so besitzt sie in $\mathfrak{B}$ offenbar mindestens einen irregulären Punkt.

Aus a) folgt nun sofort:

b) Sei X ein irregulärer Punkt einer Schar analytischer Funktionen, und U eine beliebige Umgebung von X.

Dann haben ∞ viele Funktionen der Schar a-Stellen in U, und zwar, mit höchstens einer Ausnahme a_0, für jedes a.

Dasselbe gilt natürlich auch für meromorphe Funktionen, nur muss man 2 Ausnahmewerte zulassen.

Das wichtigste Ergebnis der Julia'schen Arbeit ist zweifellos die Tatsache, dass die Gesamtheit J aller irregulären Punkte einer Folge oder Schar *analytischer* Fkt. m. Var. dasselbe eigentümliche Verhalten zeigt, welches schon die Menge der singulären Punkte einer analytischen Fkt. m. Var. auszeichnet:

c) J ist eine perfekte Punktmenge, die nicht ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen kann und auch keine vom übrigen J getrennte Teilmenge mit dieser Eigenschaft besitzt.[1]

Der Abstand von einem beliebigen festen Punkt P zu allen Punkten $X \in J$ kann für kein $X \in \mathfrak{B}$ ein relatives Maximum erreichen.[2]

d) Ist eine Folge (Schar) analytischer Fkt. m. Var. in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ regulär (normal), so ist sie auch im Innern von $\mathfrak{B}$ regulär (normal).[3]

e) Sei ϑ der aus den beiden Bereichen B_w und B_z (Ränder c_w und c_z) der w- und z-Ebene kombinierte Zylinderbereich.

Eine Folge (Schar) analytischer Funktionen sei in folgenden Punkten regulär (normal):

---

[1] Vgl. JULIA, Abschnitt 24 & 32, S. 73 & 79.

[2] Vgl. JULIA, Abschnitt 29, S. 77.

[3] JULIA, Abschnitt 32, S. 79.

1) Alle P mit $w \in B_w$, $z \in c_z$ (anal. Hyperfläche)

2) Alle P mit $w = w_0 \in B_w$, $z \in B_z$ (anal. Ebene).

Dann ist die Folge (Schar) in ganz ϑ regulär (normal).[1]

Weiter zeigte Julia, dass für die Punktmenge J nur die 3 folgenden Möglichkeiten, nebst ihren Kombinationen, bestehen:

f) J besteht aus: Analytischen Flächenstücken, oder analytischen Hyperflächenstücken, oder vierdimensionalen Gebieten mit pseudokonvexer Berandung.[2]

Für meromorphe Funktionen sind c)—f) nicht mehr gültig, denn die irregulären Punkte einer Folge meromorpher Funktionen können isoliert auftreten.

Nach W. Saxer nennt man einen isolierten irregulären Punkt einer Folge meromorpher Funktionen *ausserwesentlich*, ein solcher ist notwendig eine Unbestimmtheitsstelle der Grenzfunktion.[3]

Die übrigen irregulären Punkte heissen wesentlich, für diese gilt:

g) Die wesentlich irregulären Punkte einer Folge oder Schar meromorpher Funktionen unterliegen denselben Gesetzen wie die irregulären Punkte einer Folge oder Schar analytischer Funktionen.[4]

Anwendung auf Folgen analytischer Flächen.

Sei θ eine Folge analytischer Flächen V_j.

Def. 3: Einen Punkt, dessen beliebig kleine Umgebung von ∞ vielen Flächen der Folge geschnitten wird, nennt man einen *Häufungspunkt* der Folge θ.

Wenn aber $U_\varepsilon(P)$ [ε beliebig klein] von nur endlich vielen Flächen der Folge nicht geschnitten wird, so nennt man P einen *Grenzpunkt* der Folge θ.

Julia zeigt[5], dass man jeder Folge analytischer Funktionen $f_j(w, z)$ eine weitere Folge $g_j(w, z)$ analytischer Funktionen mit nachstehenden Eigenschaften zuordnen kann:

1) f_j und g_j sind in $\mathfrak{B}$ äquivalent in Bezug auf Division.

2) Die Menge aller irregulären Punkte der Folge g_j stimmt im Bereich $\mathfrak{B}$ mit der Gesamtheit aller Häufungspunkte der Flächenfolge $f_j(w, z) = 0$ überein.

---

[1] JULIA, Abschnitt 37, S. 82.

[2] JULIA, Abschnitt 40 & 44, S. 84/85 & 89/90.

[3] W. SAXER, Hilfssatz (2), S. 260/61.

[4] W. SAXER, Hauptsatz, S. 262, sowie § 2.

[5] Abschnitt 72, S. 110.

Man erhält die Funktionen g_j z. B., indem man die f_j mit genügend grossen Zahlen N_j multipliziert. Die Grenzfunktion der g_j ist dann (für die regulären Punkte der Folge) die Konstante ∞.

Es ist klar, dass dasselbe auch für eine Folge meromorpher Funktionen f_j gilt. Da auch in diesem Fall die Grenzfunktion der g_j die Konstante ∞ sein muss, kann die Folge der Funktionen g_j in $\mathfrak{B}$ keine ausserwesentlich irregulären Punkte besitzen.

Nun entspricht aber einer Folge analytischer Flächen V_j gemäss Def. 1 eine Folge meromorpher Funktionen, so dass aus g) folgt:

Sei θ eine Folge analytischer Flächen V_j, die im Bereich $\mathfrak{B}$ singularitätenfrei seien. Dann gilt:

h) Die Gesamtheit der in $\mathfrak{B}$ liegenden Häufungspunkte der Folge θ ist denselben Gesetzen unterworfen, wie die irregulären Punkte einer Folge analytischer Funktionen.

i) Wenn in der Umgebung $U(P)$ jedes Punktes von $\mathfrak{B}$ auf jeder analytischen Ebene $w =$ const. maximal je n Häufungspunkte der Folge θ liegen, so ist die Gesamtheit aller Häufungspunkte, soweit sie in $\mathfrak{B}$ liegt, eine singularitätenfreie analytische Fläche.[1]

1. Kap. Folgen analytischer Flächen.

§ 2. Blätterzahl und Flächeninhalt.

Wir wollen den Begriff der Nullstellenzahl einer Funktion sinngemäss von einer auf mehrere Variabeln übertragen.

Sei also $f(w, z)$ eine im Bereich $\mathfrak{B}$ analytische oder meromorphe Funktion. Diese erzeugt auf jeder analytischen Ebene E eine analytische oder meromorphe Funktion f_E einer Variabeln. Die a-Stellen dieser Funktion kann man zählen, und zwar sollen sie mit Vielfachheit gezählt werden.

Def. 4: Die obere Grenze der Zahl der in $\mathfrak{B}$ liegenden a-Stellen der Funktionen f_E (für alle E mit $f_E \not\equiv a$) heisst a-Stellenzahl der Funktion $f(w, z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$.

Zusatz: Unter der Blätterzahl der Fläche $f(w, z) = 0$ versteht man die Nullstellenzahl der Funktion $f(w, z)$ in $\mathfrak{B}$.

[1] Julia, Abschnitt 73, S. 110/11.

Die a-Stellenzahl eines Polynoms im ganzen Raum ist natürlich für alle a gleich seinem Grad.

Hingegen deckt sich die a-Stellenzahl einer Funktion in der Umgebung eines Punktes P der Fläche $f = a$ im Allgemeinen nicht mit der Ordnung[1] der a-Stelle P.

Zwischen der so definierten Blätterzahl einer analytischen Fläche V und dem Inhalt des in $\mathfrak{B}$ liegenden Teils von V besteht ein gewisser Zusammenhang:

Wenn man nämlich ein analytisches Flächenelement dF auf die beiden Koordinatenebenen ($w = 0$ und $z = 0$) projiziert, so gilt für die Flächeninhalte der beiden Projektionen dF_w und dF_z die folgende, von Wirtinger verallgemeinerte Formel[2]:

$$dF = dF_w + dF_z. \tag{1}$$

Diese Formel kann über den in $\mathfrak{B}$ liegenden Teil von V integriert werden, und liefert so die folgende Behauptung:

a) Der Flächeninhalt einer im beschränkten, schlichten Bereich $\mathfrak{B}$ liegenden, maximal n-blättrigen analytischen Fläche ist beschränkt, es gilt nämlich, wenn B_w und B_z die Flächeninhalte der beiden Projektionen von $\mathfrak{B}$ auf die Koordinatenebenen sind:

$$F \leq n(B_w + B_z). \tag{2}$$

Diese Formel ist natürlich nicht umkehrbar, aber es gilt:

b) Wenn die analytische Fläche V im Innern von $\mathfrak{B}$ wesentliche Randpunkte hat, die wieder auf einer analytischen Fläche S liegen, so ist der Flächeninhalt des in $\mathfrak{B}$ liegenden Teils von V unendlich.

Beweis: Es gibt unter den gemachten Voraussetzungen mindestens eine analytische Ebene E, welche mit S einen in $\mathfrak{B}$ liegenden isolierten Punkt X gemeinsam hat. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, E sei die Ebene $z = 0$, und X sei der Koordinatennullpunkt.

Man kann dann eine Zahl $r > 0$ angeben, so dass der in E liegende Kreis $|w| = r$ die Fläche V nicht trifft. Ausserdem existiert eine weitere Zahl $\varrho > 0$, so dass auf der Mantelhyperfläche

$$M_w: |w| = r, \ |z| \leq \varrho \tag{3}$$

[1] Behnke-Thullen, Kap. V, § 2, Seite 60.

[2] Vgl. Wirtinger, Seite 351, Satz II, dieser enthält die obige Formel als Spezialfall.

des Dizylinders $\vartheta : |w| < r, |z| < \varrho$ keine Punkte von V liegen. Dies hat natürlich zur Folge, dass auf jeder der Ebenen $z = \text{const.}$ gleichviele in ϑ enthaltene Schnittpunkte mit V liegen.

Diese Anzahl kann aber nicht endlich sein, sonst wäre X kein wesentlicher Randpunkt von V, sondern V wäre die Nullstellenfläche eines gewissen Pseudopolynoms über der Unbestimmten w.

Jede der Ebenen $z = \text{const.}$ $(|z| < \varrho)$ hat somit ∞ viele Schnittpunkte mit V, die in ϑ liegen, die Projektion von V auf die Ebene $w = 0$ hat also allein schon unendlichen Flächeninhalt, wzbw.

Wenn hingegen die wesentlichen Randpunkte auf einer analytischen Hyperfläche liegen, so kann der Flächeninhalt von V sehr wohl endlich bleiben, wie die Nullstellenfläche der Funktion $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n!} - w$ zeigt. Diese Fläche kann bekanntlich nicht über den Hyperzylinder $|z| = 1$ hinaus fortgesetzt werden, die auf diesem Hyperzylinder liegenden Punkte der Fläche sind wesentliche Randpunkte derselben.

Trotzdem ist in diesem Fall der gesamte Inhalt[1] dieser Nullstellenfläche endlich, nämlich $e\pi$, wie die folgende Formel zeigt:

$$F = \pi \sum_{1}^{\infty} j\,[|a_j|^2 + |b_j|^2] \cdot r^{2j}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet F den Inhalt eines Flächenstücks, das vermöge der beiden analytischen Funktionen $w = \sum\limits_{0}^{\infty} a_j t^j$, $z = \sum\limits_{0}^{\infty} b_j t^j$ als konformes Bild des Kreises $|t| \leq r$ dargestellt werden kann.

Die Formel (4) folgt direkt aus (1) und einer Formel von Bieberbach.[2]

Es soll jetzt noch eine weitere metrische Eigenschaft der analytischen Flächen gezeigt werden, welche den nicht-analytischen Flächen fehlt, und welche für das folgende von besonderer Wichtigkeit ist. Es gilt nämlich:

Satz 1: *Die analytische Fläche V sei in einer Hyperkugel vom Radius R singularitätenfrei und laufe durch den Mittelpunkt derselben.*

---

[1] Soweit die Fläche überhaupt definiert ist.

[2] Vgl. die zitierte Arbeit, S. 99.

Dann gilt für den Flächeninhalt F des in dieser Hyperkugel liegenden Teils von V:

$$F \geq \pi R^2. \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn V eine analytische Ebene ist.

Beweis: Ich betrachte die Schnittkurve c der Hyperkugelfläche K mit der analytischen Fläche V und zeige, dass diese Schnittkurve mindestens die Länge $2\pi R$ haben muss. Daraus folgt dann die Formel (5) durch Integration von 0 bis R.

Man kann offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass V innerhalb K zusammenhängend sei. Die Kurve c braucht dagegen nicht zusammenhängend zu sein, ihre Teilstücke sind aber in jedem Fall geschlossen.

A) Wenn irgend eine Hyperebene H die Kurve c nicht schneidet, so hat das Schnittgebilde $H \times V$ keine Punkte innerhalb K.

Dies ist offensichtlich, denn der Kontinuitätssatz, angewendet auf die in H enthaltenen, parallelen analytischen Ebenen $E(t)$, und die Fläche V, erlaubt nicht, dass das Schnittgebilde $V \times H$ eine ganz im Innern von K liegende, isolierte Teilmenge hat.

B) c wird von jeder durch den Hyperkugelmittelpunkt laufenden Hyperebene geschnitten, wie aus A) und der Voraussetzung unmittelbar folgt.

C) Man kann keine Hyperebene H legen, welche, ohne die Kurve c zu schneiden, diese in 2 Teile zerlegt. Dies folgt ebenfalls aus A) und der Annahme, dass V innerhalb K zusammenhänge.

D) Wenn nun die Länge einer geschlossenen Kurve γ auf der Hyperkugelfläche K kleiner als $2\pi R\lambda$ $(0 < \lambda \leq 1)$ ist, so kann man γ mit einer auf K liegenden 2-dimensionalen Kugelfläche, deren geodätischer Durchmesser kleiner als $\pi R\lambda$ ist, völlig umschliessen.[1, 2]

E) Besteht c aus einem Stück, dessen Länge kleiner als $2\pi R$ ist, so folgt aus D) mit $\lambda = 1$ sofort ein Widerspruch zu B).

F) Besteht aber c aus mehreren Stücken $c_1, \ldots, c_k$, deren Gesamtlänge kleiner als $2\pi R$ ist, so kann man jedes Stück gemäss D) mit einer auf K liegenden Kugelfläche $\varkappa_i$ einschliessen. Die Summe der geodätischen Durchmesser dieser Kugeln ist natürlich kleiner als πR.

---

[1] Das Umschliessen findet natürlich nur auf der 3-dimensionalen Hyperkugelfläche H statt.

[2] Vgl. B. SEGRE (Literaturverzeichnis).

Von diesen Kugelflächen $\varkappa_i$ darf keine von jeder andern getrennt liegen, sonst könnte man durch Legen einer Hyperebene H durch diese Kugelfläche einen Widerspruch mit C) herbeiführen.

Vielmehr bilden immer eine gewisse Anzahl der Kugeln $\varkappa_i$ je eine zusammenhängende Kette. Jede dieser Ketten kann man wieder in eine Kugelfläche einschliessen.[1] Die Summe der geodätischen Durchmesser dieser neuen Kugeln ist wieder kleiner als πR, und es darf wieder keine von allen andern getrennt liegen, sondern sie müssen neue Ketten bilden, etc.

Auf diese Weise erhält man schliesslich eine einzige Kugelfläche, die c völlig umschliesst[1], und deren geodätischer Durchmesser kleiner als πR ist. Damit haben wir denselben Widerspruch, wie unter E), c hat also in allen Fällen mindestens die Länge $2\pi R$.

G) Wenn in (5) das Gleichheitszeichen stehen soll, so muss nach dem Bisherigen die Länge der Schnittkurve c_r von V mit der zu K konzentrischen Hyperkugelfläche K_r vom Radius r offenbar $2\pi r$ sein, und zwar für fast alle $r \leq R$.

Insbesondere gibt es beliebig kleine r mit dieser Eigenschaft, nämlich so kleine r, dass V innerhalb K_r höchstens den Mittelpunkt M als Doppel- oder Verzweigungspunkt hat.

Man kann V in der Umgebung von M als Nullstellenfläche eines Produkts irreduzibler Faktoren darstellen, und die Nullstellenfläche jedes Faktors innerhalb K_r, wenn nur r hinreichend klein ist, uniformisieren[2] (M sei Koordinatennullpunkt):

$$w = \sum_1^\infty a_j t^j \qquad z = \sum_1^\infty b_j t^j .$$

Der Parameter t kann so gewählt werden, dass der innerhalb K_r liegende Teil der so uniformisierten Fläche gerade dem Einheitskreis der t-Ebene entspricht. Damit folgt aus (4):

$$\sum_1^\infty j\,\{|a_j|^2 + |b_j|^2\} = r^2,$$

andrerseits aus dem Gutzmer'schen Koeffizientensatz:

$$\sum_1^\infty \{|a_j|^2 + |b_j|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{|w|^2 + |z|^2\}\, d\varphi = r^2 .$$

[1] Das Umschliessen findet natürlich nur auf der 3-dimensionalen Hyperkugelfläche H statt.

[2] Vgl. Osgood, 2. Kap. § 21: Parameterdarstellung im Kleinen.

Durch Vergleich der beiden letzten Formeln erkennt man sofort, dass alle Koeffizienten ausser a_1 und b_1 verschwinden müssen, V enthält also eine durch den Hyperkugelmittelpunkt laufende analytische Ebene als Teilmenge. Da diese allein schon den Flächeninhalt πR^2 liefert, ist V diese Ebene, wzbw.

Man kann übrigens sogar zeigen, dass der Flächeninhalt mindestens $\pi m R^2$ sein muss, wenn der Hyperkugelmittelpunkt eine Nullstelle m-ter Ordnung für die die Fläche V darstellende Funktion ist.

§ 3. Konvergente Folgen analytischer Flächen.

Eine Punktfolge ist offenbar genau dann konvergent, wenn jeder Häufungspunkt der Folge auch ein Grenzpunkt ist. Ganz entsprechend definiert man die Konvergenz einer Folge von Punktmengen:

Def. 5: Eine Folge θ analytischer Flächen V_j heisst im Bereich $\mathfrak{B}$ konvergent, wenn jeder in $\mathfrak{B}$ liegende Häufungspunkt auch ein Grenzpunkt der Folge ist.

Die Folge θ ist also insbesondere dann konvergent in $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{B}$ keine Häufungspunkte der Folge enthält.

Der Auswahlsatz der Mengenlehre[1] zeigt nun:

a) Jede Folge analytischer Flächen hat eine in $\mathfrak{B}$ konvergente Teilfolge.

Für unsere Betrachtungen sind nun solche konvergente Flächenfolgen besonders wichtig, für die die Gesamtheit J aller in $\mathfrak{B}$ liegenden Häufungspunkte eine in $\mathfrak{B}$ singularitätenfreie analytische Fläche ist.[2]

Diese Fläche heisst dann die Grenzfläche V_0 der Folge, man schreibt $\lim V_j = V_0$.

Im allgemeinen Fall besteht J gemäss § 1, h) aus analytischen Flächen, analytischen Hyperflächen und vierdimensionalen Gebieten.

---

[1] Dieser lautet für unsere Verhältnisse etwa:

In einem beschränkten Bereich eines euklidischen Raumes sei eine Folge von Mengen gegeben.

Dann existiert eine Teilfolge dieser Mengenfolge, für die die Menge aller Häufungspunkte (oberer Limes) mit der Menge aller Grenzpunkte (unterer Limes) übereinstimmt.

Vgl. auch HAUSDORFF, S. 145—150.

[2] Künftig wird auch eine Folge ohne Häufungspunkte in $\mathfrak{B}$ zu den Folgen mit analytischer Grenzfläche gerechnet.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Menge aller Häufungspunkte unter geeigneten Voraussetzungen eine in $\mathfrak{B}$ singularitätenfreie analytische Fläche ist.

b) Alle Flächen einer Folge θ seien in einem Dizylinder ϑ: $|w| < r$, $|z| < \varrho$ singularitätenfrei, und die Inhalte aller Flächen der Folge seien in ϑ gleichmässig beschränkt.

Wenn dann die Mantelhyperfläche M_w des Dizylinders ϑ [Vgl. (3)] keine Häufungspunkte der Flächenfolge θ enthält, dann hat diese eine Teilfolge θ_1, die in ϑ gegen eine singularitätenfreie analytische Fläche konvergiert.

Beweis: Es gibt ein j_0 mit der Eigenschaft, dass für $j > j_0$ keine der Flächen V_j Punkte auf M_w hat.

Das hat zur Folge, dass V_j (für $j > j_0$) von jedem der Kreise $|w| < r$, $z = \text{const.}$ ($|z| < \varrho$) in gleichvielen (n_j) Punkten geschnitten wird.

Wegen (1) ist damit der Flächeninhalt von V_j in ϑ mindestens $n_j \pi \varrho^2$. Wenn die Flächeninhalte der V_j beschränkt sind, so sind also auch die n_j beschränkt.

Man kann somit die Flächen V_j (für $j > j_0$) als Nullstellenflächen von Pseudopolynomen darstellen, deren Exponenten alle unterhalb einer gewissen Schranke N liegen:

$$f_j(w, z) \equiv w^n + A_1(z)\, w^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0.$$

Da auch die Wurzeln $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ beschränkt sind, kann man auch für die Funktionen $A_1, \ldots, A_n$ obere Schranken angeben, die für alle $j > j_0$ gültig sind, somit ist die Folge $f_j(w, z)$ in ϑ gleichmässig beschränkt.

Man kann also eine gleichmässig konvergente Teilfolge $f_{j'}$ auswählen, deren Grenzfunktion nicht $\equiv 0$ sein kann. Nach einem Satz von Hurwitz konvergiert damit auch die Folge der Flächen $f_{j'} = 0$ gegen die Nullstellenfläche der Funktion $\lim f_{j'}$, wzbw.

Wir kommen zum Hauptsatz über Folgen analytischer Flächen:

Sei θ eine Folge analytischer Flächen, die in $\mathfrak{B}$ singularitätenfrei seien. Dann gilt:

Satz 2: *Wenn die Flächeninhalte oder die Blätterzahlen aller Flächen der Folge θ in $\mathfrak{B}$ gleichmässig beschränkt sind, so kann man aus θ eine Teilfolge θ_1 auswählen, die gegen eine in $\mathfrak{B}$ singularitätenfreie analytische Fläche konvergiert.*[1]

[1] Vgl. Def. 1, sowie Fussnote 2, S. 261.

Wegen a) genügt es offenbar, wenn man zeigt, dass die Häufungspunkte einer konvergenten Folge solcher Flächen eine singularitätenfreie analytische Fläche bilden.

Wegen § 2, a) kann man sich ausserdem auf die Betrachtung einer Folge von Flächen beschränkten Flächeninhalts beschränken.

Den *Beweis* führen wir in verschiedenen Schritten:

A) Die Menge J aller Häufungspunkte einer konvergenten Folge von Flächen beschränkten Inhalts ($\leq F$) kann in jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ durch eine endliche Anzahl $m = \frac{c}{\varepsilon^2}$ von Hyperkugeln vom Radius 2ε vollständig überdeckt werden.

Dies gilt bei festem $\mathfrak{B}^*$ für alle hinreichend kleinen ε, und c ist dann konstant.

Beweis von A: Man wählt auf J möglichst viele in $\mathfrak{B}^*$ liegende Punkte X, die untereinander mindestens den Abstand 2ε haben sollen. Wenn ε kleiner als der Minimalabstand von $\mathfrak{B}^*$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$ [1] ist, so kann der Flächeninhalt von V_j in $U_\varepsilon(X)$ nach Satz 1 „nicht wesentlich kleiner" sein als $\pi\varepsilon^2$, genauer:

Es gibt zu jedem $\eta > 0$ ein $j(\eta)$, so dass der Inhalt von V_j in $U_\varepsilon(X)$ für $j > j(\eta)$ mindestens $\pi\varepsilon^2(1 - \eta)$ beträgt.

Da diese ε-Umgebungen der Punkte X untereinander und mit dem Rande von $\mathfrak{B}$ nicht kollidieren, ist die Summe der Flächeninhalte einer Fläche V_j in allen $U_\varepsilon(X)$ kleiner als F, somit kann die Zahl dieser Punkte X höchstens $m = \frac{F}{\pi\varepsilon^2}$ sein.

Wenn man die Radien dieser um die Punkte X gelegten Hyperkugeln verdoppelt, so sind alle Punkte von J, soweit sie in $\mathfrak{B}^*$ liegen, überdeckt, weil es nach Konstruktion in $\mathfrak{B}^*$ keinen Häufungspunkt Y mehr geben kann, der von jedem X mindestens den Abstand 2ε hat, wzbw.

B) Unter den gleichen Bedingungen, wie unter A) kann J in $\mathfrak{B}$ keine 3- oder 4-dimensionale Mannigfaltigkeit enthalten.

Beweis von B: Sei jetzt das abgeschlossene Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ ein Dizylinder um irgend einen Punkt von $\mathfrak{B}$. Dann kann J in $\mathfrak{B}^*$ durch m Hyperkugeln vom

[1] Dies ist die grösste Zahl δ mit der Eigenschaft, dass die δ-Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{B}^*$ noch ganz in $\mathfrak{B}$ liegt.

Radius 2ε, also Volumen je $8\pi^2\varepsilon^4$ überdeckt werden. Die gesamte Überdeckungsmenge hat somit höchstens das (4-dim.) Volumen $k\varepsilon^2$, wobei k für alle hinreichend kleinen ε konstant ist. Damit kann aber J kein 4-dimensionales Gebiet sein.

Nach § 1, h) kann jetzt J noch aus analytischen Flächen oder analytischen Hyperflächen bestehen. Eine analytische Hyperfläche muss aber jede genügend kleine Umgebung eines Punktes derselben vollständig zerlegen[1], also muss mindestens eine ihrer Projektionen auf die 3-dimensionalen Koordinatenhyperebenen innere Punkte enthalten.

Wenn man aber die Menge J, soweit sie in $\mathfrak{B}^*$ liegt, samt ihrer Überdeckung durch die m Hyperkugeln auf eine Hyperebene projiziert, so gibt jede solche Hyperkugel ein Kugel vom (3-dim.) Volumen $\frac{4\pi}{3}(2\varepsilon)^3$ als Projektion. Die gesamte Überdeckungsmenge hat also eine Projektion, deren Volumen höchstens $\frac{32\pi}{3}c\varepsilon$ beträgt. Somit kann J keine Hyperfläche enthalten, wzbw.

Nun kann also J nur noch eine analytische Fläche sein, die aber in $\mathfrak{B}$ noch wesentliche Randpunkte haben kann.

C) J hat keine wesentlichen Randpunkte in $\mathfrak{B}$.

Beweis von C: Sei Y ein wesentlicher Randpunkt der analytischen Fläche J. Man kann behaupten, dass man auf mindestens einer analytischen Ebene durch Y eine in einer ε-Umgebung von Y liegende, geschlossene Kurve c_0 legen kann, auf der keine Punkte von J liegen, und die den Punkt Y einschliesst.

Andernfalls müsste nämlich J auf jeder der ∞^2 analytischen Ebenen durch Y mindestens eine Kurve der Länge ε haben. Damit würde J in der Umgebung von Y ein dreidimensionales Gebiet enthalten, was B widerspricht.

Sei also c_0 eine solche Kurve um Y, auf der keine Punkte von J liegen. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, c_0 liege in der Ebene $z = 0$, und Y sei der Koordinatennullpunkt.

Da J abgeschlossen ist, kann man $\varrho > 0$ so angeben, dass keine Punkte von J auf der Mantelhyperfläche M_w: $w \in c_0$, $|z| \leq \varrho$ liegen.

Nun kann man b) anwenden: Die Folge θ besitzt eine Teilfolge θ_j, für die

[1] Wie die Singularitätenhyperfläche einer analytischen Funktion.

die Menge J_1 aller Häufungspunkte in der Umgebung von Y eine singularitätenfreie analytische Fläche ist.[1]

Nach Def. 3 und 5 ist aber jeder Häufungspunkt von θ auch ein Grenzpunkt von θ, also auch ein Häufungspunkt jeder Teilfolge. Es ist also $J = J_1$, und Y ist kein Randpunkt von J, wzbw.

Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 4. Belegungszahl eines Zweiges von V_0.

Um das Verhalten einer Flächenfolge beim Grenzübergang zu diskutieren, fasst man zweckmässig alle Punkte von V_0 zusammen, in deren Umgebung die Folge dasselbe Konvergenzverhalten zeigt.

So wird man zum Begriff des Zweiges einer analytischen Fläche geführt.

Sei also V eine im Bereich $\mathfrak{B}$ singularitätenfreie analytische Fläche gemäss Def. 1.

Def. 6: Unter einem Zweig Z der Fläche V bezüglich $\mathfrak{B}$ verstehe ich eine solche in $\mathfrak{B}$ liegende Teilmenge von V, die durch analytische Fortsetzung innerhalb $\mathfrak{B}$ nicht mehr erweitert werden kann.

Ausführlicher:

Sei dV ein Element der Fläche V. Ich setze dV analytisch fort, und zwar auf allen möglichen, in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Wegen.

Die Gesamtheit aller Punkte, zu denen ich auf diese Weise gelangen kann, nenne ich einen Zweig von V.[2]

Unter Umständen erhält man so die ganze Fläche, dann besteht V in $\mathfrak{B}$ aus einem einzigen Zweig.

Andernfalls wird die Fläche V durch den erwähnten Vorgang in Teilmengen, die sogenannten Zweige[2] der Fläche, zerlegt.

Die einzelnen Zweige der Fläche können sich in $\mathfrak{B}$ schneiden, aber man kann nicht durch analytische Fortsetzung auf einem in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Weg von einem Zweig auf einen andern gelangen.

---

[1] Die Tatsache, dass in unserm Fall eine Kurve c_0 anstelle des Kreises $|w| = r$ steht, ist natürlich unwesentlich.

[2] Der Begriff des Zweiges wird zwar durch den zugrunde gelegten Bereich wesentlich beeinflusst, trotzdem soll „bez. $\mathfrak{B}$" künftig weggelassen werden, sofern keine Verwechslungen möglich sind.

Sei nun Z ein Zweig[1] der Grenzfläche V_0 einer Folge analytischer Flächen V_j, welche, ebenso wie V_0, in $\mathfrak{B}$ singularitätenfrei sein mögen.

Z^* sei ein abgeschlossenes Teilgebiet von Z, das nur gewöhnliche Stellen von V_0 enthalte. Z^* enthält also keine Doppel- und Verzweigungspunkte von Z, und auch keine Schnittpunkte mit andern Zweigen von V_0.

Jedem Punkt X von Z^* ordne ich die Z im Punkt X unitär orthogonal schneidende analytische Ebene E zu, und bezeichne die in E liegende, abgeschlossene ε-Umgebung von X mit $T_\varepsilon(X)$.

Def. 7: Die Vereinigungsmenge aller $T_\varepsilon(X)$, wenn X die Punktmenge Z^* durchläuft, heisst *Schlauch* mit der Achse Z^* und dem Radius ε, und wird mit $T_\varepsilon(Z^*)$ bezeichnet.

Alle Punkte, die auf den Rändern der Kreise $T_\varepsilon(X)$ $(X \in Z^*)$ liegen, bilden den *Mantel* des Schlauches.

Wenn Z^* ein analytisches Ebenenstück ist, so ist der Schlauch $T_\varepsilon(Z^*)$ offenbar ein Zylinderbereich.

Wenn man ε genügend klein $[\varepsilon < \varepsilon(Z^*)]$ wählt, so ist der Bereich $T_\varepsilon(Z^*)$ schlicht (d. h. die den Schlauch bildenden Kreisscheiben schneiden sich dann nicht), und $T_\varepsilon(Z^*)$ enthält ausser den Punkten von Z^* keine Punkte von V_0.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zur Definition der *Belegungszahl* übergehen:

Da ausserhalb der Grenzfläche V_0 keine Häufungspunkte der Flächenfolge liegen, so liegen auf dem Mantel des Schlauches $T_\varepsilon(Z^*)$, sofern $\varepsilon < \varepsilon(Z^*)$ ist, von einem gewissen Index $j_0 = j_0(\varepsilon, Z^*)$ an keine Punkte von V_j mehr.

Das hat zur Folge, dass die Anzahl[2] der Schnittpunkte von $T_\varepsilon(X)$ mit V_j $(j > j_0)$ nicht mehr von X abhängt.

Die Schnittpunkte von V_j mit $T_\varepsilon(X)$ können nämlich bei Variation von X auf Z^* nicht „verloren gehen“, die Anzahl dieser Schnittpunkte kann sich nur dadurch verändern, dass diese den Rand von $T_\varepsilon(X)$ überschreiten.

Verkleinert man ε, so ist dies für genügend grosses j ebenfalls ohne Einfluss auf die Zahl der Schnittpunkte von V_j mit $T_\varepsilon(X)$.

Somit ist die obere Häufungsgrenze der Zahl der auf $T_\varepsilon(X)$[2] liegenden

---

[1] Der Begriff des Zweiges wird zwar durch den zugrunde gelegten Bereich wesentlich beeinflusst, trotzdem soll „bez. $\mathfrak{B}$“ künftig weggelassen werden, sofern keine Verwechslungen möglich sind.

[2] Mit Vielfachheit gezählt.

Punkte von V_j weder von ε, noch von X abhängig, solange nur $X \in Z^*$, $\varepsilon < \varepsilon(Z^*)$, und $j > j_0$ (ε, Z^*) ist.

Da ausserdem auch für die Wahl von Z^* eine gewisse Freiheit besteht, kann man behaupten:

Satz 3: *Es gibt zu jedem Zweig Z der Grenzfläche einer in $\mathfrak{B}$ konvergenten Folge analytischer Flächen eine Zahl n_Z (welche auch ∞ sein kann) mit folgender Eigenschaft:*

Zu jeder gewöhnlichen Stelle X auf Z, welche nicht auch auf andern Zweigen von V_0 liegt, gibt es eine Zahl $\varepsilon(X) > 0$, so dass die obere Häufungsgrenze der Zahl der auf $T_\varepsilon(X)$ $[\varepsilon < \varepsilon(X)]$ liegenden Punkte[1] *von V_j n_Z beträgt.*

Def. 8: n_Z heisst Belegungszahl des Zweiges Z in Bezug auf die Flächenfolge θ.

Satz 3 kann etwas verfeinert werden:

a) Die in Satz 3 erwähnte obere Häufungsgrenze ist invariant gegenüber einer analytischen Drehung der Kreisscheibe $T_\varepsilon(X)$ um den Punkt X, solange dieser der einzige (und zwar einfache!) Schnittpunkt von T mit V_0 bleibt.

Dies beruht darauf, dass bei einer solchen Drehung nie ein Punkt von V_0 auf den Rand von T zu liegen kommt. Für alle hinreichend grossen j gilt dies dann auch für V_j, d. h. diese V_j haben mit T in der alten und in der neuen Lage gleichviele gemeinsame Punkte. Das gilt dann auch für die obere Häufungsgrenze.

Hat aber die analytische Kreisscheibe T[2] einen m-fachen Schnittpunkt mit dem Zweig Z, sei es dass der Mittelpunkt von T ein Doppel- oder Verzweigungspunkt von Z ist, oder dass T den Zweig Z in X berührt, so kann ich mit T eine beliebig kleine Parallelverschiebung ausführen, so dass aus dem m-fachen Schnittpunkt X m einfache werden, welche immer noch im Innern von T liegen: $X_1, \ldots, X_m$.

Um jeden dieser Punkte X_i lege ich eine η-Umgebung in T und wende a) an, man erhält so:

b) Ist X ein m-facher Schnittpunkt der abgeschlossenen analytischen Kreisscheibe T mit Z, und enthält T keine weitern Punkte von V_0, so ist die in Satz 3 erwähnte obere Häufungsgrenze mn_Z.

---

[1] Mit Vielfachheit gezählt.

[2] T liegt in einer analytischen Ebene.

Wenn aber Z eine analytische Ebene ist, und T in Z liegt, so ist keine derartige Aussage möglich, die obere Häufungsgrenze ist dann völlig unabhängig von n_Z.

Dieselben Überlegungen wie bei a) und b) ergeben offenbar folgenden Satz:

Satz 4: *Sei G ein in $\mathfrak{B}$ liegendes abgeschlossenes Teilgebiet einer analytischen Ebene. G habe mit jedem der Zweige Z von V_0 m_Z Schnittpunkte*[1], *von denen keiner auf dem Rande von G liegen darf.*

Dann ist die obere Häufungsgrenze der Zahl der in G liegenden Punkte von V_j höchstens[2] $n_G = \Sigma m_Z n_Z$, *wobei über alle Zweige von V_0 summiert wird.*

Die Belegungszahl kann an einer gleichmässig konvergenten Folge analytischer Funktionen sehr schön verfolgt werden:

Die Folge der Funktionen $f_j(w, z)$ konvergiere in $\mathfrak{B}$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f_0 \not\equiv 0$.

Dann konvergiert natürlich auch die Folge der Nullstellenflächen der f_j gegen die Nullstellenfläche von f_0. Wenn man nun die Doppel- und Verzweigungspunkte der Fläche $f_0 = 0$ ausser Betracht lässt, so besteht jeder Zweig der Fläche $f_0 = 0$ aus Nullstellen gleicher Ordnung[3], und diese Ordnung ist gleich der Belegungszahl des betreffenden Zweiges in Bezug auf die Folge der Flächen $f_j = 0$.

Dies lässt sich umkehren: Die Folge θ analytischer Flächen konvergiere in $\mathfrak{B}$ gegen die singularitätenfreie analytische Fläche V_0, dann gilt:

Satz 5: *Ist jeder Zweig von V_0 von endlicher Belegungszahl in Bezug auf die Folge θ, ist ferner X ein beliebiger Punkt von V_0, so kann man die V_j in einer gewissen Umgebung $U(X)$ als Nullstellenflächen analytischer Funktionen f_j mit folgenden Eigenschaften darstellen:*

Die f_j haben eine in $U(X)$ gleichmässig konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion f_0 nicht identisch verschwindet.

V_0 stimmt in $U(X)$ mit der Fläche $f_0 = 0$ überein.

Beweis: Es gibt sicher wenigstens eine analytische Ebene durch X, welche nicht zu V_0 gehört, man kann annehmen, sie sei die Ebene $z = 0$, X sei der Koordinatennullpunkt. Man kann dann r und ϱ so wählen, dass die Mantelhyperfläche M_w[4] des Dizylinders $|w| < r$, $|z| < \varrho$ keine Punkte von V_0 enthält, also

---

[1] Mit Vielfachheit zu zählen, G soll ausserdem nicht Teilmenge eines Zweiges von V_0 sein.

[2] Ist die Flächenfolge V_j im Sinne von Def. 9 reduziert, so ist die erwähnte obere Häufungsgrenze $= n_G$.

[3] Vgl Behnke-Thullen, Kap. V, § 2, S. 60.

[4] Vgl. diese Arbeit, S. 257, (3).

auch keine Punkte von V_j, wenn $j > j_0$. Dies hat weiter zur Folge, dass V_j $(j > j_0)$ von allen Kreisen $|w| < r$, $z = \text{const.}$ $(|z| < \varrho)$ in gleich vielen (n_j) Punkten geschnitten wird.

Die n_j können wegen Satz 4 nicht beliebig gross werden, damit kann man denselben Schluss wie im Beweis von § 3, b) ziehen, wzbw.

---

§ 5. Konvergenz des Flächeninhaltes und der Blätterzahl.

Wenn man die Belegungszahlen aller Zweige von V_0 summieren will, so müssen die Blätterzahlen der verschiedenen Zweige berücksichtigt werden. Dazu betrachtet man ein in $\mathfrak{B}$ enthaltenes, abgeschlossenes Teilgebiet G einer analytischen Ebene, und bildet wie in Satz 4 die Summe n_G.

a) Die obere Grenze der Summen n_G, wenn G alle möglichen solchen Gebiete durchläuft, werde mit n_θ bezeichnet.

Die folgenden Sätze gelten nur für sogenannte *reduzierte* Folgen analytischer Flächen. Man kann nämlich aus jeder gegen eine analytische Fläche V_0 konvergenten Flächenfolge eine Teilfolge auswählen, für die die obere Häufungsgrenze in Satz 3 zugleich die untere Häufungsgrenze ist, genauer:

Def. 9: Eine Folge analytischer Flächen heisst *reduziert*, wenn für jeden Punkt X auf V_0 ein $\varepsilon(X) > 0$ existiert, so dass die Zahl der auf $T_\varepsilon(X)$ $[\varepsilon < \varepsilon(X)]$ liegenden Punkte von V_j gegen n_Z konvergiert.

Die in Satz 4 erwähnte obere Häufungsgrenze ist für eine reduzierte Flächenfolge genau n_G.

b) Ist n_j die Blätterzahl von V_j in $\mathfrak{B}$, und ist die Folge reduziert, so gilt:

$$\liminf n_j \geq n_\theta. \tag{6}$$

Beweis: Wenn n_θ endlich ist, so gibt es ein Gebiet G, für das $n_G = n_\theta$ ist, dann folgt die Behauptung aus Satz 4, unter Berücksichtigung von Def. 9.

Ist aber $n_\theta = \infty$, so kann man lediglich eine Folge G_i solcher Gebiete angeben, so dass n_{G_i} gegen ∞ strebt. Die Zahl der Schnittpunkte von G_i mit V_j ist nach Satz 4 und Def. 9 n_{G_i}, sobald j gross genug ist, d. h. grösser als $j(i)$.

Damit hat V_j für $j > j(i)$ die Blätterzahl n_{G_i}, diese strebt also mit j ebenfalls gegen ∞, wzbw.

Das Gleichheitszeichen in (6) kann nicht allgemein stehen, weil Satz 4 nicht gilt, wenn G eine Teilmenge von V_0 ist. Für den Flächeninhalt gilt aber eine schärfere Beziehung:

Sei θ eine reduzierte, gegen V_0 konvergente Folge analytischer Flächen. $\mathfrak{B}^*$ sei ein abgeschlossenes Teilgebiet von $\mathfrak{B}$, dessen Rand kein 2-dimensionales Teilstück von V_0 enthalte.

Satz 6: *Ist F_j^* der Inhalt des in $\mathfrak{B}^*$ liegenden Teils von V_j, ebenso $F^*(Z)$ für den Zweig Z, dann gilt:*

$$\lim F_j^* = \Sigma\, n_Z F^*(Z), \tag{7}$$

wobei rechts über alle Zweige von V_0 summiert wird.

Beweis: Wir können annehmen, das Koordinatensystem sei so gelegt, dass kein Zweig von V_0 ein zu den Koordinatenebenen paralleles analytisches Flächenstück sei. Dasselbe gilt dann von einem gewissen j an auch für die Flächen V_j.

Seien zunächst alle n_Z endlich. Bezeichnet $m_j(w)$ die Zahl der auf der Ebene $w = \text{const.}$ und innerhalb $\mathfrak{B}^*$ liegenden Punkte von V_j, ebenso $m_j(z)$ für die Ebene $z = \text{const.}$, sind ferner $m_Z(w)$ und $m_Z(z)$ dieselben Zahlen für den Zweig Z von V_0, so gilt offenbar wegen (1):

$$\begin{aligned} F_j^* &= \int m_j(w)\, d F_w + \int m_j(z)\, d F_z \\ F^* &= \int m_Z(w)\, d F_w + \int m_Z(z)\, d F_z. \end{aligned} \tag{8}$$

Nun ist aber wegen Satz 4: $\lim m_j(w) = \Sigma\, n_Z m_Z(w)$, eine Ausnahme bilden nur diejenigen w, für die einer der Schnittpunkte der Ebene $w = \text{const.}$ mit V_0 auf dem Rande von $\mathfrak{B}^*$ liegt. Man erhält diese „gefährlichen w-Werte" auch dadurch, dass man die Schnittkurve von V_0 mit dem Rande von $\mathfrak{B}^*$ auf die w-Ebene projiziert. In der Umgebung dieser gefährlichen Punkte wird also die Konvergenz ungleichmässig sein, aber wir wollen zeigen, dass die $m_j(w)$ dennnoch beschränkt sind. Das letztere hat dann zur Folge, dass man den Grenzübergang trotz der ungleichmässigen Konvergenz unter dem Integral ausführen kann. Es konvergiert dann also $\int m_j(w)\, d F_w$ gegen $\Sigma\, n_Z \int m_Z(w)\, d F_w$.

Dasselbe gilt für die Integrale über der z-Ebene, somit konvergiert F_j^* gegen $\Sigma\, n_Z F^*(Z)$.

Es muss jetzt noch die Beschränktheit der $m_j(z)$ nachgewiesen werden. Nimmt man eine Folge von Werten $z_j \to z_0$ an, für die $m_j(z_j)$ eine unbeschränkte

Folge ist, so kann man im abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}^*$ einen Punkt $X = (w_0, z_0)$ angeben, so dass in einer beliebig kleinen Umgebung $U(X)$ folgendes stattfindet:

Die Zahl der in $U(X)$ liegenden Schnittpunkte von V_j mit der Ebene $z = z_j$ ist nicht für alle j beschränkt.

Da aber alle n_Z endlich sind, kann man die V_j nach Satz 5 in $U(X)$ als Nullstellenflächen analytischer Funktionen f_j darstellen. Da aber die Ebene $z = z_0$ wie bei Satz 5 nicht zu V_0 gehört, kann man die V_j in $U(X)$ sogar als Nullstellenflächen von Pseudopolynomen darstellen (X sei jetzt Koordinatennullpunkt), wobei die Exponenten für alle j beschränkt sind (Vgl. Satz 5, sowie Beweis von § 3, b). Damit ist es aber nicht möglich, dass die Zahl der Schnittpunkte von V_j mit $z = z_j$ unbeschränkt ist. Ebenso folgt die Beschränktheit der $m_j(w)$, wzbw.

Ist eine der Belegungszahlen, z. B. n_Z, $= \infty$, so kann man nach Satz 4 und Def. 9 auf mindestens einer der Koordinatenebenen ein ganzes Gebiet angeben, in welchem die m_j gegen ∞ streben (nämlich die Projektion des in $\mathfrak{B}^*$ liegenden Teils von Z auf die betreffende Koordinatenebene). Damit ist $\lim F_j^* = \infty$, wzbw.

Die Folge der Nullstellenflächen einer gleichmässig konvergenten Folge analytischer Funktionen ist natürlich immer reduziert. Es gilt also auch hier Satz 6, nur muss der Flächeninhalt einer Nullstellenfläche wie folgt mit Vielfachheit gerechnet werden:

Jeder Zweig der Fläche $f(w, z) = 0$ besteht aus Nullstellen gleicher Ordnung, wenn man die algebraischen Singularitäten der Fläche ausser Betracht lässt. Man multipliziert nun die Fläche des Zweiges Z mit seiner Ordnung[1] und summiert über alle Zweige der Nullstellenfläche.

c) Ist F_j^* der auf diese Weise mit Vielfachheit gezählte Inhalt der Fläche $f_j = 0$ im abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}^*$, ebenso F_0^* für die Nullstellenfläche der Grenzfunktion der f_j, so gilt:

$$\lim F_j^* = F_0^*. \tag{9}$$

F_0^* steht für $\Sigma\, n_Z F^*(Z)$, weil ja die Belegungszahl eines Zweiges von $f_0 = 0$ in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = 0$ mit der Ordnung[1] dieses Zweiges übereinstimmt.

---

[1] D. h. Ordnung der Nullstellen, aus denen dieser Zweig besteht.

Eine entsprechende Aussage kann auch über die Nullstellenzahlen gemacht werden, es gilt nämlich die Formel (6), wenn n_j die Nullstellenzahl von f_j im Bereich $\mathfrak{B}$, und n_θ desgleichen für f_0 bedeutet.

Weitere Folgerungen aus b) und Satz 6:

d) Für eine konvergente Folge analytischer Flächen beschränkten Flächeninhalts *oder* beschränkter Blätterzahl ist jeder Zweig von V_0 von endlicher Belegungszahl.

Beweis: Wäre $n_Z = \infty$, so könnte man eine reduzierte Teilfolge mit derselben Eigenschaft bestimmen. Daraus folgt aber wegen (6) und (7): $\lim\inf n_j = \infty$, bzw. $\lim F_j^* = \infty$, und zwar für jedes abgeschlossene Teilgebiet, das Punkte des Zweiges Z, für den $n_Z = \infty$ ist, im Innern enthält, wzbw.

---

e) Für eine konvergente Folge analytischer Flächen, deren Flächeninhalt in $\mathfrak{B} \leq F$, *oder* deren Blätterzahl in $\mathfrak{B} \leq n$ ist, ist auch der Flächeninhalt der Grenzfläche $\leq F$, bzw. deren Blätterzahl $\leq n$.

Beweis: Man kann aus der betrachteten Folge eine reduzierte Teilfolge auswählen, diese hat dieselbe Grenzfläche.

Da alle Belegungszahlen mindestens 1 sind, gilt für den Inhalt der Grenzfläche in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{B}$:

$$\Sigma F^*(Z) \leq \Sigma n_Z F^*(Z) = \lim F_j^* \leq F \text{ (Vgl. Satz 6).}$$

Aus b) erhält man dasselbe für die Blätterzahl, es ist zunächst $n_\theta < n$, d. h. die obere Grenze aller Summen $\Sigma m_Z n_Z$, und also erst recht die obere Grenze aller Σm_Z (welche die Zahl der auf G liegenden Punkte von V_0 angeben), ist kleiner als n.

Damit ist auch die Blätterzahl von V_0 in $\mathfrak{B}$ kleiner als n, wzbw.

Satz 2, d) und Satz 5 zusammen sind mit einem von K. Oka[1] seinerzeit angekündigten Satz gleichwertig. Dieser lautet:

f) Sei Σ eine Schar analytischer Flächen V, deren Flächeninhalt im Bereich $\mathfrak{B}$ höchstens je F sei.

[1] Theorème I in der Arbeit von K. OKA. Einen Beweis dieses Satzes konnte ich nirgends finden.

Dann gibt es zu jedem Punkt $X \in \mathfrak{B}$ eine gewisse Umgebung $U(X)$ mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine in $U(X)$ normale Schar Σ_X analytischer Funktionen, so dass die Flächen der Schar Σ mit den Nullstellenflächen der Funktionen der Schar Σ_X übereinstimmen, und keine konvergente Teilfolge der Schar gegen $\equiv 0$ konvergiert.

2. Kap. Folgen und Scharen analytischer Funktionen.

§ 6. Die quasireguläre Folge.

Sei θ eine Folge von Funktionen, die im Bereich $\mathfrak{B}$ analytisch seien, $\mathfrak{B}^*$ sei ein abgeschlossenes Teilgebiet von $\mathfrak{B}$. Auf jeder Ebene $w =$ const. sollen sich höchstens endlich viele in $\mathfrak{B}^*$ liegende irreguläre Punkte der Folge θ befinden. Ausserdem dürfen noch endlich viele dieser Ebenen ganz zur Menge J gehören.

a) Wenn diese Voraussetzung für jedes abgeschlossene Teilgebiet von $\mathfrak{B}$ erfüllt ist, so ist J eine analytische Fläche V_θ, die im Innern von $\mathfrak{B}$ keine wesentlichen Randpunkte besitzt, und nicht durch analytische Fortsetzung innerhalb $\mathfrak{B}$ erweitert werden kann.[1]

V_θ ist also nach unserer Terminologie eine in $\mathfrak{B}$ singularitätenfreie analytische Fläche, die sogenannte *Irregularitätsfläche* der Folge θ.

Def. 10: Eine Folge θ, deren irreguläre Punkte gemäss a) eine singularitätenfreie analytische Fläche V_θ bilden, heisst *quasiregulär* im Bereich $\mathfrak{B}$.

Es gilt nun wie in der klassischen Theorie[2]:

Satz 7: *Ist die Folge θ quasiregulär im Bereich $\mathfrak{B}$, so konvergiert sie in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{B}$, das keine Punkte von V_θ enthält, gleichmässig gegen die Konstante ∞.*

Beweis: Wir legen um irgend einen Punkt X von V_θ einen Dizylinder ϑ, dessen Bestimmungsfläche V_θ nicht trifft, und der noch ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Dies ist möglich, weil V_θ in $\mathfrak{B}$ keine wesentlichen Randpunkte besitzt.

Die betrachtete Folge ist auf der Bestimmungsfläche regulär, sie kann in der Umgebung dieser Punkte gegen eine endliche Grenzfunktion, oder gegen die

---

[1] JULIA, Abschnitt 40, S. 85.

[2] MONTEL, S. 66.

Konstante ∞ konvergieren. Im ersten Fall wären die Funktionen der Folge auf der Bestimmungsfläche beschränkt und konvergent, also auch in ganz ϑ, was der Voraussetzung widerspricht, wzbw.

Das hat zur Folge, dass die Häufungspunkte der Flächenfolge $f_j = a$, wobei a eine beliebige, aber feste, endliche komplexe Zahl ist, notwendigerweise auf V_θ, oder dann ausserhalb $\mathfrak{B}$ liegen müssen, tatsächlich gilt:

b) Jeder Punkt von V_θ ist Häufungspunkt der Flächenfolge $f_j = a$, und zwar für jedes feste, endliche a.

Beweis: Sei X ein Punkt auf V_θ, der nicht Häufungspunkt der Flächenfolge $f_j = a$ sei. Dann kann man eine Umgebung $U(X)$ angeben, in der die Funktionen $g_j = \frac{1}{f_j - a}$ von einem gewissen Index an analytisch sind und auf dem Rand des im Beweis von Satz 7 verwendeten Dizylinders gegen 0 konvergieren. Damit müssen die g_j auch im Innern von ϑ gleichmässig gegen 0 konvergieren, also konvergieren die f_j in ϑ gleichmässig gegen ∞, was der Voraussetzung widerspricht, wzbw.

Dagegen braucht nicht jeder Punkt von V_θ ein Grenzpunkt der Flächenfolge $f_j = a$ zu sein, es kann nämlich unter Umständen eine Teilfolge θ_1 von θ existieren, die in gewissen Punkten von V_θ regulär ist. Im Gegensatz dazu:

Def. 11: Eine Folge θ analytischer Funktionen heisst *irreduzibel* in $\mathfrak{B}$, wenn jede ihrer Teilfolgen in jedem Punkt von V_θ irregulär ist.

Für eine irreduzible Folge analytischer Funktionen ist jeder Häufungspunkt der Folge $f_j = a$ auch Häufungspunkt für jede Teilfolge derselben, also wegen Def. 5:

c) Für eine irreduzible Folge θ analytischer Funktionen konvergiert die Flächenfolge $f_j = a$ für jedes feste a gegen die Fläche V_θ.

Belegungszahl eines Zweiges von V_θ.

Sei θ eine im Bereich $\mathfrak{B}$ irreduzible quasireguläre Folge analytischer Funktionen, ihre Irregularitätsfläche sei V_θ.

Dann hat nach c) (Vgl. § 4) jeder Zweig Z von V_θ eine gewisse Belegungszahl $n_Z(a)$ in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = a$.[1]

Satz 8: *Die Belegungszahl des Zweiges Z in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = a$ ist von a unabhängig und heisst deshalb Belegungszahl n_Z des Zweiges Z in Bezug auf die Funktionsfolge θ.*

Beweis: Sei X eine gewöhnliche Stelle auf Z, a und b zwei komplexe Konstanten. $T_\varepsilon(X)$ sei wie in Def. 7 ein Kreis mit dem Radius ε und dem Mittelpunkt X, welcher Z in X unitär orthogonal schneide.

ε sei so klein gemacht, dass X der einzige Schnittpunkt von $T_\varepsilon(X)$ mit V_θ ist. Ich betrachte nun das über den Rand von $T_\varepsilon(X)$ erstreckte Integral für die Differenz der Zahl der auf $T_\varepsilon(X)$ liegenden a- und b-Stellen der Funktionen f_j:

$$n_j(a) - n_j(b) = \frac{1}{2\pi} \oint d\left\{\arg \frac{f_j - a}{f_j - b}\right\}. \tag{10}$$

Dieses Integral verschwindet wegen der Ganzzahligkeit der n für hinreichend grosses j, weil f_j auf dem Rande von T gleichmässig gegen ∞ konvergiert, somit $\limsup n_j(a) = \limsup n_j(b)$, wzbw.

Bedeutet n_Z die Belegungszahl eines Zweiges Z von V_θ in Bezug auf die irreduzible Funktionsfolge θ, bedeutet ferner m_Z die Zahl der Schnittpunkte dieses Zweiges mit einem in $\mathfrak{B}$ liegenden abgeschlossenen Teilgebiet G einer analytischen Ebene, und liegt schliesslich kein Punkt von V_θ auf dem Rande von G, so gilt wegen Satz 4 offenbar:

d) Die obere Häufungsgrenze der Zahl der auf G liegenden a-Stellen der f_j beträgt für alle a höchstens $n_G = \Sigma\, m_Z n_Z$.

§ 7. Die quasinormale Schar.

Def. 12: Eine Schar von analytischen Funktionen heisst *quasinormal* im Bereich $\mathfrak{B}$, wenn man aus jeder Folge von Funktionen dieser Schar eine weitere Folge auswählen kann, die im Bereich $\mathfrak{B}$ regulär oder quasiregulär ist.

---

[1] Die Vielfachheit der a-Stellenflächen der f_j muss dabei natürlich berücksichtigt werden, wenn $n_Z(a)$ gemäss Satz 3 und Def. 8 berechnet wird, die Schnittpunkte von $T_\varepsilon(X)$ mit einer mehrfachen a-Stellenfläche sind mehrfach zu zählen.

Zusatz: Die Schar Σ heisst in $\mathfrak{B}$ *quasinormal von endlicher Ordnung s*, wenn die Blätterzahl der V_θ in $\mathfrak{B}$ für alle irreduziblen Folgen $\theta < \Sigma$ eine obere Grenze s besitzt.

Sei nun Σ eine Schar von Funktionen, die im Bereich $\mathfrak{B}$ analytisch sind. Dann gilt wie in der klassischen Theorie[1]:

Satz 9: *Wenn man für alle Funktionen der Schar Σ eine gemeinsame obere Grenze p für die a-Stellenzahl, ebenso eine obere Grenze q für die b-Stellenzahl im Bereich $\mathfrak{B}$ angeben kann, so ist die Schar Σ quasinormal in $\mathfrak{B}$, und zwar von endlicher Ordnung s (wobei $s \leq p$, $s \leq q$).*

Beweis: Nach Satz 2 enthält jede Folge $\theta_1 < \Sigma$ eine Teilfolge $\theta_2 : f_1, f_2, \ldots$, so dass die analytischen Flächen $f_j = a$, $f_j = b$, soweit sie in $\mathfrak{B}$ verlaufen, gegen die analytischen Flächen V_a, bzw. V_b konvergieren, und zwar sind nach § 5, e) auch V_a und V_b maximal p-, bzw. q-blättrig in $\mathfrak{B}$.

In jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, das keine Punkte von V_a und V_b mehr enthält, nehmen also die f_j von einem gewissen j an die Werte a und b nicht mehr an.

Damit verhält sich die Folge θ_2 gemäss § 1, a) normal in $\mathfrak{B}^*$; da $\mathfrak{B}^*$ im übrigen beliebig war, ist θ_2 nur auf V_a und V_b nicht normal, und besitzt damit eine in $\mathfrak{B}$, ausgenommen auf V_a und V_b, reguläre Teilfolge θ, welche in $\mathfrak{B}$ quasiregulär ist.

Da aber ein irregulärer Punkt der Folge θ nach § 6, b) für jedes a Häufungspunkt von a-Stellen der f_j sein muss, können nur die gemeinsamen Punkte von V_a und V_b zu $\dot{V}_\theta$ gehören, d. h. V_θ ist höchstens p- und höchstens q-blättrig, wzbw.

Dieser Satz gilt natürlich auch dann noch, wenn die Werte a und b für die Funktionen der Schar verschieden sind, solange nur die Abstände der 3 Punkte a, b, ∞ auf der Zahlenkugel für jedes f mindestens den Abstand d haben.[2]

---

[1] MONTEL, S. 67.

[2] Dieses und andere Kriterien lassen sich ohne weiteres aus der klassischen Theorie übertragen, z. B. auch der folgende Satz (Vgl. MONTEL, S. 73, 74):

Seien a, b zwei feste komplexe, m, n zwei feste natürliche Zahlen mit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, ferner Σ eine Schar analytischer Funktionen. Ferner sei für jede Funktion $f \in \Sigma$ die Ordnung jeder in $\mathfrak{B}$ liegenden a-(b-)Stelle ein Vielfaches von m (n), ausgenommen solche a-(b-)Stellen, die entweder isoliert sind, oder auf einer maximal p-(q-) blättrigen analytischen Fläche A_f (B_f) liegen.

Dann ist die Schar Σ quasinormal in $\mathfrak{B}$.

Aus der Tatsache, dass eine in einem endlichen Bereich analytische Fkt. m. Var. ihren Wertevorrat bereits auf dem Rande völlig ausschöpft, folgt zusammen mit § 6, b):

a) Eine im endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar von Funktionen, die alle einen gewissen Wert a (der, wenn nur $|a| < M$ bleibt, noch von f abhängen darf) auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ nicht annehmen, ist normal in $\mathfrak{B}$.

Für gewisse Bereiche $\mathfrak{B}$ kann man sogar Teilmengen des Randes angeben, auf denen jede in $\mathfrak{B}$ analytische Funktion bereits sämtliche Werte annimmt, die sie in $\mathfrak{B}$ annehmen kann. Für solche Bereiche kann dann b), ebenso natürlich § 1, a), entsprechend verschärft werden.[1]

Satz 7 sagt aus, dass die Funktionen einer in $\mathfrak{B}$ quasinormalen Schar nur auf einer analytischen Fläche beschränkt sein können, und bei endlicher Ordnung der Schar kann ausserdem die Blätterzahl dieser Fläche einen gewissen Wert nicht überschreiten. Also folgt:

b) Wenn die Funktionen einer im Bereich $\mathfrak{B}$ quasinormalen Schar Σ auf einem beliebig kleinen, in $\mathfrak{B}$ liegenden, *nichtanalytischen* Flächenstück gleichmässig beschränkt sind, so ist die Schar Σ normal in $\mathfrak{B}$.

c) Sei $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{B}$ liegende Punktmenge, die nicht Teilmenge einer im Bereich $\mathfrak{B}$ maximal n-blättrigen analytischen Fläche sein kann (z. B. $n + 1$ analytische Ebenenstücke).

Wenn dann die Funktionen einer in $\mathfrak{B}$ quasinormalen Schar endlicher Ordnung n auf $\mathfrak{M}$ gleichmässig beschränkt sind, so ist diese Schar normal in $\mathfrak{B}$.

§ 8. Totale Ordnung einer quasinormalen Schar.

Ich betrachte eine in $\mathfrak{B}$ irreduzible, quasireguläre Folge θ analytischer Funktionen. Sei ferner G ein beliebiges, in $\mathfrak{B}$ liegendes, abgeschlossenes Gebiet einer analytischen Ebene. Im folgenden wird G alle möglichen derartigen Gebiete durchlaufen, wobei auch die Ebene von G variiert. Wir wollen jedoch solche Gebiete G ausschliessen, auf deren Rand Punkte von V_θ liegen.

---

[1] Z. B. fand K. STEIN (Vgl. dort § 5):

Eine im Dizylinder $\vartheta: |w| \leq r,\ |z| \leq \varrho$ analytische Funktion nimmt in ϑ keine andern Werte an, als auf der folgenden, *zweidimensionalen* Punktmenge Q:

$$Q = \begin{cases} \text{Bestimmungsfläche von } \vartheta \\ + \text{ Kreisscheibe } w = r e^{i\alpha} = \text{const.},\ |z| \leq \varrho \\ + \text{ Kreisscheibe } z = \varrho e^{i\beta} = \text{const.},\ |w| \leq r. \end{cases}$$

Die Folge θ erzeugt nun auf G eine ebenfalls quasireguläre Folge θ' von Funktionen einer Variabeln, deren totale Ordnung offenbar höchstens n_G ist (Vgl. § 6, d).

Es ist nun naheliegend, den Begriff der totalen Ordnung wie folgt auf Fkt. m. Var. zu übertragen:

Def. 13: Die obere Grenze der n_G für alle zulässigen G (s. o.) nenne ich die totale Ordnung n_θ der irreduziblen Folge θ im Bereich $\mathfrak{B}$.

Zusatz: Unter der totalen Ordnung einer Schar analytischer Funktionen im Bereich $\mathfrak{B}$ verstehe ich die kleinste Zahl n mit der Eigenschaft, dass jede Folge $\theta < \Sigma$ eine irreduzible Teilfolge besitzt, deren totale Ordnung höchstens n beträgt.

Natürlich ist die totale Ordnung mindestens gleich der gewöhnlichen Ordnung gemäss Def. 12, Zusatz. Ist ferner θ eine irreduzible Teilfolge einer quasinormalen Schar total endlicher Ordnung, so hat jeder Zweig von V_θ eine endliche Belegungszahl bezüglich θ.

Es gilt nun folgendes Kriterium für die total endliche Ordnung einer quasinormalen Schar:

a) Ist Σ eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar analytischer Funktionen und sind die a-Stellenzahlen aller Funktionen dieser Schar kleiner als s, so ist die totale Ordnung der Schar Σ ebenfalls höchstens s.

Beweis: Sei θ_1 eine irreduzible Teilfolge von Σ, dann konvergiert die entsprechende Folge der Niveauflächen nach § 6, c) gegen V_{θ_1}. Man kann aus θ_1 eine weitere Teilfolge $\theta: f_1, f_2, \ldots$ auswählen, so dass die Flächenfolge $f_j = a$ im Sinne von Def. 9 reduziert ist.

Für die Flächenfolge $f_j = a$ ist nach § 5, b) also $n_\theta \leq \lim\inf n_j \leq s$. Nach Def. 13 ist aber n_θ für die Funktionsfolge f_j als obere Grenze aller $n_G = = \Sigma m_Z n_Z$ genau gleich definiert, wie bei einer Flächenfolge, also $n_\theta \leq s$, wzbw.

Man kann also feststellen:

b) Unter den Voraussetzungen von Satz 9 ist die Schar Σ von total endlicher Ordnung s' im Bereich $\mathfrak{B}$, wobei s' weder p noch q übersteigt.

Die klassische Bedingung, die die Normalität einer quasinormalen Schar total endlicher Ordnung zur Folge hat[1], kann hier auf verschiedene Weisen formuliert werden, z. B.:

Satz 10: *Sei Σ eine im Bereich $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar total endlicher Ordnung s. Wenn alle Funktionen dieser Schar einer der folgenden Bedingungen C_s oder D_s genügen, so ist diese Schar normal in $\mathfrak{B}$.*

C_s: *Alle Funktionen dieser Schar, sowie ihre partiellen Ableitungen bis und mit der Ordnung s, sind an der Stelle $P \in \mathfrak{B}$ gleichmässig beschränkt.*

D_s: *Alle Funktionen der Schar, sowie ihre s ersten partiellen Ableitungen nach w, sind in $s+1$ Punkten $P_0, \ldots, P_s$, die in $\mathfrak{B}$ und auf einer nicht zur w-Ebene parallelen analytischen Ebene liegen, gleichmässig beschränkt.*

Beweis: Für C_s: Sei θ eine irreduzible, quasireguläre Folge aus Σ. Man kann annehmen, es gebe durch P eine analytische Ebene, die nicht zu V_θ gehört. Auf dieser Ebene entsteht eine Folge von Funktionen einer Variabeln, welche in der Umgebung von P ebenfalls quasiregulär von total endlicher Ordnung ist, wie am Anfang dieses § festgestellt werden kann.

Für die in dieser Ebene E erzeugten Funktionen einer Variabeln sind offenbar die Funktionswerte, sowie die s ersten partiellen Ableitungen[2] an der Stelle P gleichmässig beschränkt.

Es gilt also der entsprechende klassische Satz[3], die f_j bilden auf E eine in einer gewissen Umgebung U von P normale Schar und sind deshalb in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von U gleichmässig beschränkt. Dies widerspricht aber der Annahme, dass E nicht zu V_θ gehören soll (Vgl. Satz 7), wzbw.

Für D_s legt man durch die Punkte $P_0, \ldots, P_s$ je eine analytische Ebene $z = \text{const.}$, diese Ebenen seien mit $E_0, \ldots, E_s$ bezeichnet. Nicht alle diese Ebenen können zu V_θ gehören (Vgl. § 7, c). Wenn aber z. B. E_0 nicht zu V_θ gehört, so kommt man wie oben zu einem Widerspruch, wzbw.

Aus diesem Satz (C_s) folgt zusammen mit b) ohne weiteres der bekannte Satz von Schottky für Fkt. m. Var. Wenn man aber die Bedingung D_s heranzieht, erhält man:

[1] Vgl. die klassischen Sätze bei MONTEL, S. 70.
[2] Nach einer in der Ebene E eingeführten komplexen Variabeln.
[3] Vgl. MONTEL, S. 70.

Satz 11: *Sei die Funktion* $f(w, z) = \sum_{0}^{\infty} g_j(z) w^j$ *analytisch im Dizylinder* $\vartheta: |w| < r,\ |z| < \varrho$, *ferner seien die Null- und Einsstellenzahlen von* $f(w, z)$ *in* ϑ *höchstens je* s.

Wenn dann die Funktionen $g_0, \ldots, g_s$ *an* $s + 1$ *im Kreis* $|z| < \varrho$ *liegenden Stellen* $z_0, \ldots, z_s$ *beschränkt sind, nämlich:*

$$|g_j(z_k)| < M, \text{ für } j, k = 0, \ldots, s,$$

so ist die Funktion $f(w, z)$ *in jedem abgeschlossenen Teildizylinder* ϑ^* *von* ϑ *beschränkt, und die Schranke für* f *hängt bei festem* s, ϑ, $z_0, \ldots, z_s$ *nur noch von* M *und* ϑ^* *ab.*

Beweis: Die Voraussetzungen, die über diese Funktion $f(w, z)$ gemacht wurden, sind so beschaffen, dass alle Funktionen, die diesen genügen, nach b) eine in ϑ quasinormale Schar total endlicher Ordnung s bilden. Nach Satz 10 (D_s) ist diese Schar aber sogar normal in ϑ, so dass alle Funktionen der Schar in jedem festen, abgeschlossenen Teildizylinder gleichmässig beschränkt sind, wzbw.

Schliesslich kann auch eine dem Satz von Landau ähnliche Aussage gemacht werden:

Die in Satz 11 gegebene Funktion $f(w, z)$ sei analytisch im Dizylinder $\vartheta: |w| < r,\ |z| < \varrho$. Dann gilt:

Satz 12: *Die Werte der* $s + 1$ *ersten „Koeffizientenfunktionen" von* $f(w, z)$ *seien an je* $s + 1$ *festen Stellen im Kreis* $|z| < \varrho$ *vorgeschrieben, also:*

$$g_j(z_k) = a_{jk} \text{ für } j, k = 0, \ldots, s,$$

aber nicht alle a_{sk} *seien* 0.

Im übrigen seien die $g_j(z)$ *analytisch im Kreis* $|z| < \varrho$, *aber sonst völlig beliebig.*

Ferner sei die Null- und Einsstellenzahl von $f(w, z)$ *in* ϑ *höchstens je* $s - 1$.

Dann gibt es für die Zahl r *eine obere Grenze* R, *die nur von* s, ϱ *und den* a_{jk} *abhängt.*

Beweis: Andernfalls gäbe es eine Folge von Funktionen f_j, von denen jede im Dizylinder $\vartheta_j: |w| < j,\ |z| < \varrho$ die gestellten Bedingungen (Null- und Einsstellenzahl, Werte von g_j) erfüllt. Nach Satz 10 (D_s) ist aber eine solche Folge eine normale

Schar, es gibt also eine Teilfolge $\theta_1: f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots$, die in ϑ_1 gleichmässig konvergiert, und aus dieser kann man wieder eine Teilfolge θ_2 auswählen, die in ϑ_2 gleichmässig konvergiert: $f_{11}, f_{22}, f_{23}, \ldots$. Allerdings braucht f_{11} nicht in ganz ϑ_2 analytisch zu sein.

Die Diagonalfolge $f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots$ besteht dann aus Funktionen, die in jedem Dizylinder ϑ_j gleichmässig konvergieren, obwohl f_{kk} erst von einem gewissen k an in ϑ_j analytisch ist.

Die Grenzfunktion der Folge f_{kk} ist in jedem ϑ_j analytisch, ist also für jedes z eine ganze Funktion in w. Die Grenzfunktion ist ferner $\not\equiv a$; weil nach Voraussetzung die Koeffizientenfunktionen g_s für alle f_j an wenigstens einer Stelle vorgeschrieben sind: $g_{sj}(P) = c \neq 0$, kann auch die Koeffizientenfunktion g_s für die Grenzfunktion nicht identisch verschwinden.

Damit konvergieren die Null- und Einsstellenflächen der f_{kk} gegen die entsprechenden Flächen der Grenzfunktion, also sind die Blätterzahlen dieser Flächen in ϑ_j ebenfalls höchstens je $s - 1$, und zwar für jedes j (Vgl. § 5, e).

Die Grenzfunktion hat also auf jeder Ebene $z = \text{const.}$ höchstens je $s - 1$ Null- und Einsstellen, und ist also auf einer solchen Ebene höchstens ganz rational vom Grade $s - 1$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass der Koeffizient $g_s(z)$ von w^s nicht identisch verschwindet, wzbw.

---

§ 9. Funktionen mit Niveauflächen beschränkten Inhalts.

Man kann auf Grund von Satz 2 das Kriterium für Quasinormalität einer Funktionsschar auch wie folgt aussprechen:

> Sei der wie bei § 5, c) mit Vielfachheit gerechnete Flächeninhalt der a-Stellenfläche der Funktion f im Bereich $\mathfrak{B}$ mit F_a bezeichnet.

Satz 13: *Wenn die Flächeninhalte F_a und F_b für alle Funktionen der Schar Σ beschränkt, nämlich $\leq F$ sind, so ist die Schar Σ quasinormal in $\mathfrak{B}$.*

Der Beweis ergibt sich aus Satz 2 fast wörtlich wie Satz 9, und man erhält ausserdem noch aus § 5, e):

a) Ist θ eine irreduzible Teilfolge der gemäss Satz 13 quasinormalen Schar, so ist der Flächeninhalt von V_θ im Bereich $\mathfrak{B}$ höchstens F.

Sei P ein Punkt aus $\mathfrak{B}$, so dass die abgeschlossene Hyperkugel mit Radius r, Mittelpunkt P, noch ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Dann gilt:

b) Wenn alle Funktionen der in $\mathfrak{B}$ quasinormalen Schar Σ an der Stelle P (s. o.) beschränkt sind, wenn ferner für alle Funktionen der Schar gilt: $F_a \leq \pi r^2$, so ist die Schar Σ normal im Bereich $\mathfrak{B}$.

Beweis: Für eine irreduzible, quasireguläre Folge θ aus Σ müsste P zu V_θ gehören, also gilt für den Flächeninhalt F von V_θ in $\mathfrak{B}$ nach Satz 1: $F > \pi r^2$.

Da aber die Flächen $f_j = a$ in $\mathfrak{B}$ gegen V_θ konvergieren, ist nach § 5, e): $F \leq \pi r^2$, im Widerspruch zum obigen Ergebnis, wzbw.

---

c) Für eine in $\mathfrak{B}$ irreduzible, quasireguläre Folge θ von Funktionen $f(w, z)$, deren a-Stellenflächen in $\mathfrak{B}$ beschränkten Flächeninhalt haben, hat jeder Zweig von V_θ eine endliche Belegungszahl.

Beweis: Sei Z ein Zweig von V_θ mit $n_Z = \infty$, man legt dann ein abgeschlossenes Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, das Punkte dieses Zweiges im Innern enthält. Ferner folgt aus $n_Z = \infty$ die Existenz einer reduzierten Teilfolge der Flächenfolge $f_j = a$, für die ebenfalls $n_Z = \infty$ ist. Damit wäre nach (7) aber $\lim F_j^* = \infty$, entgegen der Voraussetzung des beschränkten Flächeninhalts, wzbw.

Sei θ eine in $\mathfrak{B}$ quasireguläre Folge, für die die Inhalte der Flächen $f_j = a$ *(a fest) im abgeschlossenen Teilgebiet* $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ beschränkt ($\leq F$) seien. Der Rand von $\mathfrak{B}^*$ enthalte kein analytisches Flächenstück (er sei also total pseudokonvex). Dann gilt:

d) Die Inhalte der Flächen $f_j = b$ in $\mathfrak{B}^*$ haben für $j \to \infty$ eine für alle b gemeinsame obere Häufungsgrenze $F_0 \leq F$.

Beweis: Zunächst kann man eine Teilfolge θ_1 aus θ auswählen, für die die Inhalte $F_j^*(b)$ der Flächen $f_j = b$ (in $\mathfrak{B}^*$) gegen ihre obere Häufungsgrenze konvergieren. Aus θ_1 wähle ich eine weitere Teilfolge θ_2 aus, so dass die Flächenfolgen $f_j = a$ und $f_j = b$ im Sinne von Def. 9 reduziert sind. Alsdann folgt aus Satz 6, dass für die Teilfolge θ_2 $\lim F_j^*(a) = \lim F_j^*(b)$[1] sein muss, denn die Belegungszahlen aller Zweige von V_θ sind nach Satz 8 für a und b gleich.

Somit gilt für die Folge θ: $\lim\sup F_j^*(a) \geq \lim\sup F^*(b)$, woraus die Behauptung wegen der Symmetrie von a und b folgt, wzbw.

---

[1] Der Index j durchläuft jeweils nur diejenigen Zahlen, die der betreffenden Teilfolge entsprechen.

Aus d) folgt, wenn $\mathfrak{B}^*$ wie oben ein abgeschlossenes Teilgebiet von $\mathfrak{B}$ mit total pseudokonvexer Berandung ist:

Satz 14: *Ist θ eine in $\mathfrak{B}$ quasireguläre Folge analytischer Funktionen, und konvergieren die Flächeninhalte der Flächen $f_j = a$ in $\mathfrak{B}^*$ für ein einziges a, so konvergieren sie für alle a gegen denselben Wert.*

Ferner folgt aus d) und § 5, c):

e) Für jede reguläre oder quasireguläre Teilfolge $f_1, f_2, \ldots$ der Schar Σ aus Satz 13 sind entweder die Inhalte der Flächen $f_j = c$ in $\mathfrak{B}^*$ für jedes feste c beschränkt, oder die Folge konvergiert in $\mathfrak{B}^*$ gleichmässig gegen die Konstante c.

Schliesslich folgt noch eine Aussage, welche dem Satz von Schottky ähnlich ist:

Sei $f(w, z)$ eine in $\mathfrak{B}$ analytische Funktion, F_0 und F_1 die Inhalte der Flächen $f = 0$ und $f = 1$ im Bereich $\mathfrak{B}$. Sei ferner V ein in $\mathfrak{B}$ liegendes analytisches Flächenstück, dessen Inhalt grösser als die Konstante F sei.

Satz 15: *Wenn F_0 und F_1 beide höchstens je F betragen, und wenn für alle Punkte auf $V: |f(P)| < m$ ist, dann gibt es zu jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ eine Zahl M, die nur von m, V, F und $\mathfrak{B}^*$ abhängt, so dass in ganz $\mathfrak{B}^*$ gilt: $|f(P)| < M$.*

Beweis: Alle Funktionen mit der vorausgesetzten Eigenschaft bilden nach Satz 13 eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar. Alle Funktionen einer irreduziblen Teilfolge θ aus der Schar sind auf einer Punktmenge, welche nach a) nicht Teilmenge von V_θ sein kann, gleichmässig beschränkt, was Satz 7 widerspricht.

Es gibt somit keine irreduziblen, quasiregulären Teilfolgen, oder jede quasireguläre Teilfolge der Schar ist noch reduzibel, d. h. die Schar ist normal in $\mathfrak{B}$, und damit in jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ gleichmässig beschränkt, wzbw.

3. Kap. Folgen und Scharen meromorpher Funktionen.

§ 10. Quasireguläre Folgen meromorpher Funktionen.

Der Begriff der quasiregulären Folge meromorpher Funktionen soll dem entsprechenden Begriff bei analytischen Funktionen nachgebildet werden, d. h. *es sollen die Definitionen 10 und 11 wörtlich übernommen werden.* Das Auftreten der ausserwesentlich irregulären Stellen lassen wir dabei völlig ausser Betracht, diese dürfen bei einer quasiregulären Folge in beliebiger Zahl auftreten. Wir wollen sogar zulassen, dass sich diese in $\mathfrak{B}$ häufen, ein Häufungspunkt ausserwesentlich irregulärer Stellen der Folge θ ist dann allerdings eine wesentlich singuläre Stelle der Grenzfunktion, also eine wesentlich irreguläre Stelle der Folge.

Satz 7 gilt bei Folgen meromorpher Funktionen natürlich nicht, dagegen, wie Satz 16 zeigen wird, § 6, b) mit Einschränkungen.

Zunächst wollen wir aber mit allen Funktionen f_j einer Folge meromorpher Funktionen eine feste, gebrochen lineare Transformation ausführen:

$$f^*(w, z) = \frac{\alpha f(w, z) + \beta}{\gamma f(w, z) + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{11}$$

Dies bedeutet eine topologische Selbstabbildung der Riemannschen Zahlenkugel, eine konvergente Punktfolge auf dieser geht dabei wieder in eine solche über, ebenso eine divergente, also gilt:

a) Die Folge $\theta: f_1, f_2, \ldots,$ sowie die Folge θ^* der gemäss (11) aus den f_j erhaltenen Funktionen f_j^*, haben dieselben irregulären Punkte, und die Grenzfunktionen f_0 und f_0^* gehen ebenfalls durch die Transformation (11) auseinander hervor. Ausserdem sind die Folgen θ und θ^* gleichzeitig irreduzibel.

Satz 16: *Ist θ eine in $\mathfrak{B}$ quasireguläre Folge meromorpher Funktionen mit der Irregularitätsfläche V_θ, so ist jeder Punkt von V_θ Häufungspunkt von a-Stellen der f_j, und zwar, mit höchstens einer Ausnahme a_0, für alle a.*[1]

Der Ausnahmewert a_0 kann höchstens dann auftreten, wenn die Grenzfunktion f_0 ausserhalb V_θ[2] *die Konstante a_0 ist.*

Beweis: Ist P ein Punkt von V_θ, in dessen Umgebung U nur endlich viele Funktionen der Folge den Wert a_0 annehmen, so sind die Funktionen $g_j = \frac{1}{f_j - a_0}$ von einem gewissen N an analytisch in U. Nach a) ist die Folge g_j ebenfalls quasiregulär in U und konvergiert deshalb nach Satz 7 ausserhalb V_θ gleichmässig gegen ∞, d. h. f_j konvergiert ausserhalb V_θ gegen a_0.

Ferner ist P Häufungspunkt der Flächenfolge $g_j = b$ für jedes endliche b, also Häufungspunkt der Flächenfolge $f_j = a$ für jedes $a \neq a_0$, wzbw.

---

[1] Bei meromorphen Funktionen wird auch ∞ unter die komplexen Zahlen gerechnet, a kann also künftig auch ∞ sein.

[2] Die Grenzfunktion ist natürlich nur ausserhalb V_θ definiert, dieser Vorbehalt wird nicht jedesmal erwähnt werden.

Sofern die Folge θ überhaupt einen Ausnahmewert a_0 besitzt, so ist er also für alle Punkte von V_θ derselbe, allerdings können trotzdem einzelne „Ausnahmepunkte" von V_θ Häufungspunkte von a_0-Stellen der f_j sein.

Eine ganz ähnliche Erscheinung hat ja P. Thullen für den Picardschen Ausnahmewert einer analytischen Fkt. m. Var. in der Umgebung einer wesentlich singulären Fläche gefunden.[1]

In der Umgebung einer ausserwesentlich irregulären Stelle P hat die Folge θ natürlich keinen Ausnahmewert, denn nach W. Saxer ist dann P Häufungspunkt von Unbestimmtheitsstellen der f_j.

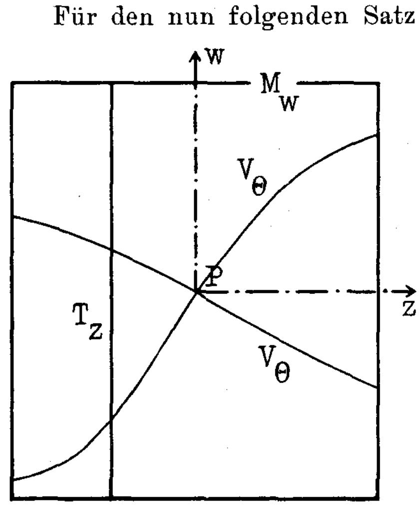
Die *Grenzfunktion* einer quasiregulären Folge meromorpher Funktionen ist ausserhalb V_θ wieder meromorph, aber die Punkte von V_θ können wesentlich singuläre Stellen der Grenzfunktion sein.

Es ist aber möglich, dass ein Teil dieser singulären Stellen hebbar sind, d. h. man kann durch geeignete Definition von Funktionswerten in den Punkten von V_θ erreichen, dass die Grenzfunktion f_0 zu einer Funktion f_0^+ ergänzt wird, die sich auch noch in gewissen Punkten von V_θ meromorph verhält.

Nun bilden aber die wesentlich singulären Stellen einer meromorphen Fkt. m. Var., wenn sie nicht eine mindestens 3-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden, nach P. Thullen[2] stets ganze Zweige analytischer Flächen, also:

b) Ist ein Punkt P eines Zweiges von V_θ eine hebbar singuläre Stelle der Grenzfunktion von θ, so sind alle Punkte dieses Zweiges, die nicht zugleich auf andern Zweigen liegen, hebbar singuläre Stellen der Grenzfunktion.

Für den nun folgenden Satz treffen wir einige Festsetzungen:



θ sei eine in $\mathfrak{B}$ quasireguläre Folge, P sei ein Punkt von V_θ. E sei eine analytische Ebene durch P, die nicht Zweig von V_θ ist, und auch V_θ in P nicht berührt.

Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, E sei die w-Ebene, die dazu unitär orthogonale analytische Ebene durch P sei die z-Ebene.

---

[1] Vgl. die zitierte Arbeit von P. THULLEN, Satz 3, S. 149.

[2] Vgl. P. THULLEN, Satz 2, S. 142.

Man kann den Dizylinder $\vartheta : |w| \leq r$, $|z| \leq \varrho$ so wählen, dass er noch ganz in $\mathfrak{B}$ liegt, und keine Punkte von V_θ auf der Mantelhyperfläche $M_w : |w| = r$, $|z| \leq \varrho$ liegen.

Der Kreis $|w| \leq r$, $z = \text{const.}$ ($|z| < \varrho$) sei mit T_z bezeichnet.

Satz 17: *Die Grenzfunktion f_0 der Folge θ hat an der Stelle P eine hebbare Singularität, wenn für ein einziges a e i n e der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

C_n: *Die Zahl der auf T_z liegenden a-Stellen*[1] *der f_j besitzt für alle j und alle $|z| < \varrho$ eine obere Grenze n.*

C_F: *Der mit Vielfachheit*[2] *gerechnete Inhalt der Fläche $f_j = a$ in ϑ beträgt für jedes j höchstens F.*

Beweis: Wegen a) kann man annehmen, es sei $a = \infty$, weiter kann man voraussetzen, die Folge sei irreduzibel, weil die Auswahl einer Teilfolge die Grenzfunktion nicht verändert.

Es genügt offenbar, wenn man beliebig kleine ϱ in Betracht zieht, wir wollen ϱ so klein wählen, dass kein Punkt von V_θ auf der Mantelhyperfläche M_w des Dizylinders ϑ liegt. Jeder der Kreise T_z schneidet dann sämtliche durch P laufenden Zweige von V_θ, es genügt also nach b), wenn man zeigt, dass sich die Grenzfunktion in einer vollen Umgebung jedes Punktes *eines* solchen Kreises T_z meromorph verhält.

Die Grenzfunktion ist meromorph auf der Mantelhyperfläche M_w, weil dort keine Punkte von V_θ liegen, es gibt also sicher einen Kreis T_{z_0}, auf dessen Rand (d. h. auf M_w) kein Pol von f_0 liegt. Dasselbe gilt dann auch für alle T_{z_0} hinreichend benachbarten T_z, etwa für $|z - z_0| \leq \varepsilon$.

Diesen neuen Dizylinder $\vartheta' : |w| \leq r$, $|z - z_0| \leq \varepsilon$ wollen wir nun betrachten und zeigen, dass f_0 in diesem meromorph ist. Damit ist dann Satz 17 bewiesen.

Auf der Mantelhyperfläche M'_w von ϑ' liegen weder Punkte von V_θ noch von $f_0 = \infty$, also überhaupt keine Häufungspunkte der Flächenfolge $f_j = \infty$. Damit liegen von einem gewissen j_0 an auch keine Punkte von $f_j = \infty$ mehr auf M_w.

Das hat sowohl im Fall C_n, als auch im Fall C_F zur Folge, dass man die

---

[1] Mit Vielfachheit gezählt.

[2] Ein aus a-Stellen der Ordnung m bestehender Zweig von $f_j = a$ muss mit dem m-fachen Flächeninhalt mitgerechnet werden.

Polstellen der f_j wie im Beweis von § 3, b) mit der richtigen Vielfachheit als Nullstellenflächen von Pseudopolynomen darstellen kann:

$$Q_j(w, z) = w^n + A_1(z) w^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0.$$

Dabei sind die Exponenten n, sowie die Funktionen $A_1, \ldots A_n$ für $|z - z_0| \leq \varepsilon$ und für alle $j > j_0$ beschränkt. Man kann somit eine Teilfolge θ_1 aus θ auswählen, für die die Folge der zugeordneten Q_j im Dizylinder ϑ' gleichmässig konvergiert (j sei auch der laufende Index für diese Teilfolge).

Die Folge f_j ist auf M'_w beschränkt und konvergent, ebenso die Folge Q_j, also auch die Folge $g_j = f_j Q_j$. Die Folgen Q_j und g_j bestehen aber in ϑ' aus analytischen Funktionen und konvergieren deshalb auch in ganz ϑ' gleichmässig gegen analytische Funktionen Q_0 und g_0.

Q_0 kann nicht identisch verschwinden, weil Q_j immer mit w^n beginnt, also kann $g_0 = f_0 Q_0$ auch nur im trivialen Fall $f_0 \equiv 0$ identisch verschwinden. In jedem andern Fall ist aber f_0 Quotient von zwei analytischen Funktionen, wzbw.

§ 11. Quasinormale Scharen meromorpher Funktionen.

Nachdem die quasireguläre und irreduzible Folge meromorpher Funktionen wörtlich wie bei analytischen Funktionen festgelegt wurden, kann man mit dem Begriff der quasinormalen Schar ebenso vorgehen: *Def. 12 samt Zusatz soll unverändert auch für meromorphe Funktionen gelten.* Wie man sieht, sind die ausserwesentlich irregulären Stellen sogar für die Zählung der Ordnung ausser Betracht gelassen.

Sei nun Σ eine Schar von Funktionen, die im Bereich $\mathfrak{B}$ meromorph seien, der Inhalt der a-Stellenfläche einer solchen Funktion werde wie in § 9 mit F_a bezeichnet. Ebenso sei n_a die Blätterzahl der a-Stellenfläche von f im Bereich $\mathfrak{B}$. Es gilt dann:

Satz 18: *Die Schar Σ ist quasinormal in $\mathfrak{B}$, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

C_n: *Die Blätterzahlen n_a, n_b, n_c sind für alle Funktionen der Schar je unter einer gewissen Grenze p, bzw. q, bzw. r.*

C_F: *Die Flächeninhalte F_a, F_b, F_c sind für alle Funktionen der Schar höchstens je F.*

Zusatz: Im Fall C_n ist die Schar von endlicher Ordnung s in $\mathfrak{B}$, und zwar übersteigt s höchstens eine der Zahlen p, q, r.

Im Fall C_F ist der Inhalt der Fläche V_θ in $\mathfrak{B}$ für keine irreduzible Folge θ aus $\mathfrak{B}$ grösser als F.

Der Beweis dieses Satzes kann nach dem Vorbild der klassischen Theorie[1] analog dem Beweis von Satz 9 durchgeführt werden.

Speziell folgt aus Satz 18, dass eine Schar meromorpher Funktionen, die in $\mathfrak{B}$ 3 Werte a, b, c nicht annehmen, normal ist.

Satz 18 sagt zunächst allerdings nur, dass eine solche Schar quasinormal von nullter Ordnung ist, d. h. dass jede irreduzible Teilfolge dieser Schar im Bereich $\mathfrak{B}$ höchstens ausserwesentlich irreguläre Punkte besitzt. Diese sind aber ausgeschlossen, weil die Funktionen einer Folge in der Umgebung einer ausserwesentlich irregulären Stelle nicht 3 Werte auslassen können.

Satz 19: *Die Schar aller rationalen Funktionen, deren Grad[2] höchstens n ist, ist im ganzen abgeschlossenen R^4 quasinormal von endlicher Ordnung n, und jede irreduzible Teilfolge dieser Schar hat wieder eine rationale Grenzfunktion.*

Beweis: Die Quasinormalität folgt unmittelbar aus Satz 18 für jeden beschränkten Bereich und für jeden Bereich, der mit einem beschränkten projektiv äquivalent ist.[3] Man kann aber den abgeschlossenen R^4 mit 3 solchen Bereichen überdecken[4], die Schar ist damit überall quasinormal.

Die obere Grenze n für die Blätterzahl von V_θ wird für die irreduzible Folge $j(w^n + z^n)$ tatsächlich erreicht.

Nach Satz 17 (C_n) kann die Grenzfunktion einer irreduziblen Teilfolge der Schar nirgends wesentlich singulär sein, nach dem Satz von Hurwitz-Weierstrass ist sie also rational[5], wzbw.

Sei nun Σ eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar meromorpher Funktionen. Dann kann man fast wörtlich wie in der klassischen Theorie[6] beweisen:

[1] Vgl. MONTEL, S. 149—151.

[2] Darunter versteht man den grösseren unter den Graden des Zähler- und Nennerpolynoms.

[3] D. h. den man durch projektive Abbildung (BEHNKE-THULLEN, S. 3) auf einen beschränkten Bereich abbilden kann.

[4] Z. B. durch die 3 Bereiche: $|w|^2 + |z|^2 < 3$, $\left|\frac{1}{w}\right|^2 + \left|\frac{z}{w}\right|^2 < 3$, und $\left|\frac{w}{z}\right|^2 + \left|\frac{1}{z}\right|^2 < 3$.

[5] BEHNKE-THULLEN, Satz 28, S. 62.

[6] MONTEL, S. 147/148.

a) Hat keine Folge aus Σ die Konstante ∞ als Grenzfunktion, so gilt für jede Funktion f aus Σ, und jedes $\delta > 0$:

$$|f(P)| < M(\delta),$$

wenn nur P von der Polstellenfläche von f und vom Rand von $\mathfrak{B}$ mindestens je den Abstand δ hat. M hängt dabei nur von δ und von der gegebenen Schar ab.

Folgerung aus a): Sei $f(w, z)$ eine im Bereich $\mathfrak{B}$ meromorphe Funktion, F_a sei wieder der Inhalt der Fläche $f = a$ in $\mathfrak{B}$.

V sei ein Stück einer analytischen Fläche, der Flächeninhalt F_V des in $\mathfrak{B}$ liegenden Teils von V sei grösser als die Konstante F. Dann gilt, ähnlich wie bei Satz 15:

b) Sind die Flächeninhalte F_a, F_b, F_c alle kleiner als F, und gilt für alle Punkte auf $V: |f(P)| < m$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine positive Zahl M, die bei festem a, b, c, F, V nur von m und δ abhängt, mit folgender Eigenschaft:

Für jeden Punkt Q, der von der Polstellenfläche von f und vom Rand von $\mathfrak{B}$ mindestens den Abstand δ hat, ist $|f(Q)| < M$.

Beweis: Alle Funktionen f, welche den Voraussetzungen genügen, bilden nach Satz 18 eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar, für die gemäss dem Zusatz der Flächeninhalt von V_θ für jede irreduzible Teilfolge höchstens F beträgt. Da die Funktionen dieser Teilfolge auf V gleichmässig beschränkt sind, kann diese ausserhalb V_θ, weil V nicht Teilmenge von V_θ sein kann, nicht gleichmässig gegen ∞ konvergieren, es gilt somit a), wzbw.

§ 12. Totale Ordnung einer Schar meromorpher Funktionen.

Sei θ eine irreduzible, quasireguläre Folge meromorpher Funktionen. Nach Satz 16 ist im Fall $f_0 \not\equiv a$ jeder Punkt von V_θ Häufungspunkt von a-Stellen der f_j, ebenso natürlich jeder Punkt der a-Stellenfläche der Grenzfunktion. Die Menge V_a aller Häufungspunkte der Folge $f_j = a$ ist also die Vereinigungsmenge von V_θ mit der Fläche $f_0 = a$.

Sei nun Z ein Zweig von V_θ, dann kann man nach Satz 17 behaupten:

a) Wenn die Grenzfunktion f_0 an der Stelle $P (\in Z)$ wesentlich singulär ist, so können die Blätterzahlen der Flächen $f_j = a$ für kein a, und in keiner Umgebung von P beschränkt sein.

Wir betrachten diesen Fall als erledigt, und nehmen an, V_θ bestehe ausschliesslich aus hebbaren Singularitäten der Grenzfunktion, f_0^+ sei also in ganz $\mathfrak{B}$ meromorph.

V_a, die Grenzfläche der Flächenfolge $f_j = a$[1], ist also singularitätenfrei in $\mathfrak{B}$, jeder Zweig von V_a hat somit eine gewisse Belegungszahl in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = a$. Für einen Zweig von $f_0 = a$ ist die Belegungszahl gleich der Ordnung der diesen Zweig bildenden a-Stellen von f_0. Uns interessieren aber vor allem die zu V_θ gehörenden Zweige von V_a.

Satz 20: *Ist f_0^+ auf dem Zweig Z nicht konstant*[2], *so ist die Belegungszahl $n_Z(a)$ des Zweiges Z in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = a$ von a unabhängig.*

Ist aber f_0^+ auf Z konstant, nämlich $= a_0$, so gilt dasselbe wie oben für alle $a \neq a_0$.

Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass für einige Beweise in § 12 für $a = \infty$ eigentlich eine besondere Betrachtung nötig wäre. Diese kann jedoch wegen § 10, a) umgangen werden.

Beweis: Ist f_0^+ auf Z nicht konstant, so kann ich zu jedem Wertepaar einen Punkt X auf Z so wählen, dass $f_0^+(X)$ von a und b verschieden ist, und X eine gewöhnliche Stelle von V_a und V_b ist ($V_a =$ Vereinigungsmenge von V_θ und $f_0^+ = a$).

Ist aber auf $Z: f_0^+ \equiv a_0$, so gilt dasselbe nur noch für alle von a_0 verschiedenen a und b.

Dem Punkt X ordne ich nun wie in Satz 3 die zu Z unitär orthogonale Kreisscheibe $T_\varepsilon(X)$ zu, wobei ε so klein gewählt werde, dass auf $T_\varepsilon(X)$ (incl. Rand) weder a- noch b-Stellen von f_0^+ liegen. Das über den Rand von $T_\varepsilon(X)$ erstreckte Integral (10) konvergiert dann, weil der Integrand auf dem Rand von $T_\varepsilon(X)$ gleichmässig konvergiert, gegen den entsprechenden Wert für die Grenzfunktion, welcher aber 0 ist.

Somit haben $n_j(a)$ und $n_j(b)$ dieselben oberen Häufungsgrenzen, wegen Satz 3 heisst dies aber: Die Belegungszahlen $n_Z(a)$ und $n_Z(b)$ stimmen überein, wzbw.

---

[1] Wenn die Grenzfunktion nicht die Konstante a ist, konvergiert die Folge $f_j = a$ gegen V_θ, weil θ irreduzibel ist.

[2] f_0^+ kann dann auf keinem 2-dim. Teilgebiet von Z konstant sein.

Def. 14: Der für fast alle a gemeinsame Wert der Belegungszahlen $n_Z(a)$ heisst Belegungszahl n_Z des Zweiges Z in Bezug auf die irreduzible Funktionsfolge θ.

Wenn aber Z ein Zweig der Fläche $f_0^+ = a_0$ ist, so haben fast alle auf Z liegenden a_0-Stellen dieselbe Ordnung m, und es wird also auf fast alle Kreisen $T_\varepsilon(X)$ $(X \in Z)$ eine Funktion einer Variabeln erzeugt, die in X eine m-fache a_0-Stelle hat. Wenn ε hinreichend klein gemacht wird, ist es die einzige a_0-Stelle auf $T_\varepsilon(X)$. Das Integral (10) zeigt für diesen Fall, dass $n_j(a_0) - n_j(b)$ mit wachsendem j gegen m konvergiert, sofern keine b-Stelle von f_0^+ auf $T_\varepsilon(X)$ (incl. Rand) liegt. Also:

b) Ist Z ein gemeinsamer Zweig der Flächen V_θ und $f_0^+ = a_0$, welcher aus a_0-Stellen der Ordnung m besteht, so ist die Belegungszahl von Z in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = a_0$ grösser als für die übrigen a-Werte, nämlich $n_Z + m$.

Kriterium für endliche Belegungszahl:

Wenn die Voraussetzung von Satz 17 für ein a, und für einen Punkt P auf V_θ erfüllt ist, so brauchen die durch P laufenden Zweige von V_θ noch nicht von endlicher Belegungszahl in Bezug auf die Funktionsfolge θ zu sein. Es gilt aber (P und Q sind Punkte auf dem Zweig Z):

Satz 21: *Ist die Voraussetzung von Satz 17 für ein Paar a, P erfüllt, und ist $f_0^+ \not\equiv a$, so ist n_Z endlich.*

Ist die Voraussetzung von Satz 17 für 2 Paare a, P und b, Q $(a \neq b)$ beidemal erfüllt, so ist n_Z endlich.

Dabei kann in Satz 17 immer noch zwischen den Bedingungen C_n und C_F gewählt werden, Satz 21 gilt für beide Fälle.

Beweis: Da die zweite Aussage von Satz 21 eine unmittelbare Folge der ersten ist, braucht man nur diese zu beweisen. Wäre $n_Z = \infty$, so könnte man eine irreduzible Teilfolge mit derselben Eigenschaft auswählen, die Folge θ kann also als irreduzibel angenommen werden, man kann sogar annehmen, die Flächenfolge $f_j = a$ sei im Sinne von Def. 9 reduziert.

Wegen Satz 17 ist die Fläche V_a, d. h. die Vereinigungsmenge von V_θ mit der Fläche $f_0 = a$, in einer gewissen Umgebung $U(P)$ singularitätenfrei.

Die Flächen $f_j = a$ konvergieren wegen $f_0^+ \not\equiv a$ gegen V_a, wir wollen zunächst beweisen, dass die Belegungszahl $n_Z(a)$ von Z in Bezug auf die Flächenfolge $f_j = a$, endlich ist.

Dies folgt im Fall C_F unmittelbar aus § 5, d), im Fall C_n schliessen wir dasselbe aus Satz 4, indem wir die Kreisscheiben T_z in Satz 17 mit den Gebieten G in Satz 4 identifizieren, für alle diese Kreisscheiben ist dann $n_G = \Sigma\, m_Z n_Z(a) \leq n$ (Vgl. Fussn. 2, S. 268).

Damit ist dann $n_Z(a)$ für alle durch P laufenden Zweige Z von V_θ endlich, also auch n_Z, weil nach Satz 20 und b) n_Z nicht grösser als $n_Z(a)$ sein kann, wenn $f_0 \not\equiv a$ ist, wzbw.

Um zur *totalen Ordnung einer Schar* zu gelangen, bilde ich wie in Satz 4 die Summe $n_G = \Sigma\, n_Z m_Z$, wobei n_Z die in Def. 14 festgelegte Belegungszahl von Z in Bezug auf die Funktionsfolge ist.

Dann kann man wörtlich Def. 13 anwenden. Für die so definierte total endliche Ordnung gilt wegen Satz 17 und 21, sowie Satz 4:

c) Für eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar total endlicher Ordnung hat die Grenzfunktion jeder quasiregulären Teilfolge der Schar nur hebbare Singularitäten in $\mathfrak{B}$.

d) Wenn die Blätterzahlen der Flächen $f = a$ und $f = b$ in $\mathfrak{B}$ für alle Funktionen der in $\mathfrak{B}$ quasinormalen Schar Σ eine obere Grenze n besitzen, so ist diese Schar von total endlicher Ordnung $s \leq n$ in $\mathfrak{B}$.

Somit ist die in Satz 18 als quasinormal befundene Schar Σ im Fall C_n (aber nicht notwendig im Fall C_F) auch noch quasinormal von total endlicher Ordnung in $\mathfrak{B}$, ebenso bei Satz 19.

Satz 22: *Ist Σ eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar total endlicher Ordnung s, und ist für diese Schar eine der Bedingungen C_s, D_s aus Satz 10 erfüllt, so hat keine quasireguläre Teilfolge von Σ die Konstante ∞ als Grenzfunktion.*

Zusatz: Der Flächeninhalt der Polstellenfläche in einem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ hat für alle Funktionen der Schar eine obere Grenze $F(\mathfrak{B}^*)$.

Beweis: Der erste Teil des Satzes kann völlig analog wie Satz 10 auf einen klassischen Satz[1] zurückgeführt werden.

Für den Zusatz: Sei θ_1 eine Teilfolge der Schar, für die die Inhalte der Polstellenflächen in $\mathfrak{B}^*$ gegen ∞ konvergieren. Man kann aus θ_1 eine weitere Teilfolge θ_2 auswählen, die irreduzibel ist; die zugeordnete Polstellenflächenfolge

[1] Valiron, Satz XLIV, S. 36.

konvergiert also wegen $f_0 \not\equiv \infty$ gegen die Vereinigungsmenge V_∞ von V_θ mit der Fläche $f_0 = \infty$. Die letztere ist wegen c) singularitätenfrei in $\mathfrak{B}$.

Man kann nun aus θ_2 eine weitere Folge $\theta : f_1, f_2, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften auswählen:

1) Die Folge der Flächen $f_j = \infty$ konvergiert gegen die in $\mathfrak{B}$ singularitätenfreie analytische Fläche V_∞.

2) Die Flächeninhalte der Flächen $f_j = \infty$ in $\mathfrak{B}^*$ konvergieren gegen ∞.

3) Die Folge der $f_j = \infty$ ist im Sinne von Def. 9 reduziert.

4) Sämtliche Zweige von V_∞ haben endliche Belegungszahl in Bezug auf die Folge der Flächen $f_j = \infty$. Für die Zweige von $f_0 = \infty$ folgt dies daraus, dass f_0^+ in $\mathfrak{B}$ meromorph ist, für die Zweige von V_θ dagegen aus der total endlichen Ordnung der Schar Σ.

Aus 1)—4) ergibt sich nun aber ein Widerspruch mit Satz 6, denn es müsste nach Formel (7): $\lim F_j^* = \Sigma\, n_Z F^*(Z)$ endlich sein, wzbw.

---

4. Kap. Anwendungen auf ganze Funktionen.

§ 13. Über den Flächeninhalt einer ganzen Fläche.

Sei V eine ganze Fläche, $F(R)$ sei der Flächeninhalt des in der Hyperkugel K_R (Koordinatennullpunkt als Mittelpunkt, Radius R) liegenden Teils von V. Wir setzen:

$$\Phi(R) = \frac{F(R)}{\pi R^2}. \tag{12}$$

Satz 23: *Wenn $\Phi(F)$ eine für alle R beschränkte Funktion ist, so ist V eine algebraische Fläche.*

Beweis: Eine ganze Fläche kann als Nullstellenfläche einer ganzen Funktion dargestellt werden (d. h. es gilt die Aussage Cousin II für den endlichen R^4).

V sei also die Nullstellenfläche der ganzen Funktion $g(w, z)$. Man betrachtet nun die folgende Funktionsschar:

$$g_R(w, z) = g(Rw, Rz). \tag{13}$$

Die Funktion g_R nimmt in der Einheitshyperkugel dieselben Werte an, wie g in der Hyperkugel K_R. Der Übergang von g zu g_R bedeutet also eine R-fache

Verkleinerung. Somit ist der Flächeninhalt der Fläche $g_R = 0$ in der Einheitshyperkugel offenbar $\pi\,\Phi(R)$.

Nach der in Satz 23 gemachten Voraussetzung haben also die Nullstellenflächen aller Funktionen der Schar (13) beschränkten Flächeninhalt innerhalb der Einheitshyperkugel.

Die Flächenfolge $g_j = 0$ besitzt also nach Satz 2 in der Einheitshyperkugel eine gegen eine singularitätenfreie analytische Fläche V_0 konvergente Teilfolge θ_1, und alle Zweige von V_0 sind nach § 5, d) von endlicher Belegungszahl in Bezug auf θ_1.

Nach Satz 5 (Vgl. auch den Beweis, sowie den Beweis von § 3, b) kann man also die Flächen der Folge θ_1 in einer gewissen Umgebung U des Koordinatennullpunktes als Nullstellenflächen von Pseudopolynomen darstellen, und man kann ferner offenbar die Existenz einer weiteren Teilfolge θ_2 von θ_1 annehmen, deren Flächen V_λ folgende Darstellungen zulassen[1, 2]:

$$f_\lambda(w, z) = w^n + A_1^{(\lambda)}(z)\, w^{n-1} + \cdots + A_n^{(\lambda)}(z) = 0.$$

Die Folgen $A_k^{(\lambda)}(z)$ konvergieren für $\lambda \to \infty$ gleichmässig im Kreis $|z| < \varrho$ gegen die Funktionen $A_k^0(z)$, welche in der entsprechenden Darstellung von V_0 vorkommen.

Auf Grund von (13) stellt nun aber $f_\lambda\left(\frac{w}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\right)$ in einem gewissen Gebiet für alle λ dieselbe Fläche dar, nämlich die gegebene Fläche V. Setzt man dies oben ein und erweitert mit λ^n, so erhält man:

$$w^n + \lambda\, A_1^{(\lambda)}\left(\frac{z}{\lambda}\right) w^{n-1} + \lambda^2 A_2^{(\lambda)}\left(\frac{z}{\lambda}\right) w^{n-2} + \cdots + \lambda^n A_n^{(\lambda)}\left(\frac{z}{\lambda}\right) = 0.$$

Dies kann aber nur dann für alle λ dieselbe Fläche darstellen, wenn für alle λ[2] die folgende Gleichung gilt:

$$A_k^{(\lambda)}\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \lambda^{-k} \cdot A_k(z) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

oder

$$A_k^{(\lambda)}(z) = \lambda^{-k} \cdot A_k(\lambda z). \tag{14}$$

Da die Folgen $A_k^{(\lambda)}(z)$ für $\lambda \to \infty$ konvergieren sollen, folgt, dass $A_k(z)$ auf der rechten Seite der Gleichungen (14) höchstens ein Polynom k-ten Grades sein

[1] Nach einer geeigneten Drehung des Koordinatensystems, wie bei den verwendeten Sätzen.

[2] λ durchläuft nur noch die Indices der Teilfolge θ_2. n ist von λ unabhängig.

darf, somit ist auch die Funktion $f_\lambda(w, z)$ höchstens ein Polynom n-ten Grades, wzbw.

Man kann aus (14) aber auch noch einen andern Schluss ziehen. Nach der zweiten Gleichung in (14) ist $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_k^{(\lambda)}(z)$ offenbar eine reine Potenz von z, nämlich $c_k z^k$, so dass das Pseudopolynom, welches die Fläche V_0 darstellt, ein homogenes Polynom n-ten Grades: $w^n + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k z^k w^{n-k}$ ist.

V_0 besteht also aus n analytischen Ebenen durch den Nullpunkt, und der Flächeninhalt von V_0 in der Einheitshyperkugel ist $n\pi$.

Somit folgt aus Satz 6:

a) Ist V eine algebraische Fläche n-ten Grades, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{R \to \infty} \Phi(R) = n$.

Ist nun $g(w, z)$ eine im ganzen endlichen R^4 meromorphe, transzendente Funktion, und bezeichnet $\Phi_a(R)$ die entsprechend Formel (12) gebildete Funktion für die Fläche $g(w, z) = a$, so gilt:[1, 2]

b) Die Funktion $\Phi_a(R)$ ist nur für die Picard'schen Ausnahmewerte eine für alle R beschränkte Funktion.

Wenn also die Funktionen $\Phi_a(R)$, $\Phi_b(R)$, und $\Phi_c(R)$ für alle R beschränkt sind, so ist die Funktion g rational.

§ 14. Die Julia-Geraden einer ganzen Funktion.

Die Julia-Geraden einer ganzen Funktion m. Var. sind wie in der klassischen Theorie[3] diejenigen vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden h, auf denen sich die Schar (13) nicht durchwegs normal verhält. Jeder Hyperkegel mit h als Achse und dem Koordinatennullpunkt als Spitze, enthält dann in beliebiger Ent-

---

[1] Vgl. THULLEN, Satz 5, S. 157.

[2] Man kann zeigen, dass man mit $\Phi_a(r)$ an Stelle von $n(a, r)$ die ganze Nevanlinna'sche Theorie fast wörtlich auf die Fkt. m. Var. übertragen kann (Vgl. die zitierte Arbeit von H. KNESER). Die Funktion $N(r, a)$ bei Kneser ist nämlich durch $N(R, a) = \int\limits_0^R \frac{\Phi_a(r)}{r} dr$ gegeben, sofern $g(0, 0) \neq a$ ist. Ferner kann man zeigen, dass die Funktion Φ monoton wachsend oder konstant ist.

[3] Vgl. etwa MONTEL, S. 81—85.

fernung vom Nullpunkt noch a-Stellen der Funktion, und zwar, mit höchstens einer Ausnahme a_0, für jedes a.

Die Gesamtheit aller Julia-Geraden wird dadurch erhalten, dass man vom Koordinatennullpunkt P aus Strahlen nach allen irregulären Punkten der Schar (13) zieht.

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Umständen Julia-Geraden auftreten können.

Die Schar (13) kann, wie in der klassischen Theorie, in keiner Umgebung von P normal sein, wenn g nicht konstant ist. Nach § 1, f) ist die Gesamtheit J aller irregulären Punkte der Schar (13) mindestens eine durch P laufende analytische Fläche. Es sind offenbar folgende Fälle möglich:

A) J besteht aus analytischen Ebenen durch P, welche keine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden.

Damit gibt es eine quasireguläre Teilfolge θ, welche nach Satz 7 ausserhalb V_θ (V_θ besteht ebenfalls aus analytischen Ebenen) gleichmässig gegen ∞ konvergiert. Auf jeder analytischen Ebene E durch P, welche nicht zu V_θ gehört, konvergiert also die Folge θ gegen ∞ (ausser in P selbst). Damit ist die Funktion $g(w, z)$ auf E ganz rational, aber nicht konstant.

Da V_θ eine abgeschlossene Menge ist, zeigt sich dasselbe Verhalten auf jeder analytischen Ebene durch P, welche mit E einen hinreichend kleinen Winkel bildet.

In der Umgebung des ∞ fernen Punktes der Ebene E nimmt also $g(w, z)$ nur sehr grosse Funktionswerte an, g ist also dort nicht wesentlich singulär, nach Thullen[1] ist g damit rational.

B) Die irregulären Punkte der Schar (13) bilden eine analytische Fläche V, die nicht nur aus analytischen Ebenen durch P besteht, oder dann mindestens eine analytische Hyperfläche.

Im ersten Fall entsteht durch Projektion der analytischen Fläche J vom Koordinatennullpunkt aus eine analytische Hyperfläche, ebenso im zweiten Fall, oder dann sogar ein 4-dimensionales Gebiet, also:

Satz 24: *Die Gesamtheit der Julia-Geraden einer ganzen Funktion mehrerer Variabeln kann sein:*

Die leere Menge, dann ist g eine Konstante.

---

[1] Vgl. Satz 5, S. 157.

Eine endliche Anzahl analytischer Ebenen durch den Koordinatennullpunkt, dann ist g ein **Polynom.**

Eine analytische Hyperfläche oder ein 4-dimensionales Gebiet, dann ist g **ganz transzendent.**

Es ist offensichtlich, dass diese Menge bei einem Polynom nur aus endlich vielen analytischen Ebenen bestehen kann; man erhält diese nämlich, indem man den Koordinatennullpunkt mit jedem ∞ fernen Punkt der Nullstellenfläche von g verbindet. Auf allen andern Ebenen verhält sich die Schar (13), ausgenommen in P, normal.

§ 15. Julia-Geraden einer meromorphen Funktion.

Sei jetzt $g(w, z)$ eine in jedem endlichen Gebiet meromorphe Funktion. Wir betrachten wieder die Schar (13). Es kann hier ein neuer Fall auftreten:

C) Der Koordinatennullpunkt P ist der einzige irreguläre Punkt der Schar (13).

Ist θ: $g_\lambda(w, z)$ (Vgl. § 13, und Fussnote 2, S. 294) eine quasireguläre Teilfolge aus der Schar (13), so ist P ein ausserwesentlich irregulärer Punkt von θ, und die nicht konstante Grenzfunktion ist in jedem endlichen Bereich meromorph.

Die a-Stellenflächen der g_λ konvergieren in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes gegen die a-Stellenfläche der Grenzfunktion g_0[1], und die Belegungszahlen aller Zweige von $g_0 = a$ in Bezug auf die Flächenfolge $g_\lambda = a$ sind natürlich endlich, nämlich gleich der Ordnung der a-Stellen, aus denen der betreffende Zweig von $g_0 = a$ besteht. (Vgl. § 4.) Man kann also wie in § 13 schliessen, dass $g(w, z) = a$ eine algebraische Fläche ist. Weil dies für jedes a gilt, ist g rational.

Hingegen führt nicht jede rationale Funktion g auf Fall C, wie folgende Betrachtung lehrt:

Sei $g(w, z) = \dfrac{P_m + P_{m-1} + \cdots + P_0}{Q_n + Q_{n-1} + \cdots + Q_0}$, wobei P_k und Q_k homogene Polynome vom Grad k seien. Es ist dann:

$$g_\lambda(w, z) = \lambda^{m-n} \cdot \frac{P_m + \frac{1}{\lambda} P_{m-1} + \cdots + \frac{1}{\lambda^m} P_0}{Q_n + \frac{1}{\lambda} Q_{n-1} + \cdots + \frac{1}{\lambda^n} Q_0}.$$

[1] Vgl. W. Saxer, Beweis von Hilfssatz (2), S. 260/261.

Wenn dies für $\lambda \to \infty$ (Nullpunkt ausgenommen) überall gleichmässig konvergieren soll, so muss einmal $m = n$ sein, weil die Grenzfunktion nicht konstant sein darf. Wenn dann P_m und Q_m teilerfremd sind, so ist die Folge tatsächlich nur im Nullpunkt irregulär, andernfalls ist das gemeinsame Nullgebilde von P_m und Q_m (eine oder mehrere analytische Ebenen) die Irregularitätsfläche der Folge. Also:

a) Eine nicht konstante meromorphe Funktion besitzt genau dann keine Julia-Geraden, wenn sie rational ist, Zähler und Nennerpolynom gleichen Grad haben und die von den höchsten Potenzen des Zählers, bzw. Nenners gebildeten homogenen Polynome teilerfremd sind.

Eine genauere Betrachtung zeigt, dass für alle übrigen rationalen Funktionen genau diejenigen Ebenen durch P aus Julia-Geraden bestehen, deren ∞ ferne Punkte Unbestimmtheitsstellen der Funktion sind.

b) Die irregulären Punkte der Schar (13) bilden analytische Ebenen durch den Koordinatennullpunkt P.

Dieser Fall kann ausser bei rationalen Funktionen auch noch bei gewissen transzendenten Funktionen auftreten. Eine solche Funktion, die also in dieser Hinsicht das Verhalten einer rationalen zeigt, soll wie in der klassischen Theorie eine *J-Ausnahmefunktion* heissen. Wir wollen darauf aber nicht weiter eingehen.

Für alle übrigen transzendenten meromorphen Funktionen besteht die Gesamtheit aller Julia-Geraden aus analytischen Hyperflächen und vierdimensionalen Gebieten.

5. Kap. **Folgen analytischer Abbildungen.**

Zunächst möchte ich darauf hinweisen, dass den folgenden Betrachtungen immer der projektiv erweiterte R^4 zugrunde liegt. Ausserdem soll aber auch der Konvergenzbegriff der projektiven Erweiterung angepasst werden. Dies kann etwa dadurch geschehen, dass man P_0 dann einen Häufungspunkt der Punktfolge P_j nennt, wenn man eine (nicht-entartete!) projektive Abbildung T angeben kann, so dass $T(P_0)$ im gewöhnlichen Sinne Häufungspunkt der Folge $T(P_j)$ ist.

§ 16. **Reguläre Abbildungsfolgen.**

Sei Δ eine Folge meromorpher Abbildungen $S_1, S_2, \ldots$ des Bereiches $\mathfrak{B}$; sie ist durch eine Doppelfolge von Funktionen gegeben, die in $\mathfrak{B}$ meromorph sind:

$$S_j : \omega = f_j(w, z), \ \zeta = g_j(w, z). \tag{15}$$

Man nennt diese Folge an der Stelle $P \in \mathfrak{B}$ konvergent, wenn die Punktfolge $S_j(P)$ konvergiert. Diese gewöhnliche Konvergenz ist hier aber nicht brauchbar, sondern nur die gleichmässige, die mit einem neuen Begriff definiert werden soll:

Def. 15: Die Gesamtheit der Häufungspunkte[1] aller Folgen $S_j(P_j)$ des Bildraums, wobei P_j alle möglichen, gegen P konvergenten Punktfolgen des Originalraums durchläuft, heisst *Grenzschwankungsbild* des Punktes P in Bezug auf die Abbildungsfolge $\mathcal{A}$, und wird mit $\mathcal{A}(P)$ bezeichnet.

Die Vereinigungsmenge aller $\mathcal{A}(P)$, wenn P ganz $\mathfrak{B}$ durchläuft, heisst Grenzbildbereich von $\mathfrak{B}$ in Bezug auf die Folge $\mathcal{A}$, und wird mit $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$ bezeichnet.

$\mathcal{A}(P)$ besteht aus allen Punkten des Bildraums, die für jede Umgebung $U(P)$ Häufungspunkte der Bereichfolge $S_j(U)$ sind. Das Grenzschwankungsbild hat offenbar folgende Invarianzeigenschaft:

a) Wenn man nach jeder Abbildung der Folge $\mathcal{A}$ noch eine feste projektive Abbildung T ausführt, so ist das Grenzschwankungsbild von P in Bezug auf diese neue Folge $T S_j$ offenbar die Menge $T \mathcal{A}(P)$.

Def. 16: Die Folge $\mathcal{A}$ heisst an der Stelle P regulär, wenn $\mathcal{A}(P)$ ein einziger Punkt ist, andernfalls nennt man P einen irregulären Punkt der Folge $\mathcal{A}$.

Die Folge $\mathcal{A}$ heisst im Bereich $\mathfrak{B}$ regulär, wenn sie in $\mathfrak{B}$ keinen irregulären Punkt besitzt.

Ist nun $\mathcal{A}$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Folge meromorpher Abbildungen S_j, so ordne ich jedem Punkt $P \in \mathfrak{B}$ den Punkt $\mathcal{A}(P)$ als Bildpunkt zu. Die so erhaltene Zuordnung $P \rightarrow \mathcal{A}(P)$ nenne ich die Grenzabbildung S_0 der Folge $\mathcal{A}$. Hierüber gilt:

Satz 25: *Die Grenzabbildung S_0 einer regulären Folge meromorpher Abbildungen S_0 ist wieder eine meromorphe Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$, und zwar ist $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$ ein Bereich, oder ein analytisches Flächenstück, oder ein Punkt.*

Beweis: Ich betrachte die Umgebung eines festen Punktes P. Gemäss a) kann man annehmen, $\mathcal{A}(P)$ sei der Koordinatennullpunkt, andernfalls könnte man dies durch eine geeignete projektive Transformation erreichen.

Die Folge S_j sei gemäss (15) durch 2 Funktionsfolgen f_j und g_j gegeben. Nimmt man an, die Folge f_j sei an der Stelle P irregulär, so gäbe es eine Punkt-

---

[1] Im projektiv erweiterten R^4!

folge $P_j \to P$, so dass $f_j(P_j)$ ausser $\omega = 0$ noch mindestens einen weitern Häufungspunkt hätte. Dann wäre aber auch $\varDelta(P)$ nicht nur der Nullpunkt. Damit sind beide Folgen f_j und g_j an der Stelle P regulär. Ihre Grenzfunktionen sind an der Stelle P meromorph, und bestimmen die Grenzabbildung. Diese ist somit meromorph an der Stelle P (mit unserer Annahme sogar analytisch, und die f_j und g_j sind von einem gewissen j an ebenfalls analytisch in $U(P)$).

Die Funktionalmatrix $H(P) = \begin{pmatrix} f_{0w} & g_{0w} \\ f_{0z} & g_{0z} \end{pmatrix}$ der Grenzabbildung erhält man durch Grenzübergang aus den Funktionalmatrizen der S_j, jedenfalls sind die Elemente von H in einer gewissen Umgebung von P analytische Funktionen.

Der Rang von H ist bekanntlich (von isolierten Punkten, in welchen er kleiner ist, abgesehen) konstant. Der Rang ist also fast überall 2, dann ist $\varDelta(U)$ ein Bereich; oder fast immer 1, dann besteht zwischen f und g eine Relation, so dass $\varDelta(U)$ ein analytisches Flächenstück ist; oder immer 0, dann sind f_0 und g_0 konstant.

Diese Eigenschaften setzen sich über den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ meromorph fort, sie gelten also nicht nur für $U(P)$, sondern für den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$, wzbw.

Im Fall, dass $\varDelta(\mathfrak{B})$ ein analytisches Flächenstück ist, nennen wir die Grenzabbildung einfach entartet, ist dagegen $\varDelta(\mathfrak{B})$ nur ein Punkt, dann heisst die Grenzabbildung doppelt entartet.

Satz 26: *Besteht die in $\mathfrak{B}$ reguläre Folge $\varDelta$ aus analytischen Abbildungen, so ist die Grenzabbildung entweder wieder eine analytische Abbildung, oder der Grenzbildbereich ist ein Teil der ∞ fernen Ebene.*

Beweis: Nach Satz 25 ist die Grenzabbildung jedenfalls meromorph. Sei P ein Punkt, für den $S_0(P)$ ein ∞ ferner Punkt ist. Wir führen eine projektive Transformation T aus, die den Punkt $S_0(P)$ in den Koordinatennullpunkt und die ∞ ferne Ebene in die Ebene $\zeta = 0$ überführt.

Die Folge TS_j besteht dann aus meromorphen Abbildungen, für die die Funktionen g_j [Vgl. (15)] keine Nullstellen besitzen. Da aber trotzdem $\lim g_j(P) = 0$ sein muss, folgt nach einem bekannten Satz von Hurwitz, dass die Grenzfunktion der Folge g_j identisch verschwinden muss. Die Abbildungen TS_j haben also einen Teil der Ebene $\zeta = 0$ als Grenzbildbereich, wzbw.

Wir wollen nun den Fall näher betrachten, wo der Grenzbildbereich einer regulären Folge $\varDelta$ ein Teil der ∞ fernen Ebene ist. Da ein Punkt auf dieser durch das Koordinatenverhältnis $\frac{\omega}{\zeta}$ bestimmt ist, betrachten wir neben f_j und g_j noch die Funktionsfolge

$$h_j(w, z) = \frac{f_j(w, z)}{g_j(w, z)}. \tag{16}$$

b) Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Folge h_j regulär im Bereich $\mathfrak{B}$, und die Grenzfunktion h_0 bestimmt die Grenzabbildung: $S_0(P)$ ist der ∞ ferne Punkt der analytischen Ebene $\frac{\omega}{\zeta} = h_0(P)$.

Beweis: Für einen irregulären Punkt P der Folge h_j existiert offenbar eine Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, \to P$, so dass die Folge $h_j(P_j)$ wenigstens 2 Häufungswerte hat, z. B. a und b.

Dann würde aber $\varDelta(P)$ nach Def. 15 die ∞ fernen Punkte der beiden Ebenen $\frac{\omega}{\zeta} = a$ und $\frac{\omega}{\zeta} = b$ enthalten, was nach Def. 16 der Voraussetzung widerspricht, wzbw.

§ 17. Irreguläre Punkte einer Abbildungsfolge.

Es soll nun untersucht werden, in welchen Punkten eine gemäss (15) durch 2 Funktionsfolgen gegebene Abbildungsfolge $\varDelta$ regulär ist. Es wird sich zeigen, dass das Verhalten der Folge $\varDelta$ in komplizierter Weise vom Konvergenzverhalten der Funktionsfolgen f_j und g_j abhängt, ausserdem muss in gewissen Fällen die Folge h_j herangezogen werden.

In der nun folgenden Aufstellung bedeuten f_0, g_0, h_0 die Werte der Grenzfunktionen der Folgen f_j, g_j, h_j an der Stelle P, sofern diese Folgen dort regulär sind. a und b sind endliche komplexe Zahlen, c kann auch ∞ sein.

Die beschriebenen Eigenschaften der Folgen beziehen sich immer auf eine gewisse Umgebung der Stelle P.

Ich möchte an dieser Stelle darauf hinweisen, dass das Konvergenzverhalten einer Folge meromorpher Abbildungen nach § 16, a) gegenüber einer festen projektiven Transformation T invariant ist.

A) $\left.\begin{array}{l} f_0 = a \\ g_0 = b \end{array}\right\}$ $\varDelta$ regulär, $\varDelta(P) =$ Punkt (a, b).

B) $\left.\begin{array}{l} f_0 = a \\ g_0 = \infty \end{array}\right\}$ $\varDelta$ regulär, $\varDelta(P) =$ Punkt $(0, \infty)$.

C) $\left.\begin{array}{l} f_0 = \infty \\ g_0 = \infty \\ h_0 = c \end{array}\right\}$ $\varDelta$ regulär, $\varDelta(P) = \infty$ ferner Punkt der Ebene $\omega = c\zeta$.

D) $\left.\begin{array}{l} f_0 = \infty \\ g_0 = \infty \\ h_j \text{ irreg.} \end{array}\right\}$ $\varDelta$ irregulär, $\varDelta(P) = \infty$ ferne Ebene.

E) $\left.\begin{array}{l} f_0 = a \\ g_j \text{ irreg.} \end{array}\right\}$ $\varDelta$ irregulär, $\varDelta(P) =$ Ebene $\omega = a$.

F) $\left.\begin{array}{l} f_0 = \infty \\ g_j \text{ irreg.} \\ h_0 = c \end{array}\right\}$ $\varDelta$ regulär, $\varDelta(P) =$ Punkt $(\infty, 0)$.

Im Fall F) ist notwendig $c = \infty$, andernfalls wäre ja die Folge $g_j = \frac{f_j}{h_j}$ in der Umgebung von P ebenfalls regulär [mit $g_0(P) = \infty$].

G) $\left.\begin{array}{l} f_0 = \infty \\ g_j \text{ irreg.} \\ h_j \text{ irreg.} \end{array}\right\}$ $\varDelta$ irregulär, $\varDelta(P) = \infty$ ferne Ebene.

H) $\left.\begin{array}{l} f_j \text{ irreg.} \\ g_j \text{ irreg.} \end{array}\right\}$ $\varDelta$ irregulär, denn $\varDelta(P)$ hat mit mindestens zwei der Ebenen $\omega =$ const., ebenso mit mindestens zwei der Ebenen $\zeta =$ const., je einen gemeinsamen Punkt. Da nicht alle diese 4 Ebenen durch einen Punkt laufen, kann $\varDelta(P)$ nicht nur ein Punkt sein.

Nach dieser Tabelle ist offenbar jeder Punkt, in dem 2 der 3 Folgen f_j, g_j, h_j irregulär sind, auch ein irregulärer Punkt der Abbildungsfolge $\varDelta$.

Wenn also J_f, J_g, J_h und J die Mengen aller irregulären Punkte der Folgen f_j, g_j, h_j und $\varDelta$ bezeichnen, so umfasst J mindestens die Schnittgebilde

$$J_f \times J_g, \quad J_g \times J_h, \quad J_h \times J_f.$$

Es scheint zunächst, dass die Gesamtheit J auch eine Kurve oder eine nichtanalytische Fläche enthalten könne (Schnitt einer analytischen Hyperfläche J_f mit einer analytischen Fläche, bzw. analytischen Hyperfläche J_g). Wir wollen zeigen, dass dies nicht möglich ist.

Sei P eine irreguläre Stelle der Folge $\varDelta$, welche Fall D) entspricht. Indem man die projektive Transformation

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{g_j}, \quad \hat{\zeta} = \frac{\omega}{\zeta} = h_j \tag{17}$$

ausführt, was nach § 16, a) die Menge J nicht verändert, ist dieser Fall auf Fall E) zurückgeführt, denn $\hat{f}_j$ ist regulär mit endlicher Grenzfunktion, $\hat{g}_j$ ist irregulär an der Stelle P.

Dasselbe findet man, wenn der Punkt P dem Fall G) entspricht, man kommt dann mit der Transformation (18) wieder auf Fall E):

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{f_j}, \quad \hat{\zeta} = \frac{\zeta}{\omega} = \frac{1}{h_j}. \tag{18}$$

Der Fall E) kann aber keine andern Irregularitätenmannigfaltigkeiten liefern, als eine Folge meromorpher Funktionen.

Es bleibt demnach nur noch Fall H) zu behandeln.

P sei Schnittpunkt der Mannigfaltigkeiten J_f und J_g. Wenn J_g in der Umgebung von P eine Teilmenge von J_f ist, so besteht natürlich kein Problem. Andernfalls:

α) J_f und J_g sind 2 analytische Flächen, die sich in P schneiden, in diesem Fall kann P ein isolierter irregulärer Punkt der Folge $\varDelta$ sein.

β) J_f sei (in der Umgebung von P) eine analytische Fläche, J_g eine analytische Hyperfläche, c ihre durch P laufende Schnittkurve.

Wenn J_f oder J_g zu J gehört, ist offenbar nichts zu beweisen. Wenn aber $\varDelta$ auf J_f (c ausgenommen) regulär sein soll, so muss auf J_f Fall F) eintreten).[1] g_0 muss dann J_f als Polstellenfläche haben, ferner ist J_f Nullstellenfläche von h_0.

Wenn ausserdem $\varDelta$ auch auf J_g (c ausgenommen) regulär ist, so muss in jedem Punkt von J_g Fall F) eintreten. Es ist also $f_0 = \infty$ auf J_g, ebenso $h_0 = \infty$, dies bedeutet aber $f_0 \equiv \infty$ und $h_0 \equiv \infty$ in einer vollen Umgebung jedes Punktes von J_g (c ausgenommen).

P ist also Randpunkt eines vierdimensionalen Gebiets, in welchem $h_0 \equiv \infty$ ist, denn mindestens auf J_f ist ja $h_0 \neq \infty$. Auf dem ganzen Rand dieses Gebiets ist aber die Folge h_j, und damit auch die Folge $\varDelta$, irregulär (Man hat dort Fall D oder G). Somit ist J im Fall β) entweder eine analytische Fläche (J_f), oder dann mindestens eine analytische Hyperfläche, ev. ein 4-dimensionales Gebiet.

[1] Wobei aber f und g vertauscht sind.

γ) J_f und J_g sind in einer gewissen Umgebung von P je eine analytische Hyperfläche. A sei ihre durch P laufende Schnittfläche, welche im Allgemeinen nicht analytisch ist.

Man schliesst genau wie unter β): Wenn $\mathcal{A}$ auf J_f und J_g (A ausgenommen) regulär sein soll, so folgt für die nicht auf A liegenden Punkte von $J_f: g_0 = \infty$, $h_0 = 0$, ebenso auf J_g:

$f_0 = \infty$, $h_0 = \infty$. Also folgt $h_0 \equiv \infty$ in einer vollen Umgebung jedes Punktes von J_g, desgleichen $h_0 \equiv 0$ für J_f, wobei die Punkte von A natürlich ausgenommen sind. P liegt auf der Grenze der beiden Gebiete mit $h_0 \equiv 0$ und $h_0 \equiv \infty$. Randpunkte des Gebiets $h_0 \equiv \infty$ sind aber wegen $f_0 \equiv \infty$ nach Fall D) oder G) irreguläre Punkte von $\mathcal{A}$. Somit ist auch in diesem Fall J mindestens eine analytische Hyperfläche.

δ) Denselben Widerspruch erhält man, wenn eine der beiden Mengen J_f und J_g ein vierdimensionales Gebiet ist, auf dessen Rand P liegt. Man kann also behaupten:

a) J besteht aus Punkten, analytischen Flächen, analytischen Hyperflächen und vierdimensionalen Gebieten mit pseudokonvexer Berandung.

Damit ist aber der bei Funktionsfolgen ausgeschlossene, nachstehend erwähnte Fall bei Abbildungsfolgen noch möglich:

> J enthält eine Folge von Punkten, ohne dass die Häufungspunkte dieser Folge auf einer Irregularitätenmannigfaltigkeit der Abbildungsfolge liegen.

Wir wollen zeigen, dass dieser Fall auch bei Abbildungsfolgen ausgeschlossen ist, und wenden uns deshalb der Betrachtung von isolierten irregulären Punkten zu.

§ 18. Isolierte Irregularitäten.

Das Beispiel $\omega = jw$, $\zeta = jz$ zeigt, dass auch bei Folgen *analytischer* Abbildungen isolierte irreguläre Punkte auftreten können, was ja bei Funktionsfolgen nur dann möglich ist, wenn die Funktionen der Folge meromorph sind.

Für eine Abbildungsfolge gilt nun:

a) Wenn die Folge $\mathcal{A}$ in P eine isolierte Irregularität besitzt, so ist jede der 3 Folgen f_j, g_j, h_j in einer gewissen Umgebung von P entweder quasiregulär oder regulär.

Beweis: Zunächst ist ja klar, dass für höchstens eine der 3 Folgen, z. B. für g_j,[1] die Menge J_g in der Umgebung von P mehr als 2-dimensional sein kann. In diesem Fall dürfen dann f_j und h_j an der Stelle P nur noch ausserwesentlich irregulär sein.

Auf J_g darf dann aber nicht Fall E) eintreten, also muss auf J_g in einer gewissen Umgebung von P $f_0 = \infty$ sein. Daraus folgt bekanntlich $f_0 \equiv \infty$, was nach W. Saxer in der Umgebung einer ausserwesentlich irregulären Stelle unmöglich ist. Die Folge f_j ist also an der Stelle P regulär.

Dasselbe kann man für die Folge h_j schliessen, diese Folge ist also in P ebenfalls regulär, damit nach Fall F) auch die Abbildungsfolge $\varDelta$, wzbw.

Satz 27: *Wenn P eine isolierte irreguläre Stelle der Folge $\varDelta$ ist, so hat wenigstens eine der 3 Grenzfunktionen f_0^+, g_0^+, h_0^+ eine Unbestimmtheitsstelle in P.*

Beweis: Die Grenzabbildung S_0 ist nach Satz 25 in einer gewissen Umgebung von P, P selbst ausgenommen, meromorph. Dasselbe gilt damit auch für die 3 Grenzfunktionen f_0^+, g_0^+, h_0^+.[2]

Wenn Satz 27 nicht zutrifft, so haben alle 3 Grenzfunktionen in P wohlbestimmte Werte.

α) $f_0^+(P)$ und $g_0^+(P)$ sind endlich. Dann müssen die beiden Folgen f_j und g_j an der Stelle P regulär sein, sonst hätte man ja Fall E) oder H) auf den durch P laufenden Flächen J_f und J_g. Wenn aber f_j und g_j in P regulär sind, so hat man Fall A), $\varDelta$ wäre also in P regulär.

β) $f_0^+(P) = \infty$, $g_0^+(P)$ endlich. Die Transformation (18), welche nach § 16, a) die Konvergenzverhältnisse nicht verändert, führt diesen Fall auf Fall α) zurück.

γ) $f_0^+(P) = g_0^+(P) = \infty$, aber keine der beiden Funktionen sei konstant. Wenn h_0^+ in P keine Unbestimmtheitsstelle hat, so ist entweder h_0^+ oder $\dfrac{1}{h_0^+}$ in einer gewissen Umgebung von P analytisch (Quotient zweier nicht-konstanter Funktionen).

Je nachdem führt dann die Transformation (17), bzw. (18) auf Fall α) zurück.

---

[1] Es ist gleichgültig welche, denn die 3 Folgen f_j, g_j, h_j sind im projektiv abgeschlossenen Raum völlig gleichberechtigt, wie auch die Transformationen (17) und (18) zeigen.

[2] Es sind alle 3 höchstens hebbar singulär in P, ausgenommen ev. in dem Fall, wo 2 der 3 Grenzfunktionen $\equiv 0$ sind.

δ) $f_0^+ \equiv \infty$, dann darf die Folge h_j ohnehin nur in P irregulär sein, denn jeder Punkt von J_h ist dann gemäss Fall D) oder G) auch irregulärer Punkt von $\mathit{\Delta}$, also hat dann h_0 in P eine Unbestimmtheitsstelle, wzbw.

Satz 28: *Die Gesamtheit aller irregulären Punkte einer Folge analytischer oder meromorpher Abbildungen hat dieselben Eigenschaften wie die Menge aller irregulären Punkte einer Folge meromorpher Funktionen.*

Beweis: Wegen § 17, a) muss man nur noch beweisen, dass ein Häufungspunkt von isolierten Irregularitäten der Folge $\mathit{\Delta}$ auf einer Irregularitätenmannigfaltigkeit liegen muss, denn genau dasselbe tritt bei Folgen meromorpher Funktionen auch ein.

Nach Satz 25 genügt es offenbar, wenn man zeigt, dass die Grenzabbildung in einem Häufungspunkt isolierter Irregularitäten der Folge nicht mehr meromorph sein kann, denn die wesentlichen Singularitäten der Grenzabbildung bilden ja eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Nach Satz 27 ist ein Häufungspunkt von isolierten Irregularitäten von $\mathit{\Delta}$ eine wesentlich singuläre Stelle für mindestens eine der 3 Grenzfunktionen, z. B. für h_0. Das wäre aber bei meromorpher Grenzabbildung nur in den Fällen $f_0^+ \equiv g_0^+ \equiv 0$, sowie $f_0^+ \equiv g_0^+ \equiv \infty$ möglich. Aber auch die zweite dieser beiden Möglichkeiten fällt wegen § 16, b) dahin, und der Fall $f_0^+ \equiv g_0^+ \equiv 0$ lässt gemäss Beweis von Satz 27, Fall α) gar keine isolierten irregulären Punkte der Folge $\mathit{\Delta}$ zu, wzbw.

Von besonderem Interesse sind die isolierten irregulären Punkte einer Folge *analytischer* Abbildungen, hierüber gilt:

b) Treten bei einer Folge $\mathit{\Delta}$ analytischer Abbildungen des Bereiches $\mathfrak{B}$ isolierte Irregularitäten auf, so ist der Grenzbildbereich von $\mathfrak{B}$ (nach Ausschluss der irregulären Punkte von $\mathit{\Delta}$) die ∞ ferne Ebene.

Beweis: Nach Satz 26 bestünde nur noch die Möglichkeit, dass die Grenzabbildung wieder eine analytische Abbildung wäre. Dann wären aber die die Abbildungen S_j bestimmenden Funktionen f_j und g_j auf einer Hyperkugelfläche um die isolierte Irregularität P beschränkt und konvergent, also auch im Innern. P wäre dann also kein irregulärer Punkt von $\mathit{\Delta}$, wzbw.

Satz 29: *Ist P eine isolierte irreguläre Stelle einer Folge $\varDelta$ analytischer Abbildungen, so ist $\varDelta(P)$ der ganze Bildraum (d. h. der abgeschlossene ω, ζ-Raum).*

Beweis: Nach Satz 27 muss die Folge h_j an der Stelle P ausserwesentlich irregulär sein, weil f_j und g_j es nicht sein können. Demnach ist P Häufungspunkt von Null- und Polstellen der h_j, d. h. von Nullstellen der Funktionen f_j und g_j.

Von den Fällen D, E, G, H, welche irreguläre Punkte der Folge $\varDelta$ liefern können, sind also D und G ausgeschlossen, weil in diesen Fällen P nicht Häufungspunkt der Flächen $f_j = 0$ ist. E) fällt ebenfalls weg, weil dann der irreguläre Punkt P nicht isoliert wäre, es bleibt also H).

Aber auch in diesem Fall können J_f und J_g nur 2 analytische Flächen mit dem isolierten Schnittpunkt P sein. Die Folgen f_j und g_j sind also in $U(P)$ quasiregulär, und es ist $f_0^+ \equiv g_0^+ \equiv \infty$.

Ich betrachte nun (a und b seien 2 beliebige komplexe Konstanten) die Funktionsfolge:

$$k_j = \frac{f_j - a}{g_j - b} = h_j \frac{1 - \frac{a}{f_j}}{1 - \frac{b}{g_j}} = h_j \frac{1}{1 - \frac{b}{g_j}} - \frac{a}{g_j - b}. \tag{19}$$

Diese Folge ist offenbar mindestens überall dort regulär, wo f_j und g_j regulär sind und gegen ∞ konvergieren, und die Grenzfunktion stimmt in diesen Punkten mit h_0 überein.

Das letzte Glied der Identität (19) zeigt aber, dass sich die Folge k_j auch noch auf der Fläche J_f regulär verhält, soweit diese nicht von J_g geschnitten wird; denn ausserhalb J_g konvergiert ja g_j gleichmässig gegen ∞. Dasselbe gilt aber auch für alle Punkte von J_g, die nicht zugleich auf J_f liegen, so dass die Folge k_j schliesslich nur noch in den gemeinsamen Punkten von J_f und J_g irregulär ist.

P ist also eine ausserwesentlich irreguläre Stelle der Folge k_j und somit Häufungspunkt von Unbestimmtheitsstellen der Funktionen k_j.[1] Das bedeutet aber nach (19), dass P Häufungspunkt einer Punktfolge P_j ist, wobei $f_j(P_j) = a$ und $g_j(P_j) = b$ ist. Nach Def. 15 gehört also der Punkt (a, b) zu $\varDelta(P)$.

---

[1] Vgl. W. Saxer, Hilfssatz (2), S. 260/261.

Jeder endliche Punkt gehört also zu $\Lambda(P)$, da ausserdem $\Lambda(P)$ eine abgeschlossene Punktmenge ist, gehört auch die ∞ ferne Ebene zu $\Lambda(P)$, wzbw.

Aus diesem Satz folgt z. B., dass eine Folge analytischer Abbildungen eines Bereiches $\mathfrak{B}$ keine isolierten irregulären Punkte haben kann, wenn die Bildbereiche $S_j(\mathfrak{B})$ einem festen Punkt des Bildraumes nicht beliebig nahe kommen.

§ 19. Quasireguläre Abbildungsfolgen.

Def. 17: Eine Folge Λ meromorpher Abbildungen heisst im Bereich $\mathfrak{B}$ quasiregulär, wenn die in $\mathfrak{B}$ liegenden irregulären Punkte der Folge höchstens analytische Flächen bilden.

Die Gesamtheit aller in $\mathfrak{B}$ liegenden irregulären Punkte der Folge Λ wird also aus einer analytischen Fläche V_Λ (Def. 1), sowie aus isolierten Punkten X_Λ bestehen. Die X_Λ können sich allerdings auf V_Λ häufen. Es gilt nun:

Satz 30: *Ist Λ eine in $\mathfrak{B}$ quasireguläre Folge analytischer Abbildungen, und $\mathfrak{B}'$ der um V_Λ und die X_Λ verminderte Bereich $\mathfrak{B}$, so ist $\Lambda(\mathfrak{B}')$ ein Teil der ∞ fernen Ebene.*

Beweis: Wäre der Satz falsch, so wäre $\Lambda(\mathfrak{B}')$ nach Satz 26 ein endlicher Bereich, die durch die Abbildungen S_j erzeugten Folgen f_j und g_j wären in $\mathfrak{B}'$ regulär, und zwar mit endlichen Grenzfunktionen. Damit müssten diese Folgen nach Satz 7 aber sogar in ganz $\mathfrak{B}$ regulär sein (mit endlichen Grenzfunktionen), nach Fall A) wäre dann auch S_j in ganz $\mathfrak{B}$ regulär, wzbw.

Es soll noch an 2 Beispielen gezeigt werden, dass die Quasiregularität der Funktionsfolgen f_j und g_j für die Quasiregularität der Abbildungsfolge S_j weder notwendig noch hinreichend ist.

1) $$S_j: f_j = \frac{(j^2)!}{w}, \quad g_j = \frac{\sigma(jz)}{w^2},$$

wobei σ die zu den Perioden i und 1 gehörige Sigmafunktion sei. Die Folge g_j ist in keinem auch noch so kleinen Bereich regulär, S_j ist aber dennoch quasiregulär. V_Λ ist die Ebene $w = 0$.

2) $$S_j: f_j = \frac{(j^2)!\, w^2}{\sigma(jw)}, \quad g_j = (j^2)!\, z.$$

Beide Funktionsfolgen sind quasiregulär, Irregularitätsflächen sind die Ebenen $w=0$, bzw. $z=0$. Die Abbildungsfolge ist aber nirgends regulär, für jeden Punkt $P \neq (0, 0)$ ist $A(P)$ die ∞ ferne Ebene. Für den Koordinatennullpunkt ist $A(P)$ der ganze Raum. Man kann aber beweisen:

Satz 31: *Ist A eine quasireguläre Folge meromorpher Abbildungen, so kann höchstens eine der 3 zugeordneten Folgen f_j, g_j, h_j eine mehr als 2-dimensionale Irregularitätenmannigfaltigkeit besitzen, und zwar ist dann die Grenzabbildung zweifach entartet.*

Man kann sogar eine genauere Aussage machen ($\mathfrak{B}'$ sei wieder der um V_A und die X_A verminderte Bereich $\mathfrak{B}$):

Zusatz: $A(\mathfrak{B}')$ ist der Punkt $(0, 0)$, bzw. $(\infty, 0)$, bzw. $(0, \infty)$, je nachdem die Folge h_j, bzw. g_j, bzw. f_j eine mehr als 2-dimensionale Irregularitätenmannigfaltigkeit besitzt.

Beweis: Sei P eine irreguläre Stelle der Abbildungsfolge A. Die Folge g_j habe in der Umgebung dieser Stelle eine mindestens 3-dimensionale Irregularitätenmannigfaltigkeit J_g. Damit aber A dennoch quasiregulär sein kann, muss die Folge f_j in allen in einer gewissen Umgebung von P liegenden Punkten (ausgenommen höchstens eine analytische Fläche) von J_g regulär sein und gegen ∞ konvergieren (Fall F). Ausserdem muss dann in diesen Punkten auch noch die Folge h_j regulär sein und gegen ∞ konvergieren. Das bedeutet aber $f_0 \equiv h_0 \equiv \infty$, weil J_g dreidimensional ist, und zwar gilt dies vermöge analytischer Fortsetzung für den ganzen Bereich $\mathfrak{B}'$.

Der Grenzbildbereich von $\mathfrak{B}'$ ist also der Punkt $(\infty, 0)$. Sollte hingegen J_h dreidimensional sein, so führt die Transformation (17) auf den obigen Fall zurück, dem Punkt $(\infty, 0)$ entspricht dabei der Punkt $(0, 0)$. Ist J_f dreidimensional, so braucht man nur die beiden Koordinaten zu vertauschen, der Grenzbildbereich ist in diesem Fall also der Punkt $(0, \infty)$. Da nicht zwei der 3 Fälle zugleich eintreten können, müssen mindestens 2 der 3 Mengen J_f, J_g, J_h höchstens 2-dimensional sein, wzbw.

Def. 18: Die Folge A heisst an der Stelle P irreduzibel, wenn es keine Teilfolge $A_1 < A$ gibt, so dass $A_1(P)$ eine echte Teilmenge von $A(P)$ ist.

A heisst irreduzibel in $\mathfrak{B}$, wenn A in jedem Punkt von $\mathfrak{B}$ irreduzibel ist.

Diese Definition umfasst offenbar den entsprechenden Begriff (Def. 11) bei Funktionsfolgen.

Man kann sich fragen, ob eine Folge A überhaupt eine im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ irreduzible Teilfolge besitzt, tatsächlich folgt dies aus nachstehender Betrachtung:

Wir ordnen jedem Punkt (w, z) des Originalraums ein Exemplar des Bildraums zu, und erhalten so einen R^8 als topologisches Produkt von Original- und Bildraum.[1]

Jeder meromorphen Abbildung S des Bereiches $\mathfrak{B}$ entspricht so eine 4-dimensionale, analytische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ mit der Parameterdarstellung: $(w, z, \omega, \zeta) = [w, z, f(w, z), g(w, z)]$, und jeder Abbildungsfolge S_j entspricht eine Folge $\mathfrak{S}_j$ solcher Mannigfaltigkeiten im R^8.

Ordnet man ferner jedem Punkt P das in dem P zugeordneten Bildraumexemplar liegende Grenzschwankungsbild $A(P)$ zu, so entsteht eine Punktmenge $\mathfrak{G}$ des R^8. Man überlegt sich mit Def. 15 leicht, dass $\mathfrak{G}$ mit der Gesamtheit aller Häufungspunkte der Mengenfolge $\mathfrak{S}_j$ übereinstimmt. Auf diese Mengenfolge kann man aber den Auswahlsatz der Mengenlehre anwenden[2], also:

a) Jede Folge analytischer Abbildungen besitzt eine gemäss Def. 18 in ganz $\mathfrak{B}$ irreduzible Teilfolge.

Sei nun A eine irreduzible, quasireguläre Folge meromorpher Abbildungen des Bereiches $\mathfrak{B}$. E sei eine beliebige, aber feste analytische Ebene des Bildraums, und $V_j = S_j^{-1}(E)$ das Urbild der Ebene E vermöge der Abbildung S_j. Dann gilt:

Satz 32: *Jeder irreguläre Punkt der Folge A ist Häufungspunkt der Flächenfolge $V_j = S_j^{-1}(E)$, ausgenommen in dem Fall, wo der Bildbereich $A(\mathfrak{B}')$ der Grenzabbildung eine Teilmenge von E ist.*

Beweis: Die Ebene E_0 sei eine solche Ausnahmeebene, d. h. der irreguläre Punkt P der Folge A sei nicht Häufungspunkt der Flächenfolge $S_j^{-1}(E_0)$.

Man kann natürlich wegen § 16, a) wieder annehmen, E_0 sei die ∞ ferne Ebene. Das bedeutet aber, dass die Abbildungen S_j in einer gewissen Umgebung $U(P)$, und von einem gewissen j an, analytisch sind. Nach Satz 30 ist also der Bildbereich $A(\mathfrak{B}')$ der Grenzabbildung ein Teil der ∞ fernen Ebene, im allgemeinen Fall also ein Teil von E_0, wzbw.

---

[1] Die beiden Räume sollen jeder für sich projektiv abgeschlossen werden.

[2] Vgl. Fussnote 1, S. 261.

Die ausserhalb V_A und X_A liegenden Häufungspunkte der Flächenfolge $V_j = S_j^{-1}(E)$ können nach dem bekannten Satz von Hurwitz über Konvergenz der Nullstellen einer gleichmässig konvergenten Folge analytischer (oder meromorpher) Funktionen behandelt werden:

Dazu nehmen wir an, E sei die Ebene $\omega = 0$, V_j ist dann die Flächenfolge $f_j = 0$, und die Voraussetzung von Satz 32 sagt aus, dass die Grenzfunktion $f_0 = \lim f_j$ nicht identisch verschwindet. Also gilt für $E \neq E_0$:

b) Die übrigen Häufungspunkte der Flächenfolge $V_j = S_j^{-1}(E)$ bilden die analytische Fläche $V_0 = S_0^{-1}(E)$,[1] wobei S_0 die ausserhalb V_A und X_A meromorphe Grenzabbildung ist.

Hierzu kann noch bemerkt werden, dass die Punkte X_A natürlich keine wesentlichen Singularitäten der Grenzabbildung sein können, ebenso keine wesentlichen Randpunkte der Fläche $S_0^{-1}(E)$.

Da isolierte Häufungspunkte einer Flächenfolge nach § 1, h) unmöglich sind, müssen die Punkte X_A also notwendig auf $S_0^{-1}(E)$ liegen, wenn E nicht eine Ausnahmeebene E_0 ist (Vgl. Satz 32). Es gilt also weiter:

c) Ist U' eine beliebige, um X verminderte Umgebung einer isolierten irregulären Stelle X einer Folge A meromorpher Abbildungen, so wird $S_0(U')$ von jeder analytischen Ebene des Bildraums geschnitten.

Entweder ist nämlich $S_0(U')$ eine Teilmenge von E, oder dann liegt X auf der Mannigfaltigkeit $S_0^{-1}(E)$, d. h. es gibt dann in beliebiger Nähe von X Punkte P, für die $S_0(P)$ auf E liegt.

Schliesslich folgt aus der Tatsache, dass ein Punkt nicht auf allen analytischen Bildraumebenen zugleich liegen kann:

d) Wenn die Grenzabbildung doppelt entartet ist, können keine isolierten irregulären Punkte auftreten.

§ 20. **Belegungszahl bei Abbildungsfolgen.**

Wie schon erwähnt, verhält sich die Grenzabbildung einer quasiregulären Folge meromorpher Abbildungen in der Umgebung einer isolierten Irregularität meromorph, da ja die wesentlichen Singularitäten einer meromorphen Funktion nicht isoliert auftreten können.

---

[1] Dabei kann S_0 entartet sein, $S_0^{-1}(E)$ bedeutet dann die Menge der Punkte P, für die $S_0(P)$ auf E liegt.

Unter gewissen Umständen verhält sich die Grenzabbildung S_0 auch in der Nähe der Irregularitätsfläche V_Λ meromorph, d. h. man kann die (auf V_Λ zunächst nicht definierte) Grenzabbildung über gewisse Zweige von V_Λ hinweg meromorph fortsetzen. Die so erweiterte Grenzabbildung soll S_0^+ genannt werden.

Für den nun folgenden Satz wollen wir dieselbe Anordnung treffen, wie für den analogen Satz 17 bei Funktionsfolgen.[1]

Ferner seien E_1 und E_2 2 feste analytische Ebenen des Bildraums, V_{1j} und V_{2j}[2] seien ihre Urbilder vermöge der Abbildung S_j der quasiregulären Folge Λ. Dann gilt:

Satz 33: *Wenn alle Flächen V_{1j} und V_{2j} von jedem der Kreise $T_z(|z| \leq \varrho)$ in höchstens je n Punkten*[3] *geschnitten werden, so verhält sich die Grenzabbildung der Folge S_j an der Stelle P meromorph und kann längs allen durch P laufenden Zweigen von V_Λ meromorph fortgesetzt werden.*

Beweis: Man hat nach § 16, a) die Möglichkeit, die beiden Ebenen E_1 und E_2 durch geeignete projektive Transformation in die beiden Koordinatenebenen $\omega = 0$ und $\zeta = 0$ zu überführen, ohne die Konvergenzverhältnisse zu ändern.

Die Nullstellen der Funktionen f_j, g_j, h_j, erfüllen dann die Voraussetzungen von Satz 17, sofern diese 3 Folgen überhaupt quasiregulär sind. f_j kann nämlich nur auf V_{1j}, g_j nur auf V_{2j}, und h_j nur auf V_{1j} verschwinden.

Nach Satz 17 sind also die 3 Grenzfunktionen f_0, g_0, h_0 meromorph in der Umgebung von P, ausgenommen dann, wenn die Folgen f_j, g_j, h_j nicht mehr quasiregulär sind. In diesem Fall ist aber nach Satz 31 überhaupt nichts mehr zu beweisen, wzbw.

Wir wollen uns nun auf den Fall beschränken, wo die Grenzabbildung im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ meromorph fortgesetzt werden kann, denn nur für solche Zweige von V_Λ, die aus hebbaren Singularitäten der Grenzabbildung bestehen, soll die Belegungszahl definiert werden.

Sei ferner E eine analytische Ebene des Bildraums, die keine Ausnahme-

---

[1] Vgl. die Satz 17 vorangehenden Erklärungen auf S. 285.

[2] Jedem Zweig der analytischen Fläche V, welche Urbild einer analytischen Ebene E vermöge der Abbildung S ist, muss eine gewisse Vielfachheit m zugeordnet werden, nämlich dann, wenn dieser Zweig bei Variation von E in m Blätter zerfällt.

Beispiel: $S: \omega = zw^2$, $\zeta = z$, $E: \omega = 0$. $S^{-1}(E)$ besteht aus: $Z_1: w = 0$ $(m = 2)$ und $Z_2: z = 0$ $(m = 1)$.

[3] Mit Vielfachheit gezählt, vgl. Fussnote 2.

ebene im Sinne von Satz 32 sei, d. h. der Grenzbildbereich sei keine Teilmenge von E. Unter dieser Voraussetzung ist die analytische Fläche $S_0^{-1}(E)$ singularitätenfrei im Bereich $\mathfrak{B}$, und man kann offenbar behaupten:

a) Ist A eine in $\mathfrak{B}$ irreduzible, quasireguläre Folge analytischer Abbildungen S_j, so konvergiert die Flächenfolge $V_j = S_j^{-1}(E)$ in $\mathfrak{B}$ gegen die singularitätenfreie analytische Fläche V_E, welche die Vereinigungsmenge von V_A und $S_0^{-1}(E)$ ist.

Beweis: V_E umfasst nach Satz 32 und § 19, b) sicher alle Häufungspunkte der Flächenfolge $S_j^{-1}(E)$, aber wegen der Irreduzibilität der gegebenen Abbildungsfolge ist jeder Punkt von V_E Häufungspunkt jeder Teilfolge der Folge $S_j^{-1}(E)$, d. h. alle Punkte von V_E sind Grenzpunkte dieser Flächenfolge (Def. 5) wzbw.

Unter diesen Umständen hat jeder Zweig von V_E, also insbesondere jeder Zweig von V_A, eine bestimmte Belegungszahl in Bezug auf die Flächenfolge $V_j = S_j^{-1}(E)$. Die Flächen V_j müssen dabei aber mit Vielfachheit gerechnet werden (Vgl. Fussnote 2, S. 312).

Satz 34: *Sei Z ein Zweig von V_A. Dann ist die Belegungszahl von Z in Bezug auf die Flächenfolge θ_E: $V_j = S_j^{-1}(E)$ für alle Bildraumebenen E, welche die Menge $S_0^{+}(Z)$ nicht enthalten, dieselbe.*

Sie soll deshalb als Belegungszahl n_Z des Zweiges Z in Bezug auf die Abbildungsfolge A bezeichnet werden.

Beweis: Seien E_1 und E_2 2 analytische Ebenen des Bildraums, von denen keine die Menge $S_0^{+}(Z)$ enthalte. Man kann offenbar annehmen, E_1 sei die Ebene $\omega = 0$, E_2 sei die Ebene $\zeta = 0$, was nötigenfalls durch eine projektive Transformation erreicht wird. Da also auf Z die (nach Voraussetzung in ganz $\mathfrak{B}$ meromorphen) Funktionen f_0^{+} und g_0^{+} nicht überall verschwinden, kann man auf Z sicher einen Punkt P mit folgenden Eigenschaften finden:

1) P ist eine gewöhnliche Stelle von V_A.

2) P ist nicht Häufungspunkt isolierter Irregularitäten von A. (Dies würde wegen Satz 27 eine wesentliche Singularität der Grenzabbildung zur Folge haben).

3) f_0^{+} und g_0^{+} haben in P keine Unbestimmtheitsstellen (denn diese liegen ja isoliert), man kann also durch erneute projektive Transformation mit den Fixebenen E_1 und E_2 erreichen, dass:

4) $f_0^{+}(P)$ und $g_0^{+}(P)$ endliche Werte $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sind.

Man kann ferner eine Umgebung U von P mit folgenden Eigenschaften angeben:

5) U enthält nur gewöhnliche Stellen von Z und keine Punkte von andern Zweigen von V_A.

6) f_0^+, g_0^+, h_0^+ sind alle analytisch und nullstellenfrei in U.

Legt man jetzt eine in U enthaltene, zu Z unitär orthogonale Kreisscheibe $T_\varepsilon(P)$ mit Mittelpunkt P und Radius ε, so lautet die Behauptung von Satz 34 offenbar:

Die Funktion h_j hat gleich viele Pole und Nullstellen[1] auf $T_\varepsilon(P)$, wenn nur ε genügend klein, und j genügend gross gewählt wird.

In der Tat wird ja auf $S_j^{-1}(E_1)$ $h_j = 0$ und auf $S_j^{-1}(E_2)$ $h_j = \infty$, in einem Schnittpunkt beider Flächen können sich nur Null- und Polstellen gleicher Ordnung wegheben.

Wir wollen jetzt die abgeänderte Behauptung beweisen:

Da h_j auf c gleichmässig konvergiert (gegen eine endliche Funktion), liefert das Integral

$$n_j(0) - n_j(\infty) = \frac{1}{2\pi} \oint_c d\,[\arg(h_j)]$$

für die Differenz der Zahl der auf $T_\varepsilon(P)$ liegenden Null- und Polstellen der Funktion h_j beim Grenzübergang $j \to \infty$ offenbar den entsprechenden Wert für die Grenzfunktion. Dieser ist aber wegen Eigenschaft 6) $= 0$, also ist wegen der Ganzzahligkeit der n_j von einem gewissen j an: $n_j(0) = n_j(\infty)$, wzbw.

Diejenigen analytischen Ebenen E des Bildraums, für die die Belegungszahl von Z in Bezug auf die Flächenfolge $S_j^{-1}(E)$ nicht n_Z ist, wollen wir „Ausnahmeebenen im Sinne von Satz 34" nennen.

Dies sind entweder alle analytischen Ebenen durch einen festen Punkt, oder es gibt überhaupt nur höchstens eine solche Ausnahmeebene.

Kriterium für endliche Belegungszahl.

Die Belegungszahl n_Z kann auch ∞ sein, selbst dann noch, wenn die Voraussetzungen von Satz 33 erfüllt sind. Es wäre nämlich möglich, dass die betrachteten Ebenen E_1 und E_2 Ausnahmeebenen im Sinne von Satz 34 wären.

[1] Mit Vielfachheit gezählt.

Wir ziehen deshalb noch eine dritte analytische Ebene E_3 in Betracht, aber so, dass E_1, E_2, E_3 *nicht durch einen Punkt* laufen.

$V_{3j} = S_j^{-1}(E_3)$ seien die zu E_3 gehörigen Urbildflächen. Es gilt:

Satz 35: *Wenn die Bedingungen von Satz 33 ausser für V_{1j} und V_{2j} auch noch für die Flächenfolge V_{3j} erfüllt sind, so sind alle durch P laufenden Zweige von V_A von endlicher Belegungszahl ($\leq n$) in Bezug auf die Abbildungsfolge A.*

Beweis: Zunächst folgt aus Satz 33, dass die Grenzabbildung S_0 auf allen durch P laufenden Zweigen von V_A meromorph fortgesetzt werden kann, man kann also für diese Zweige die Belegungszahlen gemäss Satz 34 definieren.

Nehmen wir einmal an, für den durch P laufenden Zweig Z sei $n_Z = \infty$. $S_0^+(Z)$ kann jedenfalls nicht zugleich Teilmenge von E_1, E_2, E_3 sein, somit ist wenigstens eine dieser Ebenen, z. B. E_1, keine Ausnahmeebene im Sinne von Satz 34. Die Belegungszahl von Z in Bezug auf die Flächenfolge $S_j^{-1}(E_1)$ müsste dann also ebenfalls ∞ sein. Dies widerspricht aber wegen Satz 4 offenbar der Voraussetzung von Satz 35, dass V_{1j} von T_z in höchstens n Punkten geschnitten wird (T_z schneidet für hinreichend kleines z alle durch P laufenden Zweige von V_A), wzbw.

6. Kap. **Scharen meromorpher Abbildungen.**

§ 21. Normale Scharen.

Wir nennen eine Schar analytischer oder meromorpher Abbildungen in gewohnter Weise in einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ normal, wenn jede Folge dieser Schar eine weitere Teilfolge besitzt, die sich im Bereich $\mathfrak{B}$ gemäss Def. 16 regulär verhält.

Zunächst kann man natürlich folgendes Kriterium aufstellen, das auf der Beschränktheit der durch die Abbildungsschar Σ erzeugten Funktionsscharen Σ_f und Σ_g beruht:

a) Wenn die Bildbereiche $S(\mathfrak{B})$ für alle Abbildungen S der Schar Σ in einer festen Hyperkugel K enthalten sind, so ist diese Schar normal in $\mathfrak{B}$.

(Es genügt übrigens, wenn der Radius von K fest bleibt, M darf nach Belieben variieren).

Man könnte dieses Kriterium auch so ausdrücken:

b) Ist die irreduzible Folge A meromorpher Abbildungen an der Stelle P irregulär, so hat das Grenzschwankungsbild $A(P)$ mit jeder analytischen Ebene mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Wenn nämlich $A(P)$ z. B. mit der ∞ fernen Ebene keine gemeinsamen Punkte hätte, so würde a) eintreffen. Eine irreduzible, irreguläre Folge kann aber keine reguläre Teilfolge besitzen.

Dem klassischen Normalitätskriterium mit 3 Ausnahmewerten[1] kann man ein entsprechendes mit 6 analytischen Ausnahmeebenen gegenüberstellen[2]:

Seien künftig $E_1, E_2, \ldots, E_6$ immer 6 analytische Ebenen des Bildraums, die ein vollständiges Viereck bilden, d. h. zu je dreien durch je einen von 4 Punkten laufen. (Man kann diese 6 Ebenen durch eine projektive Transformation in die Ebenen $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\omega = \zeta$, und die ∞ ferne Ebene E_∞ überführen). Es gilt nun:

Satz 36: *Ist die Schar $\mathfrak{B}$ meromorpher Abbildungen des Bereiches $\mathfrak{B}$ so beschaffen, dass $S(\mathfrak{B})$ für keine Abbildung der Schar mit einer der 6 Ebenen $E_1, \ldots, E_6$ gemeinsame Punkte hat, so ist diese Schar normal in $\mathfrak{B}$.*

Beweis: Wegen § 16, a) kann man annehmen, diese 6 Ebenen seien $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\omega = \zeta$, und E_∞. Ist jede Abbildung S der Schar durch 2 meromorphe Funktionen f und g gegeben, und ist h ihr Quotient gemäss (16), so nehmen die 3 Funktionen f, g, und h nach Voraussetzung keinen der 3 Werte 0, 1, ∞ im Bereich an.

Somit sind die durch die Schar Σ erzeugten 3 Funktionsscharen Σ_f, Σ_g, Σ_h nach § 11, Folgerung aus Satz 18, normal in $\mathfrak{B}$, man kann also aus jeder Folge $A_1 < \Sigma$ eine Teifolge $A : S_j$ auswählen, so dass die 3 zugeordneten Funktionsfolgen f_j, g_j, h_j in $\mathfrak{B}$ regulär sind. Es kann somit für diese Folge A keiner der

---

[1] Montel, S. 125.

[2] Es ist hingegen nicht möglich, ein entsprechendes Kriterium für eine Abbildungsschar mit Ausnahme*punkten* aufzustellen. (Man kann nirgends normale Scharen meromorpher Abbildungen angeben, deren Bildbereiche eine volle Umgebung eines festen Punktes vermeiden, z. B. die als Schar betrachtete, irreduzible Folge

$$\omega = \sigma(j w), \quad \zeta = \frac{z}{j}$$

in der Einheitshyperkugel). Diese Unmöglichkeit hängt wohl damit zusammen, dass eine der Modulfunktion nachgebildete „Modulabbildung“, wie sie auch konstruiert sein möge, keine isolierte Verzweigungs-Stellen haben kann.

Fälle D, E, G, H (§ 17) in einem Punkt von $\mathfrak{B}$ eintreten, d. h. Λ ist in ganz $\mathfrak{B}$ regulär, wzbw.

Aus Satz 36 folgt der von F. Bureau[1] formulierte Landau'sche Satz für analytische Abbildungen. F. Bureau hat diesen Satz mit Hilfe der Picard'schen Modulfunktion für mehrere Variabeln bewiesen. Zunächst jedoch eine Folgerung aus Satz 26:

c) Ist Σ eine in $\mathfrak{B}$ normale Schar *analytischer* Abbildungen, so dass das Bild eines festen Punktes $A \in \mathfrak{B}$ vermöge jeder Abbildung S der Schar innerhalb der festen Hyperkugel K liegt, so kann man zu jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl $R(\mathfrak{B}^*)$ angeben, so dass der Bildbereich $S(\mathfrak{B}^*)$ für jede Abbildung S der Schar eine Teilmenge der Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 < R^2$ ist.

Andernfalls gäbe es nämlich in $\mathfrak{B}^*$ eine konvergente Punktfolge $P_1, P_2, \ldots \to P_0$ und eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Folge von Abbildungen S_j der Schar Σ, so dass $\lim S_j(P_j) = S_0(P_0)$ ein ∞ ferner Punkt wäre. Damit wäre aber nach Satz 26 auch $\Lambda(\mathfrak{B})$ ein Teil der ∞ fernen Ebene, entgegen der Voraussetzung, dass $S_j(A)$ eine feste Kugel nicht verlassen darf.

Satz von Bureau:

Sei S eine analytische Abbildung des Dizylinders $\vartheta: |w| < r,\ |z| < \varrho$. Der Bildpunkt des Koordinatennullpunktes, sowie die Funktionaldeterminante an dieser Stelle seien vorgeschrieben:

$$S(0, 0) = (a, b), \quad \Delta(0, 0) = D.$$

Ferner habe der Bildbereich $S(\vartheta)$ keine gemeinsamen Punkte mit den 6 analytischen Ebenen:

$$\omega = 0,\ \omega = 1,\ \zeta = 0,\ \zeta = 1,\ \omega = \zeta, \text{ und } E_\infty. \tag{20}$$

Dann gilt:

Das Volumen des Dizylinders ϑ liegt unterhalb einer Schranke M', die nur von a, b, D abhängt.

Beweis: Wir ordnen der Schar Σ aller Abbildungen S, welche die obigen Voraussetzungen erfüllen, gemäss

$$S'(w, z) = S(r\,w, \varrho\,z)$$

---

[1] Vgl. Literaturverzeichnis.

eine neue Schar Σ' von analytischen Abbildungen S' des Einheitsdizylinders ϑ' zu. Die Funktionaldeterminanten entsprechender Abbildungen S und S' hängen gemäss $\Delta' = r\varrho\Delta$ zusammen.

Die Schar Σ' ist unter den gemachten Voraussetzungen nach Satz 36 normal in ϑ', und der Bildpunkt eines festen Punktes (0, 0) ist sogar für alle Abbildungen der Schar derselbe, nämlich (a, b), also kann man c) anwenden:

$\mathfrak{B}^*$ bedeute den Dizylinder: $|w| < \frac{1}{2}$, $|z| < \frac{1}{2}$, dann ist $S'(\mathfrak{B}^*)$ für alle S' aus Σ' eine Teilmenge der Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 < M^2$ (M hängt nur von a, b, D ab).

Ist die Abbildung S' durch die Funktionen $f(w, z)$ und $g(w, z)$ erzeugt, so ist in $\mathfrak{B}^*: |f| < M$, $|g| < M$, also nach der Cauchy'schen Integralformel: $|f_w(0, 0)| < 2M$, ebenso für f_z, g_w, g_z.

Somit gilt: $|\Delta'(0, 0)| < 8M^2$, oder $|D| = |\Delta(0, 0)| < \frac{8M^2}{r\varrho}$, also $r\varrho < \frac{8M^2}{|D|}$, oder Volumen von $\vartheta: \pi^2 r^2 \varrho^2 < \frac{64\pi^2 M^4}{|D|^2}$, wzbw.

Scharen mit beschränktem Flächenvergrösserungsverhältnis.

Ein analytisches Flächenstück V wird durch eine analytische Abbildung S wieder auf ein analytisches Flächenstück V', eventuell auf einen Punkt, abgebildet. Die Flächeninhalte der beiden stehen in einem gewissen Verhältnis:

$$\varkappa(V, S) = \frac{F'}{F},$$

genannt Flächenvergrösserungsverhältnis von V durch die Abbildung S. $\mathfrak{B}$ sei nun ein endlicher Bereich, dann gilt:

Satz 37: *Wenn das Flächenvergrösserungsverhältnis $\varkappa$ für alle noch ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden analytischen Flächenstücke und für alle Abbildungen der Schar Σ eine obere Grenze $\varkappa_0$ besitzt, so ist die Schar Σ normal in $\mathfrak{B}$.*

Beweis: Ich beschränke mich auf die Betrachtung aller ebenen Flächenstücke. Sei E eine beliebige analytische Ebene mit der Parameterdarstellung: $w = w_0 + at$, $z = z_0 + bt$, wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sei.

Durch Einsetzen von w und z in die die Abbildung S bestimmenden Funktionen $f(w, z)$ und $g(w, z)$ erhält man das Bild $S(E)$ von E, und zwar in Parameterdarstellung: $\omega = \omega(t)$, $\zeta = \zeta(t)$.

Der Flächeninhalt F' des Bildes eines Bereiches B der Ebene E ist dann $F' = F'_w + F'_z = \int\limits_B \left\{ \left| \frac{d\,\omega}{d\,t} \right|^2 + \left| \frac{d\,\zeta}{d\,t} \right|^2 \right\} d\,F_t$, wobei $d\,F_t$ das Flächenelement der t-Ebene (oder wegen $|a|^2 + |b|^2 = 1$ auch der Ebene E) bedeutet. Offenbar kann das Flächenvergrösserungsverhältnis nur dann durchwegs $\leq \varkappa_0$ sein, wenn überall

$$\left| \frac{d\,\omega}{d\,t} \right|^2 + \left| \frac{d\,\zeta}{d\,t} \right|^2 = |a|^2 \left[|f_w|^2 + |g_w|^2 \right] + |b|^2 \left[|f_z|^2 + |g_z|^2 \right] \leq \varkappa_0$$

ist. Das ist aber nur dann für eine beliebige Ebene E möglich, wenn im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ gilt:

$$|f_w|^2 + |g_w|^2 \leq \varkappa_0, \quad |f_z|^2 + |g_z|^2 \leq \varkappa_0.$$

Daraus folgt mindestens einmal $|f_w| < \sqrt{\varkappa_0}$, ebenso für g_w, f_z, g_z, und daraus wieder:

$$|f(P) - f(Q)| \leq \sqrt{\varkappa_0} \left[|w_P - w_Q| + |z_P - z_Q| \right] \leq \sqrt{2\,\varkappa_0} \cdot \overline{PQ},$$

wobei $\overline{PQ}$ den euklidischen Abstand von P und Q bedeutet. Entsprechendes folgt für $g(P) - g(Q)$. Wie man also sieht, ist die Schar Σ im Bereich $\mathfrak{B}$ von beschränktem Abstandsvergrösserungsverhältnis (dieses ist höchstens $2\sqrt{\varkappa_0}$), und damit nach a) in jedem abgeschlossenen, beschränkten Teilgebiet von $\mathfrak{B}$ normal. Durch einen Diagonalprozess findet man wie im Beweis von Satz 12, dass Σ in ganz $\mathfrak{B}$ normal ist, wzbw.

§ 22. Quasinormale Scharen meromorpher Abbildungen.

Den Begriff der quasinormalen Abbildungsschar entnehmen wir dem entsprechenden Begriff bei Funktionsscharen, *es soll also hier wörtlich Def. 12 samt Zusatz gelten.* Um das Auftreten der isolierten irregulären Punkte kümmern wir uns dabei nicht.

Seien jetzt $E_1, \ldots, E_6$ wieder 6 analytische Ebenen des Bildraums, die ein vollständiges Viereck bilden. Σ sei eine Schar meromorpher Abbildungen des Bereiches $\mathfrak{B}$, und $V_1, \ldots, V_6$ seien die Urbildflächen der 6 erwähnten Ebenen in Bezug auf eine Abbildung S aus dieser Schar.

Satz 38: *Wenn die Blätterzahl*[1] *der 6 analytischen Flächen V_k $(k = 1, \ldots, 6)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ für jede Abbildung der Schar Σ höchstens je n beträgt, so ist diese*

[1] Mit Vielfachheit gezählt, diese ist bei Bestimmung der Blätterzahl nach Def. 4 gemäss Fussnote 2, S. 312 zu berücksichtigen.

Schar quasinormal im Bereich $\mathfrak{B}$, und zwar von endlicher Ordnung. (Die Ordnung ist höchstens n.)

Beweis: Man kann nach Satz 2 aus jeder Folge Λ_1 der Schar Σ eine weitere Teilfolge $\Lambda_2: S_j$ auswählen, so dass die zugehörigen Urbildflächen V_{kj} (der Ebenen E_k) gegen 6 analytische Flächen V_{k0} konvergieren, die in $\mathfrak{B}$ ebenfalls maximal je n-blättrig sind.

Ausserhalb der Flächen V_{k0} ist die Folge Λ_2 nach Satz 36 eine normale Schar, sie besitzt also eine weitere Teilfolge Λ, die sich in $\mathfrak{B}$, die 6 Flächen V_{k0} ausgenommen, regulär verhält. Λ ist also quasiregulär in $\mathfrak{B}$, und die Irregularitätsfläche ist eine Teilmenge der Vereinigungsmenge der V_{k0}.

Da aber der Bildbereich der Grenzabbildung nicht gleichzeitig Teilmenge aller 6 Ebenen E_k sein kann, ist eine dieser Ebenen, z. B. E_1, keine Ausnahmeebene im Sinne von Satz 32, V_Λ ist also nach Satz 32 eine Teilmenge von V_{10}, d. h. V_Λ ist ebenfalls maximal n-blättrig, wzbw.

Aus Satz 32 folgt ferner eine zu § 7, a) analoge Tatsache:

Seien E_1, E_2, E_3 3 analytische Ebenen des Bildraumes, die nicht durch einen Punkt laufen sollen, Σ sei eine im Bereich $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar meromorpher Abbildungen. Dann gilt:

Satz 39: *Hat der Bildbereich $S(\mathfrak{B})$ für keine Abbildung $S \in \Sigma$ gemeinsame Punkte mit einer der 3 Ebenen E_1, E_2, E_3, so ist die Schar $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{B}$.*

Beweis: Ist Λ eine irreduzible Teilfolge von Σ, und P ein irregulärer Punkt von Λ, so ist P offenbar nicht Häufungspunkt der Flächenfolgen $S_j^{-1}(E_k)$[1] $(k = 1, 2, 3)$. Das ist aber unmöglich, weil nicht alle 3 Ebenen zugleich Ausnahmeebenen im Sinne von Satz 32 sein können, d. h. P ist gar kein irregulärer Punkt, jede irreduzible Folge aus Σ ist also regulär in $\mathfrak{B}$, wzbw.

Auch hier würde es genügen, wenn man statt $S(\mathfrak{B})$ nur die Bilder des Randes von $\mathfrak{B}$ betrachten würde, weil $S_j^{-1}(E_k)$ als Nullstellenfläche einer meromorphen Funktion den Rand von $\mathfrak{B}$ schneiden müsste, wenn diese Funktion in $\mathfrak{B}$ überhaupt Nullstellen hat.

[1] Vgl. Fussnote 1, S. 311.

Eine quasinormale Schar *analytischer* Abbildungen ist nach Satz 30 immer dann normal, wenn das Bild eines festen, *nichtanalytischen* Flächenstücks vermöge jeder Abbildung der Schar Teilmenge eines festen endlichen Bereiches ist, z. B. also:

a) Eine quasinormale Schar analytischer Abbildungen ist normal, wenn die Abbildungsfunktionen f und g aller Abbildungen der Schar auf einem 2-dimensionalen Stück der absoluten Ebene beschränkt sind.

Unter der gleichen Voraussetzung kann man bei einer Schar meromorpher Abbildungen nur schliessen, dass für keine Teilfolge der Schar der Bildbereich $A(\mathfrak{B}')$ ein Teil der ∞ fernen Ebene sei.

§ 23. Totale Ordnung einer Abbildungsschar.

Mit den Belegungszahlen n_Z der Zweige von V_A bilden wir genau wie bei Satz 4 die Zahl n_G, und wenden dann Def. 13 samt Zusatz auch auf Abbildungsscharen an. Damit ist die totale Ordnung einer solchen Schar definiert.

Sei Σ eine in $\mathfrak{B}$ quasinormale Schar meromorpher Abbildungen. E_1, E_2, E_3 seien 3 feste, nicht durch einen Punkt laufende analytische Ebenen des Bildraums, V_1, V_2, V_3 ihre Urbilder in Bezug auf eine Abbildung S der Schar Σ. Dann gilt:

Satz 40: *Sind die Blätterzahlen der Flächen V_1, V_2, V_3 für alle Abbildungen der Schar Σ beschränkt ($\leq n$), so ist Σ von total endlicher Ordnung ($\leq n$) im Bereich $\mathfrak{B}$.*

Beweis: A sei eine irreduzible Teilfolge von A, bestehend aus den Abbildungen S_j. Die Grenzabbildung von A kann nach Satz 33 jedenfalls in ganz $\mathfrak{B}$ meromorph fortgesetzt werden.

Da nicht alle 3 Ebenen E_1, E_2, E_3 Ausnahmeebenen im Sinne von Satz 32 sein können, konvergiert nach § 20, a) z. B. die Folge der Urbildflächen $S_j^{-1}(E_1)$ in $\mathfrak{B}$ gegen eine singularitätenfreie analytische Fläche V_{E_1}, welche aus V_A und $S_0^{-1}(E_1)$ besteht. Man kann sogar annehmen, die Flächenfolge $S_j^{-1}(E_1)$ sei im Sinne von Def. 9 reduziert.

Sind n'_Z die Belegungszahlen der Zweige von V_A in Bezug auf die reduzierte *Flächenfolge* $S_j^{-1}(E_1)$, so folgt nach unseren Voraussetzungen aus Satz 4 (Vgl. auch Fussnote 2, S. 268), dass $n'_G = \Sigma\, m_Z n'_Z \leq n$ ist für jedes zulässige Gebiet G.

Man kann nun, weil $S_0^+(\mathfrak{B})$ keine Teilmenge von E_1 ist, analog wie bei § 12, b) schliessen, dass für jeden Zweig Z von V_A die Belegungszahl n_Z in Bezug auf die *Abbildungsfolge* A höchstens gleich der Belegungszahl n'_Z in Bezug auf die Flächenfolge $S_j^{-1}(E_1)$ ist. Es ist dann also immer $n_G = \Sigma\, m_Z n_Z \leq n$, also auch die totale Ordnung n_A der Folge A höchstens $= n$, wzbw.

Folgerung:

a) Die totale Ordnung der in Satz 38 als quasinormal befundenen Schar Σ ist höchstens n, und die Grenzabbildung jeder irreduziblen Teilfolge dieser Schar kann in ganz $\mathfrak{B}$ meromorph fortgesetzt werden.

Man kann auch bei Abbildungsscharen Bedingungen angeben, unter denen die ∞ ferne Ebene für keine irreduzible Teilfolge der Schar Bildbereich der Grenzabbildung sein kann:

Satz 41: *Sei Σ eine aus meromorphen Abbildungen bestehende quasinormale Schar von total endlicher Ordnung s im Bereich $\mathfrak{B}$.*

Diese Schar erzeugt zwei Funktionsscharen Σ_f und Σ_g, für jede derselben sei entweder die Bedingung C_s oder D_s[1] *erfüllt.*

Dann hat keine irreduzible Teilfolge der Schar einen Teil der ∞ fernen Ebene als Bildbereich der Grenzabbildung.

Zusatz: Besteht die Schar Σ aus *analytischen* Abbildungen, so ist sie unter den obigen Voraussetzungen normal.

Beweis: Wir nehmen einmal an, für die irreduzible Teilfolge A der Schar Σ sei der Bildbereich der Grenzabbildung S_0 ein Teil der ∞ fernen Ebene. Wir nehmen aber ferner an, dass weder der Bildbereich der Grenzabbildung, noch das Bild eines Zweiges von V_A vermöge der Grenzabbildung einer der ∞ fernen Punkte der beiden Koordinatenebenen des Bildraums sei. Dies kann man nötigenfalls durch eine unitäre affine Abbildung des Bildraums erreichen.[2]

Unter den gemachten Annahmen (Bildbereich auf E_∞) sind die beiden Funktionsfolgen f_j und g_j nach Satz 31, Zusatz, quasiregulär, und mindestens eine derselben, z. B. f_j, hat die Grenzfunktion $f_0 \equiv \infty$.

---

[1] Vgl. Satz 10, S. 279. Es sollen für beide Funktionsscharen Σ_f und Σ_g dieselben Bedingungen erfüllt sein, d. h. entweder immer C_s, oder immer D_s.

[2] Da dabei die Funktionen f_j und g_j nur linear kombiniert werden, bleiben die Bedingungen C_s und D_s erfüllt.

Die Ebenen $\omega = 0$ und $\omega = 1$ sind für keinen Zweig von V_A Ausnahmeebenen im Sinne von Satz 34, somit sind alle Belegungszahlen in Bezug auf die Folgen $f_j = 0$, $f_j = 1$, und die Abbildungsfolge A dieselben. Wegen $f_0 \equiv \infty$ haben die Flächenfolgen $f_j = 0$ und $f_j = 1$ keine Häufungspunkte ausserhalb V_A.

Somit ist die gemäss Satz 4 gebildete Summe $n_G = \Sigma m_Z n_Z$, ob man sie für die Flächenfolgen $f_j = 0$ oder $f_j = 1$, oder für die Abbildungsfolge A bildet, stets dieselbe. Für die Abbildungsfolge ist sie aber nach Voraussetzung entweder höchstens s, oder dann trifft dies für eine Teilfolge von A zu. Dasselbe trifft dann auch für die Flächenfolgen $f_j = 0$ und $f_j = 1$ zu.

Das bedeutet aber nach Satz 4, dass die Zahl der auf G liegenden 0 und 1-Stellen der Funktionen f_j eine obere Häufungsgrenze $(\leq s)$ hat. Nach § 12, d) ist also die als Schar betrachtete Funktionsfolge f_j in $\mathfrak{B}$ von total endlicher Ordnung $(\leq s)$.

Damit haben wir, weil ja die Bedingungen C_s oder D_s erfüllt sein sollen, einen Widerspruch zu Satz 22 herbeigeführt, wzbw.

Da mit den Voraussetzungen von Satz 38 eine quasinormale Schar auch von total endlicher Ordnung $(\leq s)$ ist, kann man Aussagen machen, die dem Satz von Schottky nachgebildet sind:

Satz 42: *Sei S eine analytische Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Die Entwicklungskoeffizienten der die Abbildung S bestimmenden Funktionen $f(w, z)$ und $g(w, z)$ seien an einer Stelle $P \in \mathfrak{B}$ bis und mit der Ordnung s gegeben.*

2) *Die Urbilder $V_1, V_2, \ldots, V_6$ der 6 Bildraumebenen (20) sollen in $\mathfrak{B}$ maximal je s-blättrig sein.*

Dann kann man zu jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ eine nur von s, P, $\mathfrak{B}^*$ und den gegebenen Entwicklungskoeffizienten abhängige positive Zahl R angeben, so dass $S(\mathfrak{B}^*)$ in der Hyperkugel $|\omega|^2 + |\zeta|^2 < R^2$ enthalten ist.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Gesamtheit aller Abbildungen mit den vorgeschriebenen Eigenschaften gemäss Satz 41, Zusatz eine normale Schar analytischer Abbildungen ist, man kann also § 21, c) anwenden.

Für meromorphe Funktionen kann der Satz von Schottky etwa durch folgenden Sachverhalt beschrieben werden:

Satz 43: *Sei Σ eine quasinormale Schar meromorpher Abbildungen des Bereiches $\mathfrak{B}$, die keine Teilfolge enthält, für die der Bildbereich der Grenzabbildung ein Teil der ∞ fernen Ebene ist.*

Dann gibt es zu jeder positiven Zahl R ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

Ist S eine feste Abbildung aus Σ, und $\mathfrak{B}_\delta$ der Bereich, der aus $\mathfrak{B}$ durch Wegnahme aller Punkte entsteht, die von der Fläche $S^{-1}(E_\infty)$, und vom Rand von $\mathfrak{B}$ höchstens den Abstand δ haben, so ist $S(\mathfrak{B}_\delta)$ in der Hyperkugel $|\omega|^2 + |\zeta|^2 < R^2$ enthalten.

Beweis: Andernfalls gäbe es eine Punktfolge $P_j \to P_0 \in \mathfrak{B}$, und eine Abbildungsfolge S_j aus Σ, so dass $S_j(P_j)$ gegen einen ∞ fernen Punkt X konvergiert.

S_j hat eine quasireguläre Teilfolge Λ, entweder liegt nun P_0 auf V_Λ, oder auf $S_0^{-1}(E_\infty)$, sonst könnte lim $S_j(P_j)$ kein ∞ ferner Punkt sein (Vgl. Def. 15).

Nach Satz 32 ist P_0 im ersten Fall Häufungspunkt der Flächenfolge $S_j^{-1}(E_\infty)$, im zweiten Fall trifft dies ohnehin zu. Beides widerspricht aber der Voraussetzung, für hinreichend grosses j wäre dann P_j beliebig nahe bei der Fläche $S_j^{-1}(E_\infty)$, wzbw.

Anwendung auf rationale Abbildungen.

Wenn man unter einer rationalen Abbildung vom Grade n eine solche versteht, die durch

$$\omega = \frac{P(w,z)}{R(w,z)}, \quad \zeta = \frac{Q(w,z)}{R(w,z)}$$

gegeben ist, wobei P, Q, R Polynome von höchstens n-tem Grade sind, so gilt nach Satz 38 und Satz 40, sowie Satz 33[1]:

b) Die Schar aller rationalen Abbildungen, deren Grad n nicht übersteigt, ist im abgeschlossenen R^4 quasinormal von total endlicher Ordnung n, und für jede irreduzible Teilfolge dieser Schar ist die Grenzabbildung wieder rational.

Dass die Grenzabbildung wieder rational ist, folgt aus dem Satz von Hurwitz-Weierstrass.[2]

In b) ist das schon von P. Myrberg gefundene Resultat enthalten, dass die Schar aller projektiven Abbildungen quasinormal ist, und zwar von total endlicher Ordnung 1.

---

[1] Man vergleiche aber Fussnote 4, S. 288, denn die erwähnten Sätze wurden nur für endliche Bereiche bewiesen.

[2] BEHNKE-THULLEN, Satz 28, S. 62.

Literaturverzeichnis.

BEHNKE und THULLEN, Theorie der Fkt. m. kompl. Var. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin 1934.

BIEBERBACH, L., Zur Theorie und Praxis konformer Abbildung. Rend. Circ. Mat. Palermo, Bd. 38 (1914).

BUREAU, F., Sur les systèmes de deux fonctions uniformes de deux variables complexes. Comptes rendus 197 (1933) p. 1574—1576.

HAUSDORFF, F., Mengenlehre, 2. Auflage. W. de Gruyter, Berlin und Leipzig 1927.

JULIA, G., Sur les familles des fonctions analytiques de plusieurs variables. Acta math. Bd. 47 (1925).

KNESER, H., Zur Theorie der gebrochenen Fkt. m. Var. Jahresbereicht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 48 (1938).

MONTEL, P., Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques. Gauthier-Villars, Paris 1927.

MYRBERG, P. J., Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variabeln. Acta math. Bd. 46 (1924).

OKA, K., Note sur les familles des fonctions analytiques multiformes. J. Sci. Hiroshima Univ. A 4 (1934).

OSGOOD, F., Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 1. Teil. Teubner, Berlin und Leipzig, 1924.

SAXER, W., Über die normalen Scharen meromorpher Funktionen mehrerer Variabeln. Comm. math. helv. vol. 4 (1932).

SEGRE, B., Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale constante. Boll. Un. Mat. Ital. 13 (1934).

STEIN, K., Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 114 (1937).

THULLEN, P., Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume m. kompl. Var. Math. Ann. 111 (1935).

VALIRON, G., Familles normales et quasinormales de fonctions méromorphes. Gauthier-Villars, Paris, 1929.

WIRTINGER, W., Über eine Determinantenidentität und ihre Anwendungen. Monatshefte für Math. und Phys. Bd. 44 (1936).