SUR L'ÉTUDE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER D'INDÉTERMINATION. I.

PAR

J. MALMQUIST

À STOCKHOLM.

Introduction.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = \mathfrak{P}_i(x, y_1, \ldots y_n) \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où k est un entier positif et les seconds membres sont des séries de puissances de $x, y_1, \ldots y_n$ s'annulant pour $x = 0$, $y_1 = 0, \ldots y_n = 0$ et convergentes pour les valeurs de $x, y_1, \ldots y_n$ telles que $|x| < r$, $|y_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$. À chaque solution $y_1, \ldots y_n$ correspond un domaine que nous désignons comme un domaine d'existence de cette solution. Il est limité par certaines courbes en nombre fini ou infini définies par des équations $|x| = \bar{r}$, $|y_1| = \bar{r}', \ldots |y_n| = \bar{r}'$ ou par certaines de ces équations, et $y_1, \ldots y_n$ sont régulières quand x appartient à ce domaine et $x \neq 0$. Le problème à traiter peut être formulé de la manière suivante.

Étudier la forme d'un domaine d'existence d'une solution $y_1, \ldots y_n$ *et la représentation analytique de* $y_1, \ldots y_n$ *quand* x *appartient à un tel domaine.*

Dans un travail précédent[1] nous avons étudié ce problème pour une équation différentielle du premier ordre. Dans le travail présent nous nous proposons de l'étudier pour certains systèmes de la forme (1) satisfaisant à la condition que *les racines de l'équation caractéristique soient simples et* $\neq 0$.

[1] J. MALMQUIST, Sur les points singuliers des équations différentielles. Arkiv för mat., astr. o. fysik, Stockholm 1920, t. 15, n:o 3. Voir en particulier p. 28.

Nous allons étudier un système plus général

$$x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\ x) \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{2}$$

Les seconds membres sont des fonctions régulières pour $0 < |x| < r$, $|y_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$. Il n'est pas nécessaire de supposer qu'elles sont uniformes en x, nous les supposons définies sur la surface de Riemann de $\log x$. Mais elles doivent satisfaire à certaines conditions asymptotiques que nous allons formuler dans le n:o 1.

Dans le § 1 nous démontrons, sous la seule supposition concernant les racines de l'équation caractéristique qu'elles sont $\neq 0$, l'existence de certaines solutions particulièrement intéressantes qui satisfont à des inégalités de la forme $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ dans des secteurs aussi grands que possibles[1].

Dans le § 2 nous ferons une application des résultats du § 1 à la théorie des solutions irrégulières d'un système d'équations différentielles linéaires dont *l'équation caractéristique n'a que des racines simples.* On sait que M. Horn[2] a le premier démontré l'existence de certaines solutions particulières qui sont asymptotes aux séries normales de Thomé dans des secteurs aussi grands que possible. Nous montrons que ces solutions s'obtiennent aussitôt si l'on applique le théorème 1 du § 1 à un système de Riccati correspondant au système linéaire.

Dans le § 3 nous étudions le problème posé au commencement pour un système (1) ou (2) en supposant que l'équation caractéristique n'a que des racines simples et $\neq 0$. Pour la solution du problème on peut chercher à se laisser guider d'un cas particulier où la solution est immédiate, c'est le cas où la solution générale s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} y_i &= \mathfrak{P}_i(x, t_1, \ldots t_n) \\ &= t_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} \varphi^{(i)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n} \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

[1] Des solutions de cette nature jouent un rôle fondamental dans le mémoire couronné de Boutroux, où elles sont désignées comme des intégrales tronquées. Voir P. Boutroux, Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre. Ann. sc. de l'Ec. Norm. sup., t. 30, 1913, p. 255—375 et t. 31, 1914, p. 99—159.

[2] J. Horn, Über die irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen . . ., Acta math., t. 23, p. 171—202. Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen, Acta math., t. 24, p. 289—308; Journ. für die reine und angew. Math., t. 133, p. 19—67. Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen, Jahresb. der deutschen Math.-Ver., 24 (1915), p. 309.

où

$$t_i = C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

C_i étant des constantes arbitraires et $Q_i\left(\frac{1}{x}\right)$ étant des fonctions entières et rationnelles de $\frac{1}{x}$ de degré k; les séries sont supposées convergentes pour $|x| < r$, $|t_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$. Dans ce cas les courbes $|y_i| = \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ limitant un domaine d'existence d'une solution peuvent être remplacées par des courbes

$$\left| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n),$$

car une courbe $|y_i| = \bar{r}'$ est située entre deux courbes

$$\left| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \bar{r}'(1 - \varepsilon), \qquad \left| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \bar{r}'(1 + \varepsilon),$$

où ε peut être pris aussi petit que l'on veut si $\bar{r}'$ est suffisamment petit. Pour un système (2) donné on aura, dans un cas important, où les racines $s_1, \ldots s_n$ de l'équation caractéristique sont d'un même côté d'une droite passant par l'origine, la solution du problème sous une forme analogue si l'on se sert de la méthode classique par laquelle Poincaré[1] a démontré l'existence de solutions asymptotiques de certains systèmes différentiels. On peut définir une suite de secteurs déterminés X dont les angles sont $> \frac{\pi}{k}$, et à chaque secteur X correspond un système de séries donnant la solution générale; ces séries procèdent suivant les puissances de certaines expressions

$$C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

les coefficients étant des fonctions de x définies dans X. Deux secteurs X consécutifs ont une partie commune dans laquelle une solution donnée peut être représentée par chacun des deux systèmes de séries correspodant à ces secteurs. À l'aide de ces séries on peut donc suivre une solution donnée quand x tourne autour de $x = 0$. Le domaine d'existence peut être supposé limité par des courbes

$$\left| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n).$$

[1] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta math., t. 13, p. 1—270, voir p. 136. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1, p. 335.

12—40459. *Acta mathematica*. 73. Imprimé le 29 août 1940.

Nous supposons ensuite que $s_1, \ldots s_n$ ne sont pas d'un même côté d'une droite passant par l'origine. Alors les séries précédentes sont en général divergentes. Le cas particulier considéré plus haut montre qu'un domaine d'existence ne s'étend pas en général à $x = 0$ si x ne tourne qu'un nombre fini de fois autour de $x = 0$. Mais on peut chercher à étudier les solutions particulières dont le domaine d'existence s'étend à $x = 0$. À cet effet, on peut se servir de séries analogues aux séries précédentes ne contenant que certaines des expressions t_i et s'obtenant en posant certaines des constantes C_i égales à 0. Si $s_1, \ldots s_p$ $(p < n)$ sont d'un même côté d'une droite passant par l'origine les séries que l'on obtient en posant $C_i = 0$ $(i = p + 1, \ldots n)$ auront un domaine de convergence. On peut se servir de ces séries pour étudier une solution $y_1, \ldots y_n$ telle que $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ *dans un certain secteur*. Soit $\varphi' < \varphi < \varphi''$ ($\varphi =$ l'argument de x) le secteur maximum dans lequel ces inégalités sont remplies. La solution considérée peut être représentée dans le secteur $\varphi' - \frac{\pi}{k} < \varphi < \varphi'' + \frac{\pi}{k}$ par des systèmes de séries de la forme précédente. La partie d'un domaine d'existence de cette solution se trouvant dans le dernier secteur est limitée par des courbes

$$|C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i}| = \bar{r}'.$$

Parmi ces courbes il y a une courbe s'étendant à $x = 0$ dans la direction φ' et une courbe s'étendant à $x = 0$ dans la direction φ''.

Dans certains cas exceptionnels il peut exister des solutions qui satisfont à des inégalités $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ dans un domaine limité par un cercle $|x| = \bar{r}$ et par deux courbes ayant la même tangente en $x = 0$, mais ne satisfont pas à ces inégalités dans un secteur entourant la tangente en question. Des solutions de cette nature jouent un rôle important dans la théorie des transcendantes de Painlevé. L'étude de ces solutions est en général difficile, nous n'y entrons pas dans ce travail.

Dans les derniers temps M. Trjitzinsky[1] a publié des travaux se rapportant au problème qui nous occupe. En supposant que les seconds membres du système donné s'annulent pour $y_1 = 0, \ldots y_n = 0$ il déduit des développements asymptotiques de certains faisceaux de solutions.

---

[1] W. J. TRJITZINSKY, Theory of non-linear singular differential systems. Trans. Amer. Math. Soc., 42, 1937, p. 225—321. Analytic theory of non-linear singular differential equations. Mémorial des sciences mathématiques, XC.

Nous nous sommes limités, à l'étude du problème posé au commencement, au cas où les racines de l'équation caractéristique sont simples et $\neq 0$. Nous espérons de pouvoir montrer dans un travail suivant qu'on peut traiter d'une manière analogue certains cas où l'équation caractéristique a des racines multiples.

§ 1. Théorèmes d'existence.

1. Nous considérons un système d'équations différentielles

$$x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{2}$$

ou les seconds membres sont des séries de puissances de $y_1, \ldots y_n$

$$\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) = a_i(x) + a_{i1}(x)y_1 + \cdots + a_{in}(x)y_n + \cdots$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

dont les coefficients sont des fonctions de x définies sur la surface de Riemann de $\log x$[1]. Les fonctions $\mathfrak{P}_i$ sont régulières pour $0 < |x| < r$, $|y_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$. Nous supposons que

$$|a_i(x)| < K|x| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et que les coefficients $a_{ij}(x)$ tendent vers des valeurs finies a_{ij} quand x tend vers 0. Les racines de l'équation caractéristique

$$|a_{ij} - s\,\delta_{ij}| = 0$$

sont supposées $\neq 0$. Par une transformation linéaire on peut ramener le système (2) à la forme normale

$$x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = s_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{3}$$

où $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $i = 2, \ldots n$. Nous supposons que les fonctions $\mathfrak{P}_i$ satisfont à des inégalités de la forme

$$|\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)| < K|x| + K\max(|y_1|^2, \ldots |y_n|^2) \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) - \mathfrak{P}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)| < \\ &\qquad < K[|x| + \max(|y_i|, |\bar{y}_i|)] \sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}_i| \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{5}$$

[1] On pourrait se limiter à supposer que les coefficients sont définis sur une partie de cette surface limitée par un ou deux rayons. La théorie suivante est valable aussi dans ce cas.

pour les valeurs en question de $x, y_i, \bar{y}_i (i = 1, \ldots n)$. Nous désignons les conditions imposées jusqu'ici au système (3) comme *les conditions A*.

Nous introduisons en outre une condition que nous désignons comme *la condition B*. Nous supposons qu'il existe des séries de puissances formelles

$$c_i^{(1)} x + c_i^{(2)} x^2 + \cdots \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{6}$$

de telle manière que la condition suivante soit remplie. En posant dans (3)

$$y_i = f_{iN}(x) + z_i \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{7}$$

où

$$f_{iN}(x) = c_i^{(1)} x + \cdots + c_i^{(N)} x^N \qquad (i = 1, \ldots n)$$

on aura un système transformé

$$x^{k+1} \frac{d z_i}{d x} = s_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1} + \mathfrak{P}_i^{(N)}(z_1, \ldots z_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{8}$$

Soient $r_N \leqq r$, g_N des nombres tels que $|f_{iN}(x)| < g_N |x| < \frac{1}{2} r'$ pour $|x| < r_N$. Nous supposons que les fonctions $\mathfrak{P}_i^{(N)}$ satisfont à des inégalités de la forme

$$\begin{gathered} |\mathfrak{P}_i^{(N)}(z_1, \ldots z_n; x)| < K_N |x|^{N+1} + K_N |x| \max(|z_1|, \ldots |z_n|) \\ + K_N \max(|z_1|^2, \ldots |z_n|^2) \\ (i = 1, \ldots n) \end{gathered} \tag{9}$$

pour $|x| < r_N$, $|z_i| < \frac{1}{2} r'$ $(i = 1, \ldots n)$. Nous supposons cette condition remplie pour toute valeur de N [1]. Il résulte de (5) que

$$\begin{gathered} |\mathfrak{P}_i^{(N)}(z_1, \ldots z_n; x) - \mathfrak{P}_i^{(N)}(\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_n; x)| < \\ < K[(1 + g_N)|x| + \max(|z_i|, |\bar{z}_i|)] \sum_{i=1}^{n} |z_i - \bar{z}_i| \\ (i = 1, \ldots n). \end{gathered} \tag{10}$$

La condition asymptotique posée est évidemment remplie si l'on suppose que les coefficients des séries $\mathfrak{P}_i$ dans (2) sont asymptôtes à certaines séries de puissances.

Nous allons démontrer des théorèmes d'existence sous la seule supposition que les conditions A sont remplies. Si l'on suppose en outre que la condition B est satisfaite les solutions trouvées seront asymptôtes aux series (6). Nous

[1] On pourrait se limiter à exiger que cette condition asymptotique ne soit remplie que jusqu'à un certain degré N suffisamment grand.

allons considérer certains secteurs X de sommet $x = 0$ et nous allons démontrer qu'à chaque secteur correspond une solution ou un faisceau de solutions de (3) satisfaisant à des inégalités de la forme

$$|y_i| < \bar{K}|x| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour les valeurs de x qui appartiennent à un secteur $X(\varepsilon)$ à l'intérieur de X et qui satisfont à une inégalité $|x| < \bar{r}$. Par $X(\varepsilon)$ nous désignons un secteur dont les arguments satisfont à

$$\varphi' + \varepsilon < \varphi < \varphi'' - \varepsilon,$$

φ', φ'' étant les arguments extrêmes de X. Si la condition B est remplie les solutions trouvées seront asymptôtes aux séries (6) dans tout secteur $X(\varepsilon)$.

2. Nous allons considérer deux sortes de secteurs, les uns ont des angles $> \frac{\pi}{k}$ et les autres ont des angles $\leqq \frac{\pi}{k}$. Nous définissons ici les secteurs de la première sorte. Nous introduisons la variable auxiliaire

$$u = -\frac{1}{k} x^{-k}$$

de sorte que

$$d u = \frac{d x}{x^{k+1}}$$

et nous définissons les secteurs correspondants dans le plan u.

Nous désignons par $\bar{s}_i$ l'image de s_i par rapport à l'axe réel et nous désignons par

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\mu-1}$$

les arguments de $\bar{s}_1, \ldots \bar{s}_n$ rangés de manière que

$$\varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{\mu-1}.$$

Faisons tourner u dans le sens positif et dans le sens négatif et posons

$$\varphi_{\alpha + \lambda\mu} = \varphi_\alpha + 2\lambda\pi$$
$$(\alpha = 0, 1, \ldots \mu - 1; \; \lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On aura ainsi une suite infinie d'arguments φ_α $(\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. À chaque valeur de α nous faisons correspondre un secteur U_α contenant les arguments φ tels que

$$(11) \qquad \varphi_\alpha + \frac{\pi}{2} < \varphi < \varphi_{\alpha+1} + \frac{3\pi}{2}.$$

Désignons par X_α les secteurs correspondants dans le plan x.

Deux secteurs U_α cosécutifs ont une partie commune d'ont l'angle est égal à π.

L'angle d'un secteur U_α est $> \pi$ et $\leqq 3\pi$, car on a $0 < \varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha \leqq 2\pi$.

Un demi-plan $\varphi' < \varphi < \varphi' + \pi$, où φ' est différent des arguments $\varphi_\alpha + \frac{\pi}{2}$, fera nécessairement partie d'un secteur U_α, car on peut supposer que

$$\varphi_\alpha + \frac{\pi}{2} < \varphi' < \varphi_{\alpha+1} + \frac{\pi}{2}.$$

Cette remarque simple est d'une importance capitale pour la suite.

Pour la démonstration du théorème 1 il nous faut considérer aussi certaines parties des secteurs U_α dans lesquelles nous allons choisir les directions des lignes d'intégration entrant dans les approximations successives dont nous allons nous servir. Supposons d'abord que $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha > \pi$. Nous désignons par $U_\alpha^{(1)}$ la partie de U_α telle que les fonctions $e^{-s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers 0 quand u tend vers l'infini dans une direction quelconque appartenant à $U_\alpha^{(1)}$. Les arguments de $U_\alpha^{(1)}$ satisfont aux inégalités

$$\varphi_\alpha + \frac{3\pi}{2} < \varphi < \varphi_{\alpha+1} + \frac{\pi}{2}.$$

Supposons ensuite que $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha \leqq \pi$. Il y a deux parties $U_\alpha^{(1)}$, $U_\alpha^{(2)}$ de U_α telles que certaines des fonctions $e^{-s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers 0 dans $U_\alpha^{(1)}$ et les autres fonctions $e^{-s_i u}$ tendent vers 0 dans $U_\alpha^{(2)}$. Pour le voir nous considérons une ligne droite L passant par l'origine et ayant une direction dont l'argument φ satisfait à $\varphi_\alpha < \varphi < \varphi_{\alpha+1}$. On peut prendre L de manière que certains des points $\bar{s}_i$, soit $\bar{s}_1, \ldots \bar{s}_p$, se trouvent de l'un côté de L et $\bar{s}_{p+1}, \ldots \bar{s}_n$ soient de l'autre côté de L. On peut supposer que les arguments de $\bar{s}_1, \ldots \bar{s}_p$ sont congrus à $\varphi_{\alpha'}, \ldots \varphi_\alpha$ et que les arguments de $\bar{s}_{p+1}, \ldots \bar{s}_n$ sont congrus à $\varphi_{\alpha+1}, \ldots \varphi_{\alpha''}$, où $\varphi_{\alpha'} < \cdots < \varphi_\alpha < \varphi_{\alpha+1} < \cdots < \varphi_{\alpha''}$, $\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha'} < \pi$, $\varphi_{\alpha''} - \varphi_{\alpha+1} < \pi$. Les fonctions $e^{-s_i u}$ $(i = 1, \ldots p)$ tendent vers 0 si u tend vers l'infini dans une direction dont l'argument φ satisfait à

$$\varphi_\alpha + \frac{3\pi}{2} < \varphi < \varphi_{\alpha'} + \frac{5\pi}{2}$$

et les fonctions $e^{-s_i u}$ $(i = p + 1, \ldots n)$ tendent vers 0 si u tend vers l'infini dans une direction satisfaisant à

$$\varphi_{\alpha''} - \frac{\pi}{2} < \varphi < \varphi_{\alpha+1} + \frac{\pi}{2}.$$

Par suite, $U_\alpha^{(1)}$ sera le secteur

$$\varphi_\alpha + \frac{3\pi}{2} < \varphi < \min\left(\varphi_{\alpha'} + \frac{5\pi}{2}, \ \varphi_{\alpha+1} + \frac{3\pi}{2}\right)$$

et $U_\alpha^{(2)}$ sera le secteur

$$\max\left(\varphi_\alpha + \frac{\pi}{2}, \ \varphi_{\alpha''} - \frac{\pi}{2}\right) < \varphi < \varphi_{\alpha+1} + \frac{\pi}{2}.$$

3. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, où $\bar{r}$, $\bar{r}'$ sont des nombres que nous allons définir dans la suite

Théorème 1. *À chacun des secteurs X_α correspond une solution $y_1, \ldots y_n$ et une seule du système* (3) *telle que $|y_i|$ $(i = 1, \ldots n)$ soient plus petits que $\bar{r}'$ pour $|x| < \bar{r}$, x dans un secteur $X_\alpha(\varepsilon)$ à l'intérieur de X_α. Les quotients $\left|\frac{y_i}{x}\right|$ $(i = 1, \ldots n)$ sont limités pour ces valeurs de x. Si le système* (3) *satisfait à la condition B, $y_1, \ldots y_n$ seront asymptotes aux séries* (6) *dans $X_\alpha(\varepsilon)$.*

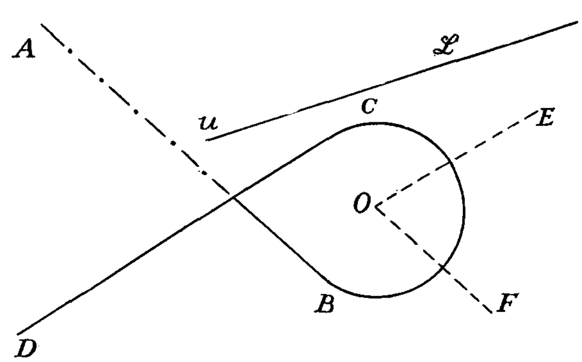

Fig. 1.

Le secteur $U_\alpha(\varepsilon)$ correspondant à un secteur $X_\alpha(\varepsilon)$ est défini par

$$\varphi_\alpha + \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \varphi < \varphi_{\alpha+1} + \frac{3\pi}{2} - \varepsilon.$$

À un secteur $U_\alpha(\varepsilon)$ nous faisons correspondre un domaine $\mathfrak{U}$ dont la forme est montrée sur la figure 1 dans le cas où $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha > \pi$ et sur la figure 2 dans le cas où $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha \leqq \pi$. Il est limité par un arc BC d'un cercle $|u| = R$ de rayon assez grand et par deux demi-tangentes BA et CD d'arguments $\varphi_\alpha + \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $\varphi_{\alpha+1} + \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ resp. OE et OF ont les arguments $\varphi_{\alpha+1} + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\varphi_\alpha + \frac{3\pi}{2} + \varepsilon$ resp. Sur la figure 1 FOE est le secteur $U_\alpha^{(1)}(\varepsilon)$. Sur la figure 2 FOF' est le secteur $U_\alpha^{(1)}(\varepsilon)$ et EOE' est le secteur $U_\alpha^{(2)}(\varepsilon)$.

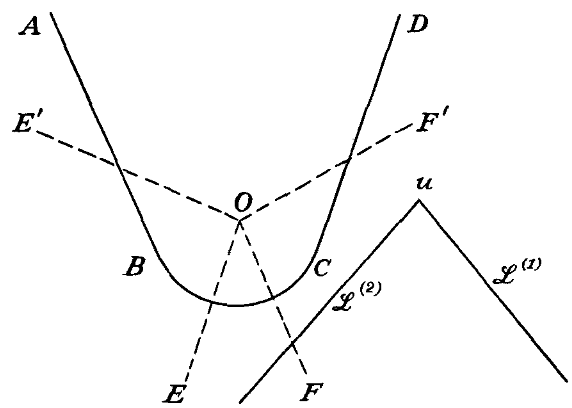

Fig. 2.

Pour plus de simplicité nous supposons que les nombres ε_i dans (3) sont égaux à 0, le système a donc la forme

$$x^{k+1} \frac{d y_i}{d x} = s_i y_i + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{12}$$

Dans le cas où il y a des nombres ε_i qui sont $\neq 0$ la démonstration doit être modifiée un peu comme nous le montrons plus bas (voir n:o 5).

Nous démontrons le théorème 1 à l'aide des approximations successives

$$y_{i,\nu+1} = e^{s_i u} \int_\infty^u e^{-s_i v} \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)\, dv \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{13}$$

où $y_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots n)$ et ν prend successivement les valeurs 0, 1, 2, ... Les intégrations sont effectuées le long de lignes droites dont tous les points appartiennent à $\mathfrak{U}$ et qui ont des directions telles que les intégrales soient convergentes. Si $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha > \pi$ les directions peuvent être choisies dans $U_\alpha^{(1)}(\varepsilon)$ et si $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha \leqq \pi$ on peut choisir certaines des directions dans $U_\alpha^{(1)}(\varepsilon)$ et les autres directions dans $U_\alpha^{(2)}(\varepsilon)$. (Sur la figure 1 la ligne d'intégration est désignée par L et sur la figure 2 les lignes d'intégration sont désignées par $L^{(1)}$, $L^{(2)}$).

Pour les points v de ces lignes on a

$$(14) \qquad |\Re(s_i(v-u))| > \varepsilon' |v-u| \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $\varepsilon' = \sin \varepsilon$. Nous pouvons prendre les nombres $\bar r = (kR)^{-1/k} < r$, $\bar r' < r'$ assez petits pour que

$$(15) \qquad K(\bar r + \bar r'^2) < \varepsilon' \bar r', \quad nK(\bar r + \bar r') < \varepsilon',$$

on peut p. ex. supposer que

$$\bar r < \frac{\varepsilon'}{2nK}\bar r', \quad \bar r' < \frac{\varepsilon'}{2nK}.$$

Supposons que $y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}$ soient des fonctions de u régulières dans $\mathfrak{U}$ et y satisfaisant aux inégalités $|y_{i\nu}| < \bar r'$ $(i = 1, \ldots n)$. En remarquant qu'on peut tourner les lignes d'intégration suivant les conditions posées sans changer les valeurs de $y_{i,\nu+1}$ $(i = 1, \ldots n)$ on voit que $y_{i,\nu+1}$ $(i = 1, \ldots n)$ sont régulières dans $\mathfrak{U}$. On conclut des inégalités (4), (15) que $|y_{i,\nu+1}| < \bar r'$ $(i = 1, \ldots n)$ car on a

$$|e^{s_i u}| \int_u^\infty |e^{-s_i v}| \, |dv| < \frac{1}{\varepsilon'} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Comme $y_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots n)$ il résulte que les équations (13) définissent une suite infinie de fonctions $y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ qui sont régulières dans $\mathfrak{U}$ et y satisfont aux inégalités $|y_{i\nu}| < \bar r'$ $(i = 1, \ldots n;\ \nu = 1, 2, \ldots)$.

Il résulte de (13) que

$$y_{i,\nu+1} - y_{i\nu} = e^{s_i u} \int_\infty^u e^{-s_i v} [\mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x) - \mathfrak{P}_i(y_{1,\nu-1}, \ldots y_{n,\nu-1}; x)] \, dv$$
$$(i = 1, \ldots n).$$

Si l'on désigne par $M_{i\nu}$ le maximum de $|y_{i,\nu+1} - y_{i\nu}|$ pour u dans $\mathfrak{U}$ on aura

$$M_{i\nu} < \frac{1}{\varepsilon'} K(\bar r + \bar r') \sum_{h=1}^n M_{h,\nu-1} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i\nu} < \frac{n}{\varepsilon'} K(\bar r + \bar r') \sum_{i=1}^{n} M_{i,\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i\nu} < n\bar r' \left[\frac{n}{\varepsilon'} K(\bar r + \bar r')\right]^{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

On en conclut, en vertu de la seconde inégalité (15), que les séries $\sum_{\nu=0}^{\infty}(y_{i,\nu+1} - y_{i\nu})$ convergent absolument et uniformément pour les valeurs considérées de u. Par suite, les fonctions $y_{i\nu}$ tendent vers des fonctions y_i qui sont régulières dans $\mathfrak{U}$ et y satisfont aux inégalités $|y_i| \leqq \bar r'$ $(i = 1, \ldots n)$ et aux équations

$$(16) \qquad y_i = e^{s_i u} \int_{\infty}^{u} e^{-s_i v} \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)\, dv \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et par là au système (12).

Il n'y a qu'une seule solution $y_1, \ldots y_n$ telle que $|y_i| \leqq \bar r'$ $(i = 1, \ldots n)$ dans $\mathfrak{U}$. En effet, supposons qu'il y ait deux solutions $y_1, \ldots y_n$ et $\bar y_1, \ldots \bar y_n$ ayant cette propriété. On a

$$\bar y_i = C_i e^{s_i u} + e^{s_i u} \int_{\infty}^{u} e^{-s_i v} \mathfrak{P}_i(\bar y_1, \ldots \bar y_n; x)\, dv \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $C_1, \ldots C_n$ sont des constantes. Dans le cas où $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha > \pi$ $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers l'infini dans $U_\alpha^{(1)}$ et dans le cas où $\varphi_{\alpha+1} - \varphi_\alpha \leqq \pi$ certaines des fonctions $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers l'infini dans $U_\alpha^{(1)}$ et les autres tendent vers l'infini dans $U_\alpha^{(2)}$. Par suite, on doit avoir $C_1 = 0, \ldots C_n = 0$, les fonctions $\bar y_1, \ldots \bar y_n$ satisfont donc aux équations (16). En désignant par M_i le maximum de $|y_i - \bar y_i|$ pour u dans $\mathfrak{U}$ on aura comme précédamment

$$\sum_{i=1}^{n} M_i < \frac{n}{\varepsilon'} K(\bar r + \bar r') \sum_{i=1}^{n} M_i$$

ce qui est en contradiction avec la seconde inégalité (15). Donc $\bar y_i = y_i$ $(i = 1, \ldots n)$.

4. Montrons maintenant que les quotients $\left|\frac{y_i}{x}\right|$ $(i = 1, \ldots n)$ sont limités pour u dans $\mathfrak{U}$. Nous cherchons d'abord une limite supérieure des expressions

$$|u^\mu e^{s_i u}| \int_u^\infty |v^{-\mu} e^{-s_i v}| \, |d v| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour u dans U, μ étant un nombre positif. Si $|v|$ est croissant à partir de u le long d'une ligne d'intégration l'expression correspondante est plus petite que

$$|e^{s_i u}| \int_u^\infty |e^{-s_i v}| \, |d v| < \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Si $|v|$ est d'abord décroissant à partir de u nous posons

$$v = e^{i\varphi}(i b + \varrho),$$

où $i b e^{i\varphi}$ est le point d'intersection entre la ligne d'intégration et la perpendiculaire à cette ligne tirée de l'origine. ϱ est réel et varie depuis un nombre négatif σ correspondant à u jusqu'à $+\infty$. Le nombre b est réel et satisfait à $|b| > R$. L'expression considérée peut s'écrire

$$(b^2 + \sigma^2)^{\mu/2} e^{\beta_i \sigma} \int_\sigma^\infty (b^2 + \varrho^2)^{-\mu/2} e^{-\beta_i \varrho} \, d \varrho,$$

où β_i est un certain nombre $> \varepsilon'$. Remplaçons d'abord β_i par 1 et étudions la fonction

$$y = (b^2 + \sigma^2)^{\mu/2} e^\sigma \int_\sigma^\infty (b^2 + \varrho^2)^{-\mu/2} e^{-\varrho} \, d \varrho$$

quand σ varie de $-\infty$ à 0. Pour $\sigma = 0$ on a $y < 1$. En appliquant la règle de l'Hospital on voit aisément que $y \to 1$ en décroissant quand $\sigma \to -\infty$. Le maximum de y correspond à une valeur de σ telle que

$$y\left(1 + \frac{\mu \sigma}{b^2 + \sigma^2}\right) = 1$$

car

$$\frac{d y}{d \sigma} = -1 + y\left(1 + \frac{\mu \sigma}{b^2 + \sigma^2}\right).$$

Supposons que $R > \mu$. Alors le maximum de $\left(1 + \frac{\mu \sigma}{b^2 + \sigma^2}\right)^{-1}$ s'obtient pour $\sigma = -|b|$, on aura donc

$$y < \frac{1}{1 - \frac{\mu}{2|b|}} < 2$$

pour toutes les valeurs négatives de σ. Maintenant on conclut que

$$(b^2 + \sigma^2)^{\mu/2} b^{\beta_i \sigma} \int_\sigma^\infty (b^2 + \varrho^2)^{-\mu/2} e^{-\beta_i \varrho} d\varrho < \frac{2}{\beta_i} < \frac{2}{\varepsilon'}$$

si $R > \frac{\mu}{\varepsilon'}$. Nous avons donc démontré le lemme suivant

Lemme. *Les expressions*

$$|u^\mu e^{s_i u}| \int_u^\infty |v^{-\mu} e^{-s_i v}| |dv| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

sont plus petites que $\frac{2}{\varepsilon'}$ *pour* u *dans* $\mathfrak{U}$ *sous la condition que* $R > \frac{\mu}{\varepsilon'}$.

À l'aide de ce lemme on conclut que les fonctions $y_{i\nu}$ du n:o précédent satisfont aux inégalités

$$|y_{i\nu}| < \frac{4}{\varepsilon'} K |x|.$$

En effet, en supposant que ces inégalités aient lieu pour une valeur de ν il résulte des inégalités (4) que

$$\left|\frac{1}{x} y_{i,\nu+1}\right| < K\left(1 + \frac{4}{\varepsilon'} K \bar{r}'\right) |u^{1/k} e^{s_i u}| \int_u^\infty |v^{-1/k} e^{-s_i v}| |dv| < \frac{4K}{\varepsilon'}$$

sous la condition que $R > \frac{1}{k\varepsilon'}$. À la limite on aura donc

$$|y_i| < \frac{4}{\varepsilon'} K |x| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour u dans $\mathfrak{U}$.

Supposons maintenant que le système (12) satisfait à la condition B (voir n:o 1). Par la substitution (7) on aura le système transformé

$$x^{k+1} \frac{dz_i}{dx} = s_i z_i + \mathfrak{P}_i^{(N)}(z_1, \ldots z_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $\mathfrak{P}_i^{(N)}$ sont des fonctions satisfaisant aux inégalités (9). Nous supposons que

u appartient à un domaine $\mathfrak{U}_N$ semblable à $\mathfrak{U}$ obtenu en remplaçant R par un nombre R_N suffisamment grand. On a

$$|z_i| < \left(\frac{4}{\varepsilon'} K + g_N\right) |x| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

en supposant que x appartient à $\mathfrak{U}_N$ et que

$$\bar{r}_N = (k R_N)^{-\frac{1}{k}} < r_N.$$

Nous supposons que

$$\left(\frac{4}{\varepsilon'} K + g_N\right) \bar{r}_N < \bar{r}'_N < \frac{1}{2} r',$$

les nombres $\bar{r}_N$, $\bar{r}'_N$ satisfaisant à des inégalités analogues à (15)

$$K_N(\bar{r}_N + \bar{r}'^2_N) < \varepsilon' \bar{r}'_N, \quad n K_N(\bar{r}_N + \bar{r}'_N) < \varepsilon'.$$

Les fonctions $z_1, \ldots z_n$ peuvent être obtenues par des approximations successives analogues à (13).

En supposant que

$$|z_{i\nu}| < \frac{4}{\varepsilon'} K_N |x|^{N+1} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

$$K_N \bar{r}_N^N < K + \frac{\varepsilon'}{4} g_N$$

on aura

$$|x^{-N-1} z_{i,\nu+1}| < \left[K_N + \frac{4}{\varepsilon'} K_N^2 \bar{r}_N \left(1 + \frac{4}{\varepsilon'} K + g_N\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left|u^{\frac{N+1}{k}} e^{s_i u}\right| \int_u^\infty \left|v^{-\frac{N+1}{k}} e^{-s_i v}\right| |dv| \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Supposons que

$$R_N > \frac{N+1}{k\varepsilon'}, \quad \frac{4}{\varepsilon'} K_N \bar{r}_N \left(1 + \frac{4}{\varepsilon'} K + g_N\right) < 1.$$

Alors, on conclut que $|z_{i,\nu+1}| < \frac{4}{\varepsilon'} K_N |x|^{N+1}$ $(i = 1, \ldots n)$. À la limite on aura

$$|z_i| < \frac{4}{\varepsilon'} K_N |x|^{N+1} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour u dans $\mathfrak{U}$.

Par là le théorème 1 est démontré pour un système (12).

5. Nous disons maintenant quelques mots du cas où il y a dans (3) des nombres $\varepsilon_i \neq 0$. Nous considérons les approximations successives suivantes

$$(17) \qquad y_{i,\nu+1} = e^{s_i u} \int_{\infty}^{u} e^{-s_i v} [\varepsilon_i y_{i-1,\nu+1} + \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \dots y_{n\nu}; x)] \, dv \qquad (i = 1, \dots n),$$

les lignes d'intégration étant les mêmes que dans les équations (13). Afin de démontrer la convergence nous supposons les nombres $\bar{r} < r$, $\bar{r}' < r'$ assez petits pour que

$$(18) \qquad n K(\bar{r} + \bar{r}'^2) < \varepsilon'^n \bar{r}', \quad n^2 K(\bar{r} + \bar{r}') < \varepsilon'^n.$$

Si l'on suppose que $|y_{i\nu}| < \bar{r}'$ $(i = 1, \dots n)$ et si l'on désigne par $m_{i,\nu+1}$ le maximum de $|y_{i,\nu+1}|$ pour u dans $\mathfrak{U}$ on aura

$$m_{i,\nu+1} < \frac{K}{\varepsilon'}(\bar{r} + \bar{r}'^2)$$

$$m_{i,\nu+1} < \frac{1}{\varepsilon'} m_{i-1,\nu+1} + \frac{K}{\varepsilon'}(\bar{r} + \bar{r}'^2) \qquad (i = 2, \dots n),$$

d'où l'on conclut en vertu de (18) que $m_{i,\nu+1} < \bar{r}'$ $(i = 1, \dots n)$. Désignant ensuite par $M_{i\nu}$ le maximum de $|y_{i,\nu+1} - y_{i\nu}|$ pour u dans $\mathfrak{U}$ on aura

$$M_{1\nu} < \frac{K}{\varepsilon'}(\bar{r} + \bar{r}') \sum_{h=1}^{n} M_{h,\nu-1}$$

$$M_{i\nu} < \frac{1}{\varepsilon'} M_{i-1,\nu} + \frac{K}{\varepsilon'}(\bar{r} + \bar{r}') \sum_{h=1}^{n} M_{h,\nu-1} \qquad (i = 2, \dots n),$$

d'où résulte que

$$M_{i\nu} < \frac{nK}{\varepsilon'^i}(\bar{r} + \bar{r}') \sum_{h=1}^{n} M_{h,\nu-1} \qquad (i = 1, \dots n)$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i\nu} < \frac{n^2 K}{\varepsilon'^n}(\bar{r} + \bar{r}') \sum_{i=1}^{n} M_{i,\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Il résulte donc de la seconde inégalité (18) que les approximations successives convergent absolument et uniformément pour u dans $\mathfrak{U}$. À la limite on aura des fonctions $y_1, \ldots y_n$ qui satisfont aux inégalités $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ et aux équations

$$y_i = e^{s_i u} \int_{\infty}^{u} e^{-s_i v} [\varepsilon_i y_{i-1} + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)]\, dv \tag{19}$$

$$(i = 1, \ldots n),$$

par suite au système (3).

Ensuite on achèvera facilement la démonstration.

6. Nous considérons maintenant un secteur X assujetti à la seule condition que certaines des fonctions $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers 0 quand u tend vers l'infini dans une *direction quelconque* à l'intérieur du secteur correspondant U, l'angle de X est donc $\leqq \frac{\pi}{k}$. Nous pouvons supposer que $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots p)$ sont les fonctions qui tendent vers 0 dans U; pour chacune des fonctions $e^{s_j u}$ $(j = p + 1, \ldots n)$ il y a une partie de U dans laquelle cette fonction tend vers l'infini. Prenons un point u_0 de $U(\varepsilon)$ à l'extérieur du cercle $|u| = R$ et des valeurs initiales $y_1^{(0)}, \ldots y_p^{(0)}$ de $y_1, \ldots y_p$ telles que $|y_i^{(0)}| < \frac{1}{2}\bar{r}'$ $(i = 1, \ldots p)$. Soit x_0 la valeur de x correspondant à u_0. On a le théorème suivant.

Théorème 2. *Il y a une solution $y_1, \ldots y_n$ et une seule du système (3) telle que $y_i = y_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots p)$ pour $x = x_0$ et $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ pour $|x| < \bar{r}$, x dans $X(\varepsilon)$. Les quotients $\left|\frac{y_i}{x}\right|$ $(i = 1, \ldots n)$ sont limités pour les mêmes valeurs de x. Si la condition B est remplie $y_1, \ldots y_n$ seront asymptôtes aux séries (6) dans $X(\varepsilon)$.*

Si l'on suppose que X contient une direction dans laquelle toutes les fonctions $e^{-s_j u}$ $(j = p + 1, \ldots n)$ tendent vers 0 la solution $y_1, \ldots y_n$ sera univoquement déterminée par la condition que $y_i = y_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots p)$ pour $x = x_0$ et que $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ le long d'une courbe qui s'étend à $x = 0$ dans la direction en question.

Il suffira d'indiquer la démonstration pour un système de la forme (12). Considérons le cas où $p < n$. On peut se servir des approximations successives suivantes[1]

[1] Cf. I. Bendixson, Sur les points singuliers des systèmes d'équations différentielles. Arkiv för mat., astr. och fysik, Stockholm 1909, t. 5, n:os 21, 22.

$$y_{i,\nu+1} = y_i^{(0)} e^{s_i(u-u_0)} + e^{s_i u} \int_{u_0}^{u} e^{-s_i v} \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)\, dx$$
$$(i = 1, \ldots p)$$

(20)

$$y_{j,\nu+1} = e^{s_j u} \int_{\infty}^{u} e^{-s_j v} \mathfrak{P}_j(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)\, dv$$
$$(j = p+1, \ldots n),$$

où $y_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots n)$ et ν prend successivement les valeurs 0, 1, 2, ... Les intégrations sont effectuées le long de lignes droites: une droite de u_0 à u ayant une direction appartenant à $U(\varepsilon)$ et des droites de u à ∞ ayant des directions telles que les intégrales soient convergentes; la ligne d'intégration correspondant à une valeur de j est située à l'intérieur d'un secteur dans lequel $e^{-s_j u}$ tend vers 0.

On considère le secteur de sommet u_0 obtenu en transportant $U(\varepsilon)$ parallélement à lui-même et on suppose que

$$2\,K(\bar{r} + \bar{r}'^2) < \varepsilon' \bar{r}', \qquad n\,K(\bar{r} + \bar{r}') < \varepsilon'.$$

Les raisonnements des n:os 3, 4 sont applicables avec des légères modifications, si l'on se sert du lemme suivant qui se démontre comme le lemme du n:o 4.

Lemme. *Les expressions*

$$|w^{\mu} e^{s_i u}| \int_{u_0}^{u} |v^{-\mu} e^{-s_i v}|\, |dv| \qquad (i = 1, \ldots p)$$

$$|w^{\mu} e^{s_j u}| \int_{u}^{\infty} |v^{-\mu} e^{-s_j v}|\, |dv| \qquad (j = p+1, \ldots n)$$

sont plus petites que $\frac{2}{\varepsilon'}$ *sous la condition que* $R > \frac{2\mu}{\varepsilon'}$.

§ 2. Étude des intégrales irrégulières d'un système d'équations différentielles linéaires.

7. Nous considérons un système linéaire

(21) $$x^{k+1} \frac{d y_i}{d x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où les coefficients $a_{ij}(x)$ sont régulières sur la surface de Riemann de $\log x$ pour $0 < |x| < r$. De plus nous supposons que $a_{ij}(x)$ sont asymptôtes à certaines séries de puissances

$$a_{ij} + a_{ij}^{(1)} x + a_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots.$$

Soient $s_1, \ldots s_n$ les racines de l'équation caractéristique

$$|a_{ij} - s\delta_{ij}| = 0.$$

Nous considérons le cas où cette équation a une racine simple s_1. Par une substitution linéaire on sera ramené au cas où l'on a

$$a_{11} = s_1, \quad a_{1i} = a_{i1} = 0 \qquad (i = 2, \ldots n).$$

On pourra donc prendre le système (21) sous la forme

$$\begin{aligned} x^{k+1} \frac{dy_1}{dx} &= s_1 y_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x) y_j \\ x^{k+1} \frac{dy_i}{dx} &= \sum_{j=2}^{n} a_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 2, \ldots n), \end{aligned} \tag{22}$$

où l'on a $\lim\limits_{x \to 0} a_{ij}(x) = 0$.

Nous considérons le système de Riccati pour $z_i = \dfrac{y_i}{y_1}$ $(i = 2, \ldots n)$

$$\begin{aligned} x^{k+1} \frac{dz_i}{dx} = &- s_1 z_i + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} z_j + a_{i1}(x) - a_{11}(x) z_i \\ &+ \sum_{j=2}^{n} z_j (a_{ij}(x) - a_{1j}(x) z_i) \qquad (i = 2, \ldots n). \end{aligned} \tag{23}$$

C'est un système de la forme (2) dont l'équation caractéristique

$$|a_{ij} - (s_1 + s)\delta_{ij}|_{i,j=2,\ldots n} = 0$$

a les racines $s_2 - s_1, \ldots s_n - s_1$ qui sont $\neq 0$. Les conditions A, B du n:o 1 sont évidemment remplies pour ce système. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1 au système (23).

Nous considérons les secteurs du théorème 1 définis à l'aide des arguments de $s_2 - s_1, \ldots s_n - s_1$. Soit $z_2, \ldots z_n$ la solution unique de (23) correspondant à un tel secteur d'après le théorème I. $z_2, \ldots z_n$ sont asymptôtes dans ce secteur à certaines séries

$$c_i^{(1)} x + c_i^{(2)} x^2 + \cdots \qquad (i = 2, \ldots n) \tag{24}$$

qui satisfont formellement au système (23). Si l'on pose $y_i = z_i y_1$ $(i = 2, \ldots n)$ dans la première équation (22) on aura une équation différentielle du premier ordre pour y_1

$$x^{k+1} \frac{dy_1}{dx} = \left(s_1 + a_{11}(x) + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}(x) z_i\right) y_1. \tag{25}$$

En remplaçant ici $z_2, \ldots z_n$ par les séries (24) on aura une équation différentielle formelle qui est satisfaite formellement par une expression de la forme

$$e^{Q\left(\frac{1}{x}\right)} x^r (1 + b_1^{(1)} x + b_1^{(2)} x^2 + \cdots), \tag{26}$$

où $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ est une fonction entière et rationnelle de $\frac{1}{x}$ de degré k au plus

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{s_1}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^k + \cdots.$$

Il y a une solution y_1 de (25) univoquement déterminée qui se représente asymptotiquement par (26) dans le secteur considérée. Posant $y_i = z_i y_1$ $(i = 2, \ldots n)$ on aura une solution $y_1, \ldots y_n$ de (22) telle que $y_1, \ldots y_n$ se représentent asymptotiquement dans le secteur en question par des expressions

$$\begin{aligned} & e^{Q\left(\frac{1}{x}\right)} x^r (1 + b_1^{(1)} x + b_1^{(2)} x^2 + \cdots) \\ & e^{Q\left(\frac{1}{x}\right)} x^r (b_i^{(1)} x + b_i^{(2)} x^2 + \cdots) \qquad (i = 2, \ldots n), \end{aligned} \tag{27}$$

les $n - 1$ dernières expressions s'obtenant par multiplication de (26) et (24).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant[1].

Théorème 3. *Soit s_1 une racine simple de l'équation caractéristique du système* (21) *et prenons le système sous la forme* (22). *Nous considérons les secteurs du théorème 1 définis à l'aide des arguments de $s_2 - s_1, \ldots s_n - s_1$. À un tel secteur correspond une solution et une seule de* (22) *asymptôte dans ce secteur aux expressions* (27).

[1] Cf. les travaux de M. Horn cités dans l'introduction.

8. Nous supposons maintenant que toutes les racines de l'équation carac téristique sont simples. Alors le système linéaire peut être réduit à la forme

$$x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = s_i y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{28}$$

où l'on a $\lim\limits_{x\to 0} a_{ij}(x) = 0$. On aura n systèmes de séries analogues à (27), les séries normales bien connues. Soient

$$e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i}(\delta_{ij} + b_{ij}^{(1)} x + b_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots) \qquad (j = 1, \ldots n) \tag{29}$$

les séries normales correspondant à s_i, où

$$Q_i\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{s_i}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^k + \cdots.$$

Considérons les secteurs (11) du théorème 1 correspondant aux nombres $s_i - s_\beta$ $(i = 1, \ldots n;\ i \neq \beta)$, désignons les par $U_{\alpha\beta}$, et considérons un demi-plan $\varphi' < \varphi < \varphi' + \pi$, où φ' est différent des arguments pour lesquels

$$\left| e^{(s_i - s_j)\, u} \right| = 1 \qquad\qquad i \neq j.$$

Ce demi-plan fera partie, pour chaque valeur de β, de l'un des secteurs $U_{\alpha\beta}$, soit $\bar{U}_\beta$ ce secteur. Les secteurs $\bar{U}_\beta$ $(\beta = 1, \ldots n)$ ont une partie commune $\bar{U}$ dont l'angle est $> \pi$. Soit $\bar{X}$ un secteur correspondant dans le plan x. À ce secteur correspond d'après le théorème 3 un seul système de solutions $y_{i1}, \ldots y_{in}$ $(i = 1, \ldots n)$ du système (28) asymptôtes aux séries (29) dans $\bar{X}$. Le déterminant des expressions (29) étant $\neq 0$ ces solutions forment un système fondamental.

Ce résultat nous donne un moyen de suivre une solution donnée quand x tourne autour de $x = 0$. Considérons la suite infinie de demi-plans

$$\varphi' + \alpha\pi < \varphi < \varphi' + (\alpha + 1)\pi \qquad (\alpha = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

et la suite correspondante de secteurs $\bar{X}$, soit $\bar{X}_\alpha$ $(\alpha = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$ ces secteurs. Deux secteurs consécutifs $\bar{X}_\alpha$ ont une partie commune. On peut supposer que l'on rencontre ces secteurs dans l'ordre

$$\ldots \bar{X}_{-1},\ \bar{X}_0,\ \bar{X}_1, \ldots$$

quand x tourne dans le sens positif. Soit

$$y_{i1}^{(\alpha)}, \ldots y_{in}^{(\alpha)} \qquad\qquad (i = 1, \ldots n)$$

un système fondamental correspondant à $\bar{X}_\alpha$ et soit

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha)} y_{ij} \qquad (j = 1, \ldots n)$$

l'expression correspondante de la solution générale, où nous avons désigné les constantes par $C_i^{(\alpha)}$. On peut de la manière suivante définir la substitution qui lie les valeurs de $C_i^{(\alpha)}$, $C_i^{(\alpha+1)}$ correspondant à une même solution. Nous prenons une direction appartenant au secteur commun à $\bar{X}_\alpha$, $\bar{X}_{\alpha+1}$ et satisfaisant à la condition qu'aucune des fonctions $|e^{(s_i - s_j)u}|$ $(i, j = 1, \ldots n;\ i \neq j)$ ne soit constante quand u décrit une droite dont la direction correspond à cette direction. Il y a un nombre β_1 tel que les expressions

$$e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right) - Q_{\beta_1}\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad (i = 1, \ldots n;\ i \neq \beta_1)$$

tendent vers 0 quand x tend vers 0 dans la direction considérée. Si l'on divise les deux membres de l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha)} y_{i\beta_1}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha+1)} y_{i\beta_1}^{(\alpha+1)}$$

par $e^{Q_{\beta_1}\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_{\beta_1}}$ et si l'on fait tendre ensuite x vers 0 dans la direction considérée on aura

$$C_{\beta_1}^{(\alpha)} = C_{\beta_1}^{(\alpha+1)}.$$

Ensuite nous pouvons prendre un nombre β_2 de manière que

$$e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right) - Q_{\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad (i = 1, \ldots n;\ i \neq \beta_1, \beta_2)$$

tendent vers 0 quand x tend vers 0 dans la direction en question. Si l'on divise les deux membres de l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha)} y_{i\beta_2}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha+1)} y_{i\beta_2}^{(\alpha+1)}$$

par $e^{Q_{\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right)} e^{r_{\beta_2}}$ et si l'on fait tendre x vers 0 on aura

$$C_{\beta_2}^{(\alpha+1)} = C_{\beta_2}^{(\alpha)} + C_{\beta_1}^{(\alpha)} \lim_{x \to 0} \left(y_{\beta_1\beta_2}^{(\alpha)} - y_{\beta_1\beta_2}^{(\alpha+1)}\right) e^{-Q_{\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-r_{\beta_2}}.$$

En poursuivant ce raisonnement on définira une substitution de la forme

$$(30)\qquad \begin{aligned} &C_{\beta_1}^{(\alpha+1)} = C_{\beta_1}^{(\alpha)} \\ &C_{\beta_i}^{(\alpha+1)} = C_{\beta_i}^{(\alpha)} + a_{i1}\, C_{\beta_1}^{(\alpha)} + \cdots + a_{i,i-1}\, C_{\beta_{i-1}}^{(\alpha)} \qquad (i = 2, \ldots n), \end{aligned}$$

où $\beta_1, \ldots \beta_n$ est une permutation de $1, \ldots n$. Le déterminant de cette substitution est égal à 1.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 4. *Il y a une suite infinie de secteurs $\bar{X}_\alpha$ dont les angles sont $> \frac{\pi}{k}$, deux secteurs consécutifs ayant une partie commune. À chaque secteur X_α correspond un système fondamental de solutions*

$$y_{i1}^{(\alpha)}, \ldots y_{in}^{(\alpha)} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

asymptôtes dans $\bar{X}_\alpha$ aux séries normales (29)

$$y_{ij}^{(\alpha)} \sim e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} (\delta_{ij} + b_{ij}^{(1)} x + b_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots).$$

En supposant que x appartient au secteur commun à $\bar{X}_\alpha$, $\bar{X}_{\alpha+1}$ on a les équations

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha)} y_{ij}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha+1)} y_{ij}^{(\alpha+1)} \qquad (j = 1, \ldots n)$$

si les constantes $C_i^{(\alpha+1)}$ sont liées aux constantes $C_i^{(\alpha)}$ par une substitution (30) *de déterminant égal à 1.*

Considérons en particulier le cas où les coefficients du système (28) sont uniformes autour de $x = 0$ et supposons que x tourne une fois autour de $x = 0$ dans le sens positif. On aura $2k$ substitutions (30). Les déterminations des puissances x^{r_i} entrant dans le calcul des coefficients de ces substitutions doivent évidemment être suivies avec continuité. Partant de

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(\alpha)} y_{ij}^{(\alpha)} \qquad (j = 1, \ldots n)$$

on aura donc après un tour complet

$$\bar{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i^{(\alpha)} e^{2\pi r_i \sqrt{-1}} y_{ij}^{(\alpha)} \qquad (j = 1, \ldots n),$$

$$\bar{C}_i^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, C_j^{(\alpha)} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

le déterminant $|c_{ij}|$ étant égal à 1.

L'équation fondamentale déterminante est

$$\left| c_{ij}\, e^{2\pi r_i \sqrt{-1}} - \lambda\, \delta_{ij} \right| = 0.$$

On voit donc que le produit des racines de cette équation est égal à

$$\prod_{i=1}^{n} e^{2\pi r_i \sqrt{-1}}.$$

§ 3. Étude du problème posé dans l'introduction.

9. Les approximations successives étudiées dans le § 1 donnent évidemment des représentations analytiques des solutions considérées valables dans des secteurs dans lesquels ces solutions tendent vers 0 (pour $x \to 0$). Pour obtenir des représentations qui sont valables jusqu'à la limite d'un domaine d'existence et qui permettent de suivre une solution quand x tourne autour de $x = 0$ on doit employer d'autres méthodes. Dans ce travail nous allons nous servir de la méthode de Poincaré dont nous avons parlé dans l'introduction.

Nous supposons que les racines de l'équation caractéristique sont simples et $\neq 0$. Nous pouvons donc prendre le système sous la forme (12). Nous supposons que les conditions A, B du n:o 1 sont remplies.

Considérons un secteur X_α du théorème 1, soit $y_1^{(\alpha)}, \ldots y_n^{(\alpha)}$ la solution correspondante donnée par le théorème 1 et posons

$$y_i = y_i^{(\alpha)} + z_i \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{31}$$

On aura pour $z_1, \ldots z_n$ un système (12) où les seconds membres s'annulent pour $z_1 = 0, \ldots z_n = 0$. Écrivons ce système sous la forme suivante

$$x^{k+1} \frac{d z_i}{d x} = s_i z_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)}(x)\, z_j + \mathfrak{P}_i^{(\alpha)}(z_1, \ldots z_n;\, x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{32}$$

les séries $\mathfrak{P}_i^{(\alpha)}$ commençant par des termes de degré $\geqq 2$ en $z_1, \ldots z_n$. Nous supposons que les coefficients $a_{ij}^{(\alpha)}(x)$ sont asymptôtes dans $X_\alpha(\varepsilon)$ à certaines séries de puissances

$$a_{ij}^{(1)} x + a_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots$$

indépendant de α.

Nous considérons le système linéaire

$$x^{k+1} \frac{dz_i}{dx} = s_i z_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)}(x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{33}$$

Il y a d'après le théorème 4 un système fondamental de solutions

$$z_{i1}^{(\alpha)}, \ldots z_{in}^{(\alpha)} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

asymptôtes dans une certaine partie $\bar{X}_\alpha$ de X_α aux séries normales

$$e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} (\delta_{ij} + b_{ij}^{(1)} x + b_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots)$$

correspondant à (33). Ces séries sont indépendant de α. L'angle de $\bar{X}_\alpha$ est $> \frac{\pi}{k}$.

Nous posons

$$z_{ij}^{(\alpha)} = e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \bar{z}_{ij}^{(\alpha)} \tag{34}$$

donc

$$\bar{z}_{ij}^{(\alpha)} \sim \delta_{ij} + b_{ij}^{(1)} x + b_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots \tag{35}$$

dans $\bar{X}_\alpha$, et nous faisons dans (32) la substitution

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_{ij}^{(\alpha)} \zeta_j \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{36}$$

Le système transformé s'écrira

$$x^{k+1} \frac{d\zeta_i}{dx} = P_i(x) \zeta_i + \overline{\mathfrak{P}}_i^{(\alpha)}(\zeta_1, \ldots \zeta_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{37}$$

où

$$\begin{aligned} P_i(x) &= - x^{k-1} Q'_i\left(\frac{1}{x}\right) + r_i x^k \\ &= r_i x^k + c_{i1} x^{k-1} + \cdots + c_{i,k-1} x + s_i \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{38}$$

Posant

$$t_i = C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{39}$$

nous cherchons à obtenir une solution de (37) sous la forme

$$(40)\qquad \zeta_i = t_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2} \varphi^{(i)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\, t_1^{\alpha_1}\ldots t_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Les coefficients $\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ peuvent être calculés de la manière suivante. Posons

$$\bar{\mathfrak{P}}_i^{(\alpha)}(\zeta_1, \ldots \zeta_n; x) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a^{(i,\alpha)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\, \zeta_1^{\alpha_1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n}$$

et désignons par

$$G^{\beta_1,\ldots\beta_n}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\left(\varphi^{(j)}_{\gamma_1,\ldots\gamma_n}\right)$$

le coefficient de $t_1^{\beta_1}\ldots t_n^{\beta_n}$ dans la série que l'on obtient en introduisant les séries (40) dans $\zeta_1^{\alpha_1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n}$. Si l'on suppose que les fonctions $\varphi^{(i)}_{\gamma_1,\ldots\gamma_n}$ correspondant à des valeurs de $\gamma_1, \ldots \gamma_n$ telles que $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n < N$ soient déterminées une fonction $\varphi^{(i)}_{\beta_1,\ldots\beta_n}$ correspondant à $\beta_1 + \cdots + \beta_n = N$ doit être une solution de l'équation différentielle linéaire suivante du premier ordre

$$(41)\qquad x^{k+1}\frac{d\varphi^{(i)}_{\beta_1,\ldots\beta_n}}{dx} + \varphi^{(i)}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(\beta_1 P_1(x) + \cdots + \beta_n P_n(x) - P_i(x))$$

$$= \sum a^{(i,\alpha)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\, G^{\beta_1,\ldots\beta_n}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\left(\varphi^{(j)}_{\gamma_1,\ldots\gamma_n}\right) + a^{(i,\alpha)}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(x),$$

où l'on a

$$2 \leqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n < N, \quad 2 \leqq \gamma_1 + \cdots + \gamma_n < N.$$

10. Nous démontrons la convergence des séries (40) dans le cas où $s_1, \ldots s_n$ *se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine* en supposant que le *secteur $\bar{U}_\alpha$ correspondant à $\bar{X}_\alpha$ contient une partie du secteur $\varphi' < \varphi < \varphi''$ dans lequel $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers* 0. De plus nous supposons au premier abord qu'il n'y a aucune relation de la forme

$$\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i = 0,$$

où $\beta_1, \ldots \beta_n$ sont des entiers $\geqq 0$.

En supposant l'entier N' suffisamment grand et le nombre positif ε suffisamment petit le secteur $\bar{U}_\alpha(\varepsilon)$ contiendra une partie dans laquelle toutes les fonctions

$$e^{(\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i)u} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

tendent vers o, où $\beta_1, \ldots \beta_n$ sont des entiers tels que $\beta_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots n)$, $\beta_1 + \cdots + \beta_n \geqq N'$. En d'autres termes, le secteur dans le plan $(\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i) u$ aura une partie commune avec le demi-plan à gauche de l'axe imaginaire, et l'angle de ce secteur commun sera, pour toutes les valeurs considérées de $\beta_1, \ldots \beta_n$, plus grand qu'un certain nombre δ. On peut supposer que la même chose ait lieu pour les valeurs de $\beta_1, \ldots \beta_n$ tels que $\beta_1 + \cdots + \beta_n < N'$, si ε est suffisamment petit, car on peut tourner les droites limitant $\bar{U}_\alpha$ entre certaines limites et on peut donc supposer ces droites choisies de manière que les droites correspondantes décrites par $(\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i) u$ soient distinctes de l'axe imaginaire pour chaque système de valeurs $\beta_1, \ldots \beta_n$, i tels que $\beta_1 + \cdots + \beta_n < N'$.

Le secteur $\bar{U}_\alpha(\varepsilon)$ étant ainsi défini nous le transportons parallèlement à lui-même de sorte que le sommet vienne à un point u_0 dont la valeur absolue R est suffisamment grand, désignons ce secteur par $\mathfrak{U}$. Nous pouvons supposer u_0 choisi de manière que $|u| > R$ pour tout point de $\mathfrak{U}$.

Il y a des nombres positifs $A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}$ tels que les séries

$$\sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} \zeta_1^{\alpha_1} \ldots \zeta_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

aient un domaine de convergence $|\zeta_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$ et soient majorantes pour les séries

$$\sum a^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}(x) \zeta_1^{\alpha_1} \ldots \zeta_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour u dans $\mathfrak{U}$.

Supposons que

$$\left| \varphi^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(x) \right| < k^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour $\beta_1 + \cdots + \beta_n < N$ si u appartient à $\mathfrak{U}$, et considérons une fonction $\varphi^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(x)$ correspondant à $\beta_1 + \cdots + \beta_n = N$. Nous écrivons l'équation (41) sous la forme abrégée

$$x^{k+1} \frac{d\varphi}{dx} + \varphi P(x) = f(x)$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \frac{f(x)}{P(x)},$$

la variable t étant définie par

$$t = \int P(x)\, du =$$

$$= -\frac{1}{k}(\beta_1 r_1 + \cdots + \beta_n r_n - r_i)\log u$$

$$-(\beta_1 c_{11} + \cdots + \beta_n c_{n1} - c_{i1})(-ku)^{\frac{1}{k}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{k-1}(\beta_1 c_{1,k-1} + \cdots + \beta_n c_{n,k-1} - c_{i,k-1})(-ku)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$+ (\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i)u.$$

Il résulte de la supposition faite concernant les nombres $s_1, \ldots s_n$ que les nombres

$$|\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i|$$

sont plus grands qu'un nombre positif fixe indépendant de $\beta_1, \ldots \beta_n$, i et que les quotients

$$\frac{|\beta_1 r_1 + \cdots + \beta_n r_n - r_i|}{|\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i|},$$

$$\frac{|\beta_1 c_{1j} + \cdots + \beta_n c_{nj} - c_{ij}|}{|\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i|}$$

sont plus petits qu'un nombre fixe.

Pour la fonction $f(x)$ on a

$$|f(x)| < \sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n} G^{\beta_1,\ldots\beta_n}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\left(k^{(j)}_{\gamma_1,\ldots\gamma_n}\right) + A^{(i,\alpha)}_{\beta_1,\ldots\beta_n}.$$

Nous pouvons prendre la solution suivante de l'équation (41)

$$\varphi^{(i)}_{\beta_1,\ldots\beta_n} = e^{-t}\int\limits_{\infty}^{u} e^{\tau} f(x)\, dv,$$

où τ correspond à v de la même manière que t correspond à u et l'intégration est effectuée le long d'une ligne droite qui s'étend à l'infini dans une direction telle que la direction correspondante dans le plan $(\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i)v$ ait un argument entre $\frac{\pi}{2} + \delta$ et $\frac{3\pi}{2} - \delta$.

On peut écrire

$$t - \tau = (\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i)(u - v)(1 + \eta),$$

où

$$|\eta| < Ar, \quad r = (kR)^{-1/k},$$

A étant un nombre fixe, car on a

$$\left|\frac{u^\alpha - v^\alpha}{u - v}\right| < k^{1-\alpha} r^{k(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

comme on le voit facilement. En prenant r assez petit il y a donc un nombre positif ε' indépendant de $\beta_1, \ldots \beta_n, i$ de manière que

$$\left|\varphi^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}\right| < \int_0^\infty e^{-\varepsilon' \varrho} |f(x)|\, d\varrho < \frac{1}{\varepsilon'}\left\{\sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} G^{\beta_1, \ldots \beta_n}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}\left(k^{(j)}_{\gamma_1, \ldots \gamma_n}\right) + A^{(i,\alpha)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}\right\}.$$

Il résulte de cette discussion que l'on a

$$\left|\varphi^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(x)\right| < k^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}$$

pour toutes les valeurs de $\beta_1, \ldots \beta_n, i$ si u appartient à $\mathfrak{U}$, les nombres $k^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}$ étant définis par les équations

$$k^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n} = \frac{1}{\varepsilon'}\left\{\sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} G^{\beta_1, \ldots \beta_n}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}\left(k^{(j)}_{\gamma_1, \ldots \gamma_n}\right) + A^{(i,\alpha)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}\right\}.$$

Ces nombres sont les coefficients des séries de puissances ζ_i de $t_1, \ldots t_n$ définies par les équations

$$\zeta_i = t_i + \frac{1}{\varepsilon'}\sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} \zeta_1^{\alpha_1} \ldots \zeta_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Ces séries ont un domaine de convergence $|t_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$. Par suite, les séries (40) convergent si u appartient à $\mathfrak{U}$ et $|t_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$, $x, t_1, \ldots t_n$ *étant considérés comme des variables indépendantes.*

Si l'on pose

$$t_i = C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

les séries convergent pour les valeurs de x telles que u appartienne à $\mathfrak{U}$ et

$$\left|C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i}\right| < \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n).$$

11. Considérons maintenant le cas où il y a des relations de la forme

(42) $$s_i = \beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n$$

nécessairement en nombre fini. Dans ce cas nous posons dans (37)

$$\zeta = x^\nu \bar{\zeta}_i \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où ν est un entier positif, donc

$$(37') \qquad x^{k+1} \frac{d\bar{\zeta}_i}{dx} = (P_i(x) - \nu x^k)\bar{\zeta}_i + x^{-\nu}\bar{\mathfrak{P}}_i^{(\alpha)}(x^\nu \bar{\zeta}_1, \ldots x^\nu \bar{\zeta}_n; x)$$
$$(i = 1, \ldots n).$$

Les nombres r_i sont remplacés par $r_i - \nu$ et les coefficients $a^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}$ sont remplacés par

$$x^{\nu(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1)} a^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}.$$

Aux séries (40) correspondent

$$(40') \qquad \bar{\zeta}_i = \bar{t}_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} x^{\nu(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1)} \varphi^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x)\, \bar{t}_1^{\alpha_1} \ldots \bar{t}_n^{\alpha_n}$$
$$(i = 1, \ldots n),$$

où

$$\bar{t}_i = C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i - \nu} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Pour

$$\varphi = x^{\nu(\beta_1 + \cdots + \beta_n - 1)} \varphi^{(i)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(x)$$

on aura au lieu de (41)

$$(41') \qquad \begin{aligned} x^{k+1}\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\,[\beta_1 P_1(x) + \cdots + \beta_n P_n(x) - P_i(x) - \nu(\beta_1 + \cdots + \beta_n - 1)x^k] = \\ = \sum x^{\nu(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1)} a^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)\, G^{\beta_1, \ldots \beta_n}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}\left(x^{\nu(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n - 1)} \varphi^{(j)}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n}\right) \\ + x^{\nu(\beta_1 + \cdots + \beta_n - 1)} a^{(i,\alpha)}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(x) = x^\nu f(x). \end{aligned}$$

En supposant que l'on ait dans la fonction au second membre

$$\left| x^{\nu(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n - 1)} \varphi^{(j)}_{\gamma_1, \ldots \gamma_n} \right| < k^{(j)}_{\gamma_1, \ldots \gamma_n}$$

on aura

$$|f(x)| < \sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} G^{\beta_1, \ldots \beta_n}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}\left(k^{(j)}_{\gamma_1, \ldots \gamma_n}\right) + A^{(i,\alpha)}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$$

sous la condition que $|x| < 1$.

Considérons l'équation (41') correspondant à une relation (42). Supposons d'abord que

$$\begin{aligned} &\beta_1 P_1(x) + \cdots + \beta_n P_n(x) - P_i(x) = \\ (43)\qquad &= (\beta_1 r_1 + \cdots + \beta_n r_n - r_i) x^k + (\beta_1 c_{11} + \cdots + \beta_n c_{n1} - c_{i1}) x^{k-1} + \cdots \\ &\qquad + (\beta_1 c_{1\mu} + \cdots + \beta_n c_{n\mu} - c_{i\mu}) x^{k-\mu}, \end{aligned}$$

où

$$\beta_1 c_{1\mu} + \cdots \beta_n c_{n\mu} - c_{i\mu} \neq 0.$$

Si l'on prend $\nu \geqq k - \mu$ les deux membres de (41′) sont divisibles par $x^{k-\mu}$. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = x^{\mu+\nu-k} \frac{f(x)}{P(x)},$$

si l'on pose

$$\begin{aligned} P(x) = (\beta_1(r_1 - \nu) + \cdots + \beta_n(r_n - \nu) - (r_i - \nu)) x^\mu + \\ + (\beta_1 c_{11} + \cdots + \beta_n c_{n1} - c_{i1}) x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 c_{1\mu} + \cdots + \beta_n c_{n\mu} - c_{i\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = (\beta_1(r_1 - \nu) + \cdots + \beta_n(r_n - \nu) - (r_i - \nu)) \log x \\ - (\beta_1 c_{11} + \cdots + \beta_n c_{n1} - c_{i1}) \frac{1}{x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \frac{1}{\mu}(\beta_1 c_{1\mu} + \cdots + \beta_n c_{n\mu} - c_{i\mu}) \frac{1}{x^\mu}. \end{aligned}$$

Posant

$$\bar{u} = -\frac{1}{\mu} x^{-\mu} = -\frac{1}{\mu}(-k \cdot u)^{\frac{\mu}{k}}$$

nous pouvons prendre

$$\varphi = e^{-t} \int_\infty^{\bar{u}} e^\tau x^{\mu+\nu-k} f(x)\, d\bar{v},$$

l'intégration étant effectuée le long d'une courbe décrite par $\bar{u}$ quand u décrit une droite telle que nous l'avons considérée précédamment. On peut supposer que cette courbe s'étend à l'infini dans une direction faisant avec l'axe imaginaire un angle plus grand que δ. Par suite, on aura comme précédamment

$$|\varphi| < \frac{1}{\varepsilon'} \left\{ \sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} G^{\beta_1, \ldots \beta_n}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} \left(k^{(j)}_{\gamma_1, \ldots \gamma_n}\right) + A^{(i,\alpha)}_{\beta_1, \ldots \beta_n} \right\},$$

où ε' est un certain nombre positif.

Supposons ensuite que

$$(44)\qquad \beta_1 P_1(x) + \cdots + \beta_n P_n(x) - P_i(x) = (\beta_1 r_1 + \cdots + \beta_n r_n - r_i) x^k.$$

Alors, l'équation (41') s'écrit

$$\frac{d\,\varphi\, x^r}{d\,x} = x^{\nu+r-k-1} f(x),$$

où

$$r = \beta_1(r_1 - \nu) + \cdots + \beta_n(r_n - \nu) - (r_i - \nu).$$

En posant $x = e^{\bar{u}}$ on voit facilement que cette équation a, pour $\nu = k$, une solution telle que

$$|\varphi| < \frac{1}{\varepsilon'}\left\{\sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\, G^{\beta_1,\ldots\beta_n}_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\,(k^{(j)}_{\gamma_1,\ldots\gamma_n}) + A^{(i,\alpha)}_{\beta_1,\ldots\beta_n}\right\},$$

excepté le cas où $\Re r = 0$ pour $\nu = k$; dans ce dernier cas on aura le même résultat en prenant ν un peu plus grand que k.

S'il y a une relation (44) nous prenons $\nu = k$ ou exceptionnellement $\nu = k + k'$, $k' > 0$. S'il n'y a aucune relation (44) nous prenons pour ν le plus grand des nombres $k - \mu$ correspondant aux relations (42).

Il résulte de la discussion précédente que les séries (40) convergent, dans le cas où il y a des relations (42), pour $|t_i x^{-\nu}| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$, u dans $\mathfrak{U}$.

12. Nous supposons maintenant que $s_1, \ldots s_n$ ne se trouvent pas d'un même côté d'une droite passant par l'origine. Alors lès séries (40) sont en général divergentes; ça dépend de ce fait qu'il existe des suites infinies de valeurs de $\beta_1, \ldots \beta_n$ pour lesquelles les nombres $|\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_i|$ sont infiniments petits. Mais dans ce cas on aura des séries convergentes en remplaçant certaines des constantes C_i par 0.

Nous supposons que $s_1, \ldots s_p$ se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine et que $\bar{U}_\alpha$ contient une partie du secteur dans lequel $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots p)$ tendent vers 0. Alors on aura une solution du système (37) sous la forme

$$(45)\qquad \begin{aligned} \zeta_i &= t_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi^{(i)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} && (i = 1, \ldots p) \\ \zeta_j &= \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi^{(j)}_{\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} && (j = p + 1, \ldots n). \end{aligned}$$

Les coefficients de ces séries se déterminent comme les coefficients des séries (40) si l'on suppose que $\beta_{p+1} = 0, \ldots \beta_n = 0$ dans (41). La démonstration de la convergence des séries (45) est analogue à la démonstration de la convergence des séries (40). Il suffira de remarquer qu'on peut employer comme majorantes les séries de puissances $\zeta_1, \dots \zeta_n$ de $t_1, \dots t_p$ définies par les équations

$$\zeta_i = t_i + \frac{1}{\varepsilon'} \sum A^{(i,\alpha)}_{\alpha_1,\dots\alpha_n} \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \dots p)$$

$$\zeta_j = \frac{1}{\varepsilon'} \sum A^{(j,\alpha)}_{\alpha_1,\dots\alpha_n} \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n} \qquad (j = p+1, \dots n).$$

Les séries (45) convergent pour $|t_i| < \bar{r}$ $(i = 1, \dots p)$, u dans $\mathfrak{U}$, excepté le cas où il y a des relations de la forme (42) avec $\beta_{p+1} = 0, \dots \beta_n = 0$. Dans le dernier cas les séries (45) convergent pour $|t_i x^{-\nu}| < \bar{r}'$ $(i = 1, \dots p)$, u dans $\mathfrak{U}$, où ν est un des nombres $1, \dots k$ ou exceptionnellement $\nu = k + k'$, $k' > 0$.

Les résultats précédents sont obtenus sous les seules conditions générales formulées au commencement du n:o 9. Maintenant nous supposons de plus que les coefficients des séries aux seconds membres de (12) sont asymptôtes dans X à certaines séries de puissances de x. Alors les coefficients des séries $\mathfrak{P}^{(\alpha)}_i$ dans (37) seront asymptôtes dans $\bar{X}_\alpha$ à certaines séries de puissances. Supposons d'abord qu'il n'y ait aucune relation de la forme (42). Alors, on voit successivement que les coefficients des séries (40) sont aussi asymptôtes dans $\bar{X}_\alpha$ à des séries de puissances de x. Dans le cas où il y a des relations (42) la même chose a lieu pour

$$x^{\nu(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1)} \varphi^{(i)}_{\alpha_1,\dots\alpha_n}(x),$$

excepté peut-être le cas où il y a des relations (44); dans le dernier cas il pourrait arriver que les séries asymptotiques contiennent des logarithmes. Le même résultat est valable pour les coefficients des séries (45).

Nous rassemblons en le théorème suivant les résultats obtenus pour un système (37).

Théorème 5. *Supposons que $s_1, \dots s_n$ se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine et prenons le secteur $\bar{U}_\alpha$ de manière qu'il contienne une partie du secteur dans lequel $e^{s_i u}$ $(i = 1, \dots n)$ tendent vers 0. Il y a un système de séries*

$$(40) \qquad \zeta_i = t_i + \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geqq 2} \varphi^{(i)}_{\alpha_1,\dots\alpha_n}(x)\, t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \dots n)$$

$$t_i = C_i\, e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \qquad (i = 1, \dots n)$$

C_i constantes arbitraires

qui convergent et satisfont au système (37) *pour les valeurs de* x *appartenant à une partie du secteur* $\bar{X}_\alpha(\varepsilon)$ *découpée par un cercle* $|x| = \bar{r}$ *et par certaines des courbes*

$$| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} | = \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Cela suppose qu'il n'y ait aucune relation de la forme

$$s_i = \beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n. \tag{42}$$

S'il y a des relations de cette forme les courbes précédentes doivent être remplacées par

$$| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i - \nu} | = \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où ν *a l'une des valeurs* $1, \ldots k$ *ou exceptionnellement une valeur* $k + k'$, $k' > 0$.

Supposons ensuite que $s_1, \ldots s_p$ *se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine et prenons le secteur* $\bar{U}_\alpha$ *de manière qu'il contienne une partie du secteur dans lequel* $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots p)$ *tendent vers* 0. *Alors il y a un système de séries*

$$\begin{aligned} \zeta_i &= t_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi^{(i)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_p}(x) t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} \qquad (i = 1, \ldots n) \\ \zeta_j &= \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi^{(j)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_p}(x) t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} \qquad (j = p + 1, \ldots n) \end{aligned} \tag{45}$$

qui convergent et satisfont au système (37) *sous des conditions analogues,* n *étant remplacé par* p.

Dans le cas où les coefficients des séries $\mathfrak{P}_i$ *dans le système donné* (12) *sont asymptôtes dans* X *à des séries de puissances de* x, *les coefficients des séries* (40), (45) *seront asymptôtes dans* $\bar{X}_\alpha$ *à certaines séries. Ces séries asymptotiques sont des séries de puissances de* x *sans puissances négatives s'il n'y a aucune relation* (42). *S'il y a des relations de cette forme les séries asymptotiques peuvent contenir des puissances négatives (en nombre fini pour chaque coefficient) et exceptionnellement des logarithmes, la dernière circonstance ne pouvant avoir lieu que dans le cas où il y a des relations de la forme*

$$\beta_1 P_1(x) + \cdots + \beta_n P_n(x) - P_i(x) = (\beta_1 r_1 + \cdots + \beta_n r_n - r_i) x^k \tag{44}$$

et en même temps

$$\beta_1 (r_1 - k) + \cdots + \beta_n (r_n - k) = r_i - k - \lambda$$

λ *étant un entier* $\geqq 0$.

13. Nous montrons maintenant comment on peut employer les séries (40) ou (45) pour suivre une solution donnée du système (12) quand x tourne autour de $x = 0$ et pour décrire la forme d'un domaine d'existence d'une telle solution. Considérons d'abord le cas où $s_1, \ldots s_n$ sont d'un même côté d'une droite passant par l'origine.

Soit $\varphi' < \varphi < \varphi''$, $\varphi'' - \varphi' \leqq \pi$, le secteur dans lequel les fonctions $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers zéro. Partant d'un demi-plan $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \pi$, où φ_0 satisfait à l'inégalité $\varphi' < \varphi_0 < \varphi''$ et à la condition qu'aucune des fonctions $|e^{(s_i - s_j) u}|$ $(i, j = 1, \ldots n;\ i \neq j)$ ne soit égale à 1 pour $u = e^{i\varphi_0}$ on définira comme dans le n:o 8 une suite de secteur $\bar{U}_\alpha$, $\bar{X}_\alpha$ $(\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ayant les propriétés suivantes. L'angle d'un secteur $\bar{X}_\alpha$ est $> \frac{\pi}{k}\cdot$ Deux secteurs $\bar{U}_\alpha$ consécutifs ont une partie commune et chaque secteur $\bar{U}_\alpha$ contient un secteur dans lequel les fonctions $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots n)$ tendent vers 0.

À chaque secteur $\bar{X}_\alpha$ correspond un système de séries (40). Nous les écrivons de la manière suivante

$$\zeta_i^{(\alpha)} = t_i^{(\alpha)} + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} \varphi^{(i,\alpha)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)\, t_1^{(\alpha)\alpha_1} \ldots t_n^{(\alpha)\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{46}$$

$$t_i^{(\alpha)} = C_i^{(\alpha)} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Elles convergent dans un domaine $\mathfrak{X}_\alpha(C_1^{(\alpha)}, \ldots C_n^{(\alpha)})$ découpé du secteur $\bar{X}_\alpha(\varepsilon)$ par un cercle $|x| = \bar{r}$ et par certaines courbes

$$|C_i^{(\alpha)} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i}| = \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Ce domaine s'étend à $x = 0$ dans les directions dans lesquelles les fonctions $t_i^{(\alpha)}$ tendent vers 0.

Il peut arriver que les domaines $\mathfrak{X}_\alpha(C_1^{(\alpha)}, \ldots C_n^{(\alpha)})$, $\bar{X}_{\alpha+1}(\varepsilon)$ n'ont aucune partie commune. À cet effet il faut que les valeurs $|C_i^{(\alpha)}|$ soient plus grandes qu'un certain nombre. Si ces valeurs sont suffisamments petites les deux domaines ont certainement une partie commune. Nous considérons ce cas et nous cherchons les relations qui doivent exister entre $C_i^{(\alpha)}$, $C_i^{(\alpha+1)}$ pour que la solution correspondant à $C_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, \ldots n)$ soit donné dans la partie commune de $\mathfrak{X}_\alpha(C_1^{(\alpha)}, \ldots C_n^{(\alpha)})$, $\bar{X}_{\alpha+1}(\varepsilon)$ par les séries (46) correspondant à $\bar{X}_{\alpha+1}$. Ces relations peuvent évidemment s'écrire

$$y_i^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_{ji}^{(\alpha)} \zeta_j^{(\alpha)} = y_i^{(\alpha+1)} + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_{ji}^{(\alpha+1)} \zeta_j^{(\alpha+1)} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

On en déduit d'abord des équations de la forme

$$\zeta_i^{(\alpha+1)} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}^{(\alpha)} \zeta_j^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_{ij}^{(\alpha)} (y_j^{(\alpha+1)} - y_j^{(\alpha)}) \qquad (i = 1, \ldots n),$$

$|Z_{ij}^{(\alpha)}|$, $|\bar{Z}_{ij}^{(\alpha)}|$ restant plus petits qu'une constante qu'on peut prendre égale à 2 p. ex. Ensuite on aura

$$t_i^{(\alpha+1)} = \mathfrak{P}_{i\alpha}(t_1^{(\alpha)}, \ldots t_n^{(\alpha)}; x) \qquad (i = 1, \ldots n),$$

d'où

$$C_i^{(\alpha+1)} = e^{-Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-r_i} \mathfrak{P}_{i\alpha}(t_1^{(\alpha)}, \ldots t_n^{(\alpha)}; x) \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Les seconds membres sont nécessairement indépendants de x, par suite on aura une substitution de la forme

$$C_i^{(\alpha+1)} = \mathfrak{P}_{i\alpha}(C_1^{(\alpha)}, \ldots C_n^{(\alpha)}) \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{47}$$

Écrivons

$$\mathfrak{P}_{i\alpha}(C_1^{(\alpha)}, \ldots C_n^{(\alpha)}) = c_i^{(\alpha)} + c_{i1}^{(\alpha)} C_1^{(\alpha)} + \cdots + c_{in}^{(\alpha)} C_n^{(\alpha)} + \cdots$$
$$(i = 1, \ldots n).$$

Il est d'un certain intérêt de montrer que la matrice $(c_{ij}^{(\alpha)})$ a la même forme que la matrice des coefficients de la substitution (30). Nous pouvons raisonner de la même manière que dans le n:o 8. Nous faisons tendre x vers 0 suivant un rayon le long duquel aucune des fonctions $|e^{(s_i - s_j)u}|$ $(i, j = 1, \ldots n;\ i \neq j)$ n'est constante. Nous pouvons supposer les variables rangées dans un ordre tel que pour une valeur quelconque de i les fonctions $e^{(s_j - s_i)u}$ $(j = i + 1, \ldots n)$ tendent vers 0. En résolvant les équations

$$\zeta_i^{(\alpha+1)} = t_i^{(\alpha+1)} + \sum \varphi_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}^{(i, \alpha+1)}(x)\, t_1^{(\alpha+1)\alpha_1} \ldots t_n^{(\alpha+1)\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

par rapport à $t_i^{(\alpha+1)}$ $(i = 1, \ldots n)$ on aura

$$\begin{aligned} t_i^{(\alpha+1)} &= \zeta_i^{(\alpha+1)} + \sum \psi_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}^{(i, \alpha+1)}(x)\, \zeta_1^{(\alpha+1)\alpha_1} \ldots \zeta_n^{(\alpha+1)\alpha_n} \\ &= \bar{\mathfrak{P}}_{i, \alpha+1}(\zeta_1^{(\alpha+1)}, \ldots \zeta_n^{(\alpha+1)}; x). \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

Ensuite on aura les séries $\mathfrak{P}_{i\alpha}(t_1^{(\alpha)}, \ldots t_n^{(\alpha)}; x)$ en posant ici

$$\zeta_i^{(\alpha+1)} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}^{(\alpha)} \zeta_j^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_{ij}^{(\alpha)} (y_j^{(\alpha+1)} - y_j^{(\alpha)}) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et en introduisant pour $\zeta_j^{(\alpha)}$ $(j = 1, \ldots n)$ les séries de puissances de $t_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, \ldots n)$. Le coefficient de $t_j^{(\alpha)}$ sera

$$\sum_{h=1}^{n} Z_{hj}^{(\alpha)} \left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{i,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_h^{(\alpha+1)}} \right),$$

où $\left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{i,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_h^{(\alpha+1)}} \right)$ désigne ce que l'on obtient en posant $\zeta_\mu^{(\alpha+1)} = \sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_{\mu j}^{(\alpha)} (y_j^{(\alpha+1)} - y_j^{(\alpha)})$ $(\mu = 1, \ldots n)$ dans $\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{i,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_h^{(\alpha+1)}}$. Par suite

$$c_{ij}^{(\alpha)} = e^{-Q_i\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{-r_i} \sum_{h=1}^{n} Z_{hj}^{(\alpha)} \left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{i,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_h^{(\alpha+1)}} \right) e^{Q_j\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{r_j}.$$

Il résulte de la discussion du n:o 8 que la matrice

$$\left(Z_{hj}^{(\alpha)}\, e^{Q_j\left(\frac{1}{x}\right) - Q_h\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{r_j - r_h} \right)$$

est constante, soit $(\bar{c}_{hj}^{(\alpha)})$, et que

$$\bar{c}_{hh}^{(\alpha)} = 1, \quad \bar{c}_{hj}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{pour} \quad j > h.$$

Nous pouvons donc écrire

$$c_{ij}^{(\alpha)} = \sum_{h=1}^{n} \bar{c}_{hj}^{(\alpha)} \left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{i,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_h^{(\alpha+1)}} \right) e^{Q_h\left(\frac{1}{x}\right) - Q_i\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{r_h - r_i}.$$

Supposons d'abord que $i = 1$. En remarquant que les fonctions $y_j^{(\alpha+1)} - y_j^{(\alpha)}$ $(j = 1, \ldots n)$ tendent vers 0 pour $x \to 0$, on voit que

$$c_{11}^{(\alpha)} = 1, \quad c_{1j}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{pour} \quad j > 1.$$

Posons ensuite $i = 2$. Alors on aura

$$c_{2j}^{(\alpha)} = \sum_{h=1}^{n} \bar{c}_{hj}^{(\alpha)} \left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{2,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_h^{(\alpha+1)}} \right) e^{Q_h\left(\frac{1}{x}\right) - Q_2\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{r_h - r_2}$$

$$= \bar{c}_{1j}^{(\alpha)} \lim_{x \to 0} e^{Q_1\left(\frac{1}{x}\right) - Q_2\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{r_1 - r_2} \left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{2,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_1^{(\alpha+1)}} \right) + \bar{c}_{2j}^{(\alpha)}$$

donc

$$c_{21}^{(\alpha)} = \bar{c}_{21}^{(\alpha)} + \lim_{x \to 0} e^{Q_1\left(\frac{1}{x}\right) - Q_2\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^{r_1 - r_2} \left(\frac{\partial\, \overline{\mathfrak{P}}_{2,\,\alpha+1}}{\partial\, \zeta_1^{(\alpha+1)}} \right)$$

$$c_{22}^{(\alpha)} = 1, \quad c_{2j}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{pour} \quad j > 2.$$

En poursuivant de cette manière on aura

$$c_{hh}^{(\alpha)} = 1, \quad c_{hj}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{pour} \quad j > h.$$

Dans le cas où les seconds membres du système donné (12) s'annulent pour $y_1 = 0, \ldots y_n = 0$ on a $y_i^{(\alpha)} = y_i^{(\alpha+1)} = 0$ $(i = 1, \ldots n)$. Alors, on conclut que

$$c_{ij}^{(\alpha)} = \bar{c}_{ij}^{(\alpha)}.$$

Partons maintenant d'une solution représentée à l'aide des séries (46) dans un domaine $\mathfrak{X}_\alpha(C_1^{(\alpha)}, \ldots C_n^{(\alpha)})$ et supposons que x tourne autour de $x = 0$ dans le sens positif p. ex. Il peut arriver que la solution considérée peut être prolongée successivement de secteur au secteur à l'aide de séries de la forme (46) correspondant aux secteurs $\bar{X}_{\alpha+1}, \ldots$, les constantes entrant dans les séries (46) correspondant à un certain secteur étant liées aux constantes entrant dans les séries (46) correspondant au secteur précédant par une substitution de la forme (47). De la même manière la solution pourra être prolongée quand x tourne dans le sens négatif. On aura ainsi une solution définie dans un domaine qui est la réunion d'une suite de domaines $\mathfrak{X}_{\alpha+\mu}$ $(C_1^{(\alpha+\mu)}, \ldots C_n^{(\alpha+\mu)})$ $(\mu = 0, \pm 1, \ldots)$. Il est facile à voir que ce domaine peut être considéré comme un domaine d'existence de la solution considérée, sous la condition que $\bar{r}$ soit choisi assez petit par rapport à $\bar{r}'$. En effet il résulte de $|y_i^{(\alpha)}| < K|x|$ $(i = 1, \ldots n)$ que $\frac{|y_i|}{\bar{r}'}$ est situé dans le voisinage de 1 si x se trouve sur la courbe

$$\left| C_i^{(\alpha)} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \bar{r}'.$$

Considérons aussi le cas où il y a des relations (42). Alors on peut appliquer les raisonnements précédents après une substitution de la forme

$$y_i = c_i^{(1)} x + c_i^{(2)} x^2 + \cdots + c_i^{(\nu)} x^\nu + \bar{y}_i x^\nu \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où ν a l'une des valeurs $1, \ldots k$ ou exceptionnellement $k + 1$ et $c_i^{(1)}, \ldots c_i^{(\nu)}$ sont les ν premiers coefficients des séries (6). On aura un domaine limité par certaines courbes

$$\left| C_i^{(\alpha)} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i - \nu} \right| = \bar{r}'.$$

Ce domaine peut être considéré comme un domaine d'existence de $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant

Théorème 6. *Supposons que $s_1, \dots s_n$ se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine et qu'il n'y a aucune relation (42). Un domaine d'existence d'une solution particulière du système (12) est limité ou bien par un nombre fini de courbes*

$$\left| e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \mathit{const.}$$

ou bien par un cercle $|x| = \bar{r}$ et par un nombre fini ou infini de telles courbes, le nombre des courbes étant infini dans le cas où x peut tourner une infinité de fois autour de $x = 0$.

La solution en question peut être représentée à l'aide de systèmes de séries (40) en nombre fini ou infini et cela de la manière suivante. On peut construire une suite infinie de secteurs $\bar{X}_\alpha$ dont les angles sont $> \frac{\pi}{k}$ de telle manière que deux secteurs consécutifs aient une partie commune et que chaque secteur $\bar{X}_\alpha$ contienne un secteur dans lequel les fonctions $e^{s_i u}$ $(i = 1, \dots n)$ tendent vers 0. À chaque secteur $\bar{X}_\alpha$ correspond une solution $y_1^{(\alpha)}, \dots y_n^{(\alpha)}$ asymptôte dans $\bar{X}_\alpha$ aux séries (6). En posant $y_i = y_i^{(\alpha)} + z_i$ $(i = 1, \dots n)$ on aura un système transformé qui conduit à un système de séries (40). Dans ces séries les constantes ont certaines valeurs déterminées $C_i^{(\alpha}$ correspondant à la solution considérée. Les valeurs de $C_i^{(\alpha+1)}$ $(i = 1, \dots n)$ sont liées aux valeurs de $C_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, \dots n)$ par une substitution de la forme (47).

Dans le cas où il y a des relations (42) on aura des résultats analogues après une transformation

$$y_i = c_i^{(1)} x + \cdots + c_i^{(\nu)} x^\nu + \bar{y}_i x^\nu \qquad (i = 1, \dots n)$$

$c_i^{(1)}, \dots c_i^{(\nu)}$ étant les ν premiers coefficients des séries (6).

14. Considérons le cas où les seconds membres du système (12) sont uniformes en x autour de $x = 0$. On aura $2k$ systèmes de séries (40) et $2k$ substitutions (47). En partant d'une solution représentée à l'aide d'un certain système de séries (40) où les constantes ont certaines valeurs $C_1, \dots C_n$ et en supposant que x puisse tourner une fois autour de $x = 0$, dans le sens positif p. ex., on aura après le tour une solution représentée à l'aide du même système de séries (40), les constantes ayant certaines valeurs $\bar{C}_1, \dots \bar{C}_n$ qui sont liées aux valeurs de $C_1, \dots C_n$ par une substitution de la forme

$$\begin{aligned} \bar{C}_i &= \mathfrak{P}_i(C_1, \dots C_n) \\ &= c_i + c_{i1} C_1 + \cdots + c_{in} C_n + \cdots \end{aligned} \qquad (i = 1, \dots n). \tag{48}$$

En remarquant que les fonctions x^{r_i} $(i = 1, \dots n)$ doivent être suivies avec continuité quand x tourne autour de $x = 0$ on conclut de ce qui précède que le déterminant $|c_{ij}|$ a la valeur $\prod_{i=1}^{n} e^{2\pi r_i \sqrt{-1}}$. Par l'étude de l'itération de la substitution (48) on peut chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les constantes $C_1, \dots C_n$ pour que x puisse tourner une infinité de fois autour de $x = 0$. Le problème est équivalent au problème d'étudier le système suivant d'équations aux différences finies

$$y_i(t+1) = \mathfrak{P}_i(y_1(t), \dots y_n(t)) \qquad (i = 1, \dots n).$$

On doit chercher les solutions telles que $|y_i(t)|$ $(i = 1, \dots n)$ restent plus petits qu'une certaine constante pour toutes les valeurs positives de t. La solution du problème dépend essentiellement des racines de l'équation caractéristique

$$|c_{ij} - s\,\delta_{ij}| = 0.$$

Le cas le plus simple est le cas où les racines de cette équation sont simples et en valeurs absolues plus petites que 1. Dans ce cas, si $|c_i|$, $|C_i|$ $(i = 1, \dots n)$ sont plus petits qu'une certaine constante, l'itération de (48) donnera une suite infinie de valeurs appartenant au domaine de convergence des séries $\mathfrak{P}_i(C_1, \dots C_n)$ $(i = 1, \dots n)$. Dans d'autres cas la question est plus délicate, nous n'y entrons pas dans ce travail.

Supposons en outre que les seconds membres du système (12) s'annulent pour $y_i = 0$ $(i = 1, \dots n)$. Alors il n'y a qu'un seul système linéaire (33), $a_{ij}(x)$ étant les coefficients de $y_1, \dots y_n$ dans les séries aux seconds membres de (12). On voit facilement, d'après ce qui précède, que l'équation caractéristique de la substitution (48) est identique à l'équation fondamentale déterminante du système linéaire (33).

15. Dans le cas où $s_1, \dots s_n$ se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine le problème d'étudier les solutions du système (12) autour de $x = 0$ est en principe résolue par la théorie précédente. La question est plus difficile si $s_1, \dots s_n$ ne satisfont pas à cette condition. L'exemple particulier d'un système dont l'intégrale générale s'écrit (voir p. 88)

$$y_i = \mathfrak{P}_i(x, t_1, \dots t_n) \qquad (i = 1, \dots n)$$

montre que le domaine d'existence d'une solution donnée ne s'étend pas en général à $x=0$ si x ne tourne qu'un nombre fini de fois autour de $x=0$. Mais on peut se poser la question d'étudier les solutions particulières dont le domaine d'existence s'étend à $x=0$ dans certaines directions. Nous nous limitons dans ce travail à étudier les solutions dont *le domaine d'existence contient un secteur de sommet* $x=0$.

L'existence de solutions de cette nature est assurée par les théorèmes 1, 2. D'après le théorème 1, à un secteur dont l'angle est $>\frac{\pi}{k}$ correspond au plus une seule solution dont le domaine d'existence contient ce secteur. Si l'angle est $<\frac{\pi}{k}$ il peut exister, d'après le théorème 2, des solutions dépendant de constantes arbitraires et ayant des domaines d'existence qui contiennent ce secteur. On peut chercher à représenter ces solutions à l'aide de séries de la forme (45).

Nous considérons une solution $y_1, \dots y_n$ de (12) satisfaisant à la seule condition que $|y_1|, \dots |y_n|$ soient plus petits qu'une constante $\bar{r}'$ suffisamment petite quand u décrit un rayon vecteur d'argument φ_0 le long duquel aucune des fonctions $|e^{s_i u}|$ $(i=1, \dots n)$ n'est constante. Nous pouvons supposer que $|e^{s_i u}|$ $(i=1, \dots p)$, $|e^{-s_j u}|$ $(j=p+1, \dots n)$ tendent vers 0 quand u tend vers l'infini dans la direction φ_0. Nous supposons qu'il n'y a aucune relation (42) où $\beta_{p+1}=0, \dots \beta_n=0$. Prenons un demi-plan $\bar{U}$ contenant la direction φ_0 dans son intérieur et une solution $\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n$ telle que $|\bar{y}_i|<\bar{r}'$ $(i=1, \dots n)$ dans tout secteur $\bar{U}(\varepsilon)$ à l'intérieur de $\bar{U}$. À cette solution correspond un système de séries (45) convergentes pour $|t_i|<\bar{r}'$ $(i=1, \dots p)$, $|x|<\bar{r}$, x dans le secteur $\bar{X}(\varepsilon)$ correspondant à $\bar{U}(\varepsilon)$. On voit bien aisément que la solution $y_1, \dots y_n$ peut être représentée à l'aide de ces séries pour des valeurs convenables des constantes $C_1, \dots C_p$. En effet, soient $y_1^{(0)}, \dots y_p^{(0)}$ les valeurs de $y_1, \dots y_p$ pour un point u_0 sur le rayon vecteur φ_0. On peut déterminer les constantes $C_1, \dots C_p$ de manière que les p premières variables prennent les valeurs $y_1^{(0)}, \dots y_p^{(0)}$ pour $u=u_0$. On a alors deux solutions, la solution donnée et la solution représentée à l'aide des séries (45) où $C_1, \dots C_p$ ont les valeurs ainsi déterminées; pour chacune de ces solutions il y a lieu que $y_1, \dots y_p$ prennent les valeurs $y_1^{(0)}, \dots y_p^{(0)}$ pour $u=u_0$ et que $|y_i|$ $(i=1, \dots n)$ sont plus petits que $\bar{r}'$ le long du rayon vecteur φ_0, par suite ces solutions sont identiques, d'après le théorème 2.

Maintenant on voit que $|y_i|<\bar{r}'$ $(i=1, \dots n)$ dans un secteur dans lequel $|e^{s_i u}|$ $(i=1, \dots p)$ tendent vers 0. Soit $\varphi'<\varphi<\varphi''$ le plus grand secteur tel que $|y_i|<\bar{r}'$ $(i=1, \dots n)$ dans tout secteur $\varphi'+\varepsilon<\varphi<\varphi''-\varepsilon$. Pour $\bar{U}$ nous pouvons prendre le demi-plan $\varphi'' - 2\varepsilon < \varphi < \varphi'' + \pi - 2\varepsilon$ p. ex. Nous pouvons supposer que $e^{s_i u}$ $(i = 1, \ldots p)$, $e^{-s_j u}$ $(j = p + 1, \ldots n)$ tendent vers 0 quand u tend vers l'infini dans une certaine direction φ telle que $\varphi'' - 2\varepsilon < \varphi < \varphi'' - \varepsilon$. Par suite $y_1, \ldots y_n$ peuvent être représentés dans ce secteur à l'aide d'un système de séries (45) correspondant à $\bar{U}$. En même temps on aura le prolongement de $y_1, \ldots y_n$ dans toute la partie du secteur $\varphi'' - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi'' + \pi - \frac{5}{2}\varepsilon$ limitée par $|x| = \bar{r}$ et par les courbes

$$\left| C_i e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots p).$$

Parmi ces courbes il y a nécessairement une courbe au moins qui s'étend à $x = 0$ dans la direction correspondant à φ''. Le même raisonnement peut être appliqué à la direction φ'.

Au lieu du rayon vecteur φ_0 nous pouvons prendre une courbe qui s'étend à l'infini dans la direction φ_0 et exiger que $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ le long de cette courbe.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant se rapportant au cas où $s_1, \ldots s_n$ ne sont pas d'un même côté d'une droite passant par l'origine.

Théorème 7. *Supposons qu'il n'y a aucune relation* (42) *entre des nombres* s_i *se trouvant d'un même côté d'une droite passant par l'origine. Prenons une direction* φ_0 *telle qu'aucune des fonctions* $|e^{s_i u}|$ $(i = 1, \ldots n)$ *ne soit constante quand* u *décrit une droite ayant cette direction. Soit* $y_1, \ldots y_n$ *une solution de* (12) *telle que* $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ *le long d'une courbe qui s'étend à l'infini dans la direction* φ_0. *Il y a un secteur entourant* φ_0 *dans lequel* $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$. *Soit* $\varphi' < \varphi < \varphi''$ *le secteur maximum tel que ces inégalités aient lieu dans tout secteur* $\varphi' + \varepsilon < \varphi < \varphi'' - \varepsilon$. *Nous supposons* φ', φ'' *finis. La solution considérée peut être représentée à l'aide de séries de la forme* (45) *dans le secteur* $\varphi' - \pi < \varphi < \varphi'' + \pi$. *La partie du domaine d'existence de* $y_1, \ldots y_n$ *qui est située dans le dernier secteur est limitée ou bien par certaines courbes*

$$\left| e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = const.$$

en nombre fini, ou bien par $|x| = \bar{r}$ *et par un nombre fini de telles courbes. Parmi ces courbes il y a une courbe qui s'étend à* $x = 0$ *dans la direction correspondant à* φ' *et une courbe qui s'étend à* $x = 0$ *dans la direction correspondant à* φ''.

Dans le cas où il y a des relations (42) entre des nombres s_i se trouvant d'un même côté d'une droite passant par l'origine il peut arriver que les courbes

$$\left| e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i} \right| = \text{const.}$$

doivent être remplacées par des courbes

$$\left| e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{r_i - \nu} \right| = \text{const.}$$

Pour l'étude du prolongement de $y_1, \ldots y_n$ à l'extérieur du secteur $\varphi' - \pi < < \varphi < \varphi'' + \pi$ nous n'avons aucun moyen s'il ne se trouverait pas que $|y_1|, \ldots |y_n|$ restent plus petits que $\bar{r}'$ dans un secteur appartenant à $\varphi' - \pi < \varphi < \varphi'$ ou à $\varphi'' < \varphi < \varphi'' + \pi$.