Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point

M. S. Baouendi* et J. Sjöstrand

0. Introduction et résultats

On considère un opérateur différentiel dans $\mathbf{R}^n$ ($n\geqq 2$) de la forme

$$P_0(x, D) = \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{0.1}$$

où a_α est un polynôme de n variables homogène, de degré $|\alpha|$, à coefficients complexes. On suppose que P_0 est elliptique en dehors de l'origine dans $\mathbf{R}^n$.

Le cas particulier suivant

$$L_{\lambda,\mu} = r^2 \Delta + \mu r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$$

où

$$(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2, \quad r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

a été étudié dans [4]; il a été démontré que pour tous $(\lambda, \mu)\in \mathbf{C}^2$, $L_{\lambda,\mu}$ n'est pas hypoelliptique dans $\mathbf{R}^n$, mais que pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, si $u\in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $L_{\lambda,\mu} u$ est analytique dans Ω, u est aussi analytique dans Ω.

On se propose de généraliser ces résultats à des opérateurs du type (0.1) et même à des opérateurs plus généraux à coefficients analytiques. On désigne par S_{n-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. On a un difféomorphisme naturel

$$S_{n-1}\times \mathbf{R}_+ \simeq \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \tag{0.2}$$

correspondant à prendre des coordonnées polaires. Il résulte de (0.2) le difféomorphisme

$$T^*(S_{n-1})\times \mathbf{R} \simeq T^*(\mathbf{R}^n)_{|S_{n-1}}. \tag{0.3}$$

* Le premier auteur a bénéficié du "N.S.F. Grant 35 825".

Soit $p_0(x, \xi)$ le symbole principal de P_0 défini sur $T^*(\mathbf{R}^n)$, et pour $((\theta, \eta), \zeta) \in \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbf{R}$, soit $q_0(\theta, \eta, \zeta)$ la composition de p_0 avec le difféomorphisme (0.3). La fonction $q_0(\theta, \eta, \zeta)$ est un polynôme homogène de degré m en les variables (η, ζ).

On note

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid \exists (\theta, \eta) \in T^*(S_{n-1}) \setminus \{0\},\ q_0(\theta, \eta, -iz) = 0\} \tag{0.4}$$

$$\Gamma_+ = \Gamma \cap \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}. \tag{0.5}$$

L'ellipticité de P_0 en dehors de l'origine entraîne que Γ et Γ_+ sont des cônes fermés dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ ne rencontrant pas l'axe imaginaire.

On désigne enfin par $\hat{\Gamma}_+$ le cône convexe dans $\{z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$ engendré par Γ_+ et $\mathbf{R}_+$. On introduit maintenant les deux hypothèses suivantes:

$$(H_1)\begin{cases} \text{Il existe des nombres } \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_l \text{ satisfaisant} \\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_l < \dfrac{\pi}{2}, \\ \theta_{j+1} - \theta_j < \dfrac{\pi}{n-1} \quad \text{pour} \quad j = 0, \dots, l-1, \\ \Gamma_+ \subset \bigcup_{j=0}^{l-1} \{z \in \mathbf{C} \mid \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}\}. \end{cases}$$

$$(H_2) \quad \text{Angle } \hat{\Gamma}_+ < \frac{\pi}{n}.$$

On note que (H_2) est plus restricitve que (H_1) et que, pour $n=2$, l'hypothèse (H_1) est toujours vérifiée.

On a pour l'opérateur (0.1):

Théorème 1. *On suppose (H_1) vérifiée. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $P_0 u$ soit analytique dans Ω, alors u est aussi analytique dans Ω.*

Théorème 2. *Sous l'hypothèse (H_1) l'opérateur P_0 est non hypoelliptique dans $\mathbf{R}^n$; plus précisément il existe une distribution T définie dans $\mathbf{R}^n$ non $\mathscr{C}^\infty$ et vérifiant $P_0 T = 0$.*

On considère maintenant un opérateur différentiel P défini dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$ de la forme

$$P(x, D) = P_0(x, D) + \sum_{|\alpha| \leq m} a'_\alpha(x) D^\alpha \tag{0.6}$$

où P_0 est donné par (0.1) et est toujours supposé elliptique en dehors de l'origine, et où les a'_α sont des fonctions analytiques définies dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$ et s'annulant à l'origine au moins à l'ordre $|\alpha|+1$.

On a:

Théorème 3. *On suppose* (H_2) *vérifiée. Toute fonction* $\mathscr{C}^\infty$ u *définie au voisinage de l'origine dans* $\mathbf{R}^n$, *telle que Pu soit analytique, est aussi analytique dans un voisinage de l'origine.*

On note que les conditions (H_1) et (H_2) ne sont pas invariantes sous des changements linéaires de coordonnées. On note d'autre part, à titre d'exemple, que pour l'opérateur

$$(x_1^2+x_2^2)(D_1-iD_2)(D_1+(R+i)D_2),$$

avec $R>2$ $(n=2)$, l'hypothèse (H_2) n'est satisfaite après aucun changement linéaire de variables.

On ignore si les conclusions des théorèmes 1, 2 et 3 restent encore valables sans les conditions restrictives (H_1) et (H_2).

On signale que les théorèmes 1, 2 et 3 s'appliquent en particulier si on suppose que m est pair et que l'on a la factorisation

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha = q(x)\big(A(D)\big)^{m/2}$$

où $A(D)$ est un opérateur elliptique homogène d'ordre 2 à coefficients constants et à symbole réel. En effet, après un changement linéaire de variables, on peut supposer $A(D)=\Delta$, dans ce cas, on a $\Gamma_+=\hat{\Gamma}_+=\mathbf{R}_+$ et (H_1) et (H_2) sont alors satisfaites.

La méthode de démonstration utilisée ici consiste à se ramener, après une transformation de Mellin dans la variable radiale et un certain nombre de réductions techniques, à l'étude de la résolvante d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique sur la sphère.

Il semble qu'il y a peu d'inégalités à priori dans des espaces de Sobolev pour les opérateurs (0.1) et (0.6) permettant de démontrer l'analyticité. D'autre part, l'idée qui pourrait paraître naturelle, de démontrer les théorèmes 1 et 3, au moins en partie, par l'utilisation d'un développement de Taylor à l'origine, échoue. On peut en effet trouver pour $n=2$ un opérateur P_0 du type (0.1), une fonction f analytique au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$ tels qu'il existe une série formelle u, unique à l'addition d'une constante près, vérifiant $P_0u=f$, de plus u est divergente (voir Appendice).

On signale enfin que les méthodes utilisées dans ce travail peuvent aussi servir à démontrer l'analyticité de la solution de certains problèmes aux limites elliptiques dans des domaines ayant des singularités du type conique (par exemple des polygônes dans le plan). Ceci fera l'objet d'un travail ultérieur.

PLAN.

I. Transformation de Mellin et fonctions analytiques

Soit $u \in \mathscr{C}^\infty([0, 1])$, on définit la *transformée de Mellin* de u par:

$$\tilde{u}(z) = \int_0^1 u(r) r^{-z-1}\, dr = \int_{-\infty}^0 u(e^x) e^{-zx}\, dx. \tag{I.1}$$

Il est évident que $\tilde{u}$ est bien définie et est holomorphe dans $\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$. On a

Proposition I.1. *Soit $u \in \mathscr{C}^\infty([0, 1])$; la transformée de Mellin $\tilde{u}$ de u se prolonge en une fonction méromorphe ayant pour seuls pôles les entiers $\geqq 0$. Ces pôles sont simples et le résidu de $\tilde{u}$ en $k \in \mathbf{N}$ est $-u^{(k)}(0)/k!$.*

Démonstration. On observe que la transformée de Mellin de la fonction $r \mapsto r^k$ vaut $(k-z)^{-1}$. D'autre part, si u s'annule à l'ordre k à l'origine, $\tilde{u}$ se prolonge holomorphiquement à $\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z < k\}$. La proposition résulte alors du développement de Taylor de u à l'origine.

Remarque I.1. Si $u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ où la suite (a_k) vérifie

$$|a_k| \leqq \varrho^k \quad \text{avec} \quad 0 \leqq \varrho < 1,$$

on a par intégration terme à terme

$$\tilde{u}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z-k}.$$

Remarque I.2. Il résulte de (I.1) que $\tilde{u}(z)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto Y(-x) u(e^x)$ au point $-iz$ (Y étant la fonction de Heaviside). La transformation de Mellin est donc injective, et même si $\tilde{u}(z)$ est un polynôme en z, la fonction u, étant $\mathscr{C}^\infty$, est identiquement nulle.

Par intégration par parties on a

$$\widetilde{r\frac{\partial u}{\partial r}}(z) = z\tilde{u}(z) + u(1) \tag{I.2}$$

et en itérant (I.2) on obtient pour $N \in \mathbf{N}$

$$\widetilde{\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^N u}(z) = z^N \tilde{u}(z) + \textstyle\sum_{j=0}^{N-1} c_j z^j \tag{I.3}$$

où les coefficients c_j sont des combinaisons linéaires des $u^{(j)}(0)$ pour $0 \leqq j \leqq N-1$.

On a aussi

$$\widetilde{ru}(z) = \tilde{u}(z-1). \tag{I.4}$$

Fonctions Analytiques et Coordonnées Polaires

On considère maintenant une fonction $u \in \mathscr{C}^\infty$ définie au voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Si on introduit les coordonnées polaires (r, θ), $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et $\theta \in S_{n-1}$, on peut écrire le développement de Taylor de u sous la forme

$$u(x) \sim \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(\theta), \tag{I.5}$$

où $u_k \in V_k$, espace des restrictions à S_{n-1} des polynômes homogènes de degré k.

Pour $s \in \mathbf{R}$, on note $H^s(S_{n-1})$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre s sur la sphère S_{n-1}. On a

Proposition I.2. 1°. *Si u est analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$, avec un développement de Taylor de la forme* (I.5), *il existe $M > 0$ tel que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, il existe C_s vérifiant*

$$\|u_k\|_{H^s(S_{n-1})} \leqq C_s M^k \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{I.6}$$

2°. *Inversement, si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k \in V_k$ et vérifie*

$$\|u_k\|_{H^\circ(S_{n-1})} \leqq C M^k \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}, \tag{I.7}$$

où C et M sont indépendants de k, alors la série de Taylor (I.5) *converge au voisinage de l'origine vers une fonction analytique.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition se trouve essentiellement dans [4]. On donne une autre variante ici.

1°. Si u est analytique au voisinage de l'origine, on peut écrire

$$u(x) = \textstyle\sum_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(\theta). \tag{I.8}$$

D'après les inégalités de Cauchy, pour tout $M>1/\varrho$ (ϱ étant le rayon de convergence de la série entière (I.8)), il existe C tel que, pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^n$

$$\left|\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(0)\right| \leqq CM^{|\alpha|}.$$

On obtient alors

$$\sup_{\theta\in S_{n-1}}|u_k(\theta)| \leqq \sum\nolimits_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(0)\right| \leqq C(k+1)^n M^k,$$

ce qui donne (I.6) avec $s=0$ et M arbitraire, $M>1/\varrho$.

Il suffit maintenant de prouver (I.6) pour s entier pair >0. On observe pour cela que l'on a

$$\Delta_\theta = r^2\Delta - r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-(n-1)r\frac{\partial}{\partial r} \tag{I.9}$$

où Δ_θ est le laplacien sur la sphère S_{n-1} et $\Delta=\sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$.

On voit de (I.9) que Δ_θ conserve les fonctions analytiques au voisinage de l'origine et ne diminue pas les rayons de convergence. En appliquant Δ_θ aux deux membres de (I.8) et en utilisant (I.6) avec $s=0$, on obtient que, pour tout $M>1/\varrho$, il existe C_2 tel que l'on ait pour tout $k\in\mathbf{N}$

$$\|\Delta_\theta u_k\|_{H^0(S_{n-1})} \leqq C_2 M^k;$$

par itération on obtient bien (I.6) pour s entier pair >0.

2°. On suppose maintenant que la suite (u_k) vérifie (I.7). On pose $P_k(x)=r^k u_k(\theta)$ avec $x=r\theta$.

Soit B la boule fermée de $\mathbf{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon 1. On a, pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\|P_k\|_{L^2(B)} \leqq C'M^k \tag{I.10}$$

avec $C'=C\times(\text{Aire de } S_{n-1})$.

D'après une inégalité connue sur les polynômes (voir [2] par exemple) il existe $C''>0$ et $\alpha>0$ tels que pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in B}|P_k(x)| \leqq C''k^\alpha\|P_k\|_{L^2(B)}.$$

On obtient alors, à partir de (I.10), l'existence de $M'>0$ tel que, pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in B}|P_k(x)| \leqq M'^{k+1}.$$

On en déduit, par une inégalité du type Bernstein sur les polynômes (voir [3]), l'existence d'un voisinage V de B dans $\mathbf{C}^n$ et de $M''>0$ tels que, pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in V}|P_k(x)| \leqq M''^{k+1}. \tag{I.11}$$

Comme les polynômes P_k sont homogènes de degré k, il résulte que la série $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)$ converge uniformément dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$, ce qui implique l'analyticité de f près de l'origine.

Remarque I.3. On désigne encore par B la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon 1. Soit $u\in\mathscr{C}^\infty(B)$, on considèrera dans la suite la transformée de Mellin de u dans la direction radiale

$$\tilde{u}(z,\theta) = \int_0^1 u(r\theta)r^{-z-1}\,dr$$

avec $x=r\theta$, $\theta\in S_{n-1}$. Il résulte de la proposition (I.1) que $\tilde{u}$ est une fonction méromorphe de z à valeur dans $\mathscr{C}^\infty(S_{n-1})$. Les seuls pôles sont les entiers $\geqq 0$; ils sont simples. Le résidu en $k\in\mathbf{N}$ vaut $-u_k(\theta)$, où u_k est définie dans le développement de Taylor (I.5). Cette remarque et la proposition (I.2) seront utilisées pour montrer l'analycité de u, en estimant les résidus de $\tilde{u}$.

On montre aussi, à l'aide d'un développement de Taylor de u à l'origine, que l'on a pour tout $N\in\mathbf{N}$

$$\tilde{u}(z,\theta) = \sum_{k=0}^{N}\frac{u_k(\theta)}{k-z}+\tilde{u}_N(z,\theta) \tag{I.12}$$

où, pour tout $s\in\mathbf{R}$, $\|\tilde{u}_N(z,\theta)\|_{H^s(S_{n-1})}$ est uniformément bornée dans

$$\{z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z\leqq N+1/2\}.$$

II. Propriétés de la résolvante d'un opérateur elliptique

Soit H un espace de Hilbert. Si T est un opérateur compact dans H, on dit que T est de classe C_p, $p>1$, si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^p < \infty \tag{II.1}$$

où (μ_j) est la suite des valeurs propres de $(TT^*)^{1/2}$ répétées avec leur multiplicité et ordonnées d'une manière décroissante.

Pour k entier >0, vérifiant $k-1\leqq p\leqq k$, on pose

$$\det{}_k(I+T) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j)\exp\left(-\lambda_j+\frac{\lambda_j^2}{2}-\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_j^{k-1}\right) \tag{II.2}$$

où (λ_j) est la suite des valeurs propres de T, répétées avec leur multiplicité et ordonnées d'une manère décroissante.

Il est montré dans [5] que le produit défini par (II.2) est absolument convergent et que

$$\text{(II.3)}\qquad \begin{cases} (z \mapsto \det_k(I+zT)) \text{ est une fonction entière exponentielle} \\ \text{de type } p \text{ (i.e. } |\det_k(I+zT)| \leqq C_1 e^{C_2|z|^p}). \end{cases}$$

Il est aussi montré dans le même ouvrage, qu'il existe C tel que pour tout $z\in\mathbf{C}$

$$\text{(II.4)}\qquad |\det_k(I+zT)| \cdot \|(I+zT)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqq e^{C|z|^p}.$$

On a aussi besoin du résultat suivant sur les fonctions entières exponentielle de type fini.

Soit f une fonction entière exponentielle de type p ($p>1$), de zéros $z_1, z_2, \dots$ $\dots, z_j, \dots$; on suppose $f(0)\neq 0$ et $|z_1|\leqq|z_2|\leqq\dots\leqq|z_j|\leqq\dots$. Alors pour tout $h>p$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $R>0$ tel que

$$\text{(II.5)}\qquad |f(z)| \geqq e^{-|z|^{p+\varepsilon}}$$

pour z dans le complémentaire des disques centrés en z_j et de rayons $|z_j|^{-h}$ et $|z|\geqq R$. On a d'autre part

$$\text{(II.6)}\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z_j|^h} < \infty.$$

Les démonstrations de (II.5) et (II.6) se trouvent par exemple dans [7].

Soit $h>p$ donné, pour $j\in\mathbf{N}$, on désigne par

$$A_j = \{x\in]0, 1[;\ \exists l\in\mathbf{Z}, |x+l-\operatorname{Re} z_j| \leqq |z_j|^{-h}\},$$

on a mes. $A_j \leqq 2|z_j|^{-h}$.

Soit $N\in\mathbf{N}$ tel que

$$\text{(II.7)}\qquad \sum_{j=N}^{\infty} \text{mes.}\, A_j < 1.$$

Un tel N existe d'après (II.6). On note aussi

$$E_N = \{x\in]0, 1[;\ \exists l,\ l\in\mathbf{Z}, \exists j,\ 1\leqq j\leqq N-1,\ x+l = \operatorname{Re} z_j\}.$$

On choisit x_0

$$\text{(II.8)}\qquad x_0\in]0, 1[\diagdown\left\{\bigcup_{j=N}^{\infty} A_j \cup E_N\right\};$$

un tel x_0 existe à cause de (II.7) et du fait que E_N soit un ensemble fini.

Pour tout $j\in\mathbf{Z}$, soit D_j la droite

$$\text{(II.9)}\qquad D_j = \{z\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re} z = x_0+j\}.$$

Il résulte alors de (II.5) et du choix de x_0 que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $C>0$ tel que

$$\text{(II.10)}\qquad |f(z)| \geqq Ce^{-|z|^{p+\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad z\in \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} D_j.$$

On donne maintenant une application de (II.10) à la majoration de la résolvante d'un opérateur de classe C_p.

Proposition II.1. *Soit T un opérateur compact de classe C_p dans un espace de Hilbert H $(p>1)$. Il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $C>0$ vérifiant*

$$\text{(II.11)} \qquad \|(I+zT)^{-1}\| \leqq Ce^{|z|^{p+\varepsilon}} \quad \textit{pour} \quad z \in \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} D_j$$

où D_j est définie par (II.9).

Cette proposition est une conséquence immédiate de (II.4), (II.3) et (II.10).

Voici maintenant une application de la proposition précédente aux systèmes elliptiques.

Proposition II.2. *Soit $\mathscr{A}$ un système carré pseudo-différentiel elliptique d'ordre* 1, *défini sur une variété M, $\mathscr{C}^\infty$ compacte sans bord de dimension $n-1$. On suppose qu'il existe au moins un $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\lambda_0-\mathscr{A}$ soit un isomorphisme de $H^1(M)$ sur $L^2(M)$. Il existe alors $x_0 \in]0, 1[$ tel que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $C>0$ vérifiant*

$$\text{(II.12)} \qquad \|(z-\mathscr{A})^{-1}\|_{\mathscr{L}(H^{-1}(M),\, L^2(M))} \leqq Ce^{|z|^{n-1+\varepsilon}} \quad \textit{pour} \quad z \in \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} D_j$$

avec $D_j = \{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z = x_0+j\}$.

Demonstration. On peut supposer $\lambda_0=0$ (i.e. $\mathscr{A}$ est inversible). On utilise alors la proposition II.1 avec $H=L^2(M)$, $T=\mathscr{A}^{-1}$. Le comportement du spectre de $\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ (voir par exemple [1]) montre que $\mathscr{A}^{-1}$ est de classe C_p pour tout $p>n-1$. Il suffit alors d'appliquer (II.11) en remarquant que l'on a

$$(I-zT)^{-1}\mathscr{A}^{-1} = (\mathscr{A}-z)^{-1}$$

et que $\mathscr{A}^{-1}$ est un isomorphisme de $H^{-1}(M)$ sur $L^2(M)$.

On a encore besoin d'une autre estimation de la résolvante d'un opérateur elliptique.

Soit $\mathscr{A}$, de nouveau, un système carré pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1, défini sur une variété M, $\mathscr{C}^\infty$ compacte sans bord. On désigne par $a(x, \xi)$ la matrice symbole principal de $\mathscr{A}$ positivement homogène de degré 1 et

$$\text{(II.13)} \qquad \Gamma = \bigcup_{(x,\xi)\in T^*M\setminus\{0\}} \{\text{valeurs propres de } a(x, \xi)\}.$$

Comme $\mathscr{A}$ est elliptique, Γ est un cône fermé dans $\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

La proposition suivante se trouve essentiellement dans [6].

Proposition II.3. *Pour tout cône fermé Σ de $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ ne rencontrant pas Γ il existe $C>0$ tel que l'on ait, pour tout $z\in\Sigma$ et $|z|$ assez grand*

(II.14) $$\|(z-\mathscr{A})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(M),\,L^2(M))} \leqq \frac{C}{|z|}$$

et

(II.15) $$\|(z-\mathscr{A})^{-1}\|_{\mathscr{L}(H^{-1}(M),\,L^2(M))} \leqq C.$$

Réciproquement, si (II.14) *ou* (II.15) *a lieu sur un cône fermé Σ de* $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ *et $|z|$ assez grand, alors $\Gamma\cap\Sigma=\emptyset$.*

III. Le théorème de Phragmén—Lindelöf

On rappelle ici, sous une forme qui sera utilisée par la suite, le théorème classique, de Phragmén—Lindelöf (voir [7] par exemple).

Proposition III.1. *Soient $-\pi/2<\theta_1<\theta_2<\pi/2$ et f une fonction holomorphe dans un voisinage de l'angle $\theta_1\leqq\arg z\leqq\theta_2$. Soient (D_j) une famille de droites de* $\mathbf{C}$ *de la forme*

$$D_j = \{z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z = x_j\} \quad avec \quad j\in\mathbf{N}, \quad \lim_{j\to\infty} x_j = \infty,$$

soit ϱ un nombre réel >0 vérifiant

$$\theta_2-\theta_1 < \pi/\varrho.$$

On suppose:

(III.1) $$\begin{cases} \textit{Il existe } C>0 \textit{ tel que} \\ |f(z)| \leqq C \textit{ pour } \arg z = \theta_1 \textit{ ou } \arg z = \theta_2. \end{cases}$$

(III.2) $$\begin{cases} \textit{Pour tout } \varepsilon>0 \textit{ il existe } C_\varepsilon>0 \textit{ tel que} \\ |f(z)| \leqq C_\varepsilon e^{|z|^{\varrho+\varepsilon}} \textit{ pour } z\in \bigcup_{j=1}^\infty D_j. \end{cases}$$

On a alors

(III.3) $$|f(z)| \leqq C \quad \textit{pour tout } z, \quad \theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2.$$

On remarque aussi que, si on remplace (III.1) par

(III.4) $$|f(z)| \leqq C(1+|z|)^m \quad \text{pour} \quad \arg z=\theta_1 \quad \text{ou} \quad \arg z=\theta_2 \quad (m\in\mathbf{N}),$$

la conclusion (III.3) est remplacée par

(III.5) $$|f(z)| \leqq C'(1+|z|)^m \quad \text{pour} \quad \theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2.$$

Cela résulte de la proposition précédente appliquée à la fonction $f(z)/(1+z)^m$.

De la même manière si (III.1) est remplacée par

(III.6) $$|f(z)| \leqq C_1 e^{C_2|z|} \quad \text{pour} \quad \arg z = \theta_1 \quad \text{ou} \quad \arg z = \theta_2,$$

la conclusion (III.3) devient

(III.7) $$|f(z)| \leqq C_3 e^{C_4|z|} \quad \text{pour} \quad \theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2,$$

il suffit d'appliquer la proposition à la fonction $f(z)e^{-C_5 z}$ avec C_5 assez grand.

On note aussi que la proposition (III.1), ainsi que les modifications qui la suivent, restent aussi valables si f est holomorphe à valeur dans un espace de Hilbert.

IV. Réductions

On commence d'abord par écrire l'opérateur P, donné par (0.6), en coordonnées polaires, sous une forme utile pour la suite.

On note pour α et β dans $\mathbf{N}^n$,

$$P_{\alpha,\beta}(x, D_x) = x^\beta D_x^\alpha.$$

Les opérateurs P_0 et P données par (0.1) et (0.6) peuvent alors s'écrire:

(IV.1) $$P_0(x, D) = \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqq m} c_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta}(x, D_x) \quad \text{avec} \quad a_{\alpha,\beta}\in\mathbf{C}$$

(IV.2) $$P(x, D) = P_0(x, D) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqq m} a_{\alpha,\beta}(x) P_{\alpha,\beta}(x, D_x)$$

où les $a_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions analytiques au voisinage de l'origine, s'annulant au moins à l'ordre 1 en 0. Il résulte de la proposition (I.2) que l'on a, au voisinage de 0

(IV.3) $$a_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\alpha,\beta,k}(\theta) r^k,$$

et qu'il existe $M>0$, tel que pour tout $s\in\mathbf{R}$ il existe C_s vérifiant

(IV.4) $$\|a_{\alpha,\beta,k}\|_{H^s(S_{n-1})} \leqq C_s M^k \quad \text{pour tout} \quad k \geqq 1 \quad \text{et} \quad |\alpha| = |\beta| \leqq m.$$

On observe qu'avec le changement de variables $x\mapsto\lambda x$ $(\lambda>0)$ les opérateurs P_0 et $P_{\alpha,\beta}$ restent inchangés, alors que $a_{\alpha,\beta,k}$ est multipliée par λ^{-k}. On peut donc, pour la démonstration du théorème 3, supposer la constante M dans (IV.4) aussi petite qu'il sera nécessaire pour la suite.

En coordonnées polaires, l'opérateur $P_{\alpha,\beta}$ devient, si $|\alpha|=|\beta|$,

$$Q_{\alpha,\beta}(\theta, D_\theta, rD_r);$$

c'est un polynôme en D_θ et rD_r à coefficients analytiques en θ et indépendants de r. L'opérateur P_0, écrit en coordonnées polaires, devient:

$$Q_0(\theta, D_\theta, rD_r) = \sum_{j=0}^{m} A_j(\theta, D_\theta)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{m-j} \tag{IV.5}$$

où A_j est un opérateur différentiel sur S_{n-1}, d'ordre $\leqq j$ à coefficients analytiques. Si on désigne par a_j le symbole principal de A_j d'ordre j, on a pour $(\theta, \eta)\in T^* S_{n-1}$ et $\zeta\in\mathbf{R}$

$$q_0(\theta, \eta, \zeta) = \sum_{j=0}^{m} a_j(\theta, \eta)(i\zeta)^{m-j} \tag{IV.6}$$

où q_0 est la fonction définie dans l'introduction et figurant dans (0.4).

On définit de même, pour k entier $\geqq 1$ et $0\leqq j\leqq m$, les opérateurs $A_{j,k}(\theta, D_\theta)$ par

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqq m} a_{\alpha,\beta,k}(\theta) Q_{\alpha,\beta}(\theta, D_\theta, rD_r) = \sum_{j=0}^{m} A_{j,k}(\theta, D_\theta)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{m-j}; \tag{IV.7}$$

$A_{j,k}$ est un opérateur différentiel sur S_{n-1} d'ordre $\leqq j$ à coefficients analytiques.

On peut supposer $M<1$ dans (IV.4); l'opérateur P s'écrit donc au voisinage de B (boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$), compte-tenu de (IV.5) et (IV.7), sous la forme

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{m} A_j(\theta, D_\theta)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{m-j} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} r^k A_{j,k}(\theta, D_\theta)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{m-j}. \tag{IV.8}$$

Soit maintenant $u\in\mathscr{C}^\infty(B)$. On pose

$$Pu = v. \tag{IV.9}$$

On prend la transformée de Mellin des deux membres de (IV.9) dans la direction radiale. Il vient, en utilisant la décomposition (IV.8), et (I.3) et (I.4):

$$\begin{cases} (A_m(\theta, D_\theta) + A_{m-1}(\theta, D_\theta)z + \ldots + A_0(\theta)z^m)\tilde{u}(z, \theta) + \\ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} A_{j,k}(\theta, D_\theta)(z-k)^{m-j}\tilde{u}(z-k, \theta) = \tilde{v}(z, \theta) \\ + \sum_{j=0}^{m-1} c_j(\theta) z^j. \end{cases} \tag{IV.10}$$

Les fonctions c_j sont dans $\mathscr{C}^\infty(S_{n-1})$ et dépendent des traces de u sur S_{n-1}, jusqu'à l'ordre $m-1$.

L'ellipticité de P_0 dans le complémentaire de l'origine de $\mathbf{R}^n$, implique que $A_0(\theta)$ n'a pas de zéros sur S_{n-1}. On pose alors

$$\begin{cases} B_j(\theta, D_\theta) = -A_0^{-1}(\theta)A_j(\theta, D_\theta), \\ B_{j,k}(\theta, D_\theta) = -A_0^{-1}(\theta)A_{j,k}(\theta, D_\theta), \\ \hat{v}(z, \theta) = A_0^{-1}(\theta)\tilde{v}(z, \theta), \\ \hat{c}_j(\theta) = A_0^{-1}(\theta)c_j(\theta). \end{cases} \tag{IV.11}$$

L'égalité (IV.10) devient alors

$$\text{(IV.12)}\qquad \begin{cases} z^m-(B_1(\theta, D_\theta)z^{m-1}+\ldots+B_m(\theta, D_\theta))\tilde{u}(z,\theta) = \\ \hat{v}(z,\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} B_{j,k}(\theta, D_\theta)(z-k)^{m-j}\tilde{u}(z-k,\theta) \\ +\sum_{j=0}^{m-1}\hat{c}_j(\theta)z^j. \end{cases}$$

On va maintenant écrire l'équation (IV.12) sous forme d'un système pseudo-différentiel du premier ordre sur S_{n-1}.

On pose, pour cela, $\Lambda=(I-\Delta_\theta)^{1/2}$ et on introduit les fonctions vectorielles:

$$U(z,\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(z,\theta) \\ \Lambda^{-1}z\tilde{u}(z,\theta) \\ \vdots \\ \Lambda^{-(m-1)}z^{m-1}\tilde{u}(z,\theta) \end{pmatrix},$$

$$V(z,\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Lambda^{-(m-1)}\hat{v}(z,\theta) \end{pmatrix},$$

$$C_j(z,\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Lambda^{-(m-1)}\hat{c}_j(z,\theta) \end{pmatrix}.$$

L'équation (IV.12) devient

$$\text{(IV.13)}\qquad \begin{aligned} &(z-\mathscr{A}(\theta, D_\theta))U(z,\theta) = V(z,\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{D}_k(\theta, D_\theta)U(z-k,\theta)+ \\ &\quad +\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}_k(\theta, D_\theta)(z-k)U(z-k,\theta)+\sum_{j=0}^{m-1}C_j(\theta)z^j \end{aligned}$$

avec

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \quad\quad \vdots \\ \vdots & & \quad\quad\quad \vdots \\ 0 & & \quad\quad\quad \Lambda \\ \Lambda^{-(m-1)}B_m & \ldots\ldots & \Lambda^{-(m-1)}B_1\Lambda^{m-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{D}_k = \begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \Lambda^{-(m-1)}B_{m,k} & \ldots\ldots & \Lambda^{-(m-1)}B_{1,k}\Lambda^{m-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{E}_k = \begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & \Lambda^{-(m-1)}B_{0,k}\Lambda^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}_k$ sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 1; la matrice $\mathscr{E}_k$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. Il résulte de (IV.4), et de l'observation qui la suit, qu'il existe $M'>0$ (qui peut être aussi petit que nécessaire) tel que pour tout $s\in\mathbf{R}$, il existe C'_s vérifiant

$$\text{(IV.14)} \qquad \begin{cases} \|\mathscr{D}_k\|_{\mathscr{L}(H^s(S_{n-1}),\, H^{s-1}(S_{n-1}))} \leqq C'_s M'^k, \\ \|\mathscr{E}_k\|_{\mathscr{L}(H^s(S_{n-1}),\, H^s(S_{n-1}))} \leqq C'_s M'^k. \end{cases}$$

En particulier les séries dans (IV.13) convergent pour chaque U telle que, pour tout $s\in\mathbf{R}$

$$z \mapsto \|U(z,\theta)\|_{H^s(S_{n-1})}$$

est de croissance polynômiale quand $\operatorname{Re} z$ tend vers $-\infty$, le long des droites $\operatorname{Im} z = $ =constante.

On désigne par $\lambda(\theta,\eta)$ le symbole principal d'ordre 1 de Λ défini sur $T^* S_{n-1}$, par $b_j(\theta,\eta)$ le symbole principal de $B_j(\theta, D_\theta)$. Le symbole principal d'ordre 1 de $\mathscr{A}$ est alors la matrice

$$a(\theta,\eta) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda(\theta,\eta) & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\theta,\eta) \quad \vdots \\ \vdots & & 0 \\ \vdots & & \lambda(\theta,\eta) \\ \lambda^{-(m-1)} b_m(\theta,\eta) & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_1(\theta,\eta) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det\bigl(z-a(\theta,\eta)\bigr) = z^m - b_1(\theta,\eta) z^{m-1} - \ldots - b_m(\theta,\eta),$$

et compte-tenu de (IV.6) et (IV.11), on obtient

$$\text{(IV.15)} \qquad \det\bigl(z-a(\theta,\eta)\bigr) = a_0(\theta)^{-1} q_0(\theta,\eta,-iz).$$

Si Γ est le cône défini par (0.4) on a donc aussi

$$\text{IV.16)} \qquad \Gamma = \bigcup_{(\theta,\eta)\in T^* S_{n-1}\setminus\{0\}} \{\text{valeurs propres de } a(\theta,\eta)\}.$$

L'ellipticité de P_0 en dehors de l'origine montre, en particulier, que $\mathscr{A}$ est elliptique d'ordre 1 (i.e. $a(\theta,\eta)$ est inversible pour $(\theta,\eta)\in T^* S_{n-1}\setminus\{0\}$).

V. Démonstrations des Théorèmes 1, 2 et 3

(A) *Démonstration du théorème 1*

Le théorème 1 résulte des lemmes (V.1) et (V.2) ci-dessous.

Lemma V.1. *Sous l'hypothèse* (H_1), *si* $u \in \mathscr{C}^\infty(B)$, *plate à l'origine* (i.e. $D^\alpha u(0)=0$ $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$) *et vérifie* $P_0 u=0$, *alors* $u=0$.

Démonstration. Par la transformation de Mellin et les techniques du paragraphe IV, on réduit l'équation (IV.9) (avec ici $P=P_0$ et $v=0$) au système (IV.13). On obtient alors, pour z dans la résolvante de $\mathscr{A}$

$$U(z, \theta) = (z-\mathscr{A})^{-1}\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j\right). \tag{V.1}$$

Comme u est plate à l'origine, $U(z, \theta)$ est une fonction entière en z à valeur dans $\mathscr{C}^\infty(S_{n-1})$. On va montrer qu'il existe $C>0$ tel que l'on ait pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$\|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C(1+|z|)^{m-1}; \tag{V.2}$$

l'inégalité (V.2) montre alors que U est un polynôme en z, et est donc identiquement nulle grâce à la remarque (I.1).

Pour montrer (V.2) on observe d'abord que, grâce à (I.12), pour tout $k \in \mathbf{R}$, il existe $C_k>0$ vérifiant

$$\|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C_k(1+|z|)^{m-1} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \leqq k,$$

il suffit alors de majorer U dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$. A l'aide des estimations (II.12) de la proposition (II.2) et (II.14) de la proposition (II.3), on peut appliquer le théorème de Phragmén—Lindelöf (proposition (III.1) et estimation (III.5)) pour la fonction $U(z, \theta)$ écrite sous la forme (V.1) et les angles $\theta_j \leqq \arg z \leqq \theta_{j+1}$ pour $j=0, \ldots, l-1$, où les nombres θ_j sont donnés dans l'hypothèse (H_1). On en déduit alors (V.2) dans tout le plan complexe.

Lemme V.2. *Sous l'hypothèse* (H_1), *si* $u \in \mathscr{C}^\infty(B)$ *et* $P_0 u$ *est analytique alors la série formelle de* u *à l'origine est convergente.*

Démonstration. On pose $Pu=v$, et on considère les développements de Taylor de u et v à l'origine dans la forme (I.5)

$$u \sim \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(\theta),$$

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_k(\theta) \quad \text{(série convergente)}.$$

Il résulte de la proposition (I.2) qu'il existe M et C tels que l'on ait pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\|v_k\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq CM^k.$$

On peut toujours supposer (quitte à faire une homothétie) que l'on ait $M<1$. On a donc (avec les notations du paragraphe IV)

$$V(z,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{V_k(\theta)}{z-k}$$

avec

$$\|V_k\|_{L^2(S_{n-1})}\leqq C_1 M^k \quad \text{pour tout} \quad k\in\mathbf{N}.$$

Pour montrer le lemme, il suffit grâce à la proposition (I.2) que les résidus $(U_k(\theta))$ de $U(z,\theta)$ aux points entiers $z=k$, vérifient

(V.3) $$\|U_k\|_{L^2(S_{n-1})}\leqq C_2 M'^k \quad \text{pour tout} \quad k\in\mathbf{N}$$

avec C_2 et M' indépendants de k.

Pour démontrer (V.3) on pose

$$\hat{U}(z,\theta)=\sin(2\pi z)\cdot U(z,\theta)$$
$$\hat{V}(z,\theta)=\sin(2\pi z)\cdot V(z,\theta),$$

et on obtient à partir de (IV.13) (avec $P=P_0$), en multipliant par $\sin(2\pi z)$

(V.4) $$\hat{U}(z,\theta)=(z-\mathscr{A})^{-1}\big(\hat{V}(z,\theta)+\sum_{j=0}^{m-1}C_j(\theta)z^j\sin(2\pi z)\big).$$

Les fonctions $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont entières en z; on a

(V.5) $$\hat{U}(k,\theta)=(2\pi)U_k(\theta).$$

La fonction $\hat{V}$ est du type exponentielle

$$(\text{i.e.}\ \|\hat{V}(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})}\leqq Ce^{2\pi|z|} \quad \text{pour tout} \quad z\in\mathbf{C}).$$

Comme dans la démonstration du lemme (V.1), on utilise le théorème de Phragmén—Lindelöf pour la fonction $\hat{U}$, écrite sous la forme (V.5), sur les angles $\theta_j\leqq\arg z\leqq\theta_{j+1}$, pour montrer l'existence de C' et C'' vérifiant

(V.6) $$\|\hat{U}(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})}\leqq C'e^{C''|z|} \quad \text{pour tout} \quad z\in\mathbf{C},$$

grâce à (V.5), (V.3) résulte alors de (V.6), ce qui complète la démonstration du lemme.

(B) *Démonstration du théorème 2*

Soit $\mathscr{A}$ l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 défini dans le paragraphe IV, et associé à P_0. On démontre d'abord.

Lemme V.3. *Sous l'hypothèse* (H_1), *il existe* $z_0\in\mathbf{C}$ *vérifiant:* $\operatorname{Re} z_0<0$ *et* z_0 *est une valeur propre de* $\mathscr{A}$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que $(z-\mathscr{A})^{-1}$ est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z<0\}$ à valeur dans $\mathscr{L}(L^2(S_{n-1}))$.

D'autre part, il résulte de (H_1) (et du fait que Γ est symétrique par rapport à l'origine) et de la proposition (II.3), que l'on a

$$\text{(V.7)}\qquad \begin{cases} \|(z-\mathscr{A})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(S_{n-1}))} \leqq \dfrac{C}{|z|} \quad \text{pour} \\ z\in \bigcup\limits_{j=0}^{l} \{z\in\mathbf{C},\ \arg z=\theta_j+\pi\} \cup \left\{z\in\mathbf{C},\ \dfrac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \theta_0+\pi\right\} \\ \quad \cup \left\{z\in\mathbf{C},\ \theta_l+\pi \leqq \arg z \leqq \dfrac{3\pi}{2}\right\}, \\ \text{et } |z| \text{ assez grand,} \end{cases}$$

grâce à (V.7) et (II.12) on peut appliquer le théorème de Phragmén—Lindelöf à la fonction $(z-\mathscr{A})^{-1}$ sur les angles $\theta_j+\pi\leqq\arg z\leqq\theta_{j+1}+\pi$ et obtenir pour tout $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z<0$ et $|z|$ assez grand

$$\text{(V.8)}\qquad \|(z-\mathscr{A})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(S_{n-1}))} \leqq \frac{C'}{|z|}.$$

La dernière partie de la proposition (II.3) et (V.8) entrainent donc que

$$\Gamma \cap \{z\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re} z<0\} = \emptyset.$$

Comme Γ est symétrique par rapport à l'origine on a $\Gamma=\emptyset$ ce qui est absurde, d'après la définition de Γ.

Fin de la démonstration du théorème 2

Soient z_0 donné par le lemme (V.3) et $U\in(\mathscr{C}^\infty(S_{n-1}))^m$ vérifiant

$$U\neq 0 \quad \text{et} \quad (z_0-\mathscr{A})U=0 \quad (\text{un tel } U \text{ existe}).$$

Il résulte de la forme de la matrice $\mathscr{A}$ que l'on a

$$U(z,\theta) = \begin{pmatrix} u_0(\theta) \\ z_0\Lambda^{-1}u_0(\theta) \\ \vdots \\ z_0^{m-1}\Lambda^{-(m-1)}u_0(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $u_0\in\mathscr{C}^\infty(S_{n-1})$ et vérifiant

$$\text{(V.9)}\qquad \left(A_m(\theta,D_\theta)+A_{m-1}(\theta,D_\theta)z_0+\ldots+A_0(\theta)z_0^m\right)u_0(\theta)=0 \quad \text{et} \quad u_0\neq 0.$$

On note $x=r\theta$ et on pose

$$f(x) = r^{z_0}u_0(\theta).$$

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ et on a, grâce à (V.9) (et (IV.5)),

$$P_0(x, D)f(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^n\setminus\{0\}. \tag{V.10}$$

Soit F une distribution dans $\mathbf{R}^n$ dont la restriction à $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ est f (une telle distribution existe!). On a donc, au sens des distributions dans $\mathbf{R}^n$,

$$P_0(x, D)F = \sum_{|\alpha|\leqq N} c_\alpha D^\alpha \delta \tag{V.11}$$

avec $c_\alpha \in \mathbf{C}$ et $N\in\mathbf{N}$ (δ est la masse de Dirac à l'origine de $\mathbf{R}^n$).

Soit E_N l'espace de toutes les distributions à support l'origine, de la forme $\sum_{|\alpha|\leqq N} d_\alpha D^\alpha \delta$ avec $d_\alpha\in\mathbf{C}$. E_N est de dimension finie et P_0 est un opérateur linéaire dans E_N; on distingue alors deux cas:

(i) P_0 est bijectif dans E_N; dans ce cas, il résulte de (V.11) que l'on peut modifier F par addition d'un élément de E_N et on obtient une distribution T non $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $P_0T=0$ dans $\mathbf{R}^n$.

(ii) P_0 n'est pas bijectif dans E_N; dans ce cas il existe $T\in E_N$, $T\neq 0$ vérifiant

$$P_0T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^n.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

(C) *Démonstration du théorème 3*

La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 2; elle est plus technique du fait de la forme plus complexe de P. Le théorème 3 résulte des lemmes (V.4) et (V.5) ci-dessous.

Lemme V.4. *Sous l'hypothèse* (H_2), *si* $u\in\mathscr{C}^\infty(B)$, *plate à l'origine et vérifie* $Pu\equiv 0$, *alors* $u\equiv 0$.

Démonstration. On réduit l'équation (IV.9) avec $v=0$, au système (IV.13). On obtient alors pour z dans la résolvante de $\mathscr{A}$

$$U(z, \theta) = (z-\mathscr{A})^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}_k U(z-k, \theta)+\mathscr{E}_k(z-k)U(z-k, \theta)+\sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta)z^j\Big). \tag{V.12}$$

On peut supposer que la constante M' figurant dans (IV.14) est $\leqq 1/3$. Il résulte alors de (V.12) et (II.12), que pour tout $\varepsilon>0$ et $z\in\bigcup_{j\in\mathbf{N}} D_j$:

$$\text{(V.13)}\quad \begin{aligned} &\|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C_\varepsilon e^{|z|^{n-1+\varepsilon/2}}\Big(\sum_{k=1}^\infty (1/3)^k \|U(z-k,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})}+\\ &\quad+\sum_{k=1}^\infty (1/3)^k \|U(z-k,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})}(|z|+k)+(1+|z|)^{m-1}\Big),\end{aligned}$$

la constante C_ε dépendant de ε mais est indépendante de z.

On utilise les inégalités suivantes

$$(1+|z|)^{m-1} \leqq C'_\varepsilon e^{|z|^{\varepsilon/2}},$$

$$k(1/3)^k \leqq (1/2)^k \quad \text{pour tout} \quad k\in\mathbf{N},$$

$$\|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C(1+|z|)^{m-1} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \leqq 0,$$

$$\sum_{k=j+1}^\infty \frac{1}{2^k}\|U(z-k,\theta)\|_{L^2(R_{n-1})} \leqq C\sum_{k=j+1}^\infty \frac{1}{2^k}(1+|z-k|)^{m-1} \leqq$$

$$\leqq 2^{m-1}C\sum_{k=1}^\infty \frac{k^{m-1}}{2^k}+C2^{m-1}(1+|z|)^{m-1}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \quad \text{pour} \quad z\in D_j \quad (j\in\mathbf{N}),$$

et on obtient à partir de (V.13) avec éventuellement une autre constante C_ε

$$\text{(V.14)}\quad \|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C_\varepsilon e^{|z|^{n-1+\varepsilon}}\Big(1+\sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k}\|U(z-k,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})}\Big).$$

On montre maintenant, par récurrence sur j, que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $K_\varepsilon= =K\geqq 1$ vérifiant pour tout $z\in D_j$

$$\text{(V.15)}\quad \|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq K^{j+1}e^{f_j(z)},$$

avec

$$f_j(z) = |z|^{n-1+\varepsilon}+|z-1|^{n-1+\varepsilon}+\ldots+|z-j|^{n-1+\varepsilon}.$$

D'après (V.14), (V.15) a lieu pour $j=0$ pourvu que $K\geqq C_\varepsilon$. On suppose maintenant que (V.15) a lieu jusqu'à l'ordre j et on la vérifie pour $j+1$.

Pour $z\in D_{j+1}$, on a d'après (V.14) et l'hypothèse de récurrence

$$\|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C_\varepsilon e^{|z|^{n-1+\varepsilon}}\Big(1+\sum_{k=1}^{j+1}\frac{1}{2^k}K^{j-k+2}e^{f_{j-k+1}(z-k)}\Big).$$

Comme on a pour $1\leqq k\leqq j+1$

$$e^{|z|^{n-1+\varepsilon}}K^{j-k+2}e^{f_{j-k+1}(z-k)} \leqq K^{j+1}e^{f_{j+1}(z)},$$

vient pour $z\in D_{j+1}$

$$\|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C_\varepsilon(1+K^{j+1})e^{f_{j+1}(z)},$$

et on obtient bien (V.15) pour $z\in D_{j+1}$ pourvu que $2C_\varepsilon\leqq K$.

Comme pour $z \in D_j$ on a

$$j \leqq |z| \quad \text{et} \quad f_j(z) \leqq |z|^{n-1+\varepsilon} + j|z|^{n-1+\varepsilon} \leqq |z|^{n-1+\varepsilon} + |z|^{n+\varepsilon}$$

on en déduit de (V.15) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe C_ε vérifiant

$$\text{(V.16)} \qquad \|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq C_\varepsilon e^{|z|^{n+\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad z \in \bigcup_{j \in \mathbf{N}} D_j.$$

On va maintenant montrer que pour tout V voisinage convexe conique de $\hat{\Gamma}_+$ dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ il existe $L > 0$ telle que

$$\text{(V.17)} \qquad \|U(z, \theta)\|_{L^2} \leqq L(1+|z|)^{m-1} \quad \text{pour} \quad z \notin V.$$

On sait d'abord que (V.17) est vraie avec un L convenable pour $\operatorname{Re} z \leqq 0$. On sait aussi que pour $\operatorname{Re} z \geqq 0$, $z \notin V$ et $|z|$ assez grand on a (II.14) et (II.15); on obtient alors de (V.12) pour $\operatorname{Re} z \geqq 0$ et $z \notin V$:

$$\text{(V.18)} \qquad \|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq L_1\big((1+|z|)^{m-1} + \textstyle\sum_{1 \leqq k < \operatorname{Re} z} a^k \|U(z-k, \theta)\|_{L^2}\big)$$

où a est arbitrairement petit (après homothétie) et L_1 indépendant de a.

On suppose maintenant que (V.17) est vraie pour $\operatorname{Re} z \leqq j$ ($j \in \mathbf{N}$), $z \notin V$ et on la démontre pour $\operatorname{Re} z \leqq j+1$, $z \notin V$. On a, pour $\operatorname{Re} z \leqq j+1$, $z \notin V$, en utilisant (V.18) et l'hypothèse de récurrence

$$\|U(z, \theta)\|_{L^2} \leqq L_1\big((1+|z|)^{m-1} + \textstyle\sum_{1 \leqq k < \operatorname{Re} z} a^k L(1+|z-k|)^{m-1}\big) \leqq (1+|z|)^{m-1} L_1(1+2aL),$$

on obtient bien (V.17) pourvu que $a < 1/2L_1$ et $L \geqq L_1(1-2aL_1)^{-1}$.

Grâce à (V.16) et (V.17), on peut appliquer le théorème de Phragmén—Lindelöf pour la fonction $U(z, \theta)$ sur l'angle V (voisinage de $\hat{\Gamma}_+$) dont on peut supposer l'ouverture $< \pi/n$ grâce à l'hypothèse (H_2); on obtient pour une constante $C > 0$

$$\|U(z, \theta)\| \leqq C(1+|z|)^{m-1} \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbf{C},$$

ce qui implique $U \equiv 0$ et achève la démonstration du lemme (V.4).

Lemme V.5. *Sous l'hypothèse* (H_2), *si* $u \in \mathscr{C}^\infty(B)$ *et* Pu *est analytique, alors la série formelle de* u *à l'origine est convergente.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme suit de près celle du lemme (V.2) et utilise les raisonnements par récurrence de la démonstration du lemme (V.4); nous la donnons très succintement.

On pose $Pu = v$ et on réduit cette équation au système (IV.13).

On montre d'abord, comme dans la démonstration du lemme (V.4), par récurrence, que l'on a (V.16). Pour se ramener à des fonctions entières, on pose

$$\hat{U}(z, \theta) = \sin(2\pi z) U(z, \theta),$$

$$\hat{V}(z, \theta) = \sin(2\pi z) V(z, \theta).$$

La fonction $\hat{U}(z, \theta)$ vérifie aussi (V.16) (avec $\hat{U}$ à la place de U). On obtient à partir de (IV.13)

$$\begin{aligned}\hat{U}(z, \theta) = (z-\mathscr{A})^{-1}\big(\hat{V}(z, \theta) + \textstyle\sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j \sin(2\pi z) + \\ + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}_k \hat{U}(z-k, \theta) + \mathscr{E}_k(z-k)\hat{U}(z-k, \theta)\big).\end{aligned} \tag{V.19}$$

Soit V un voisinage conique convexe de $\hat{\Gamma}_+$ d'ouverture $<\pi/n$. Par un raisonnement similaire à celui utilisé pour démontrer (V.18), on montre à partir de (V.19) que l'on a, pour $\operatorname{Re} z > 0$ et $z \notin V$

$$\|\hat{U}(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq L_1\big((1+|z|)^{m-1} e^{2\pi|\operatorname{Im} z|} + \textstyle\sum_{1\leqq k<\operatorname{Re} z} a^k \|\hat{U}(z-k, \theta)\|_{L^2}\big), \tag{V.20}$$

avec $0<a<1/2$ et L_1 indépendants de a. Par un raisonnement similaire à celui utilisé pour démontrer (V.17) à partir de (V.18), on montre que l'on a, à partir de (V.20)

$$\|\hat{U}(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leqq L(1+|z|)^{m-1} e^{2\pi|\operatorname{Im} z|} \quad \text{pour} \quad z \notin V. \tag{V.21}$$

Grâce à (V.16) pour $\hat{U}$, et (V.21), on peut utiliser le théorème de Phragmén—Lindelöf pour conclure que (V.6) a lieu, ce qui termine, grâce à la proposition (I.2), la démonstration du lemme.

Appendice

On démontre ici le résultat suivant:

Proposition A.1. *Il existe P_0 de la forme* (0.1), *avec $m=1$ et $n=2$ (elliptique dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$), et une fonction f analytique au voisinage de* 0 *dans $\mathbf{R}^2$, tels que l'équation*

$$P_0 u = f \tag{A.1}$$

admette une solution série formelle u, unique à l'addition d'une constante près; de plus cette série u est divergente.

Démonstration. On cherche P_0 sous la forme:

$$P_0 = a_{11} x_1 D_{x_1} + a_{12} x_1 D_{x_2} + a_{21} x_2 D_{x_1} + a_{22} x_2 D_{x_2}, \tag{A.2}$$

ce qui peut encore s'écrire en notation matricielle,

$$P_0 = (x_1, x_2) A \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

où A est la matrice à coefficients complexes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

L'ellipticité de P_0 en dehors de $\mathbf{R}^2$ s'écrit alors:

$$\text{(A.4)}\quad \begin{cases} \text{Pour tout} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \quad \text{et tout} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \\ (x_1 x_2) A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

où encore

(A.5) Pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ les vecteurs $(\operatorname{Re} A)\xi$ et $(\operatorname{Im} A)\xi$ sont linéairement indépendants.

Il est clair que (A.5) est équivalente à:

$$\text{(A.6)}\qquad \text{Pour tout} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \det(\alpha \operatorname{Re} A + \beta \operatorname{Im} A) \neq 0.$$

La condition (A.6) implique en particulier que A ne peut pas être choisie diagonale. Comme on veut résoudre (A.1) dans les séries formelles à coefficients complexes, on peut faire des changements de variables linéaires complexes. Si B est une matrice carrée du type (2, 2) à coefficients complexes et si on pose $y = Bx$, l'opérateur P_0 devient dans les variables y_1 et y_2

$$\mathscr{P} = (y_1, y_2)\left(({}^tB)^{-1} A\, {}^tB\right) \begin{pmatrix} D_{y_1} \\ D_{y_2} \end{pmatrix}.$$

Si A est diagonalisable, on peut donc choisir B telle que l'on ait

$$\text{(A.7)}\qquad \mathscr{P} = \lambda_1 y_1 D_{y_1} + \lambda_2 y_2 D_{y_2}$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A. On choisit maintenant A en prenant

$$\text{(A.8)}\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & i\varepsilon \\ i\varepsilon & -1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon > 0$ étant à choisir ultérieurement.

La condition d'ellipticité (A.6) est vérifiée puisque $\det(\alpha \operatorname{Re} A + \beta \operatorname{Im} A) = -\left(\alpha^2(1+\varepsilon) + \beta^2\varepsilon^2\right)$ est strictement négatif pour $\varepsilon > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

On désigne par $\lambda_1(\varepsilon)$ et $\lambda_2(\varepsilon)$ les valeurs propres de A; elles sont réelles, et distinctes pour ε assez petit. On peut supposer que l'on a

$$\text{(A.9)}\qquad \eta(\varepsilon) = \frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)} < -1 \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{assez petit.}$$

on note que η est une fonction continue en ε et que $\eta(0) = -1$.

On choisit f telle que, après le changement de variables $Bx = y$, f s'écrive dans les coordonnées y

$$\text{(A.10)}\qquad \mathscr{F}(y) = -i \sum_{\mu, \nu \in \mathbf{N},\, \mu+\nu \neq 0} y_1^\mu y_2^\nu.$$

On cherche une série formelle

$$\mathcal{U} = \sum_{\mu, \nu \in \mathbf{N}} u_{\mu,\nu} y_1^{\mu} y_2^{\nu}$$

satisfaisant

(A.11) $$\mathcal{P}\mathcal{U} = \mathcal{F}.$$

On peut alors prendre $u_{0,0}$ arbitraire, et on doit avoir

(A.12) $$(\lambda_1 \mu + \lambda_2 \nu) u_{\mu,\nu} = 1 \quad \text{pour tout} \quad (\mu, \nu) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{0\}.$$

on a besoin du lemme suivant:

Lemme A.1. *Il existe un nombre irrationnel $\varrho > 1$ aussi voisin que l'on veut de* 1, *et une suite de nombres rationnels μ_j/ν_j (μ_j, $\nu_j \in \mathbf{N}$, $\nu_j \neq 0$) différents deux à deux et vérifiant*

(A.13) $$\left|\varrho - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right| \leqq 2^{-(\mu_j+\nu_j)^2} \quad \textit{pour tout} \quad j \in \mathbf{N}.$$

La continuité de $\eta(\varepsilon)$ et (A.9) ainsi que le lemme (A.1), permet de choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\eta(\varepsilon) = \frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)} = -\varrho$$

où ϱ satisfait (A.13).

Les coefficients $u_{\mu,\nu}$ pour $(\mu, \nu) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{0\}$ sont alors déterminés grâce à (A.12) d'une manière unique, et on a en particulier

$$u_{\mu_j,\nu_j} = \frac{1}{\lambda_1 \nu_j \left(\frac{\mu_j}{\nu_j} - \varrho\right)} \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbf{N}.$$

On obtient donc, grâce à (A.13),

$$|u_{\mu_j,\nu_j}| \geqq \frac{1}{|\lambda_1|} \frac{2^{(\mu_j+\nu_j)^2}}{\mu_j+\nu_j} \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbf{N},$$

ce qui montre bien que la série formelle $\mathcal{U}$ est divergente et termine la démonstration de la proposition (A.1).

La démonstration du lemme (A.1) est élémentaire, néanmoins nous la donnons ici.

Démonstration du lemme A.1

On écrit le développement binaire de ϱ sous la forme

$$\varrho = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-f(j)}.$$

On cherche donc une application f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissante avec $f(0)=0$. Comme on a

$$0 < \varrho - 1 \leqq 2^{1-f(1)},$$

il suffit de prendre $f(1)$ assez grand pour que ϱ soit aussi voisin de 1 que l'on désire. On construit $f(j)$ par récurrence sur j. On pose pour $j \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{j} 2^{-f(k)} = \frac{\mu_j}{\nu_j} \quad \text{(fraction irréductible).}$$

On suppose que $f(k)$ a été choisi pour $k=0, \ldots, j$ pour satisfaire

$$0 < \varrho - \frac{\mu_k}{\nu_k} \leqq 2^{-(\mu_k+\nu_k)^2} \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, j-1.$$

on choisit maintenant $f(j+1)$ satisfaisant

$$f(j+1) \geqq (j+1)^2 \tag{A.14}$$

$$f(j+1) \geqq (\mu_j+\nu_j)^2+1 \tag{A.15}$$

on a bien grâce à (A.15)

$$0 < \varrho - \frac{\mu_j}{\nu_j} \leqq 2^{1-f(j+1)} \leqq 2^{-(\mu_j+\nu_j)^2}.$$

La condition (A.14) implique que le développement binaire de ϱ est non périodique et donc que ϱ est irrationnel

Bibliographie

1. Agmon, S., *Lectures on elliptic boundary problems,* Van Nostrand Math. Studies **2** (1965).
2. Baouendi, M. S., Goulaouic, C., Approximation polynômiale de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et analytiques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **21** (1971) p. 149—173.
3. Baouendi, M. S., Goulaouic, C., Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inéquality. *Trans. A.M.S.* Vol. **189** (1974) p. 251—261.
4. Baouendi, M. S., Goulaouic, C., Lipkin, L. J., On the operator $\Delta r^2+\mu(\partial/\partial r)r+\lambda$ *J. Diff. Equ.* Vol. **15** (1974) p. 499—509.
5. Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear operators, Part II,* New York, 1963.
6. Seeley, R. T., Complex powers of an elliptic operator, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.* Vol. **10** (1967) p. 288—307.
7. Titchmarsh, E. C., *The theory of functions,* Second edition, London 1939.

Received April 2, 1975

M. S. Baouendi
Department of Mathematics
Purdue University
West Lafayette, Indiana 47907
USA.
et
Université Paris VI, France

J. Sjöstrand
Purdue University
et
Université Paris — Sud
Orsay, France