

Einige Bemerkungen zur Ermittlung der Gezeiten auf großen Tiefen und in Flachwassergebieten.

Von

W. Hansen, Hamburg.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird die numerische Ermittlung der Gezeiten und Gezeitenströme in natürlichen Meeresgebieten besprochen. Die Bedeutung der von A. DEFANT entwickelten Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe für kanalartige Meeresgebiete wird dargelegt und die weiteren Fortschritte, die bei der Behandlung allgemein gestalteter Ozeane, Meere und Buchten erzielt wurden, werden an Hand einiger Beispiele, die die Genauigkeit der Methoden erkennen lassen, erläutert.

Summary. The numerical determination of tides and tidal streams in natural ocean areas are discussed. The importance of the methods developed by A. DEFANT with a view to solve the problem as far as ocean areas of a channel-like shape are concerned is stressed and the further progress made in studying oceans, seas and bays showing a general shape are explained with the aid of several examples manifesting the accuracy of the methods.

Résumé. On discute la détermination numérique des marées et des courants de marées rencontrés dans des régions océaniques naturelles. L'importance des méthodes développées par A. DEFANT pour résoudre ce problème pour des régions de mer semblables à des canaux est soulignée et les progrès que l'on a faits en étudiant des océans, des mers et des baies de formes générales sont exposés à l'aide de quelques exemples manifestant l'exactitude de ces méthodes.

Die Gezeiten des Meeres sind seit jeher nicht nur Gegenstand praktischer Naturbeobachtung gewesen, sondern vor allem seit NEWTON auch in den Bereich physikalischer Betrachtungen einbezogen.

Veranlaßt durch die Wünsche der Schifffahrt, des Hafenbaues, des Küstenschutzes und anderer Wirtschaftszweige wurden schon frühzeitig Gezeitenwasserstände und Gezeitenströme beobachtet.

Es war nicht allzu schwierig, Zusammenhänge zwischen dem zeitlichen Ablauf der Gezeiten an einem festen Ort, etwa einem Seehafen, wie Cuxhaven, Dover oder Brest, und den Stellungen des Mondes, der Sonne und der Erde zueinander aufzufinden. Das in der Theorie der

kleinen Schwingungen verwendete Prinzip, nach dem die schwingungsfähige Masse mit der Periode der schwingungserzeugenden Kraft schwingt, erlaubt, die Gezeiten als Superposition von Teilschwingungen aufzufassen, deren Perioden mit den Perioden der gezeitenerzeugenden Kräfte übereinstimmen, sofern die gezeitenbedingten Wasserstandsänderungen klein gegenüber der Wassertiefe sind. Das ist in den Ozeanen und in den Randmeeren der Fall; eine Ausnahme bilden die Seichtwassergebiete, wie die Wattenmeere und die Flußmündungen.

Liegen von einem Ort Gezeitenwasserstandsbeobachtungen über einen längeren Zeitraum, etwa ein Jahr, vor, dann können Amplituden und Phasen der Teilschwingungen, deren Perioden mit denen der gezeitenerzeugenden Kräfte übereinstimmen, ermittelt werden und für die Vorausberechnung der Gezeiten Verwendung finden. Die Veröffentlichung erfolgt für alle wichtigeren Häfen in den von den einzelnen Nationen herausgegebenen Gezeitentafeln. Diese Methoden zur Vorausberechnung der Gezeiten sagen nichts über den physikalischen Inhalt des Gezeitenvorganges aus, insbesondere wird nicht erkennbar, in welcher Weise Tiefengestalt und Küstenform auf die regionale Anordnung der Gezeiten Einfluß nehmen oder auf welche Ursachen die auf kurzen Entfernungen gelegentlich beobachteten sehr beträchtlichen Änderungen des Tidenhubs zurückzuführen sind. Während die Amplitude der Hauptmondtide M_2 in Cuxhaven rund doppelt so groß ist wie in Esbjerg, ist diese Amplitude in Cherbourg sogar fünfmal so groß wie an der gegenüberliegenden englischen Südküste in Poole-Hafen oder Swanage.

Es liegen zahlreiche Untersuchungen vor, die Beiträge zur Klärung der Physik der Gezeiten geliefert haben. Es geht hierbei um eine typisch meereskundliche Problemstellung: Welche horizontalen und vertikalen Bewegungen führt eine vollkommen oder teilweise abgeschlossene Wassermasse unter dem Einfluß äußerer Kräfte aus. Handelt es sich um eine vollkommen abgeschlossene Wassermasse, so kann nur dann eine Bewegung dauernd aufrecht erhalten werden, wenn die äußere Kraft von Null verschieden ist. Besitzt die Wassermasse dagegen eine Verbindung mit einem benachbarten Meer oder Ozean, so wird eine hier vorhandene Bewegung die teilweise abgeschlossene Wassermasse auch dann in Bewegung setzen, wenn die äußere Kraft Null ist. Im ersten Fall wird von primären oder selbständigen Bewegungsvorgängen — hier von selbständigen Gezeiten —, im zweiten Fall von Sekundärbewegungsvorgängen, speziell im Hinblick auf die Gezeiten, von Mitschwingungsgezeiten gesprochen.

Die hydrodynamischen Gleichungen verknüpfen alle für die Bewegung wichtigen Faktoren miteinander und liefern Beziehungen zwischen den wirksamen Kräften, den Bewegungsvorgängen und der Tiefenverteilung. In dieses System partieller Differentialgleichungen gehen die Gezeitenstromkomponenten und der Wasserstand sowie deren zeitliche und örtliche Ableitungen als unbekannte Funktionen ein. Aus der erlaubten Annahme, daß die äußeren Kräfte sowohl in ihrer Orts- als auch in ihrer Zeitabhängigkeit bekannt sind und aus der sachgemäßen Forde-

rung, daß auf der Grenzkurve des Meeresgebietes gewisse Randbedingungen erfüllt sind — der Gezeitenstrom muß küstenparallel fließen —, folgt, daß die Lösungen der Differentialgleichungen eindeutig bestimmt sind, d. h. im Innern des betrachteten Meeresgebietes sind Gezeitenstrom und Wasserstand durch die äußeren Kräfte und durch die Randbedingungen festgelegt. Anschaulicher wird dieser Sachverhalt, wenn der Vorgang als Superposition von Teilschwingungen aufgefaßt wird, was, wie oben dargelegt, immer dann gestattet ist, wenn die Amplituden der vertikalen Gezeiten klein gegenüber der Wassertiefe sind. Die Gezeiten in Flußmündungen und in seichten Meeresgebieten werden weiter unten gesondert betrachtet.

Eine der bedeutendsten Teilschwingungen oder Teiltiden stellt die halbtägige Hauptmondtide M_2 dar, daneben spielen die eintägigen und in einigen Meeresgebieten auch die vierteltägigen Tiden eine Rolle. Die Differentialgleichungen werden durch Einführung dieser rein periodischen Zeitfunktionen separiert und vereinfacht. Für den Gezeitenwasserstand läßt sich dann eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten. Lösungen in analytisch geschlossener Form sind nur für Spezialfälle bekannt; wird etwa die ablenkende Kraft der Erdrotation berücksichtigt, dann können zwar die Schwingungen in einem kreisförmigen Becken, dagegen nicht mehr die in einem rechteckigen Becken durch geschlossene Ausdrücke dargestellt werden. Handelt es sich um Meeresgebiete natürlicher Küstenform und Tiefengestalt, dann ist eine Darstellung in analytisch geschlossener Form im allgemeinen gar nicht mehr zu erwarten. Diese letzten Endes in der mathematischen Struktur der Aufgabe gelegenen Schwierigkeiten treten aber nicht nur bei der Behandlung zweidimensionaler Probleme, sondern auch bereits bei der Ermittlung der Schwingungen in einem eindimensionalen Kanal auf, wenn dieser variable Tiefe besitzt.

Bei dieser Sachlage konnten Fragen nach der regionalen Verteilung der Gezeiten und Gezeitenströme nur an Hand stark vereinfachter und weitgehend idealisierter Modelle behandelt werden; dabei war es oft schwierig, die Naturähnlichkeit derartiger Modellösungen richtig abzuschätzen. Mehr als eine qualitative Übereinstimmung war nicht zu erreichen.

Einen wesentlichen Fortschritt konnte A. DEFANT [1] um 1920 dadurch erzielen, daß er das Differentialgleichungssystem des Gezeitenvorganges soweit umformte, bis eine numerische Lösung der Aufgabe erhalten werden konnte. Er hat sich allerdings auf die Bearbeitung solcher Meeresgebiete beschränkt, die kanalartigen Charakter besitzen. Für die Behandlung allgemein gestalteter zweidimensionaler Meeresgebiete standen damals noch nicht die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel zur Verfügung. Alle bekannten kanalartigen europäischen, aber auch außereuropäischen Gezeitenmeere hat DEFANT bearbeitet. Besonders gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie ergab sich für die Adria und das Rote Meer. Diese Resultate haben wesentlich dazu beigetragen, in der Folgezeit meereskundliche Untersuchungen

auf theoretisch-physikalischen, speziell hydrodynamischen Grundlagen aufzubauen, und haben damit mittelbar und unmittelbar die dynamische Ozeanographie gefördert. Für Meeresgebiete, deren Breite von der gleichen Größenordnung ist wie deren Länge — wie etwa in der Nordsee —, liefert die eindimensionale Methode naturgemäß weniger gute Resultate. Das gilt vor allem für die Gezeiten der Ozeane.

Eine Methode — Randwertverfahren genannt —, die auch die Gezeiten in diesen allgemeinen zweidimensional ausgedehnten Meeren und Ozeanen zu ermitteln gestattet, wurde 20 Jahre später ausgearbeitet. Sie benutzt

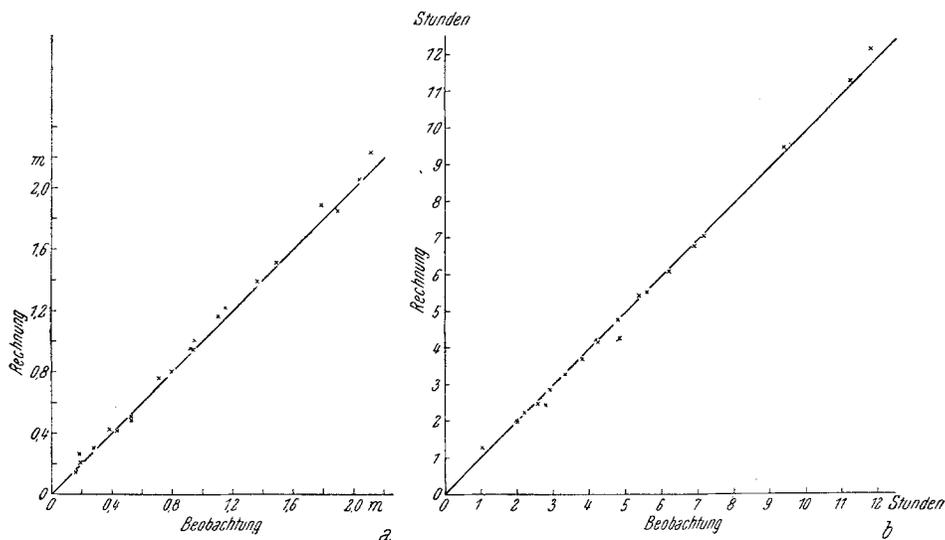


Abb. 1. Vergleich von berechneten und beobachteten Gezeiten der Nordsee. *a* Tidenhub in m, *b* Hochwassereintrittszeit, bezogen auf den Monddurchgang in Greenwich.

wesentlich den Umstand, daß ein System von Differentialgleichungen der oben genannten Art durch ein System von Differenzgleichungen beliebig genau approximiert werden kann. Dabei kommt es praktisch auf die Lösung eines Systems linearer Gleichungen hinaus. Hier sei nur erwähnt, daß die Gezeiten der Nordsee [2] und des westlichen Mittelmeeres ermittelt wurden. Außerdem ist es gelungen, quantitative Angaben über die Gezeiten des Atlantischen Ozeans zu machen [3]. Die Güte der erzielten Approximation für die Nordsee zeigt Abb. 1. Die Linien gleichen Tidenhubs und gleicher Hochwassereintrittszeit für das westliche Mittelmeer sind in Abb. 2 wiedergegeben.

Nach den in jeder Hinsicht positiven Ergebnissen, die bisher mit dem Randwertverfahren erzielt wurden, ist die Ermittlung der Gezeiten etwa des Indischen oder des Pazifischen Ozeans oder irgendeines anderen Meeres nur noch eine Frage des Rechenaufwandes, zu dessen Bewältigung vielleicht in Zukunft moderne elektronische Rechenanlagen herangezogen werden können.

Wird noch einmal die Entwicklung der Gezeitenforschung rückschauend überblickt, so läßt sich feststellen: Die zentrale Aufgabe, nämlich die Ermittlung der Gezeiten in Ozeanen, Rand- und Nebenmeeren, Kanälen und Binnenseen unter voller Berücksichtigung der Tiefenverteilung, der Küstenkonfiguration und aller sonst wirksamen Einflüsse, unter denen die äußeren Kräfte eine bedeutende Rolle spielen, kann heute im Rahmen einer in sich abgeschlossenen Theorie gelöst werden. Allerdings wird die Lösung nicht in der klassischen, analytisch geschlossenen

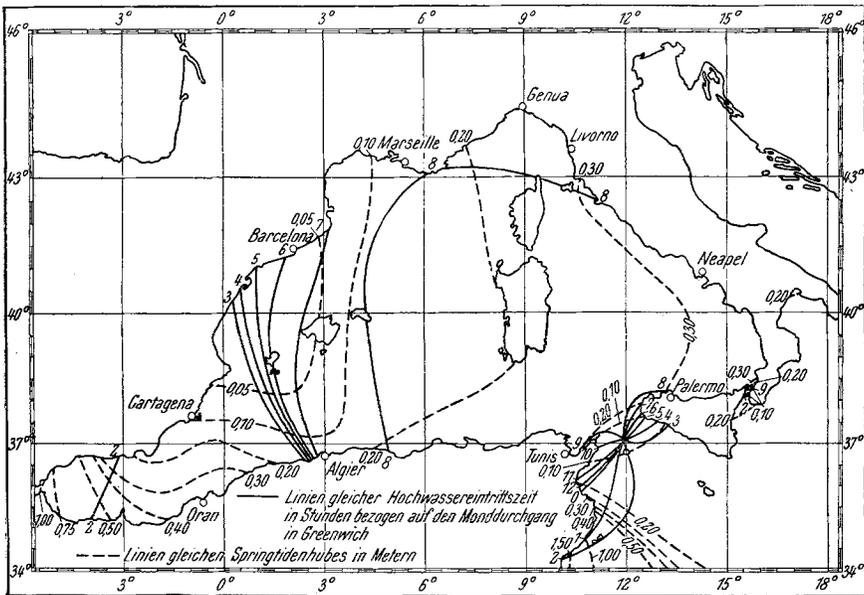


Abb. 2. Gezeiten des westlichen Mittelmeeres. ——— Linien gleichen Springtidenhubes in m, ——— Linien gleicher Hochwassereintrittszeiten in Stunden, bezogen auf den Monddurchgang in Greenwich.

Form, sondern in der durch die Eigenart des Randwertverfahrens bedingten Gestalt, nämlich als Lösungsmannigfaltigkeit eines Systems linearer Gleichungen, erhalten. Die vorstehenden Ausführungen zeigen, daß die Verfahren — hier das Randwertverfahren —, die bewußt auf die Lösungen in analytisch geschlossener Form verzichten, den natürlichen Bedingungen gegenüber weitaus anpassungsfähiger sind und demzufolge auch eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie gewährleisten.

Es hat den Anschein, daß auch in der Meteorologie ähnliche Entwicklungen vor sich gehen, es sei etwa an die Arbeiten zur numerischen Wettervorhersage erinnert. Auch auf dem Gebiet der Physik der festen Erde wäre die Anwendung derartiger Verfahren denkbar. Die guten Ergebnisse, die das Randwertverfahren für alle die Gebiete gebracht hat,

in denen der Tidenhub gering gegenüber der Wassertiefe ist — in diesen Fällen treten in den hydrodynamischen Gleichungen die unbekannt Funktionen nur in linearer Form auf —, sind eng mit dieser Voraussetzung verknüpft, was sofort offenkundig wird, wenn die Gezeiten in seichten Gewässern betrachtet werden, wie sie etwa im Wattenmeer vor der deutschen Nordseeküste und in den Mündungen der Tideflüsse beobachtet werden. Während das Interesse an den Gezeiten der Ozeane und Weltmeere überwiegend wissenschaftlicher Natur ist, wird den Seichtwasserzeiten ein besonderes praktisches Interesse von seiten der See-, Hafen- und Wasserbauingenieure entgegengebracht. Als Beispiel sei folgende Aufgabe genannt: In einem Gezeitenfluß sei an der Mündung der zeitliche Verlauf der Wasserstandskurve und oberhalb der Gezeitengrenze die Oberwassermenge, außerdem die Tiefen- und Breitenverteilung auf dem dazwischenliegenden Teil des Flusses bekannt. Gefragt ist nach den Gezeitenwasserständen und den Gezeitenströmen auf eben diesem Teil des Flusses. Von den Wasserbauingenieuren werden zur Lösung derartiger Aufgaben Modelle der zu untersuchenden Flußstrecken aufgebaut und Modellzeiten erzeugt, die dann ausgemessen werden und sehr gut brauchbare Ergebnisse liefern. Es hat auch nicht an Versuchen gefehlt, Seichtwasserzeiten unter Benutzung hydrodynamischer Methoden numerisch zu ermitteln. Im folgenden soll ein Verfahren des Verfassers skizziert werden, das sich mehrfach bewährt hat und auch mathematisch einwandfrei begründet ist.

Um ein einfaches anschauliches Beispiel vor Augen zu haben, wird die zu untersuchende Flußstrecke in sechs gleich lange Streckenabschnitte geteilt und die so entstehenden Profile fortlaufend, mit Null beginnend, nummeriert. Wasserstände ζ , Stromgeschwindigkeiten u , Breiten B und Querschnitte Q werden durch die Profilmummern, die als Indizes angehängt werden, gekennzeichnet. Die Wasserstände ζ_0 und ζ_6 sind als Funktionen der Zeit bekannt, alle übrigen Wasserstände und Stromgeschwindigkeiten liefert das Verfahren. Dieses wird aus den hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet, wobei wiederum eine Umwandlung der Differentialquotienten in Differenzenquotienten vorgenommen wird, was auf mannigfache Weise geschehen kann. Hier soll speziell das folgende Gleichungssystem betrachtet werden:

$$u_1' - u_1 + \Delta t \varrho_1 u_1 |u_1| + \frac{g \Delta t (\zeta_2 - \zeta_0)}{2 \Delta l} = 0,$$

$$\zeta_2' - \zeta_2 + \frac{\Delta t}{2 \Delta l B_2} (Q_3 u_3 - Q_1 u_1) = 0,$$

$$u_3' - u_3 + \Delta t \varrho_3 u_3 |u_3| + \frac{g \Delta t (\zeta_4 - \zeta_2)}{2 \Delta l} = 0,$$

$$\zeta_4' - \zeta_4 + \frac{\Delta t}{2 \Delta l B_4} (Q_5 u_5 - Q_3 u_3) = 0,$$

$$u_5' - u_5 + \Delta t \varrho_5 u_5 |u_5| + \frac{g \Delta t (\zeta_6 - \zeta_4)}{2 \Delta l} = 0.$$

Es bedeuten: Δl die Entfernung der Profile voneinander, Δt die Schrittlänge in Zeit, ρ die Reibungsfunktion und g die Erdbeschleunigung. Die

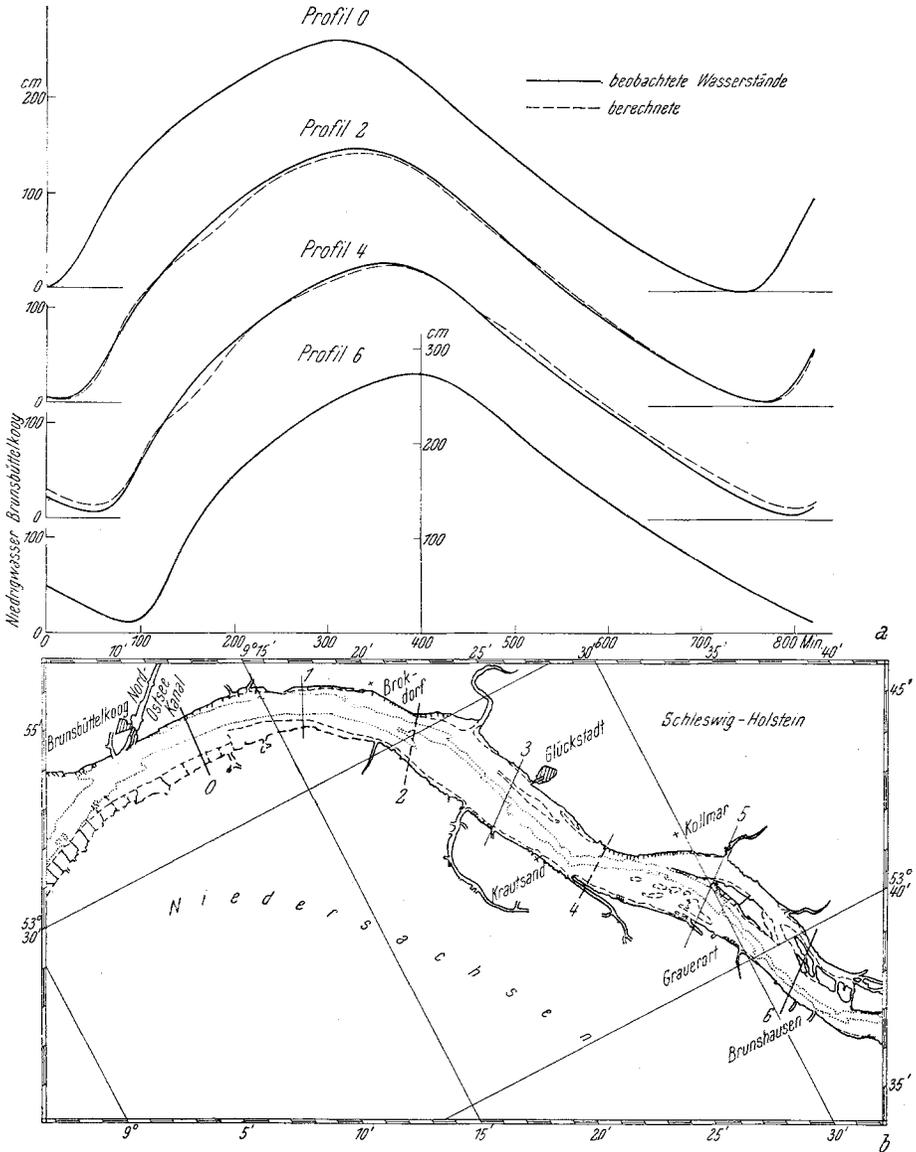


Abb. 3. Beobachtete und berechnete Wasserstände auf der Unter-Elbe (a) und Lage der Profile (b).

Funktionen ζ und u sind auf den an sich beliebig wählbaren Zeitpunkt t bezogen. ζ' und u' gelten dann für den Zeitpunkt $t + \Delta t$. Wird an-

genommen, daß die ζ und u zur Zeit t bekannt sind, dann liefert das obige Gleichungssystem die entsprechenden Werte zum Zeitpunkt $t + \Delta t$; durch nochmalige Anwendung des durch das Gleichungssystem vorgeschriebenen Operators, der hier in Form einer Matrix \mathfrak{A} auftritt, werden Wasserstände und Geschwindigkeiten zur Zeit $t + 2\Delta t$ erhalten. In dieser Weise fortfahrend werden die Funktionen u und ζ in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt, wobei vorausgesetzt wird, daß die Potenzen der Matrix \mathfrak{A} gegen die Nullmatrix konvergieren. Außer ζ_0 und ζ_1 , die als Randwerte bezeichnet werden und bekannt sein müssen, gehen noch

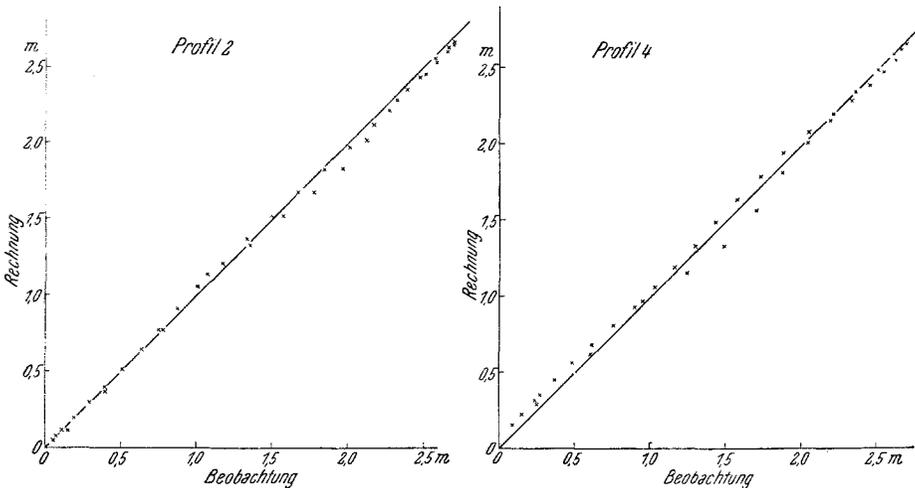


Abb. 4. Beziehungen zwischen beobachteten und berechneten Wasserständen auf der Unter-Elbe.

die u und ζ zum Ausgangszeitpunkt t — die Anfangswerte — in die Rechnung ein, deren Einfluß aber in entsprechender Weise wie die Potenzen der Matrix \mathfrak{A} gegen Null abklingt; das bedeutet, daß die Anfangswerte beliebig — etwa gleich Null — gewählt werden können. Sehr wesentlich für die numerische Behandlung des Systems ist die Tatsache, daß die Konvergenz der Potenzen der Matrix \mathfrak{A} immer erreicht werden kann durch hinreichend kleine Wahl von Δt , der Schrittlänge in Zeit, gegenüber Δl und ρ , das nicht Null werden darf. Die für Konvergenz zulässige Schrittlänge in Zeit hängt außer von dem Profilabstand und der Reibung noch von der Art des ausgewählten Gleichungssystems ab.

Als numerisches Beispiel sind die Gezeiten auf einer Teilstrecke der Elbe, und zwar von Brunsbüttelkoog bis Brunshausen, ermittelt und in der Abb. 3 dargestellt. Für die Profilmummern 2 und 4 sind die beobachteten und die errechneten Wasserstände in Abb. 4 zueinander in Beziehung gesetzt. Die Übereinstimmung ist recht gut, ein Zeichen dafür, daß die hydrodynamischen Methoden — hier das Differenzenverfahren — hervorragend geeignet sind, die Bewegungen des strömenden Wassers

auch dann quantitativ zu erfassen, wenn es sich um nichtstationäre und nichtlineare Vorgänge handelt.

Die Entwicklung der Gezeitenforschung führt von den grundlegenden A. DEFANTSchen Arbeiten an kanalartigen Meeresgebieten über die Behandlung der Gezeiten in zweidimensional ausgedehnten Meeresgebieten (Atlantischer Ozean, Mittelmeer) mit Hilfe des Randwertverfahrens zu den Untersuchungen über die recht verwickelten Seichtwassergezeiten, wobei das Differenzenverfahren wertvolle Dienste leistet. Die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse muß sowohl absolut als auch im Vergleich mit anderen meereskundlichen Resultaten als recht gut bezeichnet werden.

Literatur.

1. DEFANT, A.: Untersuchungen über die Gezeitenerscheinungen in Mittel- und Randmeeren, in Buchten und Kanälen. Denkschr. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. **96** (1919).
2. HANSEN, W.: Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmond-tide M_2 in der Nordsee. Deutsche Hydr. Z., Ergänz. Heft 1 (1952).
3. — Die halbtägigen Gezeiten im Nordatlantischen Ozean. Deutsche Hydr. Z. **2**, 44 (1949).