REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

E. PICARD

à PARIS.

J'ai eu déjà plusieurs fois l'occasion d'insister sur la profonde différence qui se présente dans l'étude de certains problèmes entre les équations du premier ordre et les équations d'ordre supérieur (voir en particulier le chapitre V de mon mémoire de 1888 *sur les fonctions algébriques de deux variables*).

Cette différence capitale tient en réalité à la circonstance suivante. Appelons *singularité essentielle* d'une intégrale d'une équation différentielle tout point singulier qui n'est pas un pôle ou un point critique algébrique; soit maintenant une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$f\left(x\,,\,y\,,\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

f étant un polynôme. On peut démontrer que *les singularités essentielles des intégrales de cette équation sont fixes, c'est à dire ne dépendent pas de la constante d'intégration.* Il est juste d'attribuer ce théorème à M. PAINLEVÉ qui l'a indiqué, sous une forme seulement un peu différente, dans son mémoire *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (Annales de la Faculté de Toulouse (1888), page 38).

Je remarque maintenant que le théorème précédent ne s'étend pas aux équations d'ordre supérieur au premier. Ainsi, pour une équation différentielle algébrique

$$f\left(x\,,\,y\,,\,\frac{dy}{dx}\,,\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

les singularités essentielles seront en général mobiles. Il suffira de prendre comme exemple l'équation

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 + 4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$y = Ce^{\frac{1}{x-C'}}$$

et où les singularités essentielles dépendent de C'.

Vous savez que les équations différentielles du premier ordre, *à points critiques fixes* ont fait l'objet des recherches de M. Fuchs et de M. Poincaré. Il n'y a dans ce cas aucune difficulté à reconnaître sur l'équation différentielle si les points critiques sont fixes; la véritable raison en est dans le théorème de M. Painlevé: il suffit de s'assurer, ce qui est facile, qu'un point arbitraire du plan ne peut pas être un point critique algébrique pour une intégrale. Il en est tout autrement pour les équations d'ordre supérieur; il est encore facile dans ce cas de reconnaître qu'un point arbitraire ne peut pas être un point critique algébrique pour une intégrale, mais, dans cette hypothèse, l'intégrale générale n'aura pas nécessairement ses points critiques fixes, car il peut y avoir des singularités essentielles mobiles. On peut d'ailleurs aller un peu plus loin en ne se bornant pas aux conditions qui excluent les points critiques algébriques, et reconnaître en général sur l'équation différentielle si toute intégrale prenant en un point arbitraire ainsi que ses dérivées des valeurs déterminées (finies ou infinies) est uniforme autour de ce point. Quand ces diverses conditions sont remplies, on peut dire que l'intégrale générale *a l'apparence* d'une intégrale à points critiques fixes, mais il n'est pas permis d'affirmer qu'elle a réellement ses points critiques fixes, c'est à dire qu'en dehors de certains point fixes elle est toujours uniforme.

En particulier, si l'équation différentielle ne renferme pas la variable indépendante, nous avons les conditions pour que l'intégrale générale soit *à apparence uniforme* suivant une dénomination que j'ai employée il y a déjà longtemps. Ces conditions sont de nature *algébrique;* il arrivera au contraire, en général, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit réellement uniforme sont de nature *transcendante.*

Deux exemples éclairciront suffisamment, je crois, les généralités qui précèdent. La relation

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \log(x + C) + C'$$

où $R(y)$ est un polynôme du quatrième degré en y, définit une fonction y de x satisfaisant, quelles que soient les constantes C et C', a une équation différentielle facile à former

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est à apparence uniforme; elle aura un point singulier à distance finie et elle ne sera véritablement uniforme que si l'intégrale elliptique admet $2\pi i$ pour période, ce qui s'exprimera par une relation transcendante entre les coefficients de l'équation. Considérons, en second lieu, l'équation linéaire à coefficients rationnels

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2\omega}{dy^2} + p\frac{d\omega}{dy} + q\omega = 0$$

dont les points singuliers, y compris le point à l'infini, sont supposés réguliers. En désignant par ω_1 et ω_2 deux intégrales distinctes, on sait que si l'on pose

$$\frac{\omega_2(y)}{\omega_1(y)} = x$$

la fonction y de x satisfait à une équation différentielle algébrique du troisième ordre:

$$(1) \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0.$$

Si la différence des racines de l'équation fondamentale est, pour tout point critique de (E), une partie aliquote de l'unité, l'intégrale générale de (1) sera à apparence uniforme, mais, comme le montre la théorie des fonctions fuchsiennes, elle ne sera pas en géneral une fonction uniforme.

Permettez-moi de vous indiquer encore un exemple d'une équation où la variable figure explicitement. J'envisage l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy^3 + Ry^2 + Sy + T = 0$$

où les coefficients sont des fonctions uniformes de x et où nous supposerons que Q n'est pas identiquement nulle. L'intégrale générale aura l'apparence d'une fonction à points critiques fixes si les deux séries d'intégrales devenant infinies en un point arbitraire x_0 admettent ce point pour pôle. Cette condition entraînera deux identités entre les fonctions P, Q, R, S, T et leurs dérivées jusqu'au quatrième ordre. On obtiendra ces identités de la manière suivante. Soit

$$y = \frac{\alpha}{x - x_0} + \beta + \gamma(x - x_0) + \delta(x - x_0)^2 + \varepsilon(x - x_0)^3 + \dots$$

une intégrale de (2) admettant le pôle x_0. En substituant cette expression dans l'équation différentielle, on détermine les coefficients

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

mais dans l'équation qui devrait donner ε, cette lettre disparaît; on a alors une relation entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et le coefficient ε reste arbitraire. Comme α est donné par une équation du second degré, on a les deux identités cherchées entre P, Q, R, S, T et leurs dérivées, puisque x_0 est arbitraire. Ces conditions ne suffisent pas bien probablement pour que l'intégrale générale de (2) soit réellement à points critiques fixes.

Dans son beau Mémoire sur la rotation d'un corps solide, M^me^ de Kowalevski fait quelque chose d'analogue à ce que je viens de faire plus haut. En réalité, elle ne trouve que des conditions pour que les intégrales soient à apparence uniforme, et c'est seulement après l'intégration effectuée qu'on peut affirmer que les intégrales sont uniformes. Je me propose de revenir un jour sur le travail de M^me^ de Kowalevski, en appliquant à son problème les méthodes générales de mon Mémoire sur les fonctions algébriques de plusieurs variables; le développement des calculs se fera, je crois, d'une manière plus simple et moins artificielle.

Ces remarques, peut être trop rapides, mais que je compte développer en détail dans le tome troisième de mon Traité d'analyse, ne sont pas en définitive très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur à points critiques fixes puissent conduire à l'étude de transcendantes nouvelles, en laissant bien entendu de côté les équations linéaires. J'espère beaucoup plus de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles, dont je vous entretenais naguère, et que j'ai sommairement indiqués dans une Note des Comptes Rendus (*Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires,* juin 1892).