Réalisations des espaces de Besov homogènes

G. Bourdaud

A côté des espaces de Sobolev et de Hölder usuels, sur $\mathbf{R}^n$, on utilise souvent leurs versions homogènes. Ainsi l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)$ est l'espace des $f \in \mathcal{D}'$ telles que $\nabla f \in L^2$, sans qu'on ait nécessairement $f \in L^2$; de même l'espace de Hölder homogène $\dot{C}^s$ $(0<s<1)$ est défini par la condition

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s} < +\infty.$$

L'avantage des normes homogènes réside dans leur comportement simple vis-à-vis des dilatations; on a en effet, pour $\lambda > 0$,

$$\left\| f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{\dot{H}^1} = \lambda^{(n/2)-1} \|f\|_{\dot{H}^1},$$

$$\left\| f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{\dot{C}^s} = \lambda^{-s} \|f\|_{\dot{C}^s}.$$

Dès que les hypothèses comportent de l'invariance par dilatations, les espaces homogènes se substituent avantageusement à leurs homologues inhomogènes. C'est ainsi que la transformation de Hilbert est continue sur $\dot{C}^s$, mais pas sur C^s (voir [1], chapitre IV); plus généralement les critères de continuité pour les opérateurs d'intégrales singulières se formulent naturellement dans le cadre homogène (voir par exemple [3]).

Cependant, les espaces homogènes ont le plus souvent un défaut déplorable: en tant qu'espaces de Banach, ce ne sont pas des espaces de distributions, mais seulement de distributions modulo les polynômes. Cela nous interdit, entre autres, de multiplier leurs éléments par des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$, autrement dit de «localiser» ces espaces.

On cherche dès lors à «réaliser» les espaces homogènes; cela signifie: choisir dans chaque classe d'équivalence (modulo les polynômes) un représentant et un seul, de façon cohérente — i.e. linéaire et continue. Dans les copies ainsi réalisées, on souhaite retrouver les agréables propriétés des originaux, à savoir l'invariance par translations et par dilatations.

C'est le programme que nous appliquerons aux espaces de Besov $\dot{B}_p^{s,q}$ et de Sobolev $\dot{H}_p^s$ dans les lignes qui suivent.

Notations:

$\mathcal{S}$ = espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, sur $\mathbf{R}^n$.
$\mathcal{S}'$ = espace des distributions tempérées.
$\mathcal{P}$ = sous-espace de $\mathcal{S}'$ formé des polynômes.
$\mathcal{S}_0$ = orthogonal de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{S}$.
Le dual de $\mathcal{S}_0$, noté $\mathcal{S}_0'$, s'identifie au quotient $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$; la classe de $f \in \mathcal{S}'$, modulo $\mathcal{P}$, est notée $[f]$.
Si $p \in [1, +\infty]$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$ est l'exposant conjugué.
C_0 désignera l'espace des fonctions continues, sur $\mathbf{R}^n$, tendant vers 0 à l'infini.

I. Généralités sur les réalisations

Soit $\mathbf{E}$ un sous-espace de $\mathcal{S}_0'$, muni d'une structured 'espace de Banach, telle que l'injection canonique $\mathbf{E} \to \mathcal{S}_0'$ soit continue. On appellera *réalisation* de $\mathbf{E}$ une application linéaire continue σ: $\mathbf{E} \to \mathcal{S}'$ telle que, pour tout $u \in \mathbf{E}$, $[\sigma(u)] = u$. Par abus de langage le sous-espace $\sigma(\mathbf{E}) \subset \mathcal{S}'$ sera encore appelé une réalisation de $\mathbf{E}$. σ étant une bijection de $\mathbf{E}$ sur $\sigma(\mathbf{E})$, l'espace $\sigma(\mathbf{E})$ hérite de la norme de $\mathbf{E}$ et devient donc un espace de Banach de distributions tempérées.

Proposition 1 *(Classification des réalisations). Soit σ_0: $\mathbf{E} \to \mathcal{S}'$ une réalisation, d'image E_0.*

Pour toute autre réalisation σ: $\mathbf{E} \to \mathcal{S}'$, il existe une suite finie $(\pi_\alpha)_{|\alpha| \leq N, \alpha \in \mathbf{N}^n}$ de formes linéaires continues sur E_0 telles que, en posant

$$\pi(f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \pi_\alpha(f) x^\alpha,$$

on ait $(\sigma \circ \sigma_0^{-1})(f) = f + \pi(f)$ $(\forall f \in E_0)$.

Réciproquement, la donnée de $\pi(f)$ détermine une réalisation σ de $\mathbf{E}$, à savoir $\sigma(u) = \sigma_0(u) + \pi(\sigma_0(u))$.

Preuve. La réciproque est évidente puisque, par hypothèse, π est une application continue à valeurs dans $\mathcal{P}$ (considéré comme sous-espace de $\mathcal{S}'$).

Si σ est donnée, alors

$$\pi(f) = (\sigma \circ \sigma_0^{-1})(f) - f \in \mathcal{P}$$

autrement dit $\pi(f)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\pi_\alpha(f)x^\alpha$, où, pour chaque $f\in E_0$, on a $\pi_\alpha(f)=0$ pour $|\alpha|$ assez grand.

La continuité de $\pi: E_0\to\mathscr{S}'$ entraîne celle de chaque forme linéaire π_α; enfin le théorème de Baire entraîne l'existence de $N\in\mathbf{N}$ tel que $\pi_\alpha=0$ pour tout $|\alpha|>N$. C.Q.F.D.

Pour $a\in\mathbf{R}^n$ et $\lambda>0$, on désigne par τ_a et d_λ les opérateurs de translation et de dilatation

$$\tau_a f(x)=f(x-a),\quad d_\lambda f(x)=f\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

τ_a et d_λ opèrent indifféremment sur $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}_0'$.

Soit $\mathbf{E}$ un sous-espace de $\mathscr{S}_0'$ invariant (pas nécessairement isométriquement) par translations (resp. dilatations) et σ_0 une réalisation de $\mathbf{E}$, d'image E_0. On peut définir sur E_0 des opérateurs de pseudo-translation (resp. pseudo-dilatation) par

$$T_a f=\sigma_0(\tau_a[f])\quad (\text{resp. } D_\lambda f=\sigma_0(d_\lambda[f])).$$

Soit σ une autre réalisation, d'image E. Alors E est invariant par translations (resp. dilatations) si et seulement si

$$\tau_a\circ\sigma=\sigma\circ\tau_a\quad (\text{resp. } d_\lambda\circ\sigma=\sigma\circ d_\lambda). \tag{1}$$

Si $f\mapsto f+\pi(f)$ désigne l'application canonique de E_0 dans E (voir la proposition 1), on tire aussitôt de (1), respectivement, pour tout $f\in E_0$,

$$\tau_a(\pi(f))=\pi(T_a f)+T_a f-\tau_a f, \tag{2}$$

$$d_\lambda(\pi(f))=\pi(D_\lambda f)+D_\lambda f-d_\lambda f. \tag{3}$$

Il convient d'observer que (2) et (3) sont des identités entre polynômes.

En remplaçant a par $-a$ et en faisant $x=0$ dans (2), on obtient

$$\pi(f)(a)=\pi_0(T_{-a}f)+(T_{-a}f-\tau_{-a}f)(0) \tag{4}$$

autrement dit π est entièrement déterminée par la forme linéaire π_0 et les pseudo-translations.

Proposition 2. *On suppose* $\mathbf{E}$ *isométriquement invariant par translations. Soient* E_0 *et* E *des réalisations de* $\mathbf{E}$, *toutes deux invariantes par translations, et* $f\mapsto f+\pi(f)$ *l'application canonique de* E_0 *dans* E.

Alors, pour tout $f\in E_0$, $\pi(f)$ *est une constante; de plus la forme linéaire continue* π *est invariante par translations.*

Preuve. L'identité (4) s'écrit

$$\pi(f)(x)=\pi_0(\tau_{-x}f),\quad \text{d'où} \tag{5}$$

$$|\pi(f)(x)|\leqq C\|\tau_{-x}f\|_{E_0}$$

$$=C\|f\|_{E_0};$$

$\pi(f)$ est donc une constante $\pi(f)=\pi_0(f)$ et (5) signifie précisément que π_0 est invariante par translations. C.Q.F.D.

Proposition 3. *On suppose* $\mathbf{E}$ *invariant par dilatations et homogène de degré* $m\in\mathbf{R}$ *(i.e.* $\|d_\lambda u\|_{\mathbf{E}}=\lambda^{-m}\|u\|_{\mathbf{E}}$, *pour tout* $\lambda>0$*).*

(i) *Si* $m\notin\mathbf{N}$, $\mathbf{E}$ *admet au plus une réalisation invariante par dilatations.*

(ii) *On suppose* $m\in\mathbf{N}$. *Soient* E_0 *et* E *des réalisations de* $\mathbf{E}$, *toutes deux invariantes par dilatations, et* $f\mapsto f+\pi(f)$ *l'application canonique de* E_0 *dans* E; *on a alors* $\pi(f)(x)=\sum_{|\alpha|=m}\pi_\alpha(f)x^\alpha$ *et* $\pi_\alpha(d_\lambda f)=\lambda^{-m}\pi_\alpha(f)$ $(\forall\lambda>0)$.

Preuve. La relation (3) s'écrit

$$d_\lambda(\pi(f)) = \pi(d_\lambda f);$$

d'où, pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^n$,

$$\pi_\alpha(d_\lambda f) = \lambda^{-|\alpha|}\,\pi_\alpha(f).$$

L'hypothèse d'homogénéité entraîne

$$|\pi_\alpha(f)| \leqq C_\alpha \lambda^{|\alpha|-m}\|f\|_{E_0} \quad (\forall\lambda>0)$$

et $\pi_\alpha(f)=0$ pour $|\alpha|\neq m$. C.Q.F.D.

II. Réalisations usuelles des espaces de Besov

On se donne, une fois pour toutes, une partition dyadique de l'unité

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\psi(2^j\xi) = 1 \quad (\forall\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}),$$

où $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ est portée par la couronne $\frac{1}{2}\leqq|\xi|\leqq 2$. La fonction

$$\varphi(\xi) = 1-\sum_{j\geqq 1}\psi(2^{-j}\xi)$$

est C^∞, portée par $|\xi|\leqq 2$, égale à 1 sur $|\xi|\leqq 1$. On désigne par Δ_j $(j\in\mathbf{Z})$ et S_0 les opérateurs définis, sur $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, par

$$(\Delta_j f)^\wedge(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi), \quad (S_0 f)^\wedge(\xi) = \varphi(\xi)\hat{f}(\xi).$$

On a $\Delta_j f=0$ pour tout $f\in\mathscr{P}$, de sorte que Δ_j opère également sur $\mathscr{S}_0'$; on a enfin

$$u = \sum_{j\in\mathbf{Z}}\Delta_j u \quad (\forall u\in\mathscr{S}_0'),$$

$$f = S_0 f+\sum_{j\geqq 1}\Delta_j f \quad (\forall f\in\mathscr{S}'),$$

les séries convergeant respectivement dans $\mathscr{S}_0'$ et $\mathscr{S}'$.

L'espace de Besov homogène $\dot{B}^{s,q}_p(\mathbf{R}^n)$ $(s\in\mathbf{R},\ p, q\in[1,\infty])$ est le sous-espace de $\mathscr{S}_0'$ défini par

$$\left\|(2^{js}\|\Delta_j u\|_p)_{j\in\mathbf{Z}}\right\|_{l^q} < +\infty.$$

L'espace de Besov inhomogène $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ est le sous-espace de $\mathscr{S}'$ défini par

$$\|S_0 f\|_p + \left\|(2^{js}\|\Delta_j f\|_p)_{j\geqq 1}\right\|_{l^q} < +\infty.$$

L'espace de Sobolev $\dot{H}_p^s(\mathbf{R}^n)$ $(s\in\mathbf{R},\ p\in]1, +\infty[)$ est défini par la condition

$$\left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} 4^{js}|\Delta_j f|^2\right)^{1/2}\in L^p,$$

et sa version inhomogène H_p^s par $S_0 f\in L^p$ et

$$\left(\sum_{j\geqq 1} 4^{js}|\Delta_j f|^2\right)^{1/2}\in L^p.$$

Tous ces espaces sont isométriquement invariants par translations; de plus, quitte à les renormer, $\dot{H}_p^s$ et $\dot{B}_p^{s,q}$ sont homogènes de degré $s-\dfrac{n}{p}$.

Quand il ne sera pas nécessaire de les distinguer on notera $\dot{E}_p^s$ indifféremment $\dot{H}_p^s$ ou $\dot{B}_p^{s,p}$ (même convention pour les versions inhomogènes); on utilisera systématiquement l'injection canonique $\dot{E}_p^s\subset\dot{B}_p^{s,\infty}$.

Si $u\in\mathscr{S}_0'$ la série $\sum_{j\geqq 1}\Delta_j u$ converge dans $\mathscr{S}'$. Notons Ru sa somme dans $\mathscr{S}'$; alors R envoie $\dot{E}_p^s$ dans E_p^s. $u-Ru$ est la classe, modulo $\mathscr{P}$, d'une fonction analytique de type exponentiel; c'est en spécifiant le comportement, en zéro ou à l'infini, de cette fonction, qu'on obtiendra, le plus souvent, la réalisation $\sigma(u)$.

Construire une réalisation de $\dot{E}_p^s$ revient à mettre en évidence un sous-espace E_0 de $\mathscr{S}'$ tel que:

1°) $[E_0]\subset\dot{E}_p^s$;

2°) Toute classe $u\in\dot{E}_p^s$ contient une et une seule distribution $f\in E_0$;

3°) L'application $u\mapsto f$ ainsi définie est continue de $\dot{E}_p^s$ dans $\mathscr{S}'$.

La propriété 1°) sera toujours imposée a priori dans la définition de E_0; la propriété 3°) résultera immédiatement de la construction de f à partir de u.

Finalement, seule la seconde propriété nous donnera (un peu) de travail.

1. *Le cas* $s=\dfrac{n}{p}$, $p<+\infty$, $q=1$.

C'est de loin le cas le plus simple. En effet l'inégalité $\|\Delta_j u\|_\infty\leqq C2^{jn/p}\|\Delta_j u\|_p$ entraîne aussitôt que la série

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\Delta_j u$$

converge normalement dans C_0. Comme on a évidemment $C_0\cap\mathscr{P}=\{0\}$, on est amené à choisir, pour $\dot{B}_p^{n/p,1}$ $(p<\infty)$, la réalisation

$$E_0 = \{f\in C_0/[f]\in\dot{B}_p^{n/p,1}\}. \tag{6}$$

2. *Le cas* $s=0$, $p=+\infty$, $q=1$.

$\dot{B}_\infty^{0,1}$ contient des fonctions analytiques ne tendant pas vers 0 à l'infini, par exemple la fonction $\sin x_1$. Cependant $\sin\lambda x_1$ tend vers 0 au sens des distributions, quand $\lambda \to \infty$. Cette remarque se généralise aux éléments (convenablement réalisés) de $\dot{B}^{0,1}_{\infty}$:

Définition. Une distribution f tend faiblement vers 0 à l'infini si $d_\lambda f$ tend vers 0, dans $\mathscr{D}'$, quand λ tend vers 0. L'ensemble de ces distributions est noté $\tilde{C}_0$.

Lemme. *Toute fonction bornée, à spectre compact ne contenant pas l'origine, tend faiblement vers* 0 *à l'infini.*

Preuve. Soit f une telle fonction, $\theta \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ égale à 1 sur le support de $\hat{f}$. Soit

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_n = 1$$

une partition C^∞ de la sphère unité, telle que ξ_j ne s'annule pas sur le support de ϱ_j. On définit enfin les fonctions bornées f_j par

$$\hat{f}_j(\xi) = \varrho_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)(i\xi_j)^{-1}\theta(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Alors $f = \sum_{j=1}^n \partial_j f_j$ et, pour $g \in \mathscr{D}$, on a

$$\langle d_\lambda f, g\rangle = \lambda \sum_{j=1}^n \langle \partial_j(d_\lambda f_j), g\rangle$$

$$= -\lambda \sum_{j=1}^n \langle d_\lambda f_j, \partial_j g\rangle,$$

d'où

$$|\langle d_\lambda f, g\rangle| \leqq \lambda \sum_{j=1}^n \|f_j\|_\infty \|\partial_j g\|_1. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Si $u \in \dot{B}^{0,1}_{\infty}$, la série $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \Delta_j u$ converge normalement dans L^∞; désignons par f sa somme. Nous allons vérifier que f tend vers 0, faiblement, à l'infini.

Pour $g \in \mathscr{D}$, on a

$$|\langle d_\lambda f, g\rangle| \leqq \left(\sum_{|j|>N} \|\Delta_j u\|_\infty\right)\|g\|_1 + \left|\sum_{|j|\leqq N} \langle d_\lambda(\Delta_j u), g\rangle\right|;$$

on choisit N assez grand pour que le premier terme soit inférieur à $\varepsilon/2$, puis on applique le lemme à la fonction $\sum_{|j|\leqq N} \Delta_j u$. C.Q.F.D.

Considérons maintenant un polynôme $P = \sum_{|\alpha|\leqq N} a_\alpha x^\alpha$ tendant vers 0, faiblement, à l'infini. Fixons $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et choisissons $g \in \mathscr{D}$ de sorte que $\int x^\beta g(x)\,dx = \delta_{\alpha\beta}$. Alors

$$a_\alpha \lambda^{-|\alpha|} = \int P\left(\frac{x}{\lambda}\right) g(x)\,dx \to 0 \quad (\lambda \to 0),$$

d'où $a_\alpha = 0$ $(\forall \alpha)$ et $P = 0$.

Finalement la réalisation cherchée pour $\dot{B}_{\infty}^{0,1}$ sera

(7) $$E_0 = \{f\in\tilde{C}_0/[f]\in\dot{B}_{\infty}^{0,1}\}.$$

3. *Le cas* $s<n/p$.

Si $u\in\dot{E}_p^s\left(s<\dfrac{n}{p}\right)$, on a aussitôt $\sum_{j\leq 0}\Delta_j u\in\dot{B}_p^{n/p,1}$, de sorte que $u-[Ru]$ admet un représentant tendant faiblement vers 0 à l'infini (et même dans C_0, pour $p<+\infty$!).

Nous allons vérifier l'estimation

(8) $$\|d_\lambda(Ru)\|_{E_p^s}\leqq C\lambda^{(n/p)-s}\|u\|_{\dot{E}_p^s}\quad(\lambda\leqq 1);$$

il en résultera que Ru appartient aussi à $\tilde{C}_0$.

Preuve de (8): Choisissons $N\in\mathbf{N}$ tel que $\lambda^{-1}\sim 2^N$; alors $d_\lambda(\Delta_j u)$ a son spectre dans une couronne dyadique $|\xi|\sim 2^{N+j}$, d'où

$$\|d_\lambda(Ru)\|_{B_p^{s,q}}\leqq C\big(\textstyle\sum_{j\geq 1}2^{(j+N)sq}\|d_\lambda(\Delta_j u)\|_p^q\big)^{1/q},$$

$$\|d_\lambda(Ru)\|_{H_p^s}\leqq C\big\|\big(\textstyle\sum_{j\geq 1}4^{(j+N)s}|d_\lambda(\Delta_j u)|^2\big)^{1/2}\big\|_p,$$

inégalités qui entraînent aussitôt (8).

Finalement $\dot{E}_p^s$ admettra pour réalisation

(9) $$E_0 = \{f\in\tilde{C}_0/[f]\in\dot{E}_p^s\}.$$

4. *Le cas* $s-\dfrac{n}{p}\in\mathbf{R}^+\setminus\mathbf{N}$, *ou* $s-\dfrac{n}{p}\in\mathbf{N}^*$ *et* $q=1$.

Soit $m=\left[s-\dfrac{n}{p}\right]$. Si $u\in\dot{E}_p^s$, la série

$$\textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\Delta_j u(x)-\sum_{|\alpha|\leqq m}\Delta_j u^{(\alpha)}(0)\dfrac{x^\alpha}{\alpha!}\right)$$

converge, uniformément sur tout compact, ainsi que les séries dérivées, jusqu'à l'ordre m. La somme de cette série — notons-la f — vérifie les conditions:

(10) $$\begin{cases}-f \text{ de classe } C^m;\\ -f^{(\alpha)}(0)=0 \quad\text{pour}\quad |\alpha|\leqq m;\\ -\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}|x|^{(n/p)+m-s}|f^{(\alpha)}(x)|<+\infty \quad\text{pour}\quad |\alpha|=m;\\ -[f]\in\dot{E}_p^s.\end{cases}$$

Il est clair que 0 est le seul polynôme qui satisfait (10); l'ensemble des fonctions f qui vérifient (10) constitue donc une réalisation de $\dot{E}_p^s$.

5. *Le cas* $s-\frac{n}{p}\in \mathbf{N}$, $q>1$.

La réalisation obtenue dans le cas précédent reposait sur le plongement «à la Sobolev» $\dot{E}_p^s\subset\dot{B}_\infty^{s-n/p,\infty}$; on se ramenait ainsi à réaliser l'espace de Hölder homogène $\dot{B}_\infty^{t,\infty}$ pour t positif, non entier.

Pour t entier les espaces de Hölder deviennent des classes de Zygmund et les difficultés commencent.

Nous étudierons d'abord l'espace de Bloch $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$.

Si $u\in\dot{B}_\infty^{0,\infty}$, $\sum_{j\leqq 0}\Delta_j u$ appartient encore à $\dot{B}_\infty^{\varepsilon,\infty}$ pour tout $\varepsilon>0$; prenons $\varepsilon=\frac{1}{2}$, pour fixer les idées.

Désignons par F l'espace des fonctions continues g telles que

$$\sup_{x\neq 0}|x|^{-1/2}|g(x)|<+\infty.$$

On choisit par ailleurs une fonction $\varkappa\in\mathcal{D}$, positive, portée par la couronne $\frac{1}{2}\leqq|x|\leqq 1$, telle que $\int\varkappa(x)\,dx=1$. Nous allons voir que

$$E_0=\{f\in F+B_\infty^{0,\infty}/[f]\in\dot{B}_\infty^{0,\infty}\quad \text{et}\quad \langle f,\varkappa\rangle=0\}$$

est une réalisation de $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$.

En effet si $P\in\mathcal{P}\cap E_0$, alors $P=S_0P\in F+L^\infty$, d'où $P=Cte$; la condition $\langle P,\varkappa\rangle=0$ entraîne $P=0$.

Si $u\in\dot{B}_\infty^{0,\infty}$, alors

$$g(x)=\sum_{j\leqq 0}(\Delta_j u(x)-\Delta_j u(0))$$

est un élément de F. $f=g+Ru-\langle g+Ru,\varkappa\rangle$ est donc un élément de E_0 tel que $[f]=u$. C.Q.F.D.

Passons au cas général de $\dot{E}_p^s$, avec $s=\frac{n}{p}+m$ ($m\in\mathbf{N}$).

Si $u\in\dot{E}_p^s$, la série

$$\sum_{j\leqq 0}\Big(\Delta_j u(x)-\sum_{|\alpha|\leqq m}\Delta_j u^{(\alpha)}(0)\frac{x^\alpha}{\alpha!}\Big)+\sum_{j\geqq 1}\Delta_j u(x)$$

converge uniformément sur tout compact, ainsi que les séries dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$; désignons par f_1 la somme de cette série.

Pour $|\alpha|=m$, on a

$$f_1^{(\alpha)}=\sum_{j\leqq 0}(\Delta_j(u^{(\alpha)})-\Delta_j(u^{(\alpha)})(0))+\sum_{j\geqq 1}\Delta_j(u^{(\alpha)})$$

donc $f_1^{(\alpha)}\in F+B_\infty^{0,\infty}$.

On pose finalement

$$f=f_1-\sum_{|\alpha|\leqq m-1}f_1^{(\alpha)}(0)\frac{x^\alpha}{\alpha!}-\sum_{|\alpha|=m}\langle f_1^{(\alpha)},\varkappa\rangle\frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

f vérifie les conditions

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} -f \ \text{ de classe } \ C^{m-1}; \\ -f^{(\alpha)}(0)=0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leqq m-1; \\ -f^{(\alpha)} \in F+B_{\infty}^{0,\infty} \quad \text{pour} \quad |\alpha|=m; \\ -\langle f^{(\alpha)}, \varkappa\rangle = 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha|=m; \\ -[f] \in \dot{E}_p^s. \end{cases}$$

Il est clair que 0 est le seul polynôme qui vérifie ces conditions; l'espace E_0 défini par (11) constitue donc une réalisation de $\dot{E}_p^s$.

III. Invariance par translations

Théorème 1. (i) *Pour* $s<\dfrac{n}{p}$, $q<\infty$, *l'espace* $\dot{E}_p^s$ *admet une et une seule réalisation invariante par translations; il en est de même pour* $\dot{B}_p^{n/p,1}$.

(ii) *Pour* $s>\dfrac{n}{p}$, *l'espace* $\dot{E}_p^s$ *n'admet aucune réalisation invariante par translations; il en est de même pour* $\dot{B}_p^{n/p,q}$ $(q>1)$ *et pour* $\dot{H}_p^{n/p}$.

Preuve. (i) La réalisation de $\dot{E}_p^s$ définie par (7) (resp. (6)) est évidemment invariante par translations. Pour montrer l'unicité de E_0, on va utiliser la proposition 2. Soit π une forme linéaire continue, invariante par translations, sur E_0, ou, ce qui revient au même, sur $\dot{E}_p^s$.

Soit $\tilde{\psi} \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ une fonction égale à 1 sur la couronne $\frac{1}{2} \leqq |\xi| \leqq 2$ et $\tilde{\Delta}_j$ l'opérateur de symbole $\tilde{\psi}(2^{-j}\xi)$.

$\pi \circ \tilde{\Delta}_j$ est une forme linéaire continue sur L^p, elle-même invariante par translations; on a donc $\pi \circ \tilde{\Delta}_j = 0$ pour $p>1$ et

$$\pi(\tilde{\Delta}_j(f)) = c_j \int f(x)\,dx \quad (\text{pour } p=1).$$

Si $u \in \dot{E}_p^s$, on a $\pi(\Delta_j u) = \pi(\tilde{\Delta}_j(\Delta_j u)) = 0$ dans les deux cas.

Enfin — compte-tenu de $q<+\infty$ — u est la limite dans $\dot{E}_p^s$ de $\sum_{|j| \leqq N} \Delta_j u$ quand $N \to \infty$; on a donc encore $\pi(u)=0$. C.Q.F.D.

(ii) Soit $m=\left[s-\dfrac{n}{p}\right] \in \mathbf{N}$. Soit E_0 la réalisation de $\dot{E}_p^s$ définie respectivement par (10) $\left(\text{cas } s-\dfrac{n}{p} \text{ non entier}\right)$ et (11) $\left(\text{pour } m=s-\dfrac{n}{p}\right)$. Les pseudo-translations de

E_0 s'écrivent, respectivement,

$$T_a f(x) = f(x-a) - \sum_{|\alpha| \leqq m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(-a),$$

$$T_a f(x) = f(x-a) - \sum_{|\alpha| \leqq m-1} f^{(\alpha)}(-a) \frac{x^\alpha}{\alpha!} - \sum_{|\alpha|=m} \langle \tau_a f^{(\alpha)}, \varkappa \rangle \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Supposons que $\dot{E}_p^s$ admette une réalisation E, invariante par translations, et désignons par $f \mapsto f+\pi(f)$ l'isomorphisme canonique de E_0 sur E. L'identité (4) conduit à

$$\pi(f)(x) = \pi_0(T_{-x} f) - f(x) \quad \left(s > \frac{n}{p}\right), \tag{12}$$

$$\pi(f)(x) = \pi_0(T_{-x} f) - \langle f, \tau_x \varkappa \rangle \quad \left(s = \frac{n}{p}\right). \tag{13}$$

Examinons successivement les cas $s > \frac{n}{p}$ et $s = \frac{n}{p}$.

1. Pour $s > \frac{n}{p}$, la relation (12) s'interprète en disant que f est congrue, modulo $\mathscr{P}$, à une fonction bornée; on va contredire (12) en construisant $f \in E_0$ telle que

$$f(x) \approx |x|^\gamma \quad (|x| \to +\infty),\ \gamma \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}. \tag{14}$$

Choisissons γ positif, non entier, tel que $\gamma < s - \frac{n}{p}$, et $\gamma > m$ quand $s - \frac{n}{p}$ n'est pas entier.

Soit θ une fonction C^∞ portée par $|x| \leqq 2$; telle que $-1 \leqq \theta \leqq 0$ et $\theta(x) = -1$ pour $|x| \leqq 1$.

Alors $2^{j(s-n/p)} \theta(2^{-j} x)$ est un (s, p)-atome porté par la boule $|x| \leqq 2^{j+1}$, suivant la terminologie de Frazier et Jawerth [2];

$$u(x) = \sum_{j \geqq 0} 2^{\gamma j} \theta(2^{-j} x)$$

est donc un élément de $\dot{B}_p^{s,1}$ et, a fortiori, de $\dot{E}_p^s$. Posons

$$f(x) = \sum_{j \geqq 0} 2^{\gamma j} \left(1 + \theta(2^{-j} x)\right);$$

il s'agit d'une somme localement finie; f est donc une fonction C^∞, nulle pour $|x| \leqq 1$, vérifiant évidemment (14). Les inégalités

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leqq C_\alpha \sum_{2^j < |x|} 2^{(\gamma - |\alpha|) j}$$

entraînent, dans le cas $s-\frac{n}{p}\notin \mathbf{N}$,

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leqq C|x|^{\gamma-m} \quad (|x| \geqq 1,\ |\alpha| = m)$$

et, dans le cas $s-\frac{n}{p}=m$, $f^{(\alpha)}\in L^\infty$ pour $|\alpha|=m$.

Enfin $[f]=u\in \dot{E}^s_p$; de sorte que f est bien un élément de E_0. C.Q.F.D.

2. Quand $s=\frac{n}{p}$ et $f\in E_0$, $\langle f, \tau_x\varkappa\rangle$ croît au plus comme $|x|^{1/2}$ quand $|x|\to\infty$; la relation (13) entraîne alors $\pi(f)=Cte$ et l'existence de $C>0$ tel que

$$(15) \qquad |\langle f, \tau_x\varkappa\rangle| \leqq C\|f\|_{E_0} \quad (\forall x\in\mathbf{R}^n).$$

Nous allons construire une fonction $f\in E_0$ qui contredise (15).

Soit $\chi\in\mathcal{D}$, portée sur $|x|\leqq 2$, égale à -1 pour $|x|\leqq 1$, telle que $\int \chi(x)\,dx=0$ (cette condition n'est indispensable que dans le cas $p=+\infty$).

$\chi(2^{-j}x)$ est un $\left(\frac{n}{p}, p\right)$-atome porté par la boule $|x|\leqq 2^{j+1}$;

$$u(x) = \sum_{j\geqq 1} j^{r-1}\chi(2^{-j}x)$$

est donc un élément de $\dot{B}^{n/p,q}_p$ dès que $r<1-\frac{1}{q}$; c'est également un élément de $\dot{H}^{n/p}_p$, si on fait $q=\inf(p, 2)$ (voir [4]). La condition $q>1$ permet de choisir $r>0$. La fonction

$$(16) \qquad f(x) = \sum_{j\geqq 1} j^{r-1}(1+\chi(2^{-j}x))$$

est C^∞, nulle pour $|x|\leqq 2$, et vérifie

$$f(x) \approx (\operatorname{Log}|x|)^r \quad (|x| \to +\infty).$$

Enfin $[f]=u\in \dot{E}^{n/p}_p$. f est donc un élément de E_0 tel que $\langle f, \tau_x\varkappa\rangle\approx(\operatorname{Log}|x|)^r$ pour $|x|\to\infty$. C.Q.F.D.

IV. Invariance par dilatations

Théorème 2. (i) *Pour* $s-\frac{n}{p}\notin\mathbf{N}$ *l'espace* $\dot{E}^s_p$ *admet une et une seule réalisation invariante par dilatations.*

(ii) *Pour* $s-\frac{n}{p}\in\mathbf{N}$ *et* $q>1$ *l'espace* $\dot{B}^{s,q}_p$ *n'admet aucune réalisation invariante par dilatations. Il en est de même pour* $\dot{H}^s_p$.

(iii) *L'espace* $\dot{B}_p^{s,1}$ $\left(s-\frac{n}{p}\in\mathbf{N}\right)$ *admet une infinité de réalisations invariantes par dilatations.*

Preuve. (i) Pour $s-\frac{n}{p}\notin\mathbf{N}$ la réalisation de $\dot{E}_p^s$ définie respectivement par (9) et (10) est invariante par dilatations; l'unicité découle de la proposition 3.

(ii) Soit $s-\frac{n}{p}=m\in\mathbf{N}$ et E_0 la réalisation de $\dot{E}_p^s$ définie par (11). Les pseudo-dilatations de E_0 s'écrivent

$$D_\lambda f(x)=f\left(\frac{x}{\lambda}\right)-\lambda^{-m}\sum_{|\alpha|=m}\langle d_\lambda(f^{(\alpha)}),\varkappa\rangle\frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

L'identité (3) devient donc

$$d_\lambda(\pi(f))=\pi(D_\lambda f)-\lambda^{-m}\sum_{|\alpha|=m}\langle d_\lambda(f^{(\alpha)}),\varkappa\rangle\frac{x^\alpha}{\alpha!};$$

en prenant les coefficients d'ordre α, $|\alpha|=m$, on obtient

$$\pi_\alpha(f)=\lambda^m\pi_\alpha(D_\lambda f)-\frac{1}{\alpha!}\langle d_\lambda(f^{(\alpha)}),\varkappa\rangle,$$

d'où l'estimation

$$|\langle d_\lambda(f^{(\alpha)}),\varkappa\rangle|\leqq C\|f\|_{E_0}\quad(|\alpha|=m). \tag{17}$$

Choisissons r comme dans la preuve du Théorème 1. Soit $\omega\in\mathcal{D}$ une fonction portée par $|x|\leqq 2$, égale à $-x_1^m$ pour $|x|\leqq 1$, telle que $\int\omega(x)\,dx=0$.

$2^{jm}\omega(2^{-j}x)$ étant un $\left(\frac{n}{p}+m,p\right)$-atome porté par la boule $|x|\leqq 2^{j+1}$,

$$v(x)=\sum_{j\geqq 1}j^{r-1}2^{jm}\omega(2^{-j}x)$$

est un élément de $\dot{E}_p^s$. La fonction

$$g(x)=\sum_{j\geqq 1}j^{r-1}\left(x_1^m+2^{jm}\omega(2^{-j}x)\right)$$

est C^∞, portée par $|x|\geqq 2$. $\frac{\partial^m g}{\partial x_1^m}$ n'est autre que la fonction f définie en (16); on a donc $g\in E_0$.

Soit $c>0$ tel que $\varkappa(x)\geqq c$ pour $\frac{2}{3}\leqq|x|\leqq\frac{3}{4}$; pour $\lambda>0$, assez petit, on a

$$\begin{aligned}\int f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\varkappa(x)\,dx &\geqq c\int_{2/3\leqq|x|\leqq 3/4} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx\\ &\geqq c'\int_{2/3\leqq|x|\leqq 3/4}\left(\operatorname{Log}\frac{|x|}{\lambda}\right)^r dx\\ &\geqq c''\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\lambda}\right)^r,\end{aligned}$$

et cela contredit (17).

(iii) Pour $m\in\mathrm{N}$, $\dot{B}_p^{(n/p)+m,1}$ admet une réalisation (décrite par (10)) invariante par dilatations.

Nous allons voir qu'il existe une infinité de formes linéaires continues π sur $\dot{B}_p^{(n/p)+m,1}$, telles que

$$\pi(d_\lambda u)=\lambda^{-m}\pi(u); \tag{18}$$

cela donnera une infinité de réalisations invariantes par dilatations.

Si π vérifie (18), la restriction de π à $\mathscr{S}_0$ est une distribution homogène de degré $-n-m$.

Soit Ω une fonction C^∞ sur la sphère unité; définissons la distribution tempérée v par

$$\hat{v}(\xi)=|\xi|^m\Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\quad(\xi\neq 0);$$

la fonction $h\in\mathscr{S}$ est définie par $\hat{h}(\xi)=\hat{v}(\xi)\psi(\xi)$. Alors

$$\Delta_j v(x)=2^{j(n+m)}h(2^j x)$$

d'où

$$\|\Delta_j v\|_{p'}=2^{j(m+(n/p))}\|h\|_{p'}\quad\text{et}$$

$$v\in\dot{B}_{p'}^{-m-(n/p),\infty};$$

ce dernier espace n'est autre que le dual de $\dot{B}_p^{m+(n/p),1}$; la forme linéaire $f\mapsto\langle v,f\rangle$ se prolonge donc en une forme linéaire π vérifiant (18). C.Q.F.D.

Remarque. On montre classiquement l'inclusion

$$\dot{B}_p^{n/p,\infty}\subset\mathrm{BMO}\quad(p<+\infty);$$

de sorte qu'on peut réaliser $\dot{B}_p^{(n/p)+m,q}$ en remplaçant $F+B_\infty^{0,\infty}$ par BMO. Cette modification ne simplifie pas notablement les preuves des théorèmes; de plus elle obligerait à traiter à part le cas $p=+\infty$.

Bibliographie

1. Bourdaud, G., *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien,* Publ. Math. Univ. Paris VII, 1987.
2. Frazier, M. et Jawerth, B., Decomposition of Besov Spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), 777—799.
3. Lemarie, P. G., Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 35: 4 (1985), 175—187.
4. Peetre, J., *New thoughts on Besov spaces,* Duke Univ. Math. Series 1, Dep. Math., Duke Univ., Durham, N. C., 1976.

Received September 8, 1986, in revised form April 15, 1987.

G. Bourdaud
Université de Paris-Sud
Unité Associée 757
Analyse Harmonique
Mathématique (Bât. 425)
91405 ORSAY Cedex
France

et

Université Paris VII
U.F.R. de Mathématique
Tour 45—55, 5ème étage
2, Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
France