Glatte Holomorphiegebiete mit plurisubharmonischer innerer Randfunktion sind Banach—Stein

Peter Pflug

0. In [4] wurde von Serre gefragt, ob der Totalraum einer lokal trivialen holomorphen Faserung mit Stein'scher Basis und Stein'scher Faser wieder Stein'sch ist. Positiv wird dies in [1a] von G. Fischer unter der Zusatzbedingung beantwortet, daß die Faser ein Banach—Stein-Raum ist. Ob nun jedes Holomorphiegebiet im $\mathbf{C}^n$ Banach—Stein ist, ist bisher ungeklärt. Nur im Fall $n=1$ konnte von Hirschowitz [2], Sibony [5] und Siu [6] gezeigt werden, daß jedes Gebiet im $\mathbf{C}^1$ Banach—Stein ist. In dieser Note soll gezeigt werden (vgl. Korollar zu Satz 3), daß auch jedes glatte Holomorphiegebiet im $\mathbf{C}^n$ mit plurisubharmonischer innerer Randfunktion Banach—Stein ist.

1. In [3a, 3b] wurde vom Autor folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Ist G ein beschränktes Holomorphiegebiet im $\mathbf{C}^n$, so gibt es zu jeder Randpunktfolge $\{z^\nu\}\subset G$ eine auf G holomorphe Funktion f mit:*

a) $\sup|f(z^\nu)| = \infty$,

b) $\sup\limits_{z\in G}|f(z)|\Delta_G^{n+1}(z) < \infty$;

dabei sind $\Delta_G(z):=\sup\{r\in\mathbf{R}_{>0};\ U(z,r)\subset G\}$ der euklidische Randabstand in G und $U(z,r)$ die Kugel um z mit Radius r.

Benutzt man Satz 1 zusammen mit den Resultaten von G. Fischer [1b], so gilt:

Satz 2. *Ein beschränktes Holomorphiegebiet G im $\mathbf{C}^n$ ist Banach—Stein, falls zu jedem holomorphen Automorphismus $\Phi\colon G\to G$ eine positive Konstante C so existiert, daß auf G folgende Ungleichung gilt:*

$$\Delta_G(z)\leqq C\Delta_G(\Phi(z)).$$

2. Wir definieren:

Definition 1. Ein *glattes Gebiet mit plurisubharmonischer innerer Randfunktion* ist ein beschränktes Gebiet G im $\mathbf{C}^n$, zu dem es auf einer geeigneten Umgebung $U=U(\partial G)$ eine C^2-Funktion $\varphi\colon U\to\mathbf{R}$ gibt, für die gilt:

a) $G\cap U=\{z\in U;\ \varphi(z)<0\}$,

b) $\operatorname{grad}\varphi(z)\neq 0$ für alle $z\in U$,

c) φ ist plurisubharmonisch auf $G\cap U$.

Es soll nun gezeigt werden, daß für diese Gebiete die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt ist. Es gilt:

Satz 3. *Sei $G\subset\mathbf{C}^n$ ein glattes Gebiet mit plurisubharmonischer innerer Randfunktion. Dann gilt für jeden holomorphen Automorphismus $\Phi\colon G\to G$ mit einer geeigneten positiven Konstanten C auf G die Ungleichung:*

$$\Delta_G(z)\leqq C\Delta_G(\Phi(z)).$$

Beweis. Der Beweis benutzt im wesentlichen eine Idee von Hopf zum Beweis des Maximumprinzips für elliptische Differentialoperatoren. Sei also (U,φ) das Datum von G laut Definition 1; und sei $\Phi\colon G\to G$ ein holomorpher Automorphismus. Dann findet man eine Umgebung $V=V(\partial G)$ des Randes von G derart, daß $\Phi(V\cap G)\subset\subset U\cap G$ gilt; also ist $\varphi\circ\Phi$ eine auf $G\cap V$ plurisubharmonische negative Funktion, die sich durch Null stetig auf $\partial G\cup(V\cap G)$ fortsetzen läßt.

Da G einen glatten C^2-Rand besitzt, findet man eine positive Zahl $\varepsilon<1$, für die gilt:

(α) hat ein Punkt $z\in G$ einen Randabstand $\Delta_G(z)\leqq\varepsilon$, so trifft die abgeschlossene Kugel $\overline{U(z,\Delta_G(z))}$ den Rand ∂G nur in einem Punkt, und

(β) es gilt: $U(z;\Delta_G(z))\subset V\cap G$.

Also folgt für einen festen Punkt $z^0\in G$ mit $\Delta_G(z^0)=\varepsilon$:

$$\overline{U(z^0,\varepsilon)}\cap\partial G=:\{\hat{z}^0\}.$$

Damit erhält man:

(γ) $\varphi\circ\Phi|_{\overline{U(z^0,\varepsilon)}}$ ist stetig und in $U(z^0,\varepsilon)$ subharmonisch (d. h. $\Delta(\varphi\circ\Phi)\geqq 0$),

(δ) für alle Punkte $w\in\overline{U(z^0,\varepsilon)}-\{\hat{z}^0\}$ gilt: $\varphi\circ\Phi(w)<0=\varphi\circ\Phi(\hat{z}^0)$.

Mit $m:=\sup\{\varphi\circ\Phi(z);\ z\in G$ mit $3\varepsilon/2\geqq\Delta_G(z)\geqq\varepsilon/2\}<0$, $\alpha:=4n/\varepsilon^2+1$, $h(z):=e^{-\alpha|z|^2}-e^{-\alpha\varepsilon^2}$ und $M:=\sup\limits_{|z|<\varepsilon}h(z)$ betrachte man auf der Kugelschale $\overline{U(z^0,\varepsilon)}-U(z^0,\varepsilon/2)$ folgende Funktion:

$$\Psi(z):=\varphi\circ\Phi(z)+\frac{|m|}{2M}h(z-z^0),$$

für die man verifiziert:

1. $\Psi|_{\partial U(z^0, \varepsilon)} \equiv \varphi \circ \Phi|_{\partial U(z^0, \varepsilon)} \leqq 0,$
2. $\Psi|_{\partial U(z^0, \varepsilon/2)} < 0,$
3. $\Delta \Psi > 0$ auf $U(z^0, \varepsilon) - \overline{U(z^0, \varepsilon/2)}.$

Also sieht man, daß Ψ in dieser Kugelschale nicht positiv sein kann, woraus für jeden Punkt w auf der Verbindungsstrecke $[z^0, \hat{z}^0]$ von z^0 nach $\hat{z}^0$ folgt:

$$\frac{m}{2M} \frac{h(w-z^0)}{|w-\hat{z}^0|} \geqq \frac{\varphi \circ \Phi(w)}{|w-\hat{z}^0|} = \frac{\varphi \circ \Phi(w)}{\Delta_G(w)}.$$

Betrachtet man die Normalenableitung der Funktion h, so findet man eine positive Zahl $\delta \leqq \varepsilon$ derart, daß für die Punkte $w \in [z^0, \hat{z}^0]$ mit $\Delta_G(w) \leqq \delta$ folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{|\varphi \circ \Phi(w)|}{\Delta_G(w)} \geqq \frac{|m|}{2M} \alpha^2 \varepsilon e^{-\alpha \varepsilon^2} =: C_1 > 0.$$

Da der Punkt z^0 auf die Konstanten δ und C_1 keinen Einfluß hatte, hat man auf $\{w \in G \cap V; \Delta_G(w) \leqq \delta\}$ folgende Ungleichung erhalten:

$$|\varphi \circ \Phi(w)| \geqq C_1 \Delta_G(w).$$

Außerdem folgt mit dem Mittelwertsatz nahe ∂G auf G

$$|\varphi \circ \Phi(w)| \leqq C_2 \Delta_G(\Phi(w)).$$

Faßt man diese Informationen zusammen und benutzt, daß G beschränkt ist, so findet man eine Konstante C mit der Eigenschaft $C\Delta_G(\Phi(z)) \geqq \Delta_G(z)$ auf G, woraus sofort die Behauptung des Satzes folgt.

Mit dem Satz von Oka—Norguet—Bremermann und Satz 2 folgt dann sofort aus Satz 3:

Korollar. *Jedes glatte Gebiet im* $\mathbf{C}^n$ *mit plurisubharmonischer innerer Randfunktion ist Banach—Stein.*

Bemerkung 1. Statt des hier gegebenen Beweises kann man Satz 3 auch mit Hilfe der Mittelwertsformel für harmonische Funktionen beweisen.

Bemerkung 2. Man kann durch sorgfältigere Argumentation im Beweis zu Satz 3 die Bedingung „C^2-Randfunktion“ ersetzen durch „C^0-Randfunktion plus eine geometrische Bedingung“. Es gilt:

Satz 3'. *Sei G ein beschränktes Gebiet im $\mathbf{C}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *auf einer Umgebung $U=U(\partial G)$ des Randes ∂G von G gibt es eine Lipschitzstetige Funktion $\varphi\colon U\to\mathbf{R}$ mit*

1. $G\cap U=\{z\in U;\ \varphi(z)<0\}$,
2. *φ ist plurisubharmonisch auf $G\cap U$;*

b) *für eine Zahl $\alpha>1$ gilt: zu jeder Zahl $\varepsilon>0$ existiert eine positive Zahl $\beta=\beta(\varepsilon)$, so daß jeder Punkt $z\in G$ mit $\Delta_G(z)<\varepsilon$ auf der Symmetrieachse eines Kegels $K\subset G$ mit Spitze in einem Randpunkt $\tilde{z}\in\partial G$ und Basis in $U(\partial G^\varepsilon, \varepsilon/2)$ liegt, wobei K aus dem Kegel $K_0:=\{z=(x_1+iy_1, \tilde{z})\in\mathbf{C}^n;\ (y_1^2+|\tilde{z}|^2)^{\alpha/2}<x_1<\beta\}$ durch Verschiebung entstanden und $U(\partial G^\varepsilon, \varepsilon/2)$ als $\{z\in G;\ 3\varepsilon/2\geqq\Delta_G(z)\geqq\varepsilon/2\}$ definiert sei.*

Dann ist G Banach—Stein.

Beweis. Man kopiere den Beweis zu Satz 3 mit Hilfe folgender Funktion

$$h(z)=h(x_1+iy_1, \tilde{z})=x_1 e^{C_1 x_1^{\alpha-1}}-C_2|z|^\alpha.$$

Bemerkung 3. Nach Satz 3 ist das Serre-Problem immer dann positiv zu beantworten, wenn die Faser ein glattes Gebiet im $\mathbf{C}^n$ mit plurisubharmonischer innerer Randfunktion ist, was allerdings mit anderen Methoden auch aus der Note von Stehlé [7] folgt.

Literatur

1a. Fischer, G., Fibrés holomorphes au-dessus d'un espace de Stein. *Séminaire sur les espaces analytiques*, Bucarest (1969).

1b. Fischer, G., Hilbert spaces of holomorphic functions on bounded domains, *Manuscripta Math.* **3** (1970), 305—314.

2. Hirschowitz, A., Domaines de Stein et fonctions holomorphes bornés, *Math. Ann.* **213** (1975), 185—193.

3a. Pflug, P., Über polynomiale Funktionen auf Holomorphiegebieten, *Math. Z.* **139** (1974), 133—139.

3b. Pflug, P., Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem, *Lecture Notes in Mathematics* 432 (1975).

4. Serre, J. P., Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Coll. fonct. de plus. var.*, Brüssel (1953).

5. Sibony, N., Fibrés holomorphes et métrique de Carathéodory, *C. R. Acad. Sc. Paris* **279** (1974), Sér. A, 261—264.

6. Siu, Y. T., All plane domains are Banach—Stein, *Manuscripta Math.* **14** (1974), 101—105.

7. Stehlé, J.-L., Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certains fibrés analytiques, *C. R. Acad. Sc. Paris* **279** (1974), 235—238.

Eingegangen am 28. April 1975

Peter Pflug
Universität Kaiserslautern
Mathematik
D-6750 Kaiserslautern
Postfach 3049
Bundesrepublik Deutschland