ZUR THÉORIE DER LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

Im 82. Bande des Crelle'schen Journals hat Herr PRYM bewiesen, dass die Function $\Gamma(z)$, welche durch die Bedingungen

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{\Gamma(z+\nu)}{\nu^z \lfloor \nu - 1} = 1$$

vollständig bestimmt ist, auf die Form

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$$

derart gebracht werden kann, dass $P(z)$ eine durch die Bedingungen

$$P(z+1) = zP(z) - e^{-1}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{P(z+\nu)}{\nu^z \lfloor \nu - 1} = 0$$

vollständig bestimmte und in der Form einer Partialbruchreihe darstellbare Function bezeichnet, während $Q(z)$ eine durch die Bedingungen

$$Q(z+1) = zQ(z) + e^{-1}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{Q(z+\nu)}{\nu^z \lfloor \nu - 1} = 1$$

vollständig bestimmte und in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbare Function bedeutet.

In einer Abhandlung *Zur Theorie der Gammafunction,* Bd. 8 dieses Journals S. 37—80, habe ich den obigen Satz in folgender Weise verallgemeinert. Setzt man

$$F(z) = a^z \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z_1') \ldots \Gamma(z - z_n')},$$

$$\mathbf{r}(z) = a \frac{(z - z_1) \ldots (z - z_m)}{(z - z_1') \ldots (z - z_n')},$$

$$\varkappa = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m,$$

wo $z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_n'$ beliebige von z unabhängige Grössen bezeichnen, so hat man den nachstehenden Satz, wo $\mathbf{s}(z)$ eine gewisse rationale Function mit demselben Nenner wie $\mathbf{r}(z)$ und einem Zähler, dessen Gradzahl nicht grösser als $m - 1$ ist, bezeichnet:

Die obige Function $F(z)$, welche durch die Bedingungen

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{F(z + \nu)}{a^{z+\nu}(\nu^z |\underline{\nu - 1})^{m-n} \nu^\varkappa} = 1$$

vollständig bestimmt ist, kann, wenigstens in allen Fällen, wo $\lim\limits_{\nu=\infty} |\mathbf{r}(z)| > 1$ ist, auf die Form

$$F(z) = P(z) + Q(z)$$

derart gebracht werden, dass $P(z)$ eine durch die Bedingungen

$$P(z + 1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{s}(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{P(z + \nu)}{a^{z+\nu}(\nu^z |\underline{\nu - 1})^{m-n} \nu^\varkappa} = 0$$

vollständig bestimmte und in der Form einer Summe von Partialbruchreihen darstellbare Function bezeichnet, während $Q(z)$ eine durch die Bedingungen

$$Q(z + 1) = \mathbf{r}(z)Q(z) + \mathbf{s}(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{Q(z + \nu)}{a^{z+\nu}(\nu^z |\underline{\nu - 1})^{m-n} \nu^\varkappa} = 1$$

vollständig bestimmte und in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbare Function bedeutet.

Dieser Satz ergab sich in ungezwungener Weise, indem ich mir die Aufgabe stellte, die Function $F(z)$ dem Mittag-Leffler'schen Satze gemäss durch Partialbrüche und eine beständig convergirende Potenzreihe darzustellen. Die Function $P(z)$ kann auch auf die Form

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

gebracht werden; ein specieller Fall dieser Reihe ist offenbar die zu $\Gamma(z)$ gehörige Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{z(z+1)\ldots(z+\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(z+\nu)\underline{|\nu}}.$$

Der obige Satz ist eigentlich nur ein specieller Fall eines noch allgemeineren, in § 9 der genannten Abhandlung bewiesenen Satzes, der sich auf ein System von Functionalgleichungen der Form

$$f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z) - \mathbf{s}(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{f(z+\nu)}{a^{z+\nu}(\nu^z\underline{|\nu-1})^{m-n}\nu^z} = C$$

bezieht, wo C eine Constante und $\mathbf{s}(z)$ eine beliebige rationale Function der Form

$$\mathbf{s}(z) = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_{m-1}z^{m-1}}{(z-z_1')\ldots(z-z_n')}$$

bezeichnet. Nach dem fraglichen Satze giebt es immer eine Function $f(z)$, welche dem obigen Gleichungssysteme genügt; und es ist stets möglich, die Constanten $p_1, \ldots, p_m, q$ derart zu bestimmen, dass

$$f(z) = p_1 P_1(z) + \ldots + p_m P_m(z) + qQ(z)$$

wird, wo $P_1(z), \ldots, P_m(z)$ von einander linear unabhängige Reihen der Form $P(z)$ bezeichnen. Dieser Ausdruck $f(z)$, welcher bei passender Bestimmung von $p_1, \ldots, p_m, q$ in jede beliebige der drei Functionen $F(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ übergeht, ist gewissermassen auch als eine Verallgemeinerung der Gammafunction zu betrachten.

Seitdem die Gammafunction von Euler in die Analysis eingeführt wurde, hat sie auf Grund ihrer Anwendungen einen wichtigen Platz in der Theorie der bestimmten Integrale eingenommen. Es lässt sich nun auch eine überaus grosse Menge von bestimmten Integralen auf die obigen, mit $\Gamma(z)$ sehr nahe verwandten Transcendenten zurückführen. Diese Integrale können im Allgemeinen in der Gestalt

$$\int y x^{z-1} dx$$

geschrieben werden, wo y eine Function bezeichnet, die einer linearen Differentialgleichung der Form

$$(a_0 + b_0 x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 + b_1 x) x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_n + b_n x) y = 0$$

genügt. In dieser Form ist auch die bekannte Differentialgleichung der GAUSS'schen hypergeometrischen Reihe enthalten. Es zeigt sich somit, dass die Gammafunction auch für die Theorie der soeben angeführten allgemeineren Differentialgleichung von derselben Wichtigkeit ist, wie für die Theorie der genannten Reihe. Die Richtigkeit dieser Bemerkung, welche meines Wissens nicht früher gemacht worden, ist in meiner Arbeit *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen* [1] hinreichend begründet worden und soll in der vorliegenden Arbeit weiter entwickelt werden.

Bei den Anwendungen der oben besprochenen Functionen in der Theorie der bestimmten Integrale ist es von Wichtigkeit, solche charakteristische Eigenschaften derselben zu kennen, dass sie ohne Schwierigkeit auch an den zu bestimmenden Integralen erkannt werden können. Gegen die Anwendbarkeit der Bedingung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{f(z+\nu)}{a^{z+\nu} \left(\nu^z \,|\underline{\nu - 1}\right)^{m-n} \nu^x} = \text{Const.}$$

kann nun aber dasselbe angeführt werden, was SCHEEFFER in seiner Arbeit *Zur Theorie der Functionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ [2] hinsichtlich der Bedingung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{f(z+\nu)}{\nu^z \,|\underline{\nu - 1}} = \text{Const.}$$

bemerkt hat, dass sie nämlich den Mangel hat, aus der Form der zu bestimmenden Integrale in manchen Fällen nicht ohne Weiteres ersichtlich zu sein. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, wenn gleich viel

[1] Bd. 9. dieses Journals. S. 137—166. Man siehe insbesondere § 3.

[2] Crelles Journal. Bd. 97. S. 230—241.

allgemeiner, dem der SCHEEFFER'schen analog, nämlich zu zeigen, dass die in Frage stehende Bedingung durch andere ersetzt werden kann, welche den Vorzug besitzen, dass sie an den Integralen direct erkannt werden können.

Specielle Fälle der in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Sätze sind die nachstehenden, welche im wesentlichen mit den von SCHEEFFER a. a. O. bewiesenen übereinstimmen:

Die Function $\Gamma(z)$ ist, abgesehen von einem constanten Factor, die einzige monogene Function von $z = \zeta + i\zeta'$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. $\Gamma(z)$ befriedigt die Functionalgleichung $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

II. $\Gamma(z)$ verhält sich im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geqq 0$ definirten Hälfte der z-Ebene überall regulär.

III. Wird die Veränderliche z, unter a eine positive Zahl verstanden, auf den zur imaginären Axe parallelen Streifen $(a \leqq \zeta \leqq a + 1)$ beschränkt, so kann der absolute Betrag von $\Gamma(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

Aus diesem Satze ergiebt sich leicht der folgende, wo

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(z+\nu)\underline{|\nu}},$$

und $Q(z) = \Gamma(z) - P(z)$ ist:

Es giebt nur eine einzige monogene Function $F(z)$, welche an einer gegebenen, dem Bereiche $(0 < a \leqq \zeta \leqq a + 1)$ angehörigen Stelle einen vorgeschriebenen Werth annimmt und die nachstehenden Eigenschaften besitzt:

I. $F(z)$ befriedigt die Functionalgleichung $F(z + 1) = zF(z) + c$, wo c eine gegebene Constante bezeichnet.

II. $F(z)$ verhält sich im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geqq 0$ definirten Hälfte der z-Ebene regulär.

III. Wird die Veränderliche z, unter a eine positive Zahl verstanden, auf den Parallelstreifen $(a \leqq \zeta \leqq a + 1)$ beschränkt, so kann $F(z)$ dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

Bei passender Bestimmung der Constanten p und q kann $F(z)$ auf die Form $pP(z) + qQ(z)$ gebracht werden.

I.

Das Verhalten eines Productes aus mehreren Functionen der Form $\Gamma(z-a)$, $\Gamma(a-z)$ und das Verhalten eines Quotienten zweier solcher Producte bei beschränkter Veränderlichkeit des reellen und unbeschränkter Veränderlichkeit des imaginären Theiles von z.

1. Für die nachfolgenden Untersuchungen ist es von Wichtigkeit zu ermitteln, wie sich eine Function der Form

$$F(z) = \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\nu-z)}$$

verhält, wenn der reelle Theil der Veränderlichen $z = \zeta + i\zeta'$ auf ein beliebiges, aber endliches Intervall ($\alpha \leqq \zeta \leqq \beta$) beschränkt wird, während ζ' dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Das Gebiet der Veränderlichen z wird alsdann durch einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite $\beta - \alpha$ geometrisch dargestellt.

Das Verhalten der Function in einem solchen Parallelstreifen kann folgenderweise charakterisirt werden. *Ist $m + \mu > n + \nu$, so wird $z^k F(z)$ mit wachsendem $|z|$ unendlich klein, wie gross auch die positive ganze Zahl k sein mag. Ist $m + \mu < n + \nu$, so wird $\frac{F(z)}{z^k}$, wo k die obige Bedeutung hat, unendlich gross. Ist endlich $m + \mu = n + \nu$, so kann die nicht negative ganze Zahl k immer so angenommen werden, dass $\frac{F(z)}{z^k}$ mit wachsendem $|z|$ unendlich klein wird.*

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir den folgenden Hülfsatz[1] voraus:

Ist die Reihe

$$\Phi(x, y) = 1 + \varphi_2(y)x^2 + \varphi_3(y)x^3 + \ldots,$$

wenn x die Bedingung $|x| \leqq R$ erfüllt, unbedingt convergent, und zwar

[1] Cfr. Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre. S. 212 u. f.

für alle Werthe y, welche einem gewissen Bereich angehören; ist überdies der absolute Betrag von Φ für die besprochenen Werthe von x und y nicht grösser als eine angebbare endliche Grösse G, so ist es, wenn α eine beliebig gegebene reelle Constante und $z = \zeta + i\zeta'$ eine die Bedingung $\alpha \leqq \zeta$ befriedigende Veränderliche bezeichnet, stets möglich, eine positive ganze Zahl m so anzunehmen, dass das unendliche Product

$$P(y, z) = \prod_{\nu=m}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{z+\nu}, y\right) = \prod_{\nu=m}^{\infty}\left(1 + \frac{\varphi_2(y)}{(z+\nu)^2} + \frac{\varphi_3(y)}{(z+\nu)^3} + \dots\right)$$

für die oben erwähnten Werthe von y und z convergirt, seinem absoluten Betrage nach nicht grösser als eine gewisse angebbare Zahl werden kann und mit wachsendem $|\zeta'|$ sich der Grenze Eins nähert.

Der Beweis ist sehr einfach. Man braucht nur die ganze Zahl m so zu wählen, dass $\alpha + m - 1 \geqq \frac{1}{R}$ ist. Dann ist offenbar

$$|z + \nu| \geqq \alpha + m > \alpha + m - 1$$

für $\alpha \leqq \zeta$, $\nu = m, m+1, \dots,$ und nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Potenzreihen

$$|\varphi_\lambda(y)| \leqq \frac{G}{R^\lambda} \leqq (\alpha + m - 1)^\lambda G, \qquad (\lambda = 2, 3, \dots)$$

für alle Werthe von y, welche dem oben genannten Gebiet dieser Veränderlichen angehören. Hieraus folgt für $\alpha \leqq \zeta$, $\nu \geqq m$:

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{z+\nu}, y\right)\right| \leqq 1 + \left|\frac{\alpha+m-1}{z+\nu}\right|^2 G + \left|\frac{\alpha+m-1}{z+\nu}\right|^3 G + \dots \leqq 1 + \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^2 G$$

$$+ \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^3 G + \dots = 1 + \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^2 \frac{G}{1 - \dfrac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}}$$

$$\leqq 1 + \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^2 \frac{G}{1 - \dfrac{\alpha+m-1}{\alpha+m}} < 1 + \frac{(\alpha+m)^3 G}{(\alpha+\nu)^2}.$$

Der absolute Betrag unseres Productes ist mithin für die oben besprochenen Werthe von y und z kleiner als die constante, durch das convergirende Product

$$\prod_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\frac{(a+m)^3 G}{(a+\nu)^2}\right)$$

dargestellte Zahl. Man findet nun auch ohne Schwierigkeit, dass $\lim P(y, z)$ für $\zeta' = \pm\infty$, $\alpha \leqq \zeta$ gleich Eins ist.

Wir beweisen nun zunächst den oben über $F(z)$ ausgesprochenen Satz für einige specielle Functionen der Form $F(z)$, woraus sodann die Allgemeingültigkeit des Satzes leicht gefolgert werden kann. Man darf offenbar unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Breite des im Satze erwähnten Parallelstreifens gleich Eins ist.

2. Aus dem bekannten Ausdrucke der Gammafunction:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^z}{1+\frac{z}{\nu}}$$

ergiebt sich, wenn $z = \zeta + i\zeta'$ gesetzt wird:

$$(1)\qquad |\Gamma(z)|^2 = \Gamma(\zeta+i\zeta')\Gamma(\zeta-i\zeta') = \frac{\Gamma^2(\zeta)}{\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{\zeta'}{\zeta+\nu}\right)^2\right]}.$$

Wird nun die Veränderliche z auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt, so zeigt die Gleichung (1), dass $\Gamma(z)$ sich der Grenze Null nähert, wenn ζ' dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Offenbar gilt dies ebenfalls von $z^k\Gamma(z)$, wie gross auch die positive ganze Zahl k sein mag.

3. Es soll nun bewiesen werden, dass der Quotient

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)}$$

in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ die Eigenschaft hat, mit z^{a-b} multiplicirt, sich der Grenze Eins zu nähern, wenn z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst.

Für diesen Nachweis ist die Gleichung

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = z^{b-a} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-\frac{b}{z+\nu}}{1-\frac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a} \tag{2}$$

von Wichtigkeit. Sie ergiebt sich durch Multiplication aus den Gleichungen

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = \frac{1-\frac{b}{z}}{1-\frac{a}{z}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-\frac{b}{z+\nu}}{1-\frac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{b-a},$$

$$1 = z\left(1+\frac{1}{z}\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{z+\nu}}{1+\frac{1}{\nu}} = z^{b-a}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{b-a}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{b-a}},$$

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

Ist nun R eine positive Constante, welche die Bedingungen

$$R < \left|\frac{1}{a}\right|, \quad R < 1$$

erfüllt, so ist der absolute Betrag des Ausdruckes

$$\frac{1-bx}{1-ax}(1+x)^{b-a}$$

für $|x| \leqq R$ kleiner als eine angebbare endliche Grösse, und ausserdem gilt alsdann eine Reihenentwickelung der Form

$$\frac{1-bx}{1-ax}(1+x)^{b-a} = 1 + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x^3 + \cdots,$$

wo die φ von x unabhängige Werthe haben. Nimmt man nun die positive ganze Zahl m so gross an, dass $a + m - 1 \geqq \frac{1}{R}$, so ist das Product

$$\prod_{\nu=m}^{\infty} \frac{1-\frac{b}{z+\nu}}{1-\frac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a} = \prod_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\frac{\varphi_2}{(z+\nu)^2}+\cdots\right),$$

für $\zeta \geqq \alpha$, auf Grund des in § 1. bewiesenen Hülfsatzes, dem absoluten Betrage nach kleiner als eine gewisse endliche Grösse und nähert sich mit wachsendem $|z|$ der Grenze Eins. Aus der Gleichung

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = z^{b-a} \prod_{\nu=0}^{m-1} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a} \cdot \prod_{\nu=m}^{\infty} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a}$$

folgt daher, dass ihre linke Seite auf die Form

$$(3) \qquad \frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = z^{b-a}\varphi$$

gebracht werden kann, wo φ eine Grösse bezeichnet, welche sich der Grenze Eins nähert, wenn die Veränderliche z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst, während ihr reeller Theil der Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ unterworfen ist. Dies gilt natürlich um so mehr, wenn ζ auf das Intervall $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt wird.

4. Um das Verhalten des Quotienten

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(b-z)}$$

im Bereiche $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ zu ermitteln, ist es hinreichend zu entscheiden, wie sich der Quotient $\dfrac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}$ daselbst verhält; denn es ist

$$(4) \qquad \frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(b-z)} = \frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z)} \cdot \frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z+b)} \cdot \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)},$$

und nach § 3. wissen wir schon, wie sich die zwei ersten Factoren der rechten Seite in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen verhalten. Da $\Gamma(i\zeta'-\zeta)$ und $\Gamma(-i\zeta'-\zeta)$ conjugirte Grössen sind, so ist der absolute Betrag von

$$(5) \qquad \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)} = \frac{\Gamma(\zeta+i\zeta')}{\Gamma(-\zeta-i\zeta')} = \frac{\Gamma(i\zeta'+\zeta)}{\Gamma(i\zeta'-\zeta)} \cdot \frac{\Gamma(i\zeta'-\zeta)}{\Gamma(-i\zeta'-\zeta)}$$

gleich dem absoluten Betrage von

$$\frac{\Gamma(i\zeta' + \zeta)}{\Gamma(i\zeta' - \zeta)}.$$

Schliesslich hat man also, nur diesen letzten Quotienten zu betrachten.

Schreibt man in der Gleichung (2) § 3. statt z, a, b bezüglich $i\zeta', -\zeta, \zeta$, so folgt

$$(6) \qquad \frac{\Gamma(i\zeta' + \zeta)}{\Gamma(i\zeta' - \zeta)}$$

$$= (i\zeta')^{2\zeta} \prod_{\nu=0}^{m-1} \frac{1 - \dfrac{\zeta}{i\zeta' + \nu}}{1 + \dfrac{\zeta}{i\zeta' + \nu}} \left(1 + \frac{1}{i\zeta' + \nu}\right)^{2\zeta} \cdot \prod_{\nu=m}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{\zeta}{i\zeta' + \nu}}{1 + \dfrac{\zeta}{i\zeta' + \nu}} \left(1 + \frac{1}{i\zeta' + \nu}\right)^{2\zeta}.$$

Nimmt man nun R kleiner als Eins und m so gross an, dass die Bedingung

$$\frac{|\zeta|}{m} \leqq R < 1$$

erfüllt ist, wenn ζ auf das Intervall $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ beschränkt wird, so ist der absolute Betrag von

$$\frac{1 - \dfrac{\zeta}{i\zeta' + \nu}}{1 + \dfrac{\zeta}{i\zeta' + \nu}} \left(1 + \frac{1}{i\zeta' + \nu}\right)^{2\zeta}$$

für $\nu = m, m + 1, \ldots$ und für alle reellen Werthe von ζ' kleiner als eine angebbare Grösse, und es gilt für denselben Ausdruck auch eine Reihenentwickelung der Form

$$1 + \frac{\varphi_2(\zeta)}{(i\zeta' + \nu)^2} + \frac{\varphi_3(\zeta)}{(i\zeta' + \nu)^3} + \cdots.$$

Wendet man jetzt den in § 1. bewiesenen Hülfsatz an, so folgt aus den Gleichungen (5) und (6), da $(i\zeta')^{2\zeta} = z^{2\zeta}\left(\dfrac{i\zeta'}{\zeta + i\zeta'}\right)^{2\zeta}$ ist, dass der Quotient $\dfrac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}$ auf die Form

$$(7) \qquad \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)} = z^{2\zeta}\varphi$$

gebracht werden kann, wo φ eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Betrag sich der Grenze Eins nähert, wenn der imaginäre Theil von z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst, während der reelle Theil die Bedingung $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ erfüllt.

Versteht man unter φ fortwährend eine Grösse, deren absoluter Betrag sich einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze nähert, wenn $\sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2} = |z|$ gemäss der Bedingung $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ ohne Ende wächst, so ergiebt sich aus den Gleichungen (3), (4) und (7):

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(b-z)} = z^{2\zeta-a-b}\varphi,$$

und hieraus

$$\frac{\Gamma(b-z)}{\Gamma(z-a)} = z^{a+b-2\zeta}\varphi.$$

5. Mit Hülfe der in den vorigen Paragraphen bewiesenen Gleichungen können wir nunmehr das Verhalten der Function

$$F(z) = \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\nu-z)}$$

in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen charakterisiren. Aus Gleichung (3) folgt

$$\Gamma(z-a) = \Gamma(z)\ \frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z)} = z^{-a}\Gamma(z)\varphi,$$

$$\Gamma(a-z) = \Gamma(-z)\frac{\Gamma(a-z)}{\Gamma(-z)} = z^{a}\Gamma(-z)\varphi.$$

In diesen Gleichungen, sowie auch in den folgenden, sind stets unter φ Grössen verstanden, deren absolute Beträge sich endlichen von Null verschiedenen Grenzen nähern, wenn die auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen beschränkte Veränderliche z ihrem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Mit Benutzung der obigen Gleichungen kann $F(z)$ zunächst auf die folgende Form gebracht werden

$$F(z) = z^{\varkappa}\Gamma^{m-n}(z)\Gamma^{\mu-\nu}(-z)\varphi,$$

wo zur Abkürzung

$$\varkappa = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu - \beta_1 - \ldots - \beta_\nu$$

gesetzt worden ist. Benutzt man die in § 4. bewiesene Gleichung $\Gamma(-z) = z^{-2\zeta}\Gamma(z)\varphi$, so folgt:

$$(8) \quad \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\nu-z)} = z^{x-2(\mu-\nu)\zeta}\Gamma^{m-n+\mu-\nu}(z)\varphi.$$

Dieser Gleichung entnehmen wir unmittelbar den folgenden Satz:

Bewegt sich die Veränderliche z in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite derart, dass ihr absoluter Betrag ohne Ende wächst, so nähert sich $z^kF(z)$, falls $m+\mu > n+\nu$ ist, der Grenze Null, und zwar wie gross auch die positive ganze Zahl k angenommen werden mag. Ist $m+\mu = n+\nu$, so kann die nicht negative ganze Zahl k so angenommen werden, dass $z^{-k}F(z)$ sich auch der Grenze Null nähert. Ist aber $m+\mu < n+\nu$, so wird $z^{-k}F(z)$ unendlich gross, wie gross auch k angenommen werden mag.

Die nachstehenden Gleichungen (9), (10), (11), (12) sind bemerkenswerthe specielle Fälle von (8).

$$(9) \quad \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\mu-z)} = z^x\Gamma^{m-n}(z)\varphi,$$

$$x = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu - \beta_1 - \ldots - \beta_\mu.$$

$$(10) \quad \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)} = z^x\Gamma^{m-n}(z)\varphi,$$

$$x = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m.$$

$$(11) \quad \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_m)} = z^x\varphi,$$

$$x = b_1 + \ldots + b_m - a_1 - \ldots - a_m.$$

$$(12) \quad \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)}\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p) = z^{x-p+2p\zeta}\Gamma^{m-n-2p}(z)\varphi,$$

$$x = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m.$$

Die letzte Gleichung ergiebt sich leicht, indem man die trigonometrischen Factoren der linken Seite mit Hülfe der Formel $\sin\pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}$

durch die Gammafunction ausdrückt und sodann die allgemeine Gleichung (8) in Anwendung bringt.

6. Beschränkt man die Veränderliche z auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen, so verhält sich der im vorigen Paragraphen betrachtete Ausdruck $F(z)$, abgesehen von einer Potenz von z, für ohne Ende wachsende Werthe von z wie eine ganzzahlige Potenz von $\Gamma(z)$. Es ist daher von Wichtigkeit, genauer, als dies in § 2 geschah, zu bestimmen, in welcher Weise $\Gamma(z)$ sich der Grenze Null nähert, wenn z, in einem solchen Streifen bleibend, sich von der reellen Axe entfernt. Da $\Gamma(\zeta + i\zeta')$ und $\Gamma(\zeta - i\zeta')$ conjugirte Grössen sind, so ist es für unseren Zweck hinreichend, $\Gamma(z)$ für wachsende *positive* Werthe von ζ' zu untersuchen.

In Folge der Gleichung $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ist

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)}}\sqrt{\frac{\pi}{\sin \pi z}}.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man die Gleichungen $\Gamma(z) = z^{2\zeta-1}\Gamma(1 - z)\varphi$ und $\sin \pi z = \frac{e^{\pi z i} - e^{-\pi z i}}{2i}$ berücksichtigt:

$$\Gamma(z) = z^{\zeta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi z i}{2}} \sqrt{\frac{2\pi i}{e^{2\pi z i} - 1}}\,\varphi,$$

wo φ die früher festgesetzte Bedeutung hat. Die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse nähert sich für wachsende positive Werthe von ζ' der Grenze $-2\pi i$. Man kann somit einfach

$$(13) \qquad \Gamma(z) = z^{\zeta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi z i}{2}} \varphi_1$$

setzen, wo φ_1 für wachsende *positive* Werthe von ζ' sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert, wenn ζ zwischen endlichen Grenzen bleibt. Weil $|\Gamma(\zeta - i\zeta')| = |\Gamma(\zeta + i\zeta')|$ ist, so haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Bewegt sich die Veränderliche z in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen derart, dass ihr absoluter Betrag ohne Ende wächst, so gilt, unabhängig von dem Zeichen von ζ', die Gleichung

$$|\Gamma(z)| = |z|^{\zeta - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\zeta'|} \Phi, \tag{14}$$

wo Φ eine positive Veränderliche bezeichnet, die sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert.[1]

Mit Hülfe von (14) können die Gleichungen (8), (9), (10), (12) des vorigen Paragraphen in anderer Weise geschrieben werden. Nehmen wir beispielsweise nur die Gleichungen (10) und (12) in Betracht, so ergiebt sich der folgende Satz:

Bewegt sich die Veränderliche z in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen derart, dass ihr absoluter Betrag ohne Ende wächst, so gelten, unabhängig von dem Zeichen von ζ', die Gleichungen

$$\left|\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)}\right| = \left|z^{x+(m-n)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)}\right| e^{-\frac{m-n}{2}\pi|\zeta'|}\Phi, \tag{15}$$

$$\left|\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)}\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\right| \tag{16}$$

$$= \left|z^{x+(m-n)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)}\right| e^{-\frac{m-n-2p}{2}\pi|\zeta'|}\Phi,$$

$$(x = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m)$$

wo die Φ die oben angegebene Bedeutung haben.

II.

Functionen, welche lineare homogene Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen.

7. Da es bei der Anwendung der Gammafunctionen in der Theorie der bestimmten Integrale von Wichtigkeit ist, solche charakteristische Eigenschaften der Functionen zu besitzen, dass sie ohne Schwierigkeit auch an

---

[1] Cf. Pincherle. *Sulle funzione ipergeometriche generalizzate.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. Vol. 4, S. 798—799.

den zu bestimmenden Integralen erkannt werden können, so stellen wir uns die Aufgabe, einen allgemeinen Ausdruck zu ermitteln, durch welchen sämmtliche Functionen, welche die im Nachstehenden unter I, II und III erwähnten Eigenschaften besitzen, dargestellt werden können. Diese Eigenschaften kommen nämlich mehreren der im vorigen Abschnitte betrachteten Functionen zu und können sehr leicht auch an den entsprechenden Integralen erkannt werden.

Es sei also $F(z)$ eine analytische Function, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. $F(z)$ befriedigt die Differenzengleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z),$$

wo $\mathbf{r}(z)$ eine gegebene rationale Function bedeutet.

II. In der Ebene der Veränderlichen $z = \zeta + i\zeta'$ giebt es einen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$, wo $F(z)$ sich überall regulär verhält; dabei wird in Bezug auf die Lage des Streifens vorausgesetzt, dass die Zahl α im algebraischen Sinne grösser ist als die reellen Theile der Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$.

III. In dem unter II erwähnten Bereiche kann $F(z)$, mit einer passenden Potenz von z multiplicirt, dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen, wenn für den Fall, dass die Stelle $z = 0$ dem fraglichen Bereiche angehört, eine beliebig kleine Umgebung derselben aus dem genannten Bereiche ausgeschlossen wird.

Verhält sich eine der Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ genügende Function in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ regulär, so verhält sie sich in derselben Weise in dem Streifen $(\alpha + 1 \leqq \zeta \leqq \alpha + 2)$, wenn jener keine Unendlichkeitsstelle von $\mathbf{r}(z)$ enthält. Ebenso verhält sie sich, weil $F(z-1) = \dfrac{F(z)}{\mathbf{r}(z-1)}$ ist, auch in dem Streifen $(\alpha - 1 \leqq \zeta \leqq \alpha)$ regulär, wenn in diesem sich keine Nullstelle von $\mathbf{r}(z)$ findet. Auf Grund dieser evidenten Sätze können offenbar die oben unter II und III erwähnten Bedingungen durch die folgenden ersetzt werden:

II'. $F(z)$ verhält sich — unter β die im algebraischen Sinne grösste Zahl verstanden, welche unter den reellen Theilen der Nullstellen von

$\mathbf{r}(z)$ zu finden ist — im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geqq \beta$ definirten Hälfte der z-Ebene überall regulär.

III'. Wird die reelle Zahl α im algebraischen Sinne grösser als β, sonst aber beliebig angenommen, und die Veränderliche z auf den Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt, so kann $F(z)$, mit einer passenden Potenz von z multiplicirt, dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

Handelt es sich um die Aufgabe, diejenigen Functionen $f(z)$ zu bestimmen, welche die obigen Eigenschaften mit dem Unterschiede besitzen, dass die Hälfte der z-Ebene, wo sie sich regulär verhalten — anstatt der unendlich grossen positiven — die unendlich grossen negativen Zahlen enthalten soll, so kann diese Aufgabe, indem man $F(z) = f(-z)$ setzt, auf die vorige zurückgeführt werden.

Bezeichnen $z_1, \ldots, z_m$ die Null- und $z'_1, \ldots, z'_n$ die Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$, so kann $\mathbf{r}(z)$ auf die Form

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z - z_1)\ldots(z - z_m)}{(z - z'_1)\ldots(z - z'_n)} \tag{17}$$

gebracht werden. Den absoluten Betrag von a bezeichnen wir mit ρ und setzen

$$a = \rho e^{i\theta}.$$

Die reelle Zahl θ wird weiterhin stets durch die Bedingung

$$-\pi < \theta \leqq +\pi$$

in eindeutiger Weise definirt.

Zur Abkürzung setzen wir ferner

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z - z_1)\ldots\Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z'_1)\ldots\Gamma(z - z'_n)}. \tag{18}$$

In Folge dieser Definition besitzt die Function $\mathbf{F}(z)$, welche im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen oft benutzt werden soll, die Eigenschaft

$$\mathbf{F}(z + 1) = a^{-1}\mathbf{r}(z)\mathbf{F}(z).$$

Es ist offenbar $a^z\mathbf{F}(z)$ eine specielle Function, welche die Bedingungen I. und II. erfüllt. Aus Gleichung (15) ergiebt sich leicht, dass $a^z\mathbf{F}(z)$

auch die Eigenschaft III. wenigstens in allen den Fällen besitzt, wo $m \geqq n$ und a gleich einer reellen positiven Zahl ist. Durch die nachfolgenden Schlussfolgerungen gelangt man aber zu einer analytischen Darstellung sämmtlicher Functionen, welche die genannten drei Eigenschaften überhaupt besitzen können.

Setzt man, unter $F(z)$ eine eben solche Function verstehend:

$$\phi(z) = a^{-z}\frac{F(z)}{\mathbf{F}(z)}, \tag{19}$$

so ist $\phi(z+1) = \phi(z)$. Wegen II. kann die Function $\phi(z)$ an keiner endlichen Stelle des Bereichs $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ und somit, weil sie die Periode 1 besitzt, auch an keiner endlichen Stelle der z-Ebene unendlich gross werden. Gelingt es nun diese ganze und periodische Function zu bestimmen, so ergiebt sich $F(z)$ aus der Gleichung (19).

Wird die positive ganze Zahl λ hinreichend gross angenommen, so kann nachgewiesen werden, dass die der Gleichung $\Psi(z+1) = (-1)^\lambda \Psi(z)$ genügende Function

$$\Psi(z) = \frac{\phi(z)}{\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_\lambda)}, \tag{20}$$

und somit auch $\phi(z)$, durch trigonometrische Functionen ausgedrückt werden kann. Offenbar kann $\Psi(z)$ im Endlichen nur für solche Werthe, die sich von den Constanten $c_1, \ldots, c_\lambda$ um ganze Zahlen unterscheiden, einen unendlich grossen Werth annehmen. Damit $\Psi(z)$ keine Unendlichkeitsstelle höherer als der ersten Ordnung besitze, wollen wir der Einfachheit halber festsetzen, dass die Differenz irgend zweier der Constanten $c_1, \ldots, c_\lambda$ keine ganze Zahl sein soll; im übrigen sind $c_1, \ldots, c_\lambda$ beliebig anzunehmende Grössen. Ihre Anzahl soll zunächst nur der Bedingung $2\lambda + n \geqq m + 2\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$ unterworfen sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Function $\Psi(z)$ mit $F(z)$ die Eigenschaft gemein, dass sie, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, für $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$, $\zeta' = \pm\infty$ gleich Null wird. Dies ergiebt sich, indem man bemerkt, dass der Nenner von

$$\Psi(z) = \frac{a^{-z}F(z)}{\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_\lambda)}, \tag{21}$$

auf Grund der obigen Definition von $\mathbf{F}(z)$, die Form der in Gleichung (16) des vorigen Abschnittes vorkommenden Function hat. Mit Benutzung jener Gleichung erhält man[1]

$$|\Psi(z)| = e^{\theta\zeta' + \frac{m-n-2\lambda}{2}\pi|\zeta'|}\rho^{-\zeta}\left|F(z) z^{(n-m)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)-\varkappa}\right| \Phi,$$

$$(\varkappa = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m),$$

woraus die Richtigkeit unserer Behauptung sofort erhellt, weil der Exponent von e niemals positiv werden kann. Da $\Psi(z + 1) = (-1)^{\lambda}\Psi(z)$ ist, so ergiebt sich leicht, dass $z^{-k}\Psi(z)$, bei passender Bestimmung von k, nicht nur für $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$, sondern auch für ein unbeschränkt veränderliches ζ, sich in gleichmässiger Weise der Grenze Null nähert, wenn $|\zeta'|$ ohne Ende wächst. Dies wollen wir folgendermassen ausdrücken:

$$\lim_{\zeta' = \pm\infty} z^{-k}\Psi(z) = 0, \qquad -\infty \leqq \zeta \leqq +\infty.$$

Bildet man nun schliesslich für den Fall, dass λ grade ist, den Ausdruck

$$D(z) = \Psi(z) - [A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)],$$

für den Fall aber, dass λ ungrade ist, den Ausdruck

$$D_1(z) = \Psi(z) - \left(\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin \pi(z - c_\lambda)}\right),$$

so kann gezeigt werden, dass die Constanten $A_1, \ldots, A_\lambda$ immer und nur in einer Weise derart bestimmt werden können, dass die Differenz $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) sich auf eine Constante reducirt. Da die Differenz $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) bei unbestimmten Werthen von $A_1, \ldots, A_\lambda$ überhaupt nur für solche Werthe von z, die sich von $c_1, \ldots, c_\lambda$ um ganze Zahlen unterscheiden, unendlich werden kann, und weil sie überdies die Eigenschaft $D(z + 1) = D(z)$ (resp. $D_1(z + 1) = - D_1(z)$) besitzt, so folgt zunächst, dass sie sich auf eine ganze Function reducirt, wenn $A_1, \ldots, A_\lambda$ so bestimmt werden, dass $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) sich in der Umgebung jeder der

[1] In diesem Abschnitte bezeichnet Φ stets eine positive Veränderliche von der in § 6. angegebenen beschaffenheit.

Stellen $c_1, \ldots, c_\lambda$ regulär verhält. Eine solche Bestimmung ist stets und nur in einer Weise möglich. Denn in der Umgebung von $z = c_1$ hat man beispielsweise

$$D(z) + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) = \Psi(z) - [A_2 \operatorname{cotg} \pi(z - c_2) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$

$$= \frac{C}{z - c_1} + \mathfrak{P}(z - c_1),$$

$$- A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) = - \frac{A_1}{\pi(z - c_1)} + \mathfrak{P}_1(z - c_1),$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z - c_1$ fortschreitende Reihen bezeichnen, während C eine gewisse Constante bedeutet. Setzt man nun $A_1 = \pi C$, so verhält sich $D(z)$ in der Umgebung von $z = c_1$ regulär. Wir können somit annehmen, dass $A_1, \ldots, A_\lambda$ solche Werthe haben, dass $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) eine ganze Function ist.

Aus den Gleichungen

$$\lim_{\zeta' = \pm\infty} z^{-k}\Psi(z) = 0, \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} \frac{1}{\sin z} = 0, \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} \operatorname{cotg} z = \mp i,$$

$$-\infty \leqq \zeta \leqq +\infty,$$

folgt ferner, dass $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) bei passender Bestimmung von k ebenfalls die Eigenschaft

$$(22) \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} z^{-k} D(z) = 0, \qquad -\infty \leqq \zeta \leqq +\infty,$$

haben muss. Daraus ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung $D(z + 1) = D(z)$:

$$(23) \qquad \lim_{\zeta = \pm\infty} z^{-k} D(z) = 0, \qquad -\infty \leqq \zeta' \leqq +\infty.$$

Aus (22) und (23) folgt schliesslich, dass $z^{-k}D(z)$ (resp. $z^{-k}D_1(z)$) sich der Grenze Null nähert, wenn z in beliebiger Weise sich der Stelle $z = \infty$ nähert. Daher ist $z = \infty$ keine wesentliche singuläre Stelle für die ganze Function $D(z)$ (resp. $D_1(z)$), welche somit rational sein muss. Wenn aber eine rationale Function die Eigenschaft $D(z + 1) = D(z)$ (resp. $D_1(z + 1) = - D_1(z)$) besitzt, so muss sie sich auf eine Constante reduciren. Insbesondere muss offenbar $D_1(z) = 0$ sein.

Da $\Psi(z)$ durch Gleichung (21) definirt ist, so erhalten wir für unsere Function $F(z)$, je nachdem λ grade oder ungrade angenommen wird, die folgenden Ausdrücke:

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \ldots \tag{24}$$

$$\ldots \sin\pi(z - c_\lambda)[A_0 + A_1 \operatorname{cotg}\pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg}\pi(z - c_\lambda)], \qquad {\scriptstyle (\lambda = 2k)}$$

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \ldots \sin\pi(z - c_\lambda)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin\pi(z - c_\lambda)}\right], \qquad {\scriptstyle (\lambda = 2k+1)} \tag{25}$$

wo statt D A_0 geschrieben worden ist. Die Grössen $c_1, \ldots, c_\lambda$ haben wir nur der Bedingung unterworfen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl sein soll. Ihre Anzahl λ kann unter der Beschränkung

$$2\lambda + n \geqq m + 2\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$$

beliebig angenommen werden.

Unter den in den obigen Formen darstellbaren Functionen ist jede Function, welche die Eigenschaften I., II., III. überhaupt besitzen kann, zu suchen. Es ist nun zunächst sofort ersichtlich, dass die beiden Ausdrücke (24) und (25) nicht nur die unter I. sondern auch die unter II. genannte Eigenschaft besitzen, wenn die unter II. erwähnte Zahl α grösser ist als der reelle Theil einer jeden der Constanten $z_1, \ldots, z_m$. Wir gehen jetzt dazu über, unter den obigen Functionen diejenigen zu ermitteln, welche auch die unter III. erwähnte Eigenschaft besitzen.

8. **Erster Fall:** $m < n$. Da $\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$, in Folge der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der Zahl θ, höchstens gleich Eins ist, so ist die Bedingung $2\lambda + n \geqq m + 2\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$ erfüllt, wenn $\lambda = 1$ angenommen wird. Aus (25) ergiebt sich

$$F(z) = A_1 a^z \mathbf{F}(z) = A_1 a^z \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z_1') \ldots \Gamma(z - z_n')}.$$

Wendet man die Gleichung (15) des vorigen Abschnittes an, so folgt

$$|F(z)| = \rho^{\zeta} e^{\frac{n-m}{2}\pi|\zeta'|-\theta\zeta'} \left| z^{x+(m-n)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)} \right| \Phi$$
$$(x = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m).$$

Durchläuft ζ' alle reellen Werthe, so kann $\frac{n-m}{2}\pi|\zeta'| - \theta\zeta'$, wegen der Voraussetzung $n > m$, beliebig grosse positive Werthe erhalten. Der absolute Betrag von $F(z)z^{-k}$ kann daher, wie gross auch k sein mag, in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen über jede endliche Grenze wachsen. Also haben wir den Satz:

Ist die Gradzahl des Zählers von $\mathfrak{r}(z)$ *kleiner als die des Nenners, so giebt es, von Null abgesehen, überhaupt keine analytische Function, welche, ausser den Eigenschaften* I., II., *noch die Eigenschaft* III. *besässe.*

9. **Zweiter Fall:** $m = n$. Auch in diesem Falle kann offenbar $\lambda = 1$ gesetzt werden. Aus (25) ergiebt sich

$$F(z) = A_1 a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_m')}.$$

Wendet man die Gleichung (15) an, so folgt

$$(26) \qquad |F(z)| = \rho^{\zeta} e^{-\theta\zeta'} |z^x| \Phi, \qquad (x = z_1' + \ldots + z_m' - z_1 - \ldots - z_m).$$

Ist a eine reelle negative oder eine complexe Grösse, und somit θ von Null verschieden, so kann der absolute Betrag von $F(z)z^{-k}$, wie gross auch k sei, in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen über jede endliche Grenze wachsen. Ist dagegen a reel und positiv, d. h. $\theta = 0$, so nähert sich $F(z)z^{-k}$ in jedem solchen Streifen der Grenze Null, wenn k grösser als der reelle Theil von x angenommen wird. Also haben wir den Satz:

Ist die Gradzahl des Zählers von $\mathfrak{r}(z)$ *gleich der des Nenners und* a *eine negative oder complexe Grösse, so giebt es, von Null abgesehen, überhaupt keine analytische Function, welche, ausser den Eigenschaften* I., II., *noch die Eigenschaft* III. *besässe. Ist dagegen* a *eine reelle und positive Zahl, so ist*

$$F(z) = a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z'_1)\ldots\Gamma(z-z'_m)},$$

abgesehen von einem constanten Factor, die einzige Function, welche alle drei Eigenschaften wirklich besitzt.

Unter Voraussetzung eines positiven a ergiebt sich aus (26) der Satz:

In jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$, *für den* α *grösser als die reellen Theile von* $z_1, \ldots, z_m$ *ist, kann der absolute Betrag von* $F(z)$, *wenn der reelle Theil von* $x \leqq 0$ *ist, nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Ist dagegen der genannte Theil grösser als Null, so wird* $F(z)$ *in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen mit wachsendem* $|z|$ *unendlich gross.*

10. **Dritter Fall:** $m > n$. Bei dieser Gelegenheit soll dieser Fall nicht in seiner grössten Allgemeinheit erörtert werden. Wir wollen nämlich voraussetzen, dass die in $\mathbf{r}(z)$ vorkommende Grösse a reel und positiv sei. Diese Beschränkung kann dadurch motivirt werden, dass die Resultate unserer Untersuchungen, wenn a reel und positiv angenommen wird, in sehr einfacher Weise in einem Satze zusammengefasst werden können. Ausserdem zeigt es sich bei den Anwendungen unserer Functionen (IV. Abschnitt), dass es in den meisten und wichtigsten Fällen sogar hinreichend ist, sich auf solche Functionen, für die $a = 1$ ist, zu beschränken.

Ferner soll die in § 7 unter III. (resp. III'.) erwähnte Bedingung die folgende beschränkende Modification erfahren:

III^a. Die betreffende Function $F(z)$ soll in *keinem* Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$, welche die unter II. angegebene Lage hat, ihrem absoluten Betrage nach über eine endliche, von der Lage des Streifens im Allgemeinen abhängende, Grenze wachsen können.

Diese Bedingung wird in ähnlicher Weise motivirt, wie die Voraussetzung, dass a positiv sein soll.

Im Nachstehenden kommt der folgende Hülfsatz zur Anwendung:

Wenn die beiden Grenzwerthe

$$\lim_{\zeta'=+\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z-c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z-c_\lambda)]$$

und

$$\lim_{\zeta'=-\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \dots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$

gleich Null sind, so ist bei passender Bestimmung von $B_1, \dots, B_{\lambda-1}$:

$$(27) \qquad A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \dots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)$$
$$= \frac{1}{\sin \pi(z - c_\lambda)} \left[\frac{B_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \dots + \frac{B_{\lambda-1}}{\sin \pi(z - c_{\lambda-1})} \right].$$

Mit Benutzung der Gleichungen

$$\lim_{\zeta'=+\infty} \operatorname{cotg} \pi(z - c) = -i, \qquad \lim_{\zeta'=-\infty} \operatorname{cotg} \pi(z - c) = i$$

ergiebt sich nämlich

$$\lim_{\zeta=\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \dots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$
$$= A_0 - iA_1 - \dots - iA_\lambda = 0,$$
$$\lim_{\zeta'=-\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \dots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$
$$= A_0 + iA_1 + \dots + iA_\lambda = 0,$$

und hieraus:

$$A_0 = 0, \qquad A_\lambda = -A_1 - A_2 - \dots - A_{\lambda-1}.$$

Setzt man diese Werthe in die linke Seite von (27) ein, so nimmt sie, nach einer einfachen Rechnung, die Form der rechten Seite an.

Jede Function $F(z)$, welche die in Rede stehenden Eigenschaften besitzt, kann sowohl in der Form (24) als in der Form (25) dargestellt werden, je nachdem die ganze Zahl λ, welche nur der Bedingung $2\lambda + n \geqq m$ zu genügen braucht, grade oder ungrade angenommen wird. Die einfachste Form erhält aber $F(z)$, *wenn* λ *die kleinste ganze Zahl bezeichnet, für welche* $2\lambda + n$ *nicht kleiner ist als* m*:*

$$(28) \qquad 2\lambda + n \geqq m > 2(\lambda - 1) + n.$$

Es erhält dann λ einen eindeutig bestimmten Werth; und zwar aus der Gleichung $2\lambda + n = m$, wenn $m - n$ grade ist, aus der Gleichung $2\lambda + n = m + 1$ dagegen, wenn $m - n$ ungrade ist. Weiterhin soll λ stets durch (28) definirt sein.

Ist nun die durch (28) definirte Zahl λ grade, so ergeben sich sämmtliche Functionen, welche, ausser den in § 7. unter I. und II., noch die im Vorhergehenden unter III^a. angegebene Eigenschaft besitzen, aus der Gleichung

$$(29)\qquad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \ldots$$
$$\ldots \sin\pi(z - c_\lambda)[A_0 + A_1 \operatorname{cotg}\pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg}\pi(z - c_\lambda)]. \quad (\lambda = 2k)$$

Ist dagegen λ ungrade, so ergeben sie sich aus der Gleichung

$$(30)\quad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \ldots \sin\pi(z - c_\lambda)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin\pi(z - c_\lambda)}\right], \quad (\lambda = 2k+1)$$

In den nachfolgenden Gleichungen haben wir zur Abkürzung

$$z^{x + (m-n)\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)} = Z$$

gesetzt.

A. Ist $\lambda = 2k + 1$, so ergiebt sich aus (30) mit Benutzung von (16)

$$(31)\quad |F(z)| = a^\zeta e^{\frac{n + 2(\lambda - 1) - m}{2}\pi|\zeta'|} |Z| \left| A_1 \frac{\sin\pi(z - c_\lambda)}{\sin\pi(z - c_1)} + \ldots + A_\lambda \frac{\sin\pi(z - c_\lambda)}{\sin\pi(z - c_\lambda)} \right| \Phi,$$

wo Φ die in § 6. angegebene Bedeutung hat. Wegen (28) ist $n + 2(\lambda - 1) - m$ negativ. Es ist somit $\lim\limits_{\zeta' = \pm\infty} F(z) = 0$, wenn der reelle Theil von z auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird. Ist also die durch (28) definirte Zahl λ ungrade, so besitzt jede in der Form

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \ldots \sin\pi(z - c_\lambda)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin\pi(z - c_\lambda)}\right]$$

darstellbare Function, und keine andere, die drei Eigenschaften I., II., III^a.

B. Ist $\lambda = 2k$, so ergiebt sich aus (29) mit Benutzung von (16):

$$|F(z)| = a^\zeta e^{\frac{n + 2\lambda - m}{2}\pi|\zeta'|} |Z| |A_0 + A_1 \operatorname{cotg}\pi(z - c_1) + \ldots| \Phi.$$

Da $n + 2\lambda - m$ keinenfalls negativ sein kann, und der reelle Theil des Exponenten von z (im Ausdrucke Z) für hinreichend grosse Werthe von ζ positiv ausfällt, so ist es, wenn $F(z)$ die Eigenschaft III^a. besitzen soll, jedenfalls nothwendig, dass die beiden Grenzwerthe

$$\lim_{\zeta = \pm\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg}\pi(z - c_1) + \ldots]$$

gleich Null sind. Auf Grund des oben bewiesenen Hülfsatzes erhält $F(z)$ dann die Form

$$(32) \qquad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin \pi(z - c_1) \dots$$

$$\dots \sin \pi(z - c_{\lambda-1}) \left[\frac{B_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \dots + \frac{B_{\lambda-1}}{\sin \pi(z - c_{\lambda-1})} \right].$$

Hieraus folgt mit Benutzung von (16):

$$(33) \quad |F(z)| = a^{\zeta} e^{\frac{n+2(\lambda-2)-m}{2}\pi|\zeta'|} |Z| \left| B_1 \frac{\sin \pi(z - c_{\lambda-1})}{\sin \pi(z - c_1)} + \dots + B_{\lambda-1} \frac{\sin \pi(z - c_{\lambda-1})}{\sin \pi(z - c_{\lambda-1})} \right|.$$

Weil $n + 2(\lambda - 2) - m < -2$ ist, so ist $\lim\limits_{\zeta' = \pm\infty} F(z) = 0$, wenn der reelle Theil von z auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird. Ist also die durch (28) definirte Zahl λ grade, so besitzt jede in der Form (32) darstellbare Function, und keine andere, alle drei Eigenschaften I., II., III[a].

Die unter A und B erhaltenen Resultate können folgendermassen zusammengefasst werden:

Bezeichnet p die grösste in λ enthaltene ungrade Zahl, so besitzt jede in der Form

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin \pi(z - c_1) \dots \sin \pi(z - c_p) \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \dots + \frac{A_p}{\sin \pi(z - c_p)} \right]$$

darstellbare Function, und keine andere, die drei Eigenschaften I., II., III[a].

Die Zahl p kann offenbar auch dadurch charakterisirt werden, dass sie die kleinste ungrade Zahl ist, für welche $2(p + 1) + n$ nicht kleiner ist als m, d. h. die kleinste ungrade Zahl, für welche $\lim\limits_{z=\infty} \frac{\mathbf{r}(z)}{z^{2(p+1)}}$ endlich ist. Bringt man $m - n$ auf die Form

$$m - n = 4q + r, \qquad \left(\begin{smallmatrix} q = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ r = 1, 2, 3, 4 \end{smallmatrix}\right)$$

so ist immer $p = 2q + 1$.

Die Resultate unserer obigen Untersuchungen können nun folgendermassen zusammengefasst werden:

Es sei a eine positive Zahl und die Gradzahl des Zählers der rationalen Function

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)\dots(z-z_m)}{(z-z_1')\dots(z-z_n')}$$

grösser als die des Nenners $(m > n)$, *sowie* p *die kleinste ungrade Zahl, für welche* $\lim\limits_{z=\infty} \frac{\mathbf{r}(z)}{z^{2(p+1)}}$ *endlich ist. Ferner seien* $c_1, \dots, c_p$ *beliebige Constanten, welche jedoch die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist. Dann hat jede in der Form*

$$(34)\quad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\dots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \dots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right],$$

wo

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z-z_1)\dots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\dots\Gamma(z-z_n')}$$

ist, darstellbare Function von $z = \zeta + i\zeta'$ *die folgenden Eigenschaften:*

I. $F(z)$ *befriedigt die Differenzengleichung*

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z) F(z).$$

II. $F(z)$ *verhält sich — unter* β *die in algebraischem Sinne grösste unter den reellen Theilen von* $z_1, \dots, z_m$ *zu findende Zahl verstanden — im Innern der durch die Bedingung* $\zeta \geqq \beta$ *definirten Hälfte der* z*-Ebene überall regulär.*

III. *Wird die reelle Zahl* α *im algebraischen Sinne grösser als* β, *sonst aber beliebig angenommen, und die Veränderliche* z *auf den Parallelstreifen* $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ *beschränkt, so kann* $F(z)$ *dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.*

Umgekehrt lässt sich auch jede monogene Function, von der man nur weiss, dass sie alle diese Eigenschaften besitzt, bei passender Bestimmung von $A_1, \dots, A_p$ *auf die Form* (34) *bringen.*

11. Aus den Gleichungen (31) und (33) des vorhergehenden Paragraph ergiebt sich ein Satz, der für die späteren Anwendungen unserer Functionen von grosser Wichtigkeit ist.

Der absolute Betrag der soeben betrachteten Function $F(z)$ lässt sich stets auf eine der beiden Formen (31) oder (33) bringen. Beide Ausdrücke enthalten einen Factor der Form $e^{-k\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$, wo die positive ganze Zahl k wegen (28) jedenfalls nicht kleiner als Eins sein kann. (Das Product der übrigen Factoren nähert sich, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von $z = \zeta + i\zeta'$, der Grenze Null, wenn $|\zeta'|$ ohne Ende wächst, während ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird.) Ist also x eine beliebige Grösse, deren reeller Theil positiv ist, und setzt man $x = e^{\xi + i\xi'}$, $-\frac{\pi}{2} < \xi' < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$|x^{-z}|e^{-k\frac{\pi}{2}|\zeta'|} = e^{-\xi\zeta + \xi'\zeta' - k\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$$

wegen der Ungleichung $\xi' - k\frac{\pi}{2} < 0$ eine Veränderliche, welche mit wachsendem $|\zeta'|$ sich der Grenze Null nähert, wenn ξ und ζ auf ein beliebiges, aber endliches Interwall beschränkt werden. Offenbar hat auch das Product dieser Veränderlichen mit einer beliebigen Potenz von z die genannte Eigenschaft. Hieraus ergiebt sich nun Folgendes:

Beschränkt man die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen und die Veränderliche x auf ein endliches Gebiet, dessen sämmtliche Punkte — die an der Grenze mit einbegriffen — positive Abscissen besitzen, so nähert sich die Grösse

$$z^{\mu} x^{-z} F(z),$$

wo $F(z)$ den Ausdruck (34) und μ eine beliebig gewählte positive Zahl bezeichnet, mit wachsendem $|\zeta'|$ gleichmässig der Grenze Null. Es hat somit das Integral

$$\varphi(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} F(z)\, dz, \tag{35}$$

erstreckt längs einer zur imaginären Axe parallelen Geraden $\zeta = c$, nicht nur einen bestimmten Sinn, wenn die betreffende Gerade durch keine Unendlichkeitsstelle von $F(z)$ geht, sondern es ist $\varphi(x)$ auch eine analytische Function von x.

Es wird im letzten Abschnitte bewiesen, dass $\varphi(x)$ einer linearen Differentialgleichung Genüge leistet, wenn c im algebraischen Sinne grösser ist als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$; sowie auch, dass $\varphi(x)x^{z-1}$ für ein beliebiges z sich der Grenze Null nähert, falls der reelle Theil von x ohne Ende wächst. Es hat somit auch das Integral

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{z-1}\,dx$$

einen bestimmten Sinn, wenn der reelle Theil von z hinreichend gross angenommen wird. Dies Integral kann, was sehr interessant ist, auf die Form $F(z)$ gebracht werden.

12. Unter $c_1, \ldots, c_p$ sind in diesem Paragraphen fortwährend Grössen verstanden, welche die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist.

Sind $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ p Functionen der Form (34), etwa:

$$F_1(z) = a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1^{(1)}}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p^{(1)}}{\sin\pi(z-c_p)}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_p(z) = a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1^{(p)}}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p^{(p)}}{\sin\pi(z-c_p)}\right],$$

so kann, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & \ldots & A_p^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^{(p)} & \ldots & A_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, zwischen denselben offenbar keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen.

Ist $F(z)$ eine beliebige Function der Form (34), und Δ von Null verschieden, so ist unmittelbar ersichtlich, dass die Constanten $C_1, \ldots, C_p$ immer so bestimmt werden können, dass

$$F(z) = C_1F_1(z) + \ldots + C_pF_p(z)$$

wird.

Nehmen wir $c_1, \dots, c_p$ von den Nullstellen der Function $\mathbf{F}(z)$ verschieden an, so erhalten $A_1, \dots, A_p$, wenn $F(c_1), \dots, F(c_p)$ als gegebene Grössen betrachtet werden, aus den Gleichungen

$$F(c_1) = a^{c_1}\mathbf{F}(c_1)\sin\pi(c_1 - c_2)\dots\sin\pi(c_1 - c_p)A_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(c_p) = a^{c_p}\mathbf{F}(c_p)\sin\pi(c_p - c_1)\dots\sin\pi(c_p - c_{p-1})A_p$$

eindeutig bestimmte endliche Werthe. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Eine Function, welche die Bedingungen des in § 10 entwickelten Satzes erfüllt, ist vollständig bestimmt, wenn die Werthe, die sie an p verschiedenen Stellen der angegebenen Art annimmt, bekannt sind.

Besonders bemerkenswerth sind diejenigen Functionen $F(z)$, für welche $p = 1$ ist; was offenbar dann, und nur dann, der Fall ist, wenn $m - n$ gleich irgend einer der Zahlen $1, 2, 3, 4$ ist. *In allen diesen Fällen ist* $F(z) = Ca^z\mathbf{F}(z)$, *also* $F(z)$ *vollständig bestimmt, wenn ein specieller Werth der Function bekannt ist.*

13. Der Vollständigkeit halber wollen wir jetzt zwei allgemeine Ausdrücke bilden, durch welche sämmtliche, der vorher betrachteten Differenzengleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ genügende Functionen ausgedrückt werden können, für die es überhaupt einen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ giebt, wo sie sich regulär verhalten und, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen können. Die Herleitung derselben braucht hier nur kurz angedeutet werden, weil die dabei in Frage kommenden Schlüsse mit den in § 7 benutzten vollständig übereinstimmen.

Es sei $F(z)$ eine ebensolche Function. Setzt man

$$\phi(z) = \frac{a^{-z}F(z)}{\Gamma(z-z_1)\dots\Gamma(z-z_m)\Gamma(1+z'_1-z)\dots\Gamma(1+z'_n-z)},$$

so ist $\phi(z+1) = (-1)^n\phi(z)$. Somit ist $\phi(z)$, weil sie sich im Bereiche $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ regulär verhält, eine ganze Function. Setzt man ferner

$$\Psi(z) = \frac{\phi(z)}{\sin\pi(z-c_1)\dots\sin\pi(z-c_\lambda)},$$

wo $c_1, \ldots, c_\lambda$ Constanten bezeichnen, so kann diese Function, welche die Eigenschaft $\Psi(z+1) = (-1)^{n+\lambda}\Psi(z)$ besitzt, durch trigonometrische Functionen ausgedrückt werden. Damit sie keine mehrfache Unendlichkeitsstelle besitze, wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass unter den Grössen $c_1, \ldots, c_\lambda$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl oder Null wäre. Ihre Anzahl λ braucht zunächst nur der Bedingung $2\lambda \geqq m + n$ unterworfen werden. Betrachtet man nun für den Fall, dass $n + \lambda$ grade ist, den Ausdruck

$$G(z) = \Psi(z) - [A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)],$$

für den Fall aber, dass $n + \lambda$ ungrade ist, den Ausdruck

$$G_1(z) = \Psi(z) - \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin \pi(z - c_\lambda)}\right],$$

so zeigt sich in ähnlicher Weise wie in § 7, dass G und G_1 bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_\lambda$ sich auf constante Grössen reduciren; insbesondere muss $G_1 = 0$ sein.

Für die Function $F(z)$ erhalten wir also, je nachdem $n + \lambda$ grade oder ungrade angenommen wird, die folgenden Ausdrücke:

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_\lambda)}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_n')} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)], \quad (n+\lambda=2k)$$

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_\lambda)}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_n')} \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin \pi(z - c_\lambda)}\right], \quad (n+\lambda=2k+1)$$

wo $\mathbf{F}(z)$ durch Gleichung (34) erklärt wird und $A_0 = G$ ist.

Die obigen Ausdrücke werden am einfachsten, wenn λ die kleinste ganze Zahl bezeichnet, deren doppelter Werth nicht kleiner ist als $m + n$.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir nicht die Bedingungen ermitteln, welche erfüllt sein müssen, damit die obigen Ausdrücke die verlangten Eigenschaften wirklich besitzen mögen. Offenbar besitzen sie jedenfalls die Eigenschaft $F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z)$.

Ist insbesondere $m = n$, so kann man $\lambda = m$ annehmen, und es erhält dann $F(z)$ die Form:

$$(36)\quad F(z) = a^z\mathbf{F}(z)\frac{\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_m)}{\sin\pi(z-z_1')\ldots\sin\pi(z-z_m')}[A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\ldots$$
$$\ldots + A_m\operatorname{cotg}\pi(z-c_m)].$$

14. Unter den in der Form (36) darstellbaren Functionen müssen einige hervorgehoben werden, da sie für die Theorie gewisser bestimmten Integrale von Wichtigkeit sind. Nehmen wir an, es seien die reellen Theile der Nullstellen des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ sämmtlich kleiner als eine gewisse reelle Zahl α, die entsprechenden Grössen im Nenner aber grösser als α, so ist leicht zu sehen, dass jede Function der Form

$$(37)\quad F(z) = \mathbf{F}(z)\frac{\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_m)}{\sin\pi(z-z_1')\ldots\sin\pi(z-z_m')}[A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\ldots$$
$$\ldots + A_m\operatorname{cotg}\pi(z-c_m)],$$

wenn z auf den Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt wird, sich regulär verhält und, nach Multiplication mit z^{-x}, dem absoluten Betrage nach nicht ohne Ende wachsen kann. Verlangt man aber, es soll $F(z)$ die letzte Eigenschaft besitzen, auch ohne dass man sie mit einer Potenz von z multiplicirt, so muss der letzte Factor von $F(z)$ für $\zeta' = \pm\infty$ gleich Null sein. — Wegen unserer Voraussetzung über die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$ ist nämlich der reelle Theil von x positiv, und somit (§ 9) $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty}\mathbf{F}(z) = \infty$. — Aus

$$\lim_{\zeta'=\pm\infty}[A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\ldots+A_m\operatorname{cotg}\pi(z-c_m)] = 0$$

folgt aber $A_0 = 0$, $A_m = -A_1 - A_2 - \ldots - A_{m-1}$. Setzt man diese Werthe in (37) ein, so bekommt man einen Ausdruck der Form:

$$F(z) = \mathbf{F}(z)\frac{\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_{m-1})}{\sin\pi(z-z_1')\ldots\sin\pi(z-z_m')}\left[\frac{B_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\ldots+\frac{B_{m-1}}{\sin\pi(z-c_{m-1})}\right].$$

Es ergiebt sich leicht, dass jede Function dieser Form, die oben verlangten Eigenschaften besitzt, wenn die bezüglich der Grössen $z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_m'$ gemachte Voraussetzung erfüllt ist. Damit ist nun folgender Satz bewiesen:

In der rationalen Function

$$\mathbf{r}(z) = \frac{(z - z_1) \ldots (z - z_m)}{(z - z'_1) \ldots (z - z'_m)}$$

seien die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$ *kleiner als* α, *und die reellen Theile von* $z'_1, \ldots, z'_m$ *grösser als* α. *Ferner seien* $c_1, \ldots, c_{m-1}$ *beliebige Constanten, welche doch die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist. Dann hat jede in der Form*

$$(38)\quad F(z) = \mathbf{F}(z) \frac{\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_{m-1})}{\sin\pi(z-z'_1)\ldots\sin\pi(z-z'_m)} \left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{\sin\pi(z-c_{m-1})}\right],$$

wo

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z'_1) \ldots \Gamma(z - z'_m)}$$

ist, darstellbare Function von $z = \zeta + i\zeta'$ *die folgenden Eigenschaften:*

I. $F(z)$ *befriedigt die Differenzengleichung*

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z) F(z).$$

II. $F(z)$ *verhält sich an jeder Stelle des Parallelstreifens* $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ *regulär.*

III. *Wird die Veränderliche* z *auf den genannten Parallelstreifen beschränkt, so kann der absolute Betrag von* $F(z)$ *nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.*

Umgekehrt lässt sich auch jede monogene Function, von der man nur weiss, dass sie alle diese Eigenschaften besitzt, bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_{m-1}$ *auf die Form* (38) *bringen.*

Eine Function, welche die obigen Eigenschaften besitzt, ist offenbar vollständig bestimmt, wenn die Werthe, die sie an $m - 1$ verschiedenen Stellen des Bereichs $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ annimmt, bekannt sind.

III.

Functionen, welche lineare nicht homogene Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen.

15. Jede lineare Differenzengleichung erster Ordnung kann auf die Form

$$\mathbf{r}_1(z)F(z+1) = \mathbf{r}_0(z)F(z) - \mathbf{s}_0(z)$$

gebracht werden. Setzt man

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}, \qquad \mathbf{s}(z) = \frac{\mathbf{s}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)},$$

so erhält sie die Gestalt

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z). \tag{39}$$

In der vorliegenden Arbeit bezeichnen $\mathbf{r}_0(z)$, $\mathbf{r}_1(z)$, $\mathbf{s}_0(z)$ stets ganze rationale Functionen, und somit $\mathbf{r}(z)$ und $\mathbf{s}(z)$ rationale Functionen *mit demselben Nenner*. Dieselben wollen wir jetzt gewissen Beschränkungen unterwerfen, die theils durch die Ergebnisse des vorhergehenden, theils erst durch die des letzten Abschnittes gerechtfertigt werden können. Erstens nehmen wir an, dass die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ nicht kleiner als die des Nenners sei. Zweitens soll, wenn $\mathbf{r}(z)$ auf die Form

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_m)}{(z-z_1')\ldots(z-z_n')}$$

gebracht wird, die Grösse a eine reelle positive Zahl sein. Schliesslich soll $\mathbf{s}(z)$ die Bedingung

$$\lim_{z=\infty}\frac{\mathbf{s}(z)}{\mathbf{r}(z)} = 0$$

erfüllen; die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ soll m. a. W., unter m die des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ verstanden, höchstens gleich $m-1$ sein.

Die im Vorhergehenden behandelte Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ kann gewissermassen als ein specieller Fall von (39) aufgefasst werden.

Es fragt sich nun, ob es auch Functionen existiren, welche die Gleichung (39) befriedigen und im übrigen sich in ähnlicher Weise verhalten, wie die der Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ genügenden und im vorigen Abschnitte in der Form[1]

$$(40) \qquad a^z \mathbf{F}(z) \sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_p) \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \cdots + \frac{A_p}{\sin \pi(z - c_p)} \right]$$

dargestellten Functionen. In den folgenden Paragraphen wird diese Frage für die wichtigsten Fälle ($\lim \mathbf{r}(z) \geqq 1$) erledigt. Es sei $F(z)$ eine analytische Function mit den nachstehenden Eigenschaften:

I. $F(z)$ befriedigt die Differenzengleichung

$$(41) \qquad F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z),$$

wo $\mathbf{r}(z)$ und $\mathbf{s}(z)$ gegebene rationale Functionen der oben angegebenen Beschaffenheit bezeichnen.

II. In der Umgebung jeder endlichen Stelle, deren reeller Theil im algebraischen Sinne grösser ist als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, verhält sich $F(z)$ regulär.

III. Wird die reelle Zahl α algebraisch grösser als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, sonst aber beliebig angenommen, und die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf den Parallelstreifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$) beschränkt, so kann der absolute Betrag von $F(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen; wobei zu bemerken ist, dass in den Fällen, wo $m = n$ ist, nur gefordert wird, dass $F(z)$, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, die angeführte Eigenschaft besitzen soll.

Die Aufgabe, alle analytischen Functionen mit diesen Eigenschaften zu bestimmen, vereinfacht sich sehr wegen des folgenden Satzes:

Kennt man eine Function $\mathbf{S}(z)$, welche die obigen Eigenschaften besitzt, so kann jede andere Function $F(z)$ mit denselben Eigenschaften auf die Form $f(z) + \mathbf{S}(z)$, wo $f(z)$ den Ausdruck (40) *bezeichnet, gebracht werden.*

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man den in § 10 (resp. § 9) bewiesenen Satz auf die Differenz $F(z) - \mathbf{S}(z)$ anwendet.

[1] Ist $m = n$, so ist stets $p = 1$ zu setzen. $\mathbf{F}(z)$ hat dieselbe Bedeutung wie im vorigen Abschnitte.

Betrachtet man nun die Reihe

$$(42) \qquad \mathbf{S}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)},$$

so erhellt aus ihrer einfachen Form, dass sie in allen Fällen, wo sie convergirt, der Differenzengleichung (41) Genüge leistet. Auf Grund des obigen Satzes ist es daher von Wichtigkeit zu wissen, unter welchen Bedingungen sie convergirt, und ob sie dann auch die Eigenschaften II. und III. besitze.

16. Setzt man

$$\phi(z) = \frac{az^{m-n}}{\mathbf{r}(z)},$$

so ist $\phi(z)$ eine Grösse, die sich der Grenze Eins nähert, wenn $|z|$ ohne Ende wächst. Durch eine einfache Rechnung folgt für hinreichend grosse Werthe von $|z|$:

$$\phi(z) = 1 - \frac{x}{z} + \frac{x_1}{z^2} + \ldots,$$

wo die x von z unabhängige Werthe haben; insbesondere hat x den Werth

$$x = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m.$$

Setzt man

$$\Psi(z) = \phi(z)\left(1 + \frac{1}{z}\right)^x,$$

so kann $\Psi(z)$ für hinreichend grosse Werthe von $|z|$ in eine Reihe der Form

$$\Psi(z) = 1 + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots,$$

wo die a von z unabhängig sind, entwickelt werden. Die Function $\mathbf{r}(z)$ kann nun folgenderweise geschrieben werden:

$$\mathbf{r}(z) = \frac{az^{m-n}}{\Psi(z)}\left(\frac{z+1}{z}\right)^x.$$

Schreibt man in dieser Gleichung statt z nach einander $z, z+1, \ldots$ $z+\nu-1$, so ergiebt sich, indem man die so erhaltenen Resultate durch, Multiplication mit einander vereinigt,

$$(43)\qquad \frac{1}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu-1)}=\frac{\Psi(z)\Psi(z+1)\ldots\Psi(z+\nu-1)}{a^\nu[z(z+1)\ldots(z+\nu-1)]^{m-n}}\left(\frac{z}{z+\nu}\right)^x.$$

Setzt man ferner, unter $m-k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ verstehend,

$$(44)\qquad \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z+\nu)}=\frac{\Phi(z+\nu)}{(z+\nu)^k},$$

so ist $\Phi(z)$ eine Grösse, die sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert, wenn z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Zur Abkürzung setzen wir schliesslich

$$(45)\qquad \Phi_\nu(z)=\Phi(z+\nu)\Psi(z)\ldots\Psi(z+\nu-1).\qquad {\scriptstyle(\nu=0,1,2,\ldots,\infty)}$$

Auf Grund des in § 1 bewiesenen Hülfsatzes und wegen der Definition von $\Phi(z)$ hat $\Phi_\nu(z)$ die folgende Eigenschaft. Wird die Veränderliche $z=\zeta+i\zeta'$, unter α eine beliebige reelle Zahl verstanden, auf die durch die Bedingung $\zeta\geqq\alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene beschränkt, so kann eine positive ganze Zahl μ stets so gross angenommen werden, dass der absolute Betrag von $\Phi_\nu(z+\mu)$ für $\nu=0,1,2,\ldots,\infty$ weder unbeschränkt wachsen noch abnehmen kann. Es giebt m. a. W. zwei von Null verschiedene Grössen A und B $(A<B)$, welche die Bedingung

$$A<|\Phi_\nu(z+\mu)|<B$$

für $\nu=0,1,2,\ldots,\infty$ erfüllen, falls z auf das Gebiet $\zeta\geqq\alpha$ beschränkt und μ hinreichend gross angenommen wird.

Mit Hülfe der Gleichungen (43), (44) und (45) kann nun die im vorigen Paragraphen aufgestellte Reihe $\mathbf{S}(z)$ auf die folgende Form gebracht werden:

$$(46)\qquad \mathbf{S}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Phi_\nu(z)}{(z+\nu)^k}\left(\frac{z}{z+\nu}\right)^x\frac{1}{a^\nu[z(z+1)\ldots(z+\nu-1)]^{m-n}}.$$

Aus der einfachen Form (42) der Reihe $\mathbf{S}(z)$ ergiebt sich, wenn μ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet:

$$(47)\quad \mathbf{S}(z)=\frac{\mathbf{s}(z)}{\mathbf{r}(z)}+\frac{\mathbf{s}(z+1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)}+\ldots+\frac{\mathbf{s}(z+\mu-1)}{\mathbf{r}(z)\ldots\mathbf{r}(z+\mu-1)}+\frac{\mathbf{S}(z+\mu)}{\mathbf{r}(z)\ldots\mathbf{r}(z+\mu-1)}.$$

Auf Grund der obigen Entwickelungen ergiebt sich nun Folgendes:

Erstens: Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, d. h. entweder $m > n$ oder $m = n$ und gleichzeitig $a > 1$, so ist $\mathbf{S}(z)$ in der Umgebung jeder endlichen, von den Wurzeln der Gleichungen $\mathbf{r}(z+\nu) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergent. Nähert sich z, unter α eine beliebig gegebene reelle Zahl verstanden, in der durch die Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene der Stelle ∞, so nähert sich $\mathbf{S}(z)$ gleichzeitig der Grenze Null.

Ist beispielsweise $m = n$ und $a > 1$, welche Annahme den für unsere Behauptungen ungünstigsten Fall bildet, so kann vorausgesetzt werden, es sei μ so gross angenommen, dass $\Phi_\nu(z+\mu)$ für $\zeta \geqq \alpha$ endlich bleibt, wie gross auch ν werden mag. Es sei gleichzeitig μ so gross, dass $\alpha + \mu$, und somit auch der reelle Theil von $z + \mu$, grösser als Eins ist. Alsdann hat man

$$\left|\log\left(1 - \frac{\nu}{z+\mu+\nu}\right)\right| \leqq -\log\left(1 - \left|\frac{\nu}{z+\mu+\nu}\right|\right) < -\log\left(1 - \frac{\nu}{\nu+1}\right)$$
$$= \log(\nu+1),$$

und daher

$$\left|\left(\frac{z+\mu}{z+\mu+\nu}\right)^x\right| \leqq e^{|x|\left|\log\left(1-\frac{\nu}{z+\mu+\nu}\right)\right|} < (\nu+1)^{|x|}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung ergiebt sich aus (46), wenn darin statt z $z + \mu$ geschrieben wird:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\mathbf{s}(z+\mu+\nu)}{\mathbf{r}(z+\mu)\ldots\mathbf{r}(z+\mu+\nu)}\right| < \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\Phi_\nu(z+\mu)}{(z+\mu+\nu)^k}\right|\frac{(\nu+1)^{|x|}}{a^\nu}.$$

Da die letzte Reihe für das ganze Gebiet $\zeta \geqq \alpha$ unbedingt und gleichmässig convergirt und sich der Grenze Null nähert, wenn $|z|$ gemäss der Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ ohne Ende wächst, so geht aus (47) die Richtigkeit unserer Behauptungen unmittelbar hervor.

Ist also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, so stellt die Reihe $\mathbf{S}(z)$ immer eine Function dar, welche die im vorigen Paragraphen unter I., II. und III. erwähnten Eigenschaften besitzt.

Zweitens: Ist $m = n$ und $a < 1$, also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$, so divergirt die Reihe $\mathbf{S}(z)$, weil ihr allgemeines Glied eine mit der Ordnungszahl unbeschränkt wachsende Grösse ist.[1]

Drittens: Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, also $m = n$ und $a = 1$, so hängt die Convergenz der Reihe $\mathbf{S}(z)$ von den Zahlen x und k in folgender Weise ab. Ist $x > -k + 1$, so ist $\mathbf{S}(z)$ in der Umgebung jeder endlichen von den Wurzeln der Gleichungen $\mathbf{r}(z + \nu) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergent, und wird, wenigstens nach Multiplication mit z^{-x}, unendlich klein, wenn die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$, unter α eine beliebige reelle Zahl verstanden, in der durch die Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene sich der Stelle ∞ nähert. Dies erhellt leicht aus

$$\mathbf{S}(z) = z^x \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(z)}{(z + \nu)^{x+k}}.$$

Ist aber $x \leqq -k + 1$, so ist $\mathbf{S}(z)$ stets eine divergirende Reihe. Dies ergiebt sich auf Grund eines bekannten Satzes,[2] weil der Quotient des $\nu + 1^{\text{ten}}$ Gliedes der Reihe durch das ν^{te} für hinreichend grosse Werthe von ν in eine Reihe der Form

$$1 - \frac{x + k}{\nu} + \frac{\varphi_2(z)}{\nu^2} + \cdots$$

entwickelt werden kann.

Ist also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so wird durch die Reihe $\mathbf{S}(z)$ eine Function mit den Eigenschaften I., II., III. (§ 15) nur in dem Falle dargestellt, dass $x > -k + 1$ ist.

Es ist in vielen Fällen vortheilhaft, den Zähler von $\mathbf{s}(z)$ als eine ganze rationale Function $(m - 1)^{\text{ten}}$ Grades mit *unbestimmten Coefficienten* betrachten zu können. Soll $\mathbf{S}(z)$ im Falle $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, auch wenn die genannten Coefficienten als unbestimmte Grössen betrachtet werden, die Eigenschaften I., II. und III. besitzen, so ist es offenbar nothwendig, und zugleich auch hinreichend, dass der reelle Theil von $x > 0$ ist.

[1] Offenbar ist dies auch der Fall, wenn $m < n$ ist, also jedenfalls wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$.

[2] C. f. Weierstrass. *Functionenlehre*. S. 220.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass es, bei den Anwendungen unserer Sätze in der Theorie der bestimmten Integrale, im Allgemeinen nicht nothwendig ist, die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ grösser als $m - 2$ vorauszusetzen, wenn gleichzeitig $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ ist. Alsdann besitzt die Reihe $\mathbf{S}(z)$ die oft erwähnten Eigenschaften, wenn zugleich der reelle Theil von $x > -1$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich der folgende Satz:

Bezeichnen $\mathbf{r}(z)$ *und* $\mathbf{s}(z)$ *rationale Functionen der in* § 15 *angegebenen Beschaffenheit, und wird der Zähler von* $\mathbf{s}(z)$ *als eine unbestimmte ganze Function beziehungsweise* $(m-1)^{\text{ten}}$ *oder* $(m-2)^{\text{ten}}$ *Grades betrachtet, je nachdem* $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ *grösser als oder gleich Eins ist, so ist die Reihe*

$$\mathbf{S}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

im ersten Falle stets, im zweiten Falle aber nur dann convergent, wenn der reelle Theil von $x > -1$ *ist. Im Falle der Convergenz stellt sie immer eine Function dar, welche alle drei in* § 15 *unter* I., II. *und* III. *erwähnten Eigenschaften besitzt.*

Aus dem in § 15 enthaltenen Satze ergiebt sich der Folgende:

Weiss man von einer irgend wie definirten monogenen Function $F(z)$ *dass sie die fraglichen Eigenschaften besitzt, so kann sie auf die Form*

$$(48)\quad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

gebracht werden, wenn die für die Convergenz von $\mathbf{S}(z)$ *erforderlichen Bedingungen erfüllt sind.*

Dieser Ausdruck enthält $p + m$, eventuel $p + m - 1$, unbestimmte Constanten.

17. Im Zusammenhange mit der Reihe $\mathbf{S}(z)$ wollen wir jetzt auch die folgende betrachten:

$$\mathbf{S}_1(z) = \mathbf{s}(z-1) + \mathbf{s}(z-2)\mathbf{r}(z-1) + \mathbf{s}(z-3)\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2) + \ldots,$$

welche im Falle der Convergenz offenbar die Differenzengleichung

$$\mathbf{S}_1(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathbf{S}_1(z) + \mathbf{s}(z)$$

befriedigt und nur an den Stellen

$$z = z'_\lambda + 1\,,\ z'_\lambda + 2\,,\ z'_\lambda + 3\,, \ldots, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

unendlich werden kann.

Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ nicht gleich Eins, so convergirt offenbar stets eine von den beiden Reihen $\mathbf{S}(z)$ und $\mathbf{S}_1(z)$, aber nicht beide gleichzeitig.

Ist dagegen $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so convergiren oder divergiren sie beide gleichzeitig.

Um dies zu finden schreibe man in Gleichung (43), wo $m = n$ und $a = 1$ zu setzen ist, statt z $z-\nu$. Dann bekommt man die Gleichung

$$\mathbf{r}(z-1)\ldots\mathbf{r}(z-\nu) = \left(\frac{z}{z-\nu}\right)^{\varkappa} \frac{1}{\Psi(z-1)\ldots\Psi(z-\nu)}. \tag{49}$$

Setzt man ferner, unter $m-k$ die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ verstehend:

$$\mathbf{s}(z-\nu-1) = \frac{\Phi(z-\nu)}{(z-\nu)^k},$$

so ist $\lim\limits_{z=\infty} \Phi(z)$ endlich und von Null verschieden. Das $(\nu+1)^{\text{te}}$ Glied von $\mathbf{S}_1(z)$ kann nun auf die Form

$$\mathbf{s}(z-\nu-1)\mathbf{r}(z-1)\ldots\mathbf{r}(z-\nu) = \frac{\Phi_\nu(z)^k}{(z-\nu)^k}\left(\frac{z}{z-\nu}\right)^{\varkappa}$$

gebracht werden, wo zur Abkürzung

$$\frac{\Phi(z-\nu)}{\Psi(z-1)\ldots\Psi(z-\nu)} = \Phi_\nu(z)$$

gesetzt worden ist. Auf Grund des in § 1 bewiesenen Hülfsatzes und wegen der Definition von $\Phi(z)$ hat $\Phi_\nu(z)$ die folgende Eigenschaft. Wird die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$, unter α eine beliebige reelle Zahl verstanden, auf die durch die Bedingung $\zeta \leqq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene beschränkt, so kann eine positive ganze Zahl μ stets so gross angenommen werden, dass der absolute Betrag von $\Phi_\nu(z-\mu)$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ weder unbeschränkt wachsen noch abnehmen kann. Beachtet man ausserdem, dass $\mathbf{S}_1(z)$ und $\mathbf{S}_1(z-\mu)$ beide gleichzeitig entweder convergiren oder divergiren, so geht die Richtigkeit unserer Behauptung leicht hervor.

Es sei $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und der Zähler von $\mathbf{s}(z)$ eine unbestimmte ganze Function $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades. Setzt man $f(z) = \mathbf{S}(z) + \mathbf{S}_1(z)$ so ist $f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z)$. Um den in § 14 bewiesenen Satz anwenden zu können, setzen wir ferner voraus, dass die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$ sämmtlich kleiner als α, die reellen Theile von $z'_1, \ldots, z'_m$ aber sämmtlich grösser als α sind, wobei α eine gewisse reelle Zahl bedeutet. Alsdann ist der reelle Theil von $x > 0$, und somit $\mathbf{S}(z)$ und $\mathbf{S}_1(z)$ beide convergent. Ferner verhält sich die Summe $f(z)$ offenbar in dem Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ überall regulär, und ihr absoluter Betrag kann daselbst auch nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Wegen des in § 14 bewiesenen Satzes kann also $f(z)$ auf die Form (38) gebracht werden.

18. Im Vorhergehenden ist es unentschieden geblieben, ob es, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$ oder wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und zugleich der reelle Theil von $x \leqq -1$ ist, überhaupt Functionen giebt, welche die in § 15 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften besitzen. Bei dieser Gelegenheit sei bezüglich des Falles $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$ nur bemerkt, dass die Untersuchung desselben mit Hülfe der vorher betrachteten Reihe $\mathbf{S}_1(z)$ bewerkstelligt werden kann. Von weit grösserem Interesse ist der Fall, wo $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und zugleich der reelle Theil von $x < 0$ ist. In diesem Falle giebt es m von einander linear unabhängige, der Differenzengleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z)$$

genügende Partialbruchreihen, mit deren Hülfe man stets eine homogene lineare Function bilden kann, welche die fragliche Gleichung befriedigt, auch wenn der Zähler von $\mathbf{s}(z)$ als eine beliebig gegebene Function $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades betrachtet wird. Der Fall $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ braucht zunächst nicht von dem soeben erwähnten getrennt werden. Es wird daher vorausgesetzt, es sei $\lim_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ entweder > 1 oder $= 1$, im letzten Falle aber zugleich $\varkappa < 0$.

Es erweist sich als nothwendig die Ordnungszahlen der von einander verschiedenen Nullstellen von $\mathbf{r}(z)$ zu beachten. Zu dem Ende setzen wir

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_m)}{(z-z'_1)\ldots(z-z'_n)} = a\frac{(z-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(z-\alpha_\rho)^{\mu_\rho}}{(z-\beta_1)^{\nu_1}\ldots(z-\beta_\sigma)^{\nu_\sigma}}$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ lauter von einander verschiedene Grössen bezeichnen. Von nun an werden auch die folgenden Bezeichnungen festgesetzt (beziehungsweise beibehalten):

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z'_1)\ldots\Gamma(z-z'_n)} = \frac{\Gamma^{\mu_1}(z-\alpha_1)\ldots\Gamma^{\mu_\rho}(z-\alpha_\rho)}{\Gamma^{\nu_1}(z-\beta_1)\ldots\Gamma^{\nu_\sigma}(z-\beta_\sigma)},$$

$$\mathbf{r}_0(z) = a(z-z_1)\ldots(z-z_m) = a(z-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(z-\alpha_\rho)^{\mu_\rho},$$

$$\mathbf{r}_1(z) = (z-z'_1)\ldots(z-z'_n) = (z-\beta_1)^{\nu_1}\ldots(z-\beta_\sigma)^{\nu_\sigma},$$

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}, \qquad \mathbf{s}(z) = \frac{\mathbf{s}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}, \qquad \mathbf{R}(z) = \frac{1}{\mathbf{r}(z)},$$

$$\varkappa = z'_1 + \ldots + z'_n - z_1 - \ldots - z_m = \nu_1\beta_1 + \ldots + \nu_\sigma\beta_\sigma - \mu_1\alpha_1 - \ldots - \mu_\rho\alpha_\rho.$$

Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, dass unter den Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl ist. Was weiterhin unter dieser Voraussetzung nachgewiesen wird, das gilt mit unwesentlichen Modificationen auch für den Fall, wo zwei oder mehrere der genannten Grössen sich um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Es sei α irgend eine von den Nullstellen von $\mathbf{r}(z)$ und μ die zugehörige Ordnungszahl. Versucht man die Differenzengleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z)$$

oder

$$\mathbf{r}_0(z)F(z) - \mathbf{r}_1(z)F(z+1) = \mathbf{s}_0(z),$$

wo $\mathbf{s}_0(z)$ zunächst nur irgend eine ganze, rationale oder transcendente, Function bezeichnen mag, durch eine Partialbruchreihe der Form

$$\mathbf{S}(z;\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu} + g_\nu(z)\right],$$

wo die $g_\nu(z)$ ganze rationale Functionen bedeuten, zu befriedigen, so findet man,[1] dass dies immer und nur dann möglich ist, wenn die Constanten A mittelst der Gleichungen

$$(50)\quad \begin{aligned} A_\mu^{(\nu)} &= \mathbf{R}(\alpha-\nu)A_\mu^{(\nu-1)},\\ A_{\mu-1}^{(\nu)} &= \mathbf{R}'(\alpha-\nu)A_\mu^{(\nu-1)} + \mathbf{R}(\alpha-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu-1)},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ A_1^{(\nu)} &= \frac{\mathbf{R}^{(\mu-1)}(\alpha-\nu)}{\lfloor\mu-1}A_\mu^{(\nu-1)} + \frac{\mathbf{R}^{(\mu-2)}(\alpha-\nu)}{\lfloor\mu-2}A_{\mu-1}^{(\nu-1)} + \dots + \mathbf{R}(\alpha-\nu)A_1^{(\nu-1)} \end{aligned}$$
$$(\nu=1,2,3,\dots,\infty)$$

bestimmt werden. Die obigen Gleichungen drücken in der That die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass eine jede der unendlich vielen rationalen Functionen

$$\mathbf{r}_0(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\dots+\frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}+g_\nu(z)\right)$$
$$-\mathbf{r}_1(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu-1)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\dots+\frac{A_1^{(\nu-1)}}{z-\alpha+\nu}+g_{\nu-1}(z)\right),\quad (\nu=1,2,\dots,\infty)$$

welche als Glieder des Ausdruckes $\mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z)-\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1)$ anzusehen sind, eine ganze Function sein soll, und dies ist wiederum, wegen unserer Voraussetzung über die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$, dann und nur dann der Fall, wenn eine jede der Functionen

$$\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\dots+\frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}-\mathbf{R}(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu-1)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\dots+\frac{A_1^{(\nu-1)}}{z-\alpha+\nu}\right)$$
$$(\nu=1,2,\dots,\infty)$$

bezüglich nach positiven ganzen potenzen von $z-\alpha+\nu$, $\nu=1,2,\dots,\infty$, entwickelt werden kann. Entwickelt man nun diesen Ausdruck nach ganzen Potenzen von $z-\alpha+\nu$ und setzt die Coefficienten der negativen Potenzen gleich Null, so bekommt man in der That die Gleichungen (50).

Vermöge der Gleichungen (50) bestimmen sich $A_\mu^{(\nu)},\dots,A_1^{(\nu)}$ ($\nu=1,2,\dots,\infty$) als homogene lineare Functionen von $A_\mu^{(0)},\dots,A_1^{(0)}$, denen man aber beliebige Werthe ertheilen kann. Dem Mittag-Leffler'schen

[1] C. f. *Zur Theorie der Gammafunction.* Bd. 8 dieses Journals S. 48.

Satze gemäss können nachher die $g_\nu(z)$ immer so angenommen werden, dass $\mathbf{S}(z;\alpha)$ eine gleichmässig convergirende Reihe wird.

Die in den Gliedern von $\mathbf{S}(z;\alpha)$ vorkommenden ganzen Functionen $g_\nu(z)$ können alle identisch gleich Null gesetzt werden, falls die so entstehende Reihe gleichmässig convergirt. Dies ist stets der Fall, wenn $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) > 1$ ist, was in meiner Arbeit *Zur Theorie der Gammafunction* nachgewiesen ist. Der Beweis soll jetzt so geführt werden, dass die Convergenz der Reihe

$$(51)\qquad \mathbf{S}(z;\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}\right)$$

auch in dem Falle ersichtlich wird, wo $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$ und gleichzeitig der reelle Theil von $x < 0$ ist. Es soll weiterhin unter $\mathbf{S}(z;\alpha)$ immer eine Reihe der Form (51) verstanden werden, deren Constanten A die Bedingungen (50) erfüllen.

Wird $\mathbf{R}(z)$ in der bekannten Form einer Summe von Partialbrüchen und einer ganzen Function dargestellt, so muss die ganze Function, weil $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) \geqq 1$ ist, sich auf eine Constante reduciren. Werden sodann durch Differentiation ähnliche Ausdrücke für die Ableitungen von $\mathbf{R}(z)$ entwickelt, so leuchtet unmittelbar ein, dass die entsprechenden ganzen Functionen identisch gleich Null sind, sowie auch, dass die Ungleichungen

$$|\mathbf{R}'(\alpha-\nu)| < \frac{C}{|\alpha-\nu|^2}, \ldots, |\mathbf{R}^{(\mu-1)}(\alpha-\nu)| < \frac{C}{|\alpha-\nu|^2} \qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty)$$

bei passender Bestimmung von C stattfinden. Aus den Gleichungen (50) folgt nun

$$|A_\mu^{(\nu)}| = |\mathbf{R}(\alpha-\nu)A_\mu^{(\nu-1)}|$$

$$|A_{\mu-1}^{(\nu)}| \leqq \frac{C|A_\mu^{(\nu-1)}|}{|\alpha-\nu|^2} + |\mathbf{R}(\alpha-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu-1)}|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|A_1^{(\nu)}| \leqq \frac{C|A_\mu^{(\nu-1)}|}{|\alpha-\nu|^2} + \frac{C|A_{\mu-1}^{(\nu-1)}|}{|\alpha-\nu|^2} + \ldots + |\mathbf{R}(\alpha-\nu)A_1^{(\nu-1)}|.$$

Es ist also

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \dots + |A_1^{(\nu)}| < \Big(|\mathbf{R}(\alpha-\nu)| + \frac{(\mu-1)C}{|\alpha-\nu|^2}\Big)(|A_\mu^{(\nu-1)}| + \dots + |A_1^{(\nu-1)}|).$$

Hieraus erhellt nun schon, dass $\mathbf{S}(z;\alpha)$, wenn $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) > 1$ ist, unbedingt und gleichmässig convergirt. Ist aber $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$, so schreiben wir die obige Ungleichung in folgender Gestalt

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \dots + |A_1^{(\nu)}| < |\mathbf{R}(\alpha-\nu)|\Big(1 + \frac{(\mu-1)C|\mathbf{r}(\alpha-\nu)|}{|\alpha-\nu|^2}\Big)(|A_\mu^{(\nu-1)}| + \dots + |A_1^{(\nu-1)}|).$$

Daraus ergiebt sich

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \dots + |A_1^{(\nu)}| < (|A_\mu^{(0)}| + \dots + |A_1^{(0)}|)\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}|\mathbf{R}(\alpha-\lambda)|\Big(1 + \frac{(\mu-1)C|\mathbf{r}(\alpha-\lambda)|}{|\alpha-\lambda|^2}\Big).$$

Benutzt man die in § 17 enthaltene Gleichung (49), wo statt z α zu schreiben ist, so folgt

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \dots + |A_1^{(\nu)}| < K\left|\Big(\frac{\alpha}{\alpha-\nu}\Big)^{-x}\right|,$$

wenn K eine Zahl bezeichnet, welche die Bedingung

$$(|A_\mu^{(0)}| + \dots + |A_1^{(0)}|)\prod_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}|\Psi(\alpha-\lambda)|\Big(1 + \frac{(\mu-1)C|\mathbf{r}(\alpha-\lambda)|}{|\alpha-\lambda|^2}\Big) < K$$

für $\nu = 1, 2, \dots, \infty$ erfüllt. Es ist somit, wenigstens für hinreichend grosse Werthe von ν:

$$\left|\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \dots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}\right| < \left|\frac{K}{z-\alpha+\nu}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-\nu}\Big)^{-x}\right|.$$

Ist also der reelle Theil von $x < 0$, so ist $\mathbf{S}(z;\alpha)$ auch im Falle $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$ in der Nähe jeder von $z = \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots$ verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergent. Es soll bei dieser Gelegenheit nicht näher erörtert werden, ob es auch immer eine für die Convergenz von $\mathbf{S}(z;\alpha)$ nothwendige Bedingung sei, dass der reelle Theil von $x < 0$ ist. Dass dies aber jedenfalls zur Convergenz *sämmtlicher* zur Stelle $z = \alpha$ gehöriger Reihen $\mathbf{S}(z;\alpha)$ nothwendig ist, geht indessen durch die Annahme $A_1^{(0)} = 1$, $A_2^{(0)} = 0, \ldots, A_\mu^{(0)} = 0$ leicht hervor. Durch diese Annahme entsteht nämlich eine divergirende Reihe, wenn der reelle Theil von $x \geqq 0$ ist. Im Nachstehenden sei also dieser Theil < 0, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ ist.

Es soll jetzt die durch die Gleichung

$$\mathbf{s}_0(z;\alpha) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z;\alpha) - \mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1;\alpha)$$

definirte ganze Function

$$\mathbf{s}_0(z;\alpha) = \mathbf{r}_0(z)\left(\frac{A_\mu^{(0)}}{(z-\alpha)^\mu} + \cdots + \frac{A_1^{(0)}}{z-\alpha}\right)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\mathbf{r}_0(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \cdots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}\right) - \mathbf{r}_1(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu-1)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \cdots + \frac{A_1^{(\nu-1)}}{z-\alpha+\nu}\right)\right]$$

betrachtet werden. In Folge der Gleichungen (50) ist jedes Glied der rechten Seite eine ganze rationale Function, deren Gradzahl offenbar höchstens gleich $m - 1$ sein kann, wenn m wie früher die Gradzahl von $\mathbf{r}_0(z)$ bezeichnet. Da die Reihe $\mathbf{S}(z;\alpha)$ gleichmässig convergirt, so ist dies auch mit der Reihe $\mathbf{s}_0(z;\alpha)$ der Fall, und sie lässt sich somit nach Potenzen von z entwickeln. Dadurch bekommt man aber eine ganze rationale Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Ist also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ *entweder* > 1 *oder* $= 1$ *und im letzten Falle der reelle Theil von* $x < 0$, *so befriedigt die Reihe* $\mathbf{S}(z;\alpha)$, *deren Constanten* A *durch die Gleichungen* (50) *bestimmt sind, eine Gleichung*

$$\mathbf{S}(z+1;\alpha) = \mathbf{r}(z)\mathbf{S}(z;\alpha) - \mathbf{s}(z), \tag{52}$$

wo der Zähler von $\mathbf{s}(z)$ *eine ganze rationale Function von höchstens* $(m-1)^{\text{ten}}$ *Grade ist.* Zu diesem Satze gehört der folgende Zusatz: *Ist* $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, *so ist die Gradzahl des Zählers von* $\mathbf{s}(z)$ *niemals grösser als* $m - 2$.

Ist nämlich $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so ist $\dfrac{\mathbf{r}_0^{(m)}(\alpha-\nu)}{\lfloor m} = 1 = \dfrac{\mathbf{r}_1^{(m)}(\alpha-\nu)}{\lfloor m}$. Der Coefficient von z^{m-1} im $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe $\mathbf{s}_0(z;\alpha)$ wird daher gleich $A_1^{(\nu)} - A_1^{(\nu-1)}$, während er im ersten Gliede den Werth $A_1^{(0)}$ hat.

Ordnet man also die ganze Reihe nach Potenzen von z, so erhält der Coefficient von z^{m-1} den Werth

$$A_1^{(0)} + (A_1^{(1)} - A_1^{(0)}) + (A_1^{(2)} - A_1^{(1)}) + \dots = 0.$$

19. Nach dem Vorhergehenden gehören offenbar zu jeder μ-fachen Nullstelle $z = \alpha$ der rationalen Function $\mathbf{r}(z)$ μ von einander linear unabhängige Partialbruchreihen $\mathbf{S}(z;\alpha)$, welche die Gleichung (52) befriedigen und durch welche jede andere zu derselben Stelle gehörige Reihe als homogene lineare Function ausgedrückt werden kann. Setzt man nach einander $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_\rho$, so bekommt man ρ Gruppen von Reihen. Nimmt man aus jeder solchen Gruppe (α) μ linear unabhängige Reihen heraus, so bekommt man im Ganzen $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\rho = m$ linear unabhängige Partialbruchreihen, welche im Folgenden mit $\mathbf{S}_1(z), \dots, \mathbf{S}_m(z)$ bezeichnet werden sollen. Setzt man, unter $C_1, \dots, C_m$ constante Grössen verstehend:

$$\mathbf{S}(z) = C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \dots + C_m\mathbf{S}_m(z),$$

so ist offenbar $\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z) - \mathbf{s}_0(z)$, wo $\mathbf{s}_0(z)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ oder $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet, je nachdem $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ oder $= 1$ ist. Es muss aber bewiesen werden, dass die Constanten C immer derart bestimmt werden können, dass $\mathbf{s}_0(z)$ gleich jeder beliebigen ganzen Function wird, deren Gradzahl im ersten Falle gleich oder kleiner als $m-1$ und im zweiten Falle gleich oder kleiner als $m-2$ angenommen werden kann. Zu dem Ende bemerken wir zunächst, dass die Reihen $\mathbf{S}_1(z), \dots, \mathbf{S}_m(z)$ in beiden Fällen offenbar alle drei in § 15 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften besitzen; zugleich ist auch unmittelbar ersichtlich, dass $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{S}(z+\nu) = 0$ ist.

Es sei

$$\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}_\lambda(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}_\lambda(z) - \mathbf{s}_\lambda(z) \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,2,\dots,m)}$$

die zur Reihe $\mathbf{S}_\lambda(z)$ gehörige Differenzengleichung und Δ die Determinante der ganzen Functionen $\mathbf{s}_1(z), \dots, \mathbf{s}_m(z)$. Im Falle $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ ist offenbar $\Delta = 0$.

Ist aber $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, *so kann* Δ *niemals gleich Null sein, wenn die* $\mathbf{S}_\lambda(z)$ *von einander linear unabhängig sind.* Denn wäre $\Delta = 0$, so bestände eine Identität $C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{s}_m(z) = 0$, wo die C nicht alle gleich Null wären. Dann würde aber $\mathbf{S}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathbf{S}(z)$ sein, und somit

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\mathbf{S}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu-1)},$$

wie gross auch ν sein mag. Da der Nenner der rechten Seite wegen der Voraussetzung $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) > 1$ mit wachsendem ν ohne Ende wächst, während der Zähler sich gleichzeitig der Null nähert, so müsste $\mathbf{S}(z)$ identisch gleich Null sein, und somit auch eine lineare Gleichung zwischen den Reihen $\mathbf{S}_\lambda(z)$ bestehen, was wider unsere Voraussetzung ist. Es muss also in dem fraglichen Falle wirklich Δ von Null verschieden sein. Ist aber Δ von Null verschieden, so können die Constanten C immer und nur in einer Weise so bestimmt werden, dass $C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{s}_m(z) = \mathbf{s}_0(z)$ wird, wenn $\mathbf{s}_0(z)$ eine beliebig gegebene ganze Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet.

Nunmehr sei $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$ und somit $\Delta = 0$. Alsdann können die C so bestimmt werden, dass $C_1\mathbf{s}_1(z)+\ldots+C_m\mathbf{s}_m(z)$ identisch verschwindet, ohne dass alle C gleich Null sind. Der Ausdruck $\mathbf{S}(z)$ besitzt aber dann alle drei in § 7 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften und muss daher nach § 9 auf die Form

$$(53) \qquad C\mathbf{F}(z) = C_1\mathbf{S}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

gebracht werden können. Die Constante C kann nicht gleich Null sein, weil die $\mathbf{S}_\lambda(z)$ nach unserer Voraussetzung linear unabhängig sind. (Ein ganz specieller Fall dieser Gleichung ist die bekannte Partialbruchentwickelung des Euler'schen Integrals erster Gattung.) Da die in Gleichung (53) vorkommenden Constanten C_λ nicht alle gleich Null sind, so sei C_m von Null verschieden. Bezeichnet nun Δ' die Determinante der ganzen Functionen $\mathbf{s}_1(z), \ldots, \mathbf{s}_{m-1}(z)$, so kann Δ' nicht gleich Null sein. Denn wäre $\Delta' = 0$, so bestände eine Identität $C'_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C'_{m-1}\mathbf{s}_{m-1}(z) = 0$, wo die C' nicht alle gleich Null wären. Dann hätte man nach § 9

$$(54) \qquad C'\mathbf{F}(z) = C'_1\mathbf{S}_1(z) + \ldots + C'_{m-1}\mathbf{S}_{m-1}(z),$$

und es könnte C' nicht gleich Null sein, weil die $\mathbf{S}_\lambda(z)$ linear unabhängig sind. Aus (53) und (54) würde nun zwischen $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ eine homogene lineare Gleichung folgen, wo wenigstens der Coefficient von $\mathbf{S}_m(z)$ einen von Null verschiedenen Werth besässe. Es muss also wirklich Δ' von Null verschieden sein. Ist aber dies der Fall, so können die C immer und nur in einer Weise so bestimmt werden, dass

$$C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_{m-1}\mathbf{s}_{m-1}(z) = \mathbf{s}_0(z)$$

wird, wenn $\mathbf{s}_0(z)$ eine beliebig gegebene ganze Function von höchstens $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet.

Auf Grund des oben Dargelegten kann nun der am Ende des vorigen Paragraphen bewiesene Satz durch den folgenden ergänzt werden:

Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ *entweder* > 1 *oder* $= 1$ *und im letzten Falle der reelle Theil von* $x < 0$, *bezeichnet ferner* $\mathbf{s}_0(z)$ *eine ganze rationale Function, deren Coefficienten als unbestimmte Grössen betrachtet werden und deren Gradzahl im ersten Falle gleich* $m-1$, *im zweiten aber gleich* $m-2$ *angenommen wird, so wird die Gleichung*

$$\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z) - \mathbf{s}_0(z)$$

bei passender Bestimmung von $C_1, \ldots, C_m$ *von dem Ausdrucke*

$$\mathbf{S}(z) = C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z),$$

wo $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ *die oben angegebene Bedeutung haben, befriedigt. Der Fall* $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ *ist dadurch bemerkenswerth, dass* $\mathbf{s}_0(z)$ *bei passender Bestimmung von* $C_1, \ldots, C_m$ *identisch verschwinden kann, was dagegen im Falle* $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ *niemals möglich ist. In jenem Falle besteht daher stets, in diesem aber niemals eine homogene lineare Gleichung zwischen dem Ausdrucke* $\mathbf{F}(z)$ *und den* m *Reihen* $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$.

20. Die in diesem Abschnitte erhaltenen Resultate wollen wir jetzt zusammenfassen. Dabei wird der Zähler $\mathbf{s}_0(z)$ von $\mathbf{s}(z)$ als eine beliebige (unbestimmte) ganze Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ oder $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade betrachtet, je nachdem $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ entweder > 1 oder $= 1$ ist. Im übrigen werden selbstverständlich in Bezug auf $\mathbf{r}(z)$ und $\mathbf{s}(z)$ die früheren Voraussetzungen (§ 15) festgehalten. Wenn im Folgenden von Partialbruch-

reihen die Rede ist, so kommt noch die Voraussetzung hinzu, dass unter den Null- und Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl ist. Es ist indessen nicht schwer zu finden (§ 18), dass die folgenden Resultate im wesentlichen noch bestehen bleiben, wenn diese Voraussetzung nicht gemacht wird. Die im Folgenden angewandten Bezeichnungen sind früher erklärt; insbesondere hat die Zahl p die in § 10 festgesetzte Bedeutung. Es sind zwei Hauptfälle zu beachten: je nachdem $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ oder $= 1$ ist.

I. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, so sind die beiden Ausdrücke

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$
$$= a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$
$$+ C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

stets convergent und besitzen die in § 15 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften; umgekehrt lässt sich auch jede Function mit den fraglichen Eigenschaften in diesen beiden Formen darstellen. (Ist $m = n$, so ist $p = 1$ zu setzen.)

II_1. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und hat gleichzeitig der reelle Theil von x einen zwischen 0 und -1 liegenden Werth, so gilt von den beiden Ausdrücken

$$C\mathbf{F}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)} = C\mathbf{F}(z) + C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots$$
$$\ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

alles, was unter I. bezüglich $F(z)$ gesagt worden ist.

II_2. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und der reelle Theil von $x \geqq 0$, so gilt von dem Ausdrucke

$$C\mathbf{F}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

alles, was unter I. bezüglich $F(z)$ gesagt worden ist.

II_3. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und der reelle Theil von $x \leqq -1$, so gilt von dem Ausdrucke

$$C\mathbf{F}(z) + C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

alles, was unter I. bezüglich $F(z)$ gesagt worden ist.

Die Anzahl der unbestimmten Constanten, welche in dem unter II_3 (und II_1) auftretenden Ausdrucke vorkommen, ist nur dem Scheine nach gleich $m + 1$, in der That aber gleich m. Dies ergiebt sich daraus, dass die $m + 1$ Functionen $\mathbf{F}(z)$, $\mathbf{S}_1(z)$, ..., $\mathbf{S}_m(z)$ nicht von einander linear unabhängig sind.

IV.

Über die Beziehung zwischen den Gammafunctionen und den Integralen der Differentialgleichung

$$(a_0 - b_0x)y + (a_1 - b_1x)x\frac{dy}{dx} + \ldots + (a_m - b_mx)x^m\frac{d^my}{dx^m} = 0.$$

21. In einer früheren Arbeit[1] habe ich den innigen Zusammenhang dargestellt, welche zwischen den Gammafunctionen und den Integralen der obigen Differentialgleichung stattfindet. Ein ganz specieller Fall dieser Differentialgleichung ist die der hypergeometrischen Reihe. In der grundlegenden Gauss'schen Abhandlung über die genannte Reihe wird die Function $\Pi(z) = \Gamma(z + 1)$ aufgestellt und ihre wichtigsten Eigenschaften ermittelt. Der Werth der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ wird sodann mit Leichtigkeit auf diese Function zurückgeführt. In ganz ähnlicher Weise kann nun die Π-Function auch in der Theorie der obigen allgemeineren Differentialgleichung benutzt werden. Die Anwendbarkeit der Function in dieser Hinsicht soll jedoch nicht in der vorliegenden Arbeit verfolgt werden. Anstatt dessen wollen wir vervollständigen, was in einer früheren Arbeit[1] über den Zusammenhang zwischen der Gammafunction und

[1] *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen.* Bd. 9 dieses Journals.

der obigen Differentialgleichung dargestellt worden ist. Dieser Zusammenhang kann folgenderweise angegeben werden. Bezeichnet y eine in passender Weise gewählte Lösung unserer Differentialgleichung, und wird das Integral

$$\int yx^{z-1}dx$$

zwischen zwei singulären Stellen der Differentialgleichung genommen, so kann dieses Integral, wenn es überhaupt einen bestimmten Sinn hat, durch die Gammafunction ausgedrückt werden. *Ist insbesondere* $b_m = 0$ (und a_m reel), *in welchem Falle nur zwei singuläre Stellen* $x = 0$ *und* $x = \infty$ *sich finden, so hat das Integral*

$$\int_0^\infty yx^{z-1}dx$$

bei passender Wahl von y *stets einen bestimmten Sinn, wenn zugleich der reelle Theil von* z *hinreichend gross ist, und kann durch die Gammafunction in folgender Weise ausgedrückt werden*

$$\int_0^\infty yx^{z-1}dx$$

$$= a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\ldots+\frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right],$$

wo $\mathbf{F}(z)$ *und* p *ihre früher festgesetzten Bedeutungen haben.* Dies ist a. a. O. nicht bewiesen. Es giebt im Allgemeinen p von einander linear unabhängige Integrale y, für welche eine solche Gleichung besteht, und für welche somit $\lim\limits_{x=\infty} x^k y = 0$ ist, wie gross auch k sein mag.

Da die Differentialgleichung der Exponentialfunction e^{-x} ein specieller und zugleich der überhaupt einfachste Fall unserer Differentialgleichung ist, so behaupten wir also mit andern Worten, dass die im Frage stehenden bestimmten Integrale durch das einfachste unter ihnen

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$$

ausgedrückt werden können.

In diesem Paragraphen sollen zunächst einige Formeln entwickelt und Bezeichnungen festgesetzt werden.

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass a_m einen von Null verschiedenen Werth hat. Dagegen kann b_m auch gleich Null sein. Unter b_n soll weiterhin die erste von den Grössen $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ verstanden werden, welche von Null verschieden ist. Ist $n = m$, so hat unsere Differentialgleichung drei singuläre Stellen: $x = 0$, $x = \frac{a_m}{b_m} = a$ und $x = \infty$. Ist $n < m$, so hat sie deren nur zwei: $x = 0$ und $x = \infty$.

Weil a_m von Null verschieden ist, so besitzen die Integrale unserer Differentialgleichung bekanntlich die Eigenschaft, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von x, in der Umgebung von $x = 0$ endlich zu bleiben, und können in dieser Umgebung durch eine Summe von Reihen der Form

$$(55) \qquad y_\rho = x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} [C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)} \log x + \ldots + C_{k-1}^{(\nu)} (\log x)^{k-1}] x^\nu$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung bedeutet. Ist $n = m$, so ist der Convergenzradius R der Reihen y_ρ gleich $\left|\frac{a_m}{b_m}\right|$. Ist $n < m$, so ist $R = \infty$, d. h. die y_ρ sind beständig convergirende Reihen.

Durch die Substitution $x = t^{-1}$ geht die Differentialgleichung

$$(56) \qquad (a_0 - b_0 x) y + (a_1 - b_1 x) x \frac{dy}{dx} + \ldots + (a_m - b_m x) x^m \frac{d^m y}{dx^m} = 0$$

in eine Differentialgleichung derselben Form über:

$$(57) \qquad (A_0 - B_0 t) y + (A_1 - B_1 t) t \frac{dy}{dt} + \ldots + (A_m - B_m t) t^m \frac{d^m y}{dt^m} = 0.$$

Die Constanten A und B lassen sich mit Hülfe der folgenden in Bezug auf ρ identischen Gleichungen berechnen:

$$(58) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{r}_0(-\rho) &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho(\rho - 1) + \ldots + a_m\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) \\ &= B_0 - B_1\rho + B_2\rho(\rho + 1) + \ldots + (-1)^m B_m\rho(\rho + 1)\ldots \\ &\qquad \ldots(\rho + m - 1), \end{aligned}$$

$$(59) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{r}_1(-\rho - 1) &= b_0 + b_1\rho + b_2\rho(\rho - 1) + \ldots + b_m\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) \\ &= A_0 - A_1\rho + A_2\rho(\rho - 1) + \ldots + (-1)^m A_m\rho(\rho + 1)\ldots \\ &\qquad \ldots(\rho + m - 1). \end{aligned}$$

Es sind somit b_m und A_m beide gleichzeitig Null oder von Null verschieden. Ist also b_m von Null verschieden, so sind $x = 0$ und $x = \infty$ singuläre Stellen derselben Beschaffenheit. Die Integrale der Differentialgleichung (56) lassen sich dann in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ durch eine Summe von Reihen der folgenden Form ausdrücken

$$y_\rho = \left(\frac{1}{x}\right)^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)} \log\frac{1}{x} + \ldots + C_{k-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right]\left(\frac{1}{x}\right)^\nu,$$

wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Diese Reihen convergiren, wenn $|x| > R$ ist. Es ist offenbar $\mathbf{r}_0(-\rho) = 0$ die zum singulären Punkte $x = 0$ und $\mathbf{r}_1(\rho - 1) = 0$ die zum Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung.

Ist aber b_m und somit auch $A_m = 0$, so ist die Beschaffenheit der Stelle $x = \infty$ eine ganz andere als vorher. In § 24 soll sie in einer gewissen Beziehung charakterisirt werden. Dabei wird die Gammafunction eine eigenthümliche Anwendung finden.

Durch die Substitution $x = \alpha t$ werden die Constanten a der Differentialgleichung (56) nicht verändert; die b gehen aber in $b_0\alpha, b_1\alpha, \ldots, b_m\alpha$ über. Deshalb können wir weiterhin voraussetzen, dass $\frac{a_m}{b_n} = (-1)^{m-n} a$ ist, wo a eine reelle positive Zahl bedeutet. Ferner nehmen wir an, dass die bestimmten Integrale, von denen die Rede sein wird, längs einer die Grenzen verbindenden Geraden erstreckt sind. Bei den ferneren Integrationen ist demnach x eine reelle Veränderliche.

Stellt man die durch partielle Integration erhaltene Gleichung

$$\int_0^x x^{z+\nu} y^{(\nu)} dx = x^{z+\nu} y^{(\nu-1)} - (z+\nu) x^{z+\nu-1} y^{(\nu-2)}$$
$$+ (z+\nu-1)(z+\nu) x^{z+\nu-2} y^{(\nu-3)} + \ldots + (-1)^{\nu-1}(z+2)(z+3)\ldots(z+\nu) x^{z+1} y$$
$$+ (-1)^\nu (z+1)(z+2)\ldots(z+\nu)\int_0^x x^z y\, dx$$

mit der Gleichung

$$\int_0^x x^z(b_0 y + b_1 x y' + \ldots + b_n x^n y^{(n)}) dx = \int_0^x x^{z-1}(a_0 y + a_1 x y' + \ldots + a_m x^m y^{(m)}) dx$$

zusammen, so ergiebt sich

$$(60)\qquad \mathbf{r}_1(z)\int_0^x yx^z\,dx = \mathbf{r}_0(z)\int_0^x yx^{z-1}dx - x^{z-1}\mathbf{s}_0(z, x),$$

wo $\mathbf{r}_0(z), \mathbf{r}_1(z), \mathbf{s}_0(z, x)$ die folgenden Ausdrücke bezeichnen

$$(61)\qquad \mathbf{r}_0(z) = a_0 - a_1 z + a_2 z(z+1) + \dots \\ \dots + (-1)^m a_m z(z+1)\dots(z+m-1),$$

$$(62)\qquad \mathbf{r}_1(z) = b_0 - b_1(z+1) + b_2(z+1)(z+2) + \dots \\ \dots + (-1)^n b_n(z+1)(z+2)\dots(z+n),$$

$$(63)\qquad \mathbf{s}_0(z, x) = \varphi_0 + \varphi_1 z + \dots + \varphi_{m-1}z^{m-1}.$$

Die Grössen φ sind in Bezug auf $y, y', \dots, y^{(m-1)}$ homogene lineare Functionen, deren Coefficienten aber ganze rationale Functionen von x sind. Insbesondere hat φ_{m-1} die Form

$$(64)\qquad \varphi_{m-1} = (-1)^m(a_m - b_m x)xy.$$

Unter den Grössen $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ ist φ_0 die einzige, welche die $(m-1)^{\text{te}}$ Ableitung von y enthält, und zwar ist der Coefficient von $y^{(m-1)}$ gleich

$$(65)\qquad -x^m(a_m - b_m x).$$

Es ist, wie schon gesagt wurde,

$$\mathbf{r}_0(-z) = a_0 + a_1 z + a_2 z(z-1) + \dots + a_m z(z-1)\dots(z-m+1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = 0$ und, wenn $n = m$ ist,

$$\mathbf{r}_1(z-1) = b_0 - b_1 z + b_2 z(z+1) + \dots + (-1)^n b_n z(z+1)\dots(z+n-1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung. Setzt man

$$\mathbf{r}_0(z) = (-1)^m a_m(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m),$$
$$\mathbf{r}_1(z) = (-1)^n b_n(z-z'_1)(z-z'_2)\dots(z-z'_n),$$

so sind die Wurzeln der erst genannten Fundamentalgleichung: $-z_1$,

$-z_2, \ldots, -z_m$, und die der letzteren $z_1' + 1, z_2' + 1, \ldots, z_n' + 1$. Auch weiterhin sollen die folgenden Bezeichnungen beibehalten werden:

$$\mathfrak{r}(z) = \frac{\mathfrak{r}_0(z)}{\mathfrak{r}_1(z)} = a\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)}{(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n')}, \qquad \left(a = (-1)^{m-n}\frac{a_m}{b_n}\right),$$

$$\varkappa = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m = \frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{a_{m-1}}{a_m} + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist $n = m$, so ist offenbar

$$(66) \qquad \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+2)(\rho+\varkappa+1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung.

Aus der allgemeinen Form (55) der Integrale unserer Differentialgleichung in der Umgebung der Stelle $x = 0$ geht hervor, dass der reelle Theil von $z = \zeta + i\zeta'$ im Allgemeinen grösser als die entsprechenden Theile von $z_1, \ldots, z_m$ vorausgesetzt werden muss, wenn die in Gleichung (60) vorkommenden Integrale einen bestimmten Sinn haben sollen. Es soll weiterhin mit ζ_1 die im algebraischen Sinne grösste unter den reellen Theilen von $z_1, \ldots, z_m$ und mit ζ_1' die kleinste unter den reellen Theilen von $z_1', \ldots, z_n'$ zu findende Zahl bezeichnet werden.

Es giebt überhaupt nur zwei Fälle, wo der in Gleichung (60) vorkommende Ausdruck $x^{z-1}\mathfrak{s}_0(z, x)$ in Bezug auf die Grösse z rational werden kann. Entweder muss $x = 1$ gesetzt werden, oder es muss x einen solchen Werthe erhalten, dass $\mathfrak{s}_0(z, x)$ identisch verschwindet.

22. In diesem Paragraphen setzen wir voraus, es sei $n = m$. Die zum singulären Punkte $x = a$ der Differentialgleichung (56) gehörige Fundamentalgleichung (66) hat die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, m-2, -\varkappa-1$. Das zur Wurzel $\rho = -\varkappa - 1$ gehörige Integral, welches mit η bezeichnet werden soll, ist nun besonders bemerkenswerth. Soll das Integral

$$(67) \qquad f(z) = \int_0^a \eta x^{z-1} dx,$$

wo $\zeta > \zeta_1$ ist, einen bestimmten Sinn haben, so ist es offenbar nothwendig und zugleich auch hinreichend, dass der reelle Theil von $\varkappa < 0$ ist. Überdies wollen wir aber in diesem Paragraphen noch voraussetzen, dass

$-x-1$ von den übrigen Wurzeln der Gleichung (66) verschieden ist, d. h. dass x gleich keiner der Zahlen $-1, -2, \ldots, -m+1$ ist. Dann ist

$$\eta = (a-x)^{-x-1}\mathfrak{P}(a-x),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $a-x$ fortschreitende Reihe bezeichnet, deren constantes Glied von Null verschieden ist.

Aus Gleichung (60), wo $y = \eta$ zu setzen ist, geht hervor, dass $\lim\limits_{x=a} \mathbf{s}_0(z, x)$ endlich sein muss. Es soll bewiesen werden, dass diese Grenze identisch gleich Null ist. Zu dem Ende beachte man, was schon im vorigen Paragraphen hervorgehoben wurde, dass $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ in Bezug auf $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(m-1)}$ als homogene lineare Functionen betrachtet werden können, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind, sowie auch, dass die $(m-1)^{\text{te}}$ Ableitung $\eta^{(m-1)}$ nur in φ_0 enthalten wird. Weil ferner $\eta^{(\lambda)} = (a-x)^{-x-\lambda-1}\mathfrak{P}_\lambda(a-x)$ gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{P}_\lambda$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet, so kann $\mathbf{s}_0(z, x)$ auf die folgende Form gebracht werden

$$(68) \qquad \mathbf{s}_0(z, x) = (a-x)^{-x-m}(\Phi_0 + \Phi_1 z + \ldots + \Phi_{m-1}z^{m-1}),$$

wo $\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von $a-x$ entwickelbare Functionen bezeichnen. Ist nun der reelle Theil von $x < -m$, so geht die Richtigkeit unserer Behauptung aus (68) unmittelbar hervor. Ist der reelle Theil von $x = -m$, so werden $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(m-2)}$, nicht aber $\eta^{(m-1)}$, gleich Null für $x = a$. Dasselbe ist daher auch mit den Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ der Fall, da sie nur $\eta, \ldots, \eta^{(m-2)}$, nicht aber $\eta^{(m-1)}$ enthalten. Es muss indessen auch φ_0 für $x = a$ verschwinden, was sich daraus ergiebt, dass $\eta^{(m-1)}$ mit dem Coefficienten (65) multiplicirt ist, und dieser Coefficient ist Null für $x = a$, während $\eta^{(m-1)}$ nicht unendlich ist. Aus Gleichung (63) geht nun die Richtigkeit unserer Behauptung auch in dem fraglichen Falle hervor.

Nunmehr sei x eine Grösse, deren reeller Theil einen zwischen 0 und $-m$ liegenden Werth hat, und es sei der imaginäre Theil von x jedesmal von Null verschieden, wenn der reelle Theil gleich irgend einer der Zahlen $-1, -2, \ldots, -m+1$ ist. Nähert sich nun x der Stelle a, so nähert sich $\mathbf{s}_0(z, x)$ wegen (60) gleichzeitig einer bestimmten endlichen Grenze, während jedoch $(a-x)^{-\lambda-m}$ ohne Ende wächst. Es muss somit der in (68) vorkommende Klammerausdruck für $x = a$ gleich Null sein. Weil dies für unbestimmte Werthe von z stattfindet, so müssen $\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}$ den gemeinschaftlichen Factor $a - x$ enthalten, und es kann demnach $\mathbf{s}_0(z, x)$ auf die folgende Form gebracht werden

$$(69) \qquad \mathbf{s}_0(z, x) = (a - x)^{-\varkappa - m + 1}(\Phi_0' + \Phi_1' z + \ldots + \Phi_{m-1}' z^{m-1}),$$

wo die Φ' nach positiven ganzzahligen Potenzen von $a - x$ entwickelbare Functionen bezeichnen. Ist nun der reelle Theil von $\varkappa < -m + 1$, so ist offenbar $\mathbf{s}_0(z, a)$ identisch gleich Null. Hat der reelle Theil von $\varkappa$ den Werth $-m + 1$, so ist der absolute Betrag des Ausdruckes $(a - x)^{-\varkappa - m - 1}$ zwar gleich Eins, der Ausdruck selbst aber nähert sich, weil der imaginäre Theil von $\varkappa$ nicht gleich Null ist, keiner bestimmten Grenze, wenn x sich der Stelle a nähert. Es muss also wiederum der in (69) vorkommende Klammerausdruck für $x = a$ und für unbestimmte Werthe von z gleich Null sein, etc. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussfolgerungen ergiebt sich offenbar, das $\mathbf{s}_0(z, a)$ in allen den Fällen identisch verschwindet, wo der reelle Theil von $\varkappa < 0$ ist, während $\varkappa$ selbst einen von den ganzen Zahlen $-1, -2, \ldots, -m + 1$ verschiedenen Werth hat.

Ist $\varkappa$ gleich irgend einer der genannten Zahlen, so ist $\rho = -\varkappa - 1$ eine zweifache Wurzel der Gleichung (66), und dann hat es keinen Sinn, von einem einzigen zu dieser Wurzel gehörigen Integrale zu sprechen. Bei dieser Gelegenheit wollen wir diesen Fall keiner näheren Erörterung unterziehen.

Es sei also fortwährend der reelle Theil von $\varkappa < 0$ und $\varkappa$ selbst von den ganzen Zahlen $-1, -2, \ldots, -m + 1$ verschieden. Die durch (67) definirte Function $f(z)$ hat alsdann für $\zeta > \zeta_1$ einen bestimmten Sinn, und es ist

$$f(z + 1) = \mathbf{r}(z) f(z).$$

Da die Veränderliche x reel ist, so kann der absolute Betrag von $f(z)$, wofern die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf einen, der Bedingung $\alpha > \zeta_1$ genügenden, zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$) beschränkt wird, nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Weil $f(z)$ nach einem bekannten Satze aus der Theorie der bestimmten Integrale in dem genannten Gebiete zugleich eine monogene Function von z

ist, so kann sie auf Grund des in § 9 bewiesenen Satzes auf die folgende Form gebracht werden:

$$(70) \qquad \int_0^a \eta x^{z-1} dx = Ca^z \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z_1') \ldots \Gamma(z - z_m')} = Ca^z \mathbf{F}(z).$$

Durch diese Gleichung wird eine grosse Menge bestimmter Integrale auf die Gammafunction zurückgeführt. Ein ganz specieller Fall derselben ist die bekannte Gleichung

$$\int_0^1 (1 - x)^{a-1} x^{z-1} dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z + a)}. \qquad (a>0)$$

Ist a von Eins verschieden, so kann $f(z)$ folgenderweise als Summe zweier Integrale dargestellt werden

$$f(z) = \int_0^a \eta x^{z-1} dx = \int_0^1 \eta x^{z-1} dx + \int_1^a \eta x^{z-1} dx = P(z) + Q(z).$$

Setzt man in Gleichung (60) $y = \eta$ und $x = 1$, so ergiebt sich, dass $P(z)$ die Differenzengleichung $\mathbf{r}_1(z)P(z + 1) = \mathbf{r}_0(z)P(z) - \mathbf{s}_0(z)$ befriedigt, wo $\mathbf{s}_0(z) = \mathbf{s}_0(z, 1)$ wegen (63) eine ganze rationale Function von höchstens $(m - 1)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet. Hieraus folgt, dass $Q(z) = f(z) - P(z)$ der Gleichung $\mathbf{r}_1(z)Q(z + 1) = \mathbf{r}_0(z)Q(z) + \mathbf{s}_0(z)$ genügen muss. Das Integral $Q(z)$ hat aber für jeden Werth von z einen bestimmten endlichen Werth und kann daher nach einem bekannten Satze in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelt werden. Der obigen Darstellung von $f(z)$ als Summe zweier Integrale entspricht die Mittag-Leffler'sche Darstellung derselben Function als Summe einer Partialbruchentwickelung und einer beständig convergirenden Potenzreihe.

23. In diesem und im folgenden Paragraphen nehmen wir an, dass $n < m$ ist. Unsere Differentialgleichung (56) hat dann nur zwei singuläre Stellen $x = 0$ und $x = \infty$, von denen die letztere als eine wesentlich singuläre zu betrachten ist, weil die Integrale der Differentialgleichung die Eigenschaft nicht mehr besitzen, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von x in der Umgebung dieser Stelle endlich zu bleiben.

Es kann demnach in Frage gestellt werden, ob es überhaupt ein Integral y gebe, für welches das Integral

$$\int_0^\infty y x^{z-1} dx \qquad (\zeta > \zeta_1)$$

einen bestimmten Sinn hat. Die Existenz solcher Integrale lässt sich indessen leicht nachweisen, wenn wir einen von Herrn PINCHERLE in seiner interessanten Arbeit *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate*[1] bewiesenen Satz zum Ausgangspunkte wählen und den demselben zu Grunde liegenden Gedankengang verfolgen.

Mit Benutzung unserer im Vorhergehenden festgesetzten Bezeichnungen kann der in Frage stehende Satz folgenderweise ausgesprochen werden:

Setzt man

$$\Phi(z) = a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_n')},$$

ist ferner $n < m$ und α eine beliebige reelle Zahl, welche grösser ist als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, so hat das Integral

$$(71) \qquad \varphi(x) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz,$$

wenn der reelle Theil von x positiv ist und wenn der Integrationsweg aus der zur imaginären Axe parallelen Geraden $\zeta = \alpha$ besteht, stets einen bestimmten endlichen, von α unabhängigen Werth, und es ist zugleich $\varphi(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (56).

Dieser Satz gilt aber auch für den Fall, wo $\Phi(z)$ gleich dem in § 10 *charakterisirten allgemeineren Ausdruck* (34):

$$(72) \quad \Phi(z) = a^z \mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$

gesetzt wird, was jetzt nachgewiesen werden soll. Der Beweis stimmt, abgesehen von einigen unwesentlichen Modificationen, mit dem des Herrn PINCHERLE vollständig überein.

[1] Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. Vol. 4. S. 694 u. ff.

Nach einem in § 11 bewiesenen Satze hat das Integral (71), wo $\Phi(z)$ nunmehr den Ausdruck (72) bezeichnet, stets einen bestimmten Sinn, wenn $\alpha > \zeta_1$, d. h. grösser als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, und der reelle Theil von $x > 0$ ist. Es soll zunächst bewiesen werden, dass der Werth des Integrals von α unabhängig ist.

Zu dem Ende denke man sich in der durch die Bedingung $\zeta > \zeta_1$ definirten Hälfte der z-Ebene ein Rechteck mit den Ecken $\alpha - i\omega$, $\alpha + i\omega$, $\beta + i\omega$, $\beta - i\omega$. Wird das Integral

$$\int x^{-z}\Phi(z)dz$$

längs der Begrenzung dieses Rechteckes erstreckt, so ist der Werth desselben nach einem bekannten Satze gleich Null. Somit ist

$$\int\limits_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz + \int\limits_{\alpha+i\omega}^{\beta+i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz$$
$$+ \int\limits_{\beta+i\omega}^{\beta-i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz + \int\limits_{\beta-i\omega}^{\alpha-i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz = 0.$$

Auf Grund des in § 11 bewiesenen Satzes wissen wir aber, dass der Ausdruck $z^k x^{-z}\Phi(z)$, wie gross auch k sein mag, mit wachsendem $|\zeta'|$ sich gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn der reelle Theil von $z = \zeta + i\zeta'$ auf ein endliches Intervall, und die Veränderliche x auf ein Gebiet, dessen sämmtliche Punkte positive Abscissen haben, beschränkt wird. Lässt man also ω ohne Ende wachsen, so nähern sich das zweite und vierte in der obigen Gleichung vorkommende Integral der Grenze Null. Für $\omega = \infty$ geht diese Gleichung somit in die folgende über

$$\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz = \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz.$$

Jetzt gehen wir zum Beweise des zweiten Theiles des fraglichen Satzes über. Auf Grund der letzten Gleichung ist offenbar

$$\varphi(x) = \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz = \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-(z+1)}\Phi(z+1)dz. \tag{73}$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(x) = -\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+1)}\Phi(z) z dz = -\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+2)}\Phi(z+1)(z+1)dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^{-(z+\nu)}\Phi(z)z(z+1)\dots(z+\nu-1)dz$$

$$= (-1)^{\nu}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+\nu+1)}\Phi(z+1)(z+1)\dots(z+\nu)dz.$$

Es ist also allgemein

$$(74)\qquad (-1)^{\nu}x^{\nu}\varphi^{(\nu)}(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\Phi(z)z(z+1)\dots(z+\nu-1)dz$$

und

$$(75)\quad (-1)^{\nu}x^{\nu+1}\varphi^{(\nu)}(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\Phi(z+1)(z+1)(z+2)\dots(z+\nu)dz.$$

Setzt man

$$\mathbf{r}_0(z) = a_0 - a_1 z + a_2 z(z+1) + \dots + (-1)^m a_m z(z+1)\dots(z+m-1)$$

$$\mathbf{r}_1(z) = b_0 - b_1(z+1) + b_2(z+1)(z+2) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n b_n(z+1)(z+2)\dots(z+n)$$

so kann die Gleichung $\mathbf{r}_1(z)\Phi(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\Phi(z)$ nach Multiplication mit x^{-z}, in folgender Weise geschrieben werden:

$$b_0 x^{-z}\Phi(z+1) - b_1 x^{-z}\Phi(z+1)(z+1) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n b_n x^{-z}\Phi(z+1)(z+1)\dots(z+n) = a_0 x^{-z}\Phi(z) - a_1 x^{-z}\Phi(z)z + \dots$$
$$\dots + (-1)^m a_m x^{-z}\Phi(z)z(z+1)\dots(z+m-1).$$

Integrirt man nun die beiden Seiten dieser Gleichung zwischen den Grenzen $\alpha - i\infty$ und $\alpha + i\infty$, so ergiebt sich mit Benutzung von (74) und (75)

$$b_0 x\varphi(x) + b_1 x^2\varphi'(x) + \dots + b_n x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)$$
$$= a_0\varphi(x) + a_1 x\varphi'(x) + \dots + a_m x^m\varphi^{(m)}(x)$$

Es ist also $\varphi(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (56).

24. Es ist nun sehr leicht zu zeigen, dass das Integral $\varphi(x)$, für unbestimmte Werthe der Constanten $A_1, \ldots, A_p$, mit der Exponentialfunction e^{-x} die Eigenschaft gemein hat, dass $x^k\varphi(x)$, wie gross auch k sein mag, für positive ohne Ende wachsende Werthe des reellen Theils von x sich der Grenze Null nähert. Damit ist zugleich bewiesen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{z-1}dx$$

für $\zeta > \zeta_1$ stets einen bestimmten Sinn hat. Aus der Gleichung (73) folgt in der That

$$\varphi(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+k)}\Phi(z+k)dz$$

oder

$$x^k\varphi(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\Phi(z+k)dz,$$

woraus sich die Richtigkeit unserer Behauptung sehr leicht ergiebt.

Es bleibt noch übrig, zu beweisen, dass das Integral $\varphi(x)$ nicht identisch verschwinden kann, was nicht unmittelbar einleuchtend ist. Nach dem in § 11 bewiesenen Satze hat das Integral $\varphi(x)$ immer einen bestimmten Sinn, wenn der Integrationsweg durch keine Unendlichkeitsstelle von $\Phi(z)$ hindurchgeht. Da die Unendlichkeitsstellen dieser Function in eine gewisse Anzahl aritmetischer Reihen zerfallen, so kann offenbar die Zahl a so angenommen werden, dass $a-\lambda$, für jeden ganzzahligen Werth von λ, von den reellen Theilen der genannten Stellen verschieden ist. Das Integral

$$\psi_\lambda(x) = \int_{a-\lambda-i\infty}^{a-\lambda+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz \qquad (a>\zeta_1)$$

hat dann für jeden ganzzahligen Werth von λ einen bestimmten Sinn. Durch Vermittelung eines Rechteckes und mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angewandten Betrachtungen findet man, dass das Integral $\varphi(x)$ gleich ist dem Integrale $\psi_\lambda(x)$, vermehrt um die mit $2\pi i$ multiplicirte Summe der Residuen der zwischen den Parallelen $\zeta = a - \lambda$ und $\zeta = a$ liegenden Unendlichkeitsstellen von $x^{-z}\Phi(z)$. Es sei ρ gleich einer der Zahlen $-z_1, -z_2, \ldots, -z_m$. Dann hat man

$$x^{-z} = x^{\rho+\nu}\left(1 - \frac{z+\rho+\nu}{1}\log x + \frac{(z+\rho+\nu)^2}{1.2}(\log x)^2 + \dots\right),$$

$$(76) \qquad \Phi(z) = \frac{C_{\mu-1}^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^\mu} + \dots + \frac{C_0^{(\nu)}}{z+\rho+\nu} + \mathfrak{P}(z+\rho+\nu),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Das Residuum der Stelle $z = -\rho - \nu$ ist somit

$$\left[C_0 - C_1 \log x + \dots + (-1)^{\mu-1} C_{\mu-1} \frac{(\log x)^{\mu-1}}{1.2\dots(\mu-1)}\right] x^{\rho+\nu}.$$

Es ist also

$$\varphi(x) = \psi_\lambda(x) + 2\pi i \sum_\rho x^\rho \sum_\nu \left[C_0^{(\nu)} - C_1^{(\nu)} \log x + \dots + (-1)^{\mu-1} C_{\mu-1}^{(\nu)} \frac{(\log x)^{\mu-1}}{1.2\dots(\mu-1)}\right] x^\nu$$

wo die Summation sich auf solche Werthe ρ, ν bezieht, für welche $-\rho - \nu$ gleich einer zwischen den Parallelen $\zeta = \alpha - \lambda$ und $\zeta = \alpha$ liegende Unendlichkeitsstelle von $\Phi(z)$ ist. Für wachsende Werthe von λ nähert sich offenbar

$$\psi_\lambda(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z} \frac{x^\lambda \Phi(z)\,dz}{\Gamma(z-1)\Gamma(z-2)\dots\Gamma(z-\lambda)},$$

da $n < m$ ist, der Grenze Null. Es ist also

$$(77) \quad \varphi(x) = 2\pi i \sum_\rho x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[C_0^{(\nu)} - C_1^{(\nu)} \log x + \dots + (-1)^{\mu-1} C_{\mu-1}^{(\nu)} \frac{(\log x)^{\mu-1}}{1.2\dots(\mu-1)}\right] x^\nu.$$

Dann ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen, denn $C_0^{(\nu)}, C_1^{(\nu)}, \dots, C_{\mu-1}^{(\nu)}$ können nicht alle gleich Null sein. Wir haben aber zugleich die Function $\varphi(x)$ in eine beständig convergirende Reihe der bekannten Form (55) entwickelt. Die Constanten C werden aus der Gleichung (76) erhalten.

Aus (74) geht hervor, dass auch alle Ableitungen von $\varphi(x)$ sich der Grenze Null nähern, wenn der reelle Theil von x durch positive Werthe ohne Ende wächst. Setzt man also in (60) $y = \varphi(x)$ und $x = \infty$, so ergiebt sich mit Benutzung der Bezeichnung

$$(78) \qquad F(z) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{z-1} dx$$

die Gleichung

$$F(z+1) = \frac{\mathfrak{r}_0(z)}{\mathfrak{r}_1(z)} F(z) = \mathfrak{r}(z) F(z)$$

Weil x bei der Integration als eine reelle Veränderliche betrachtet wird, so findet man, dass das Integral (78) nicht nur die in § 10 unter I. und II. sondern auch die unter III. erwähnte Eigenschaft besitzt. Bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_p$ lässt sich somit $F(z)$ auf die folgende Form bringen

$$(79) \qquad \int_0^\infty \varphi(x) x^{z-1} dy$$

$$= a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1) \ldots \sin\pi(z-c_p) \left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \cdots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right].$$

Es bleibt noch übrig, den folgenden Satz zu beweisen:

Es giebt p und nicht mehr als p von einander linear unabhängige Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_p$ der Differentialgleichung (56), *welche die Eigenschaft* $\lim\limits_{x=+\infty} x^k \varphi(x) = 0$ *besitzen, wie gross auch k sein mag.*

Der erste Theil ist auf Grund des soeben bewiesenen Satzes unmittelbar einleuchtend. Es sei, um den zweiten Theil zu beweisen, y ein Integral, welches die genannte Eigenschaft ebenfalls besitzt. Von $y_1, \ldots, y_p$ nehmen wir zugleich an, dass sie solche Integrale sind, die sich auf die Form (71) bringen lassen. Es ergiebt sich nun zunächst, dass die Ableitungen von y ebenfalls die Eigenschaft besitzen, dass sie nach Multiplication mit einer beliebigen Potenz von x sich der Grenze Null nähern, wenn der reelle Theil von x durch positive Werthe ohne Ende wächst. Bezeichnet nämlich $M(\xi, r)$ die obere Grenze von y in dem Falle, dass x eine um den Punkt $x = \xi$ mit dem Radius r gezeichnete Kreislinie durchläuft, so ist bekanntlich

$$|y^{(\nu)}(z)| \leq \frac{|\underline{\nu}}{|r|^\nu} M(\xi, r).$$

Lässt man nun r Constant bleiben und den reellen Theil von ξ durch positive Werthe ohne Ende wachsen, so nähert sich M, mit einer beliebigen Potenz von ξ multiplicirt, offenbar der Grenze Null. Dies ist somit auch mit den Ableitungen von y der Fall.

Aus der Gleichung (63) ergiebt sich nun, weil $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ homogene lineare Functionen von $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ sind, dass $\lim\limits_{x=+\infty} x^{z-1}\mathbf{s}_0(z, x)$ für alle Werthe von z gleich Null ist. Aus (60) folgt somit

$$\int_0^\infty y x^z dx = \mathbf{r}(z)\int_0^\infty y x^{z-1} dx.$$

Beschränkt man die Veränderliche z auf einen beliebigen, der Bedingung $\alpha > \zeta_1$ genügenden, zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$, so kann der absolute Betrag dieses Integrals, weil x reel und positiv ist, nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Auf Grund des in § 10 bewiesenen Satzes muss sich also das Integral auf die folgende Form bringen lassen

$$\int_0^\infty y x^{z-1} dx = \Phi(z),$$

wo $\Phi(z)$ den Ausdruck (72) bezeichnet. Dies ist auch mit jedem der Integrale

$$\int_0^\infty y_\lambda x^{z-1} dx, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p)$$

der Fall. Durch p von einander linear unabhängige Functionen mit den in § 10 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften kann aber, auf Grund des § 12, jede andere Function mit denselben Eigenschaften als homogene lineare Function ausgedrückt werden. Bei passender Bestimmung der Constanten $B_1, \ldots, B_p$ ist demnach

$$(80) \quad \int_0^\infty y x^{z-1} dx = \int_0^1 y x^{z-1} dx + \int_1^\infty y x^{z-1} dx = B_1 \int_0^\infty y_1 x^{z-1} dx + \ldots + B_p \int_0^\infty y_p x^{z-1} dx$$

$$= B_1 \int_0^1 y_1 x^{z-1} dx + \ldots + B_p \int_0^1 y_p x^{z-1} dx + B_1 \int_1^\infty y_1 x^{z-1} dx + \ldots$$

$$\ldots + B_p \int_1^\infty y_p x^{z-1} dx.$$

Aus der allgemeinen Form (77) der Integrale der Differentialgleichung (56) in der Umgebung der Stelle $x = 0$ ergiebt sich für jedes der zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrale ein Ausdruck der Form

$$\int_0^1 y_\lambda x^{z-1}dx = P_\lambda(z) = \sum_\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{C_0}{z+\rho+\nu} + \ldots + \frac{C_{\mu-1}}{(z+\rho+\nu)^\mu}\right). \quad (\lambda=0,1,\ldots,p)$$

Die zwischen den Grenzen 1 und ∞ genommenen Integrale sind offenbar ganze Functionen. Aus Gleichung (80) folgt also, dass der Ausdruck $P(z) - B_1P_1(z) - \ldots - B_pP_p(z)$ auch eine ganze Function sein muss, was offenbar nur dadurch möglich ist, dass dieser Ausdruck identisch verschwindet. Nun sieht man aber unmittelbar ein, dass die Partialbruchreihen $P, P_1, \ldots, P_p$ dann und nur dann von einander linear unabhängig sind, wenn die Integrale $y, y_1, \ldots, y_p$ von einander linear unabhängig sind. Auf Grund der Gleichung $P - B_1P_1 - \ldots - B_pP_p = 0$ ist also $y = c_1y_1 + \ldots + c_py_p$. Hiermit ist aber der obige Satz bewiesen.

Helsingfors, April 1890.