Computing 3, 110—124 (1968)

Ein Wartesystem mit zwei parallelen Warteschlangen

Von

R. Schassberger, Stuttgart

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 20. Juli 1967)

Zusammenfassung. Am Beispiel eines Warteschlangenmodells mit 2 gekoppelten parallelen Schlangen, Poisson-Angebot und exponentialverteilten Bedienungszeiten werden Methoden zur Berechnung der ergodischen Projektion von Übergangsmatrizen homogener Markovscher Prozesse behandelt.

Summary. In this paper we deal with the calculation of the ergodic projection of transition matrices. A special case is provided by a service system with two interconnected parallel queues, Poisson input and exponentially distributed service times.

Problemstellung

Sei $P(t) \equiv (p_{ik}(t);\ i, k = 0, 1, 2, \ldots;\ t \geqslant 0)$ die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten eines homogenen Markov-Prozesses mit höchstens abzählbar vielen Zuständen, und gelte $\lim\limits_{t \to 0} p_{ik}(t) = \delta_{ik}$. Dann wird $P(t)$ eine Standard-Übergangsmatrix genannt. Es existieren die ergodischen Projektionen $\pi_{ik} = \lim\limits_{t \to \infty} p_{ik}(t)$ und die Ableitungen $q_{ik} = \lim\limits_{t \to 0} (1/t)\,[p_{ik}(t) - \delta_{ik}]$. Stets ist $0 \leqslant q_{ik} < \infty$ für $i \neq k$ und

$$\sum_{k \neq i} q_{ik} \leqslant -q_{ii}.$$

In vielen Fällen von praktischer Bedeutung gilt

$$-q_{ii} \leqslant q < \infty\ \forall\, i \text{ und } \sum_k q_{ik} = 0\ \forall\, i.$$

Eine Matrix Q mit diesen Eigenschaften nennen wir konservativ und beschränkt. Ist umgekehrt eine konservative und beschränkte Matrix Q gegeben, so existiert genau eine Standard-Übergangsmatrix $P(t)$ mit $p'_{ik}(+0) = q_{ik}$.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell aus der Theorie der Warteschlangen betrachtet, welches einen zeitlich homogenen Markov-Prozeß mit abzählbarem Zustandsraum, Standard-Übergangsmatrix $P(t)$ und konservativer beschränkter Matrix Q definiert. Die Zielsetzung besteht in der Angabe von Mitteln und Wegen zur Bestimmung der ergodischen

Projektion Π von $P(t)$, da man mit deren Kenntnis das „eingespielte“ Modell weitgehend beherrscht. Im vorbereitenden Kapitel 1 werden eine Methode von KENDALL und REUTER und eine weitere Methode zur Berechnung von Π für allgemeine $P(t)$ angegeben. Im Kapitel 2 wird dann das Wartesystem behandelt.

Herrn Prof. Dr. W. KNÖDEL danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

1. Zur Berechnung der ergodischen Projektion einer Übergangsmatrix

1.1. Der Satz von KENDALL und REUTER

Gegeben sei ein Matrix Q mit reellen Elementen q_{ik} und

$$q_{ik} \geqslant 0 \quad \text{für } i \neq k, \tag{1.1.1}$$

$$\sum_s q_{is} = 0 \; \forall \, i. \tag{1.1.2}$$

Es existiere genau eine Standard-Übergangsmatrix $P(t)$ mit $p'_{ik}(+0) = q_{ik}$[1]. Ist $\Pi = (\pi_{ik})$ die Matrix der ergodischen Projektion von $P(t)$, so nennen wir mit KENDALL und REUTER [5] einen Zustand i positiv, wenn $\pi_{ii} > 0$, dissipativ, wenn $\pi_{ii} = 0$. Ferner sagen wir, zwei positive Zustände i und k seien aus derselben positiven Klasse, wenn $\pi_{ik} > 0$. Zur einfacheren Darstellung des Ergebnisses von KENDALL und REUTER führen wir die BANACHräume l und m ein. Es ist l der Raum aller reellen Zahlenfolgen $x = (x_0, x_1, \ldots)$ mit $\infty > \sum_s |x_s| = \|x\|$, m der Raum aller reellen Zahlenfolgen $y = (y_0, y_1, \ldots)$ mit $\infty > \sup_s |y_s| = \|y\|$. Wir schreiben $x \geqslant 0$ $(y \geqslant 0)$, wenn $x_i \geqslant 0$ $(y_i \geqslant 0)$ für alle i. Die Lösung unseres Problems durch KENDALL und REUTER ist nun enthalten in

Satz 1.1.1

1. *Sei* $\mathfrak{N}^+(Q) = \left\{x \in l \mid x \geqslant 0, \; \sum_s x_s q_{sk} = 0 \; \forall \, k\right\}$.

   Ein Zustand k ist positiv genau dann, wenn ein $x \in \mathfrak{N}^+(Q)$ existiert mit $x_k > 0$. Zwei positive Zustände i und k liegen in verschiedenen positiven Klassen genau dann, wenn ein $x \in \mathfrak{N}^+(Q)$ existiert mit $x_i > 0$, $x_k = 0$ oder umgekehrt.

2. *Ist k ein positiver Zustand, so enthält die Menge der $x \in \mathfrak{N}^+(Q)$ mit $x_k = 1$ ein kleinstes*[2] *Element $x^{(k)}$. Ist k aus der positiven Klasse $C^{(r)}$, so hängt das Element $\pi^{(r)} := x^{(r)} / \|x^{(r)}\|$ nur von $C^{(r)}$ ab, und es ist $\pi_i^{(r)} > 0$ genau dann, wenn $i \in C^{(r)}$.*

3. *Sei* $\mathfrak{N}^+(Q_0^*) = \left\{y \in m \mid y \geqslant 0, \; \sum_s q_{is} y_s = 0 \; \forall \, i\right\}$.

[1] Die eindeutige Existenz einer Standard-Übergangsmatrix mit $p'_{ik}(+0) = q_{ik}$ muß gefordert werden. Im Falle $|q_{ii}| \leq M < \infty \; \forall \, i$ hingegen ist sie garantiert.

[2] Im Sinne der üblichen Teilordnung von l.

Die Menge der $y \in \mathfrak{R}^+(Q_0^*)$ *mit* $\sum_s y_s \pi_s^{(r)} = 1$ *hat dann ein kleinstes*[3] *Element* $w^{(r)}$.

4. *Es ist* $\pi_{ik} = 0 \; \forall \; i$, *wenn* k *dissipativ,*
   $\pi_{ik} = w_i^{(r)} \pi_k^{(r)}$, *wenn* $k \in C^{(r)}$.

Das Problem ist damit reduziert auf die Auflösung der Gleichungssysteme

$$\sum_s x_s q_{sk} = 0 \; \forall \; k \tag{1.1.3}$$

und

$$\sum_s q_{is} y_s = 0 \; \forall \; i. \tag{1.1.4}$$

Betrachten wir noch den wichtigen Spezialfall, daß der Zustandsraum entweder genau eine positive Klasse ist oder nur dissipative Zustände enthält. Aus Satz 1.1.1 ergibt sich

Korollar 1.1.1

1. *Ist der Zustandsraum eine positive Klasse, so existiert ein Element* $\pi \in l$ *mit* $\pi_i > 0 \; \forall \; i$, $\| \pi \| = 1$, $\mathfrak{R}^+(Q) = \{c\,\pi,\; c \geqslant 0\}$ *und* $\pi_{ik} = \pi_k \; \forall \; i, k$.
2. *Sind alle Zustände dissipativ, so ist* $\mathfrak{R}^+(Q) = \{0\}$.

Beweis.

1. Sei k beliebig, $x \in \mathfrak{R}^+(Q)$. Ist $x_k = 0$, so $x \equiv 0$ wegen Satz 1.1.1, Aussage 1, und der Tatsache, daß der Zustandsraum genau eine positive Klasse ist. Ist $x_k > 0$, so existiert eine Konstante $c' > 0$ mit $c' x_k = 1$. Es ist $c' x \in \mathfrak{R}^+(Q)$ und $c' x \geqslant x^{(k)}$ wegen Aussage 2, also $u := c' x - x^{(k)} \in \mathfrak{R}^+(Q)$ mit $u_k = 0$. Daraus folgt wieder $u \equiv 0$ und somit $x = (1/c')\, x^{(k)} = (1/c')\, \| x^{(k)} \| \, \pi$, wo π das in Aussage 2 konstruierte, von k unabhängige Element ist. Jedes Element $x \in \mathfrak{R}^+(Q)$ läßt sich also in der Form $x = c\,\pi$, $c \geqslant 0$ darstellen.
   Für das in 3. konstruierte Element $w \in m$ ergibt sich wegen $\| \pi \| = 1$ $w = (1,1,\ldots)$. Damit ist nach 4. $\pi_{ik} = \pi_k > 0 \; \forall \; i, k$.
2. Die Aussage ist offensichtlich in 1. enthalten.

Im Falle genau einer positiven Klasse von Zuständen ist also nur die bis auf eine multiplikative Konstante eindeutige, nichttriviale, positive Lösung des Gleichungssystems (1.1.3) zu suchen.

1.2. Transformation auf diskrete Ketten

Gegeben sei eine konservative und beschränkte Matrix Q. Sie definiert vermöge

$$(Q\,x)_k = \sum_s x_s q_{sk} \quad \forall \; k \tag{1.2.1}$$

[3] Im Sinne der üblichen Teilordnung von m.

einen beschränkten linearen Operator Q auf dem BANACHraum l mit Wertebereich $R(Q) \subset l$ (HILLE [4], S. 642). Die durch Q erzeugte Standard-Übergangsmatrix $P(t)$ definiert ganz analog vermöge

$$(P(t))_k = \sum_s x_s\, p_{sk}(t) \quad \forall\, k \tag{1.2.2}$$

einen beschränkten linearen Operator $P(t)$ auf l, und $P(t)$ läßt sich in der Form

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Q^j \tag{1.2.3}$$

schreiben, worin Q^j die j-te Potenz des Operators Q darstellt. Ist q eine obere Schranke für $\{ | q_{ii} | \}$ und I die Identität auf l, so ergibt sich mit

$$R := (1/q)\, Q + I \tag{1.2.4}$$

$$P(t) = e^{q\,(R-I)\,t} = e^{-qt}\, I\, e^{qRt} = e^{-qt}\, e^{qRt} \tag{1.2.5}$$

(vgl. HILLE [4], S. 172). Nun ist $R = (r_{ik})$, aufgefaßt als Matrix, eine stochastische Matrix, denn es gelten die Beziehungen

$$0 \leqslant r_{ik} = q_{ik}/q + \delta_{ik} \leqslant 1 \tag{1.2.6}$$

wegen $q \geqslant | q_{ik} |$ und

$$\sum_k r_{ik} = \frac{1}{q} \sum_k q_{ik} + 1 = 1 \quad \forall\, i. \tag{1.2.7}$$

Der Operator R^n, aufgefaßt als Matrix, hat dieselben Elemente wie das Matrizenprodukt R^n. Diese Elemente lassen sich deuten als n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten einer zeitlich diskreten, homogenen MARKOV-Kette mit den Zuständen $i, k = 0, 1, \ldots$. Die Folge $\{r_{ik}^{(n)}\}_n$ konvergiert also im C_1-Mittel, und wir behaupten den

Satz 1.2.1 $\qquad C_1 - \lim\limits_n r_{ik}^{(n)} = \pi_{ik} = \lim\limits_t p_{ik}(t).$

Beweis. Aus (1.2.5) erhalten wir

$$p_{ik}(t) = e^{-qt} \sum_n \frac{1}{n!} (q\, t)^n\, r_{ik}^{(n)}, \tag{1.2.8}$$

wo $r_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$. Die Summe rechts ist in $t \geqslant 0$ beständig konvergent und hat für $t \to \infty$ einen Grenzwert, nämlich den der linken Seite. Das heißt aber gerade (HARDY [3], S. 80): $\{r_{ik}^{(n)}\}_n$ ist B — limitierbar zum Werte π_{ik}. Wir entnehmen aus HARDY ([3], S. 210) das

Lemma. *Ist* $c \geqslant -1/2$, $a_n = o\,(n^c)$, $\Sigma\, a_n$ B — *summierbar zum Werte* a, *so ist* $\Sigma\, a_n$ C_{2c+1} — *summierbar zum Werte* a.

Setzt man hier $a_n = r_{ik}^{(n)} - r_{ik}^{(n-1)}$, $a_0 = r_{ik}^{(0)}$, $c = 1/2$, so wird leicht ersichtlich: $\{r_{ik}^{(n)}\}_n$ ist C_2 — limitierbar zum Werte π_{ik}. Da aber $\{r_{ik}^{(n)}\}_n$ auch C_1-limitierbar ist, so ebenfalls zum Werte π_{ik}, q.e.d.

Damit ist unser Problem reduziert auf die Berechnung der ergodischen Projektion der Übergangsmatrix einer zeitlich diskreten, homogenen Markov-Kette.

Wir weisen darauf hin, daß eine gewisse Verwandtschaft zu der z. B. bei Chung [1] erwähnten Sprungmatrix besteht. Deren Elemente lauten $s_{ik} = (1/|q_{ii}|)\, q_{ik} + \delta_{ik}$, wobei $q_{ii} \neq 0$ vorausgesetzt werden muß. Ist $x(t, \omega)$ eine zu $P(t)$ gehörende Realisierung des Prozesses, ferner

$$P(x(0, \omega) = i) = 1, \; \varrho_i(\omega) = \inf\{t : t > 0, \; x(t, \omega) \neq i\},$$

so ist

$$s_{ik} = P(x(\varrho_i(\omega), \omega) = k).$$

Anhand des analytischen Verhaltens von $P(t)$ können die Zustände des Prozesses klassifiziert werden, wohinter natürlich wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretationsmöglichkeiten stecken. So heißt z. B. ein Zustand k rekurrent, wenn $\int_0^\infty p_{kk}(t)\, dt = \infty$. Für die Zustände der R entsprechenden Kette existieren analoge Klassifikationen. k heißt hier rekurrent, wenn $\sum_n r_{kk}^{(n)} = \infty$. Beide Klassifikationen stimmen überein. Wir zeigen das am Beispiel der Rekurrenz:

$$k \text{ rekurrent bezüglich } P(t) \Longleftrightarrow \infty = \int_0^\infty p_{kk}(t)\, d\,t =$$

$$= \int_0^\infty \sum_n e^{-qt} (1/n!)\, (q\,t)^n\, r_{kk}^{(n)}\, d\,t = \sum_n \frac{q^n}{n!}\, r_{kk}^{(n)} \int_0^\infty t^n\, e^{-qt}\, d\,t =$$

$$= \frac{1}{q} \sum_n r_{kk}^{(n)} = \infty \Longleftrightarrow k \text{ rekurrent bezüglich } R.$$

Die Vertauschung von Summation und Integration läßt sich rechtfertigen z. B. mit 17 Korollar in Dunford-Schwartz ([2], S. 151).

Diese Übereinstimmung ist insofern wichtig, als eine Kenntnis der Klassen und ihrer Eigenschaften die Berechnung der ergodischen Projektion wesentlich vereinfachen kann. Es sei noch vermerkt, daß einem vorgegebenem $q > 0$ und einer vorgegebenen stochastischen Matrix R mittels

$$q_{ik} = q\,(r_{ik} - \delta_{ik})$$

eine konservative und beschränkte Matrix Q zugeordnet werden kann.

2. Ein Modell aus der Theorie der Warteschlangen

2.1. Definition des Modells

Wir betrachten folgendes Wartesystem:

Ein Strom von Kunden verteilt sich vor zwei parallelen Schaltern auf zwei Schlangen in der Weise, daß ein ankommender Kunde sich gegebenenfalls der kürzeren, andernfalls mit Wahrscheinlichkeit 1/2 der rechten und ebenso der linken Schlange anschließt, und daß er, einmal eingereiht, die Schlange nicht mehr wechselt. Die Länge einer Schlange sei gleich Null, wenn der entsprechende Schalter frei ist, gleich Eins, wenn dort ein Kunde bedient wird und keiner wartet, usw.

Ist nun $t_i \geqslant t_0 = 0$ der Zeitpunkt der Ankunft des i-ten Kunden und $g_i = t_i - t_{i-1} \geqslant 0$, ferner $s_i \geqslant 0$ die Zeitspanne, die seine Bedienung kostet, so nehmen wir an, $\{g_i\}$ und $\{s_i\}$ seien unabhängige Folgen identisch verteilter und unabhängiger Zufallsveränderlicher. Wir interessieren uns für den Zustand $z(t) = (i(t), k(t))$ des Modells zur Zeit $t > 0$, wobei $i(t)$ und $k(t)$ die Längen der beiden Schlangen zur Zeit t bezeichnen. Bei Präzisierung des Modells durch die Annahmen

$$P(g_i \leqslant t) = 1 - e^{-2\lambda t}, \ \lambda > 0$$

und

$$P(s_i \leqslant t) = 1 - e^{-\mu t}, \ \mu > 0$$

ist $z(t)$ ein zeitlich homogener MARKOV-Prozeß mit den Zuständen (i, k), $i, k = 0, 1, 2, \ldots$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{vk}^{ui}(t) = P(z(t) = (i, k) \mid z(0) = (u, v)), \ u, v, i, k = 0, 1, 2, \ldots$$

genügen einem System von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} p_{vk}^{ui}(t) = \sum_a \sum_b p_{vb}^{ua}(t)\, q_{bk}^{ai}, \ i, k = 0, 1, \ldots \qquad (2.1.1)$$

Die Koeffizienten q_{vk}^{ui} sind gleich Null bis auf die in Tab. 1 angegebenen Fälle. Anfangsbedingungen sind

$$p_{vk}^{ui}(0) = \delta_{vk}^{ui} = {}^{1}_{0} \text{ für } (u, v) \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{\neq} (i, k).$$

Tabelle 1

u	v	i	k	q_{vk}^{ui}
0	0	u	v	-2λ
0	>0	u	v	$-(2\lambda + \mu)$
>0	0	u	v	$-(2\lambda + \mu)$
>0	>0	u	v	$-2(\lambda + \mu)$
≥ 0	u	$u+1$	v	λ
≥ 0	u	u	$v+1$	λ
≥ 0	$>u$	$u+1$	v	2λ
>0	$<u$	u	$v+1$	2λ
>0	≥ 0	$u-1$	v	μ
≥ 0	>0	u	$v-1$	μ

Diese Tatsachen lassen sich mit bekannten Überlegungen beweisen (siehe z. B. KHINTCHINE [6]). Wir erkennen die Beziehungen

$$q_{kk}^{ii} < 0, \ -q_{kk}^{ii} \leqslant 2(\lambda + \mu)$$

$$q_{vk}^{ui} \geqslant 0 \text{ für } (u, v) \neq (i, k) \qquad (2.1.3)$$

und

$$\sum_i \sum_k q_{vk}^{ui} = 0.$$

Wird der Zustandsraum von $z(t)$ so abgezählt, daß die Zustände fortlaufend mit 0, 1, 2, ... bezeichnet sind, so erhalten wir die in der Theorie der MARKOV-Ketten gängige Schreibweise, können die oben auftretenden, in Wirklichkeit endlichen Doppelsummen durch einfache Summen ersetzen und erkennen: Die Matrix $Q = \{q_{vk}^{ui}\}$ ist konservativ und beschränkt; daher ist $P(t)$ eine Standard-Übergangsmatrix.

Es existieren die ergodischen Projektionen

$$\pi_{vk}^{ui} = \lim_t p_{vk}^{ui}(t) \tag{2.1.4}$$

und ihnen gilt unser Interesse. Für $t \to \infty$ ergibt sich aus (2.1.1)

$$0 = \sum_a \sum_b \pi_{vb}^{ua} q_{bk}^{ai}, \quad i, k = 0, 1, \ldots . \tag{2.1.5}$$

Die π_{vk}^{ui} genügen also für alle (u, v) dem Gleichungssystem

$$0 = \sum_a \sum_b x_b^a q_{bk}^{ai}, \quad i, k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.6}$$

so daß mit den Bezeichnungen von Abschnitt 1.1 $\pi_v^u = (\pi_{vk}^{ui})$ ein Element aus $\mathfrak{R}^+(Q)$ ist. Indessen gilt: Für $\lambda < \mu$ bilden die Zustände von $z(t)$ eine positive, für $\lambda \geqslant \mu$ eine dissipative Klasse. (2.1.6) hat also für $\lambda < \mu$ genau eine positive Lösung π mit $\|\pi\| = 1$ und $\pi_{vk}^{ui} = \pi_k^i \; \forall\, u, v, i, k$. Der Beweis dieser plausiblen Tatsache soll zusammen mit weiteren Ergebnissen über das Wartesystem in einer anderen Arbeit gebracht werden.

2.2. Transformation auf den diskreten Prozeß

Ein Weg zur Berechnung der π_k^i besteht in der Lösung des Systems (2.1.6). Diese scheint aber in geschlossener Form nicht zugänglich zu sein. Wir suchen deshalb andere Wege oder Näherungsmethoden zur Berechnung der π_k^i und wenden hierzu das Ergebnis von 1.2 an.

Sei

$$R = (1/q)\, Q + I \text{ mit } q = 2(\lambda + \mu).$$

Dann ist $R = (r_{vk}^{ui})$ eine stochastische Matrix, und gemäß Satz 1.2.1 gilt $C_1 - \lim_j r_{vk}^{ui(j)} = \pi_k^i$, im positiven Falle sogar

$$\lim_j r_{vk}^{ui(j)} = \pi_k^i \quad \text{(CHUNG [1], S. 31).}$$

Die Matrix-Elemente r_{vk}^{ui} sind gleich Null bis auf die in Tab. 2 angegebenen Fälle.

Tabelle 2

u	v	i	k	r_{vk}^{ui}
≥ 0	u	$u+1$	u	x
≥ 0	u	u	$u+1$	x
≥ 0	$> u$	$u+1$	v	$2x$
> 0	$< u$	u	$v+1$	$2x$
≥ 0	> 0	u	$v-1$	y
> 0	≥ 0	$u-1$	v	y
0	> 0	u	v	y
> 0	0	u	v	y
0	0	u	v	$2y$

Dabei ist $x = \varrho/2\,(1+\varrho)$ und $y = 1/2\,(1+\varrho)$.

R läßt sich als Übergangsmatrix einer zweidimensionalen Irrfahrt interpretieren, die in sehr anschaulicher Weise mit dem Warteschlangen-Modell zusammenhängt. Abb. 1 möge dies verdeutlichen.

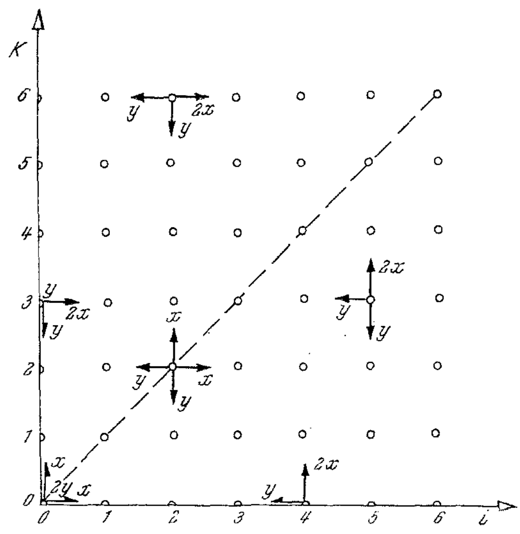

Abb. 1

Iterationsvorschriften zur Berechnung der π_k^i sind nun

$$r_{vk}^{ui(j+1)} = \sum_a \sum_b r_{vb}^{ua(j)}\, r_{bk}^{ai} \tag{2.2.2}$$

und

$$r_{vk}^{ui(j+1)} = \sum_a \sum_b r_{vb}^{ua}\, r_{bk}^{ai(j)}, \tag{2.2.3}$$

wobei die Doppelsummen aus maximal vier Summanden bestehen. Trotz der einfachen Gestalt dieser Vorschriften werden die Ausdrücke für die

$r_{vk}^{ui(j)}$ mit wachsendem j recht bald sehr verwickelt, sodaß auch hiermit keine exakten Lösungen gewonnen werden können. Dagegen lassen sich die Iterationen auf einer Rechenanlage sehr gut durchführen.

Es sei noch bemerkt, daß der Übergang zur Grenze in (2.2.2) das System (2.1.6) liefert, womit also in unserem Falle das Ergebnis des Abschnitts 1.2 nichts weiter als eine Vorschrift zur iterativen Lösung des in 1.1 betrachteten Systems (1.1.3) darstellt.

2.3. Übergang von beschränktem zu unbeschränktem Warteraum

Eine dritte Methode zur angenäherten Berechnung der π_k^i besteht darin, das Wartesystem durch andere Systeme zu „approximieren", speziell durch solche, die sich von dem Ausgangssystem nur darin unterscheiden, daß der Warteraum beschränkt ist.

Sei M unser Ausgangsmodell und gehe ${}^nM$ aus M dadurch hervor, daß die Warteordnung von M ergänzt wird durch den Zusatz: Haben beide Schlangen die Länge n, so wartet ein ankommender Kunde nicht.

Für das Folgende sei vereinbart: Ist g eine für M definierte Größe, so wird die entsprechende Größe für ${}^nM$ mit ${}^ng$ bezeichnet. Dann ist ${}^nz(t)$ ein zeitlich homogener Markov-Prozeß mit den Zuständen (i, k), $i, k = 0, 1, 2, \ldots$, und der Verabredung, Ausdrücke, in denen ein Zustand (i, k) mit $i > n$ oder $k > n$ auftritt, sinnvoll zu interpretieren. Die Übergangswahrscheinlichkeiten ${}^np_{vk}^{ui}(t)$ genügen den Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\,{}^np_{vk}^{ui}(t) = \sum_a \sum_b {}^np_{vb}^{ua}(t)\,{}^nq_{bk}^{ai},\quad i, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3.1}$$

mit

$${}^np_{vk}^{ui}(0) = \delta_{vk}^{ui}.$$

Es ist

$${}^nq_{vk}^{ui} = q_{vk}^{ui}$$

mit den Ausnahmen

$${}^nq_{nn}^{nn} = -2\mu \tag{2.3.2}$$

und

$${}^nq_{vk}^{ui} = 0,$$

wenn wenigstens ein Index größer als n ist.

${}^nP(t)$ ist eine Standard-Übergangsmatrix, ${}^nQ$ ist konservativ und beschränkt.

Wir stellen zunächst folgende Fragen:

1. Existiert $\lim\limits_n {}^np_{vk}^{ui}(t)$ mit Grenzwert $p_{vk}^{ui}(t)$?
2. Existiert $\lim\limits_n {}^n\pi_k^i$ mit Grenzwert π_k^i? [4]

---

[4] In gleicher Weise wie für $P(t)$ kann man für ${}^nP(t)$ zeigen, daß $\lim\limits_t {}^np_{vk}^{ui}(t)$ unabhängig ist von (u, v).

Von großer Bedeutung für die Praxis wären indessen die Aussagen

$$\lim_n {}^n p_{vk}^{ui}(t) = p_{vk}^{ui}(t) \quad \text{gleichmäßig in } (i, k)$$

und

$$\lim_n {}^n\pi_k^i = \pi_k^i \quad \text{gleichmäßig in } (i, k).$$

Dafür notwendige und hinreichende Bedingungen sind

$$\lim_n \sum_i \sum_k |{}^n p_{vk}^{ui}(t) - p_{vk}^{ui}(t)| = 0 \tag{2.3.3}$$

beziehungsweise

$$\lim_n \sum_i \sum_k |{}^n\pi_k^i - \pi_k^i| = 0.$$

Zur Interpretation dieser Bedingung benötigen wir den Begriff der starken Konvergenz von Operatoren im Banachraum. Ist B ein Banachraum, so heißt eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen $x_n \in B$ stark konvergent, wenn ein $x \in B$ existiert mit $\lim \| x_n - x \| = 0$. Eine Folge $\{T_n\}$ von Operatoren mit Definitionsbereich $D(T) \equiv B$ und Wertebereich $R(T) \subset B$ heißt stark konvergent, wenn $\{T_n x\}$ stark konvergiert für alle $x \in B$.

Sei $\{T_n\}$ eine Folge beschränkter linearer Operatoren auf l in l, definiert durch

$$(T_n x)_i = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, {}^n t_{ki}.$$

Dann gilt, formuliert für einen Spezialfall, gemäß Dunford-Schwartz ([2], S. 60)

Lemma 2.3.1. *$\{T_n\}$ konvergiert stark genau dann, wenn*

1. *zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(i, \varepsilon)$ existiert mit $\sum_k |{}^n t_{ik} - {}^m t_{ik}| < \varepsilon$ für $n, m > n_0$ und $i = 0, 1, \ldots$*
2. *$\sup_n \| T_n x \| < \infty$ für alle $x \in l$.*

Der durch $\lim_n \| T_n x - T x \| = 0$ definierte Operator T ist linear und beschränkt.

Wir erkennen: Die durch ${}^nP(t)$ gemäß (1.2.2) erzeugten Operatoren auf l genügen Bedingung 2 von Lemma 2.3.1. Sie konvergieren also stark genau dann, wenn Bedingung 1 erfüllt ist, d. h. aber, sie konvergieren stark gegen $P(t)$ genau dann, wenn (2.3.3) gilt. Somit erweitern wir die Fragestellung zu

1′. Konvergiert $\{{}^nP(t)\}$ stark gegen $P(t)$?

2′. Konvergiert $\{{}^m\Pi\}$ stark gegen Π?

Frage 1′ gehört einem Problemkreis an, der im Rahmen der Theorie der Halbgruppen von Operatoren im Banachraum von Trotter [7] behandelt wurde. Aus den dortigen Ergebnissen läßt sich auf einfache Weise herleiten: Frage 1′ ist zu bejahen, wenn die gemäß (1.2.1) definierten Operatoren ${}^nQ$ stark gegen Q konvergieren. Wir wollen uns damit nicht aufhalten, da ein zu umfangreiches Referat über Bekanntes vorauszusetzen wäre, und beschränken uns auf den Nachweis der starken Konvergenz von $\{{}^nQ\}$ gegen Q. Dazu dient Lemma 2.3.1. Bedingung 1 ist erfüllt, denn für $n > u, v$ ist

$$\sum_i \sum_k | {}^nq_{vk}^{ui} - q_{vk}^{ui} | = 0.$$

Bedingung 2 ist ebenfalls erfüllt, denn

$$\sup_n \| {}^nQ\, x \| \leqslant 4\,(\lambda + \mu)\, \| x \| \quad \forall\, x \in l.$$

Somit haben wir in Beantwortung auf 1′

Satz 2.3.1. *Die Folge der Operatoren* ${}^nP\,(t)$ *konvergiert stark gegen* $P\,(t)$.

Ist in irgend einem Falle Satz 2.3.1 gegeben, so läßt sich damit Frage 2′ noch nicht bejahen. Hinreichende Bedingungen hierzu scheinen nicht bekannt zu sein. Im Folgenden wird die Antwort für unseren Spezialfall gegeben. Die Herleitungen orientieren sich an der Tatsache, daß der Folge ${}^1P\,(t)$, ${}^2P\,(t), \ldots$ ein monoton wachsender Warteraum entspricht. Wir benutzen die Transformation der Prozesse ${}^nz\,(t)$ und $z\,(t)$ auf diskrete Prozesse gemäß 1.2. Sei

$$R = (1/q)\, Q + I \tag{2.3.4}$$

und

$$^nR = (1/q)\, ({}^nQ) + I \tag{2.3.5}$$

mit

$$q = 2\,(\lambda + \mu).$$

Dann ist

$${}^nr_{vk}^{ui} = r_{vk}^{ui}$$

mit den Ausnahmen

$${}^nr_{nn}^{nn} = 2\,x \tag{2.3.6}$$

und

$${}^nr_{vk}^{ui} = 0$$

falls ein Index größer als n ist.

Mit einem Satz von MARKOV, zitiert in KHINTCHIN ([6], S. 64), erhält man leicht:

$$\lim_t {}^np_{vk}^{ui}\,(t) = {}^n\pi_k^i > 0 \text{ für alle } \varrho,$$

$$\sum_i \sum_k {}^n\pi_k^i = 1.$$

Die Zustände bilden also für alle ϱ eine positive Klasse, sodaß auch

$$\lim_j {}^nr_{vk}^{ui\,(j)} = {}^n\pi_k^i > 0 \text{ für alle } \varrho > 0.$$

Wir wollen nun ${}^{n}\pi_k^i$ vergleichen mit ${}^{n+1}\pi_k^i$ und vergleichen hierzu zunächst ${}^{n}r_{vk}^{ui\,(j)}$ mit ${}^{n+1}r_{vk}^{ui\,(j)}$.

Die Größen ${}^{n}r_{vk}^{ui\,(j)}$ setzen sich zusammen aus einer Summe von Produkten der Gestalt

$$ {}^{n}r_{vb_1}^{ua_1}\,{}^{n}r_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}\cdots{}^{n}r_{b_{j-1}k}^{a_{j-1}i}\,. $$

Nun seien auf der Menge ${}^{n}G$ der Gitterpunkte $P(i, k)$, $i, k = 0\,(1)\,n$, gerichtete direkte Verbindungen nach folgenden Regeln definiert:

1. Mindestens eine derartige Verbindung von (u, v) nach (i, k) existiert genau dann, wenn ${}^{n}r_{vk}^{ui} > 0$.
2. Ist ${}^{n}r_{vk}^{ui} = x$ oder y, so existiert genau eine solche Verbindung.
3. Ist ${}^{n}r_{vk}^{ui} = 2\,x$ oder $2\,y$, so existieren genau zwei solche Verbindungen.

Andere Fälle treten nicht auf. Zwei Verbindungen sollen zusammenhängend heißen, wenn eine davon zu einem Punkte hin-, die andere von ihm weggerichtet ist. Ein Weg ${}^{n}s_{vk}^{ui\,(j)}$ von (u, v) nach (i, k) in j Schritten sei dann eine Folge von genau j Verbindungen derart, daß je zwei aufeinanderfolgende Verbindungen zusammenhängen und daß die erste von (u, v) weg-, die letzte nach (i, k) hingerichtet ist. Jedem solchen Weg entspricht ein Produkt von j Faktoren x oder y, und die Summe all dieser Produkte ist ${}^{n}r_{vk}^{ui\,(j)}$. Werden die Verbindungen achsenparallel bzw. als Schleifen im zweidimensionalen Schema der Punkte $P(i, k)$ eingetragen, so lassen sie sich in der in Abb. 2 durchgeführten Weise numerieren.

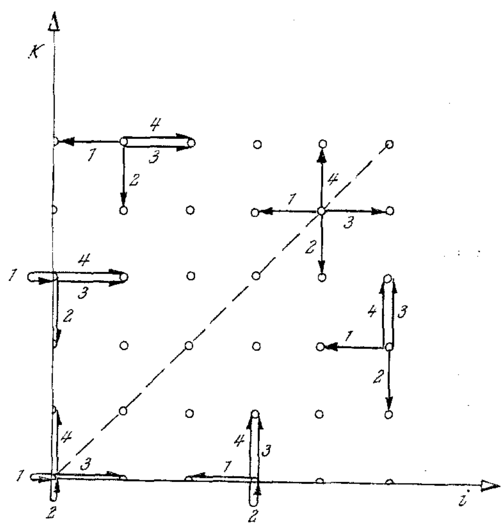

Abb. 2

Gehe nun ein Weg ${}^{n+1}s$ von (u, v) aus. Dann werde ihm nach folgender Vorschrift ein ebenfalls von (u, v) ausgehender Weg ${}^{n}s$ zugeordnet: ${}^{n+1}s$ sei nach m Schritten in ${}^{n+1}P$ angelangt und benutze von dort aus

Verbindung V, $V = 1, 2, 3, 4$; ${}^n s$ sei nach m Schritten in ${}^n P$ angelangt. Dann benutzt ${}^n s$ von dort aus ebenfalls die Verbindung V.

Diese Zuordnung ist eindeutig, und beiden Wegen entspricht ein Produkt gleicher Größe.

In den zugehörigen Warteschlangen-Modellen entspricht dem Weg ${}^{n+1}s$ bzw. ${}^n s$ eine gewisse Realisierung von ${}^{n+1}z\,(t)$ bzw. ${}^n z\,(t)$, und beiden Realisierungen liegt dieselbe, von der Größe des Warteraums unabhängige Folge von Ankünften und Abrufen zugrunde.

Lemma 2.3.2. *Landet ${}^{n+1}s$ nach m Schritten in ${}^{n+1}P = (i, k)$, so landet der zugeordnete Weg ${}^n s$ nach m Schritten in*
${}^n P \in U\,(i, k) := G \cap \{(i, k), (i-1, k), (i, k-1), (i-1, k-1)\}$,
wo G die Gesamtheit der Gitterpunkte ist.

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $m = 1$. Ist sie auch für den $(m-1)$-ten Schritt richtig, so kann man sie für den m-ten Schritt nach einer Anzahl von Fallunterscheidungen leicht beweisen.

Satz 2.3.2. *Die Folgen $\{{}^n\pi_k^i\}_n$ konvergieren monoton fallend gegen π_k^i für alle (i, k).*

Beweis. Sei ${}^n G = \{(i, k), i, k = 0\,(1)\,n\}$, und $B \subset {}^n G$ so beschaffen, daß mit P auch $U\,(P)$ in B enthalten ist. Der Menge der von $(0, 0)$ ausgehenden und in B nach j Schritten landenden Wege ${}^{n+1}s$ entspricht eine Menge von Produkten. Deren Summe ist gleich

$$\sum_{(i,k)\in B} {}^{n+1}r_{0k}^{0i\,(j)}.$$

Ferner ist dieser Menge von Wegen ${}^{n+1}s$ eine Menge von Wegen ${}^n s$ zugeordnet, die ebenfalls von $(0, 0)$ ausgehen und nach j Schritten gemäß Lemma 2.3.2 in B landen. Die Summe der zugehörigen Produkte ist kleiner oder gleich

$$\sum_{(i,k)\in B} {}^n r_{0k}^{0i\,(j)} \text{ und gleich } \sum_{(i,k)\in B} {}^{n+1}r_{0k}^{0i\,(j)}.$$

Also gilt

$$\sum_{(i,k)\in B} {}^{n+1}r_{0k}^{0i\,(j)} \leqslant \sum_{(i,k)\in B} {}^n r_{0k}^{0i\,(j)}$$

für alle $n \geqslant 1$, alle $j \geqslant 1$ und alle zulässigen B.

Für $B = \{(0, 0)\}$ ergibt dies

$${}^{n+1}r_{00}^{00\,(j)} \leqslant {}^n r_{00}^{00\,(j)} \text{ für alle } n \geqslant 0, j \geqslant 1.$$

Grenzübergang in j liefert

$${}^{n+1}\pi_0^0 \leqslant {}^n\pi_0^0 \text{ für alle } n \geqslant 0, \text{ also}$$

$$\exists\ x_0^0 := \lim_n {}^n\pi_0^0.$$

Für $B = \{(0, 0), (0, 1)\}$ ergibt sich

$$ {}^{n+1}r_{00}^{00(j)} + {}^{n+1}r_{01}^{00(j)} \leqslant {}^{n}r_{00}^{00(j)} + {}^{n}r_{01}^{00(j)}, \ j, n \geqslant 1. $$

Grenzübergang in j liefert

$$ {}^{n+1}\pi_0^0 + {}^{n+1}\pi_1^0 \leqslant {}^{n}\pi_0^0 + {}^{n}\pi_1^0 \text{ für } n \geqslant 1, \text{ also } \exists \lim_n ({}^{n}\pi_0^0 + {}^{n}\pi_1^0) $$

und somit

$$ \exists\, x_1^0 := \lim_n {}^{n}\pi_1^0. $$

Durch vollständige Induktion in B erhält man

$$ \exists\, x_k^i := \lim_n {}^{n}\pi_k^i \text{ für alle } i, k \geqslant 0. $$

Analog zu den Größen π_k^i genügen die ${}^{n}\pi_k^i$ dem Gleichungssystem

$$ 0 = \sum_a \sum_b {}^{n}\pi_b^a \, {}^{n}q_{bk}^{ai}, \ i, k \geqslant 0. $$

Wegen $\lim_n {}^{n}q_{bk}^{ai} = q_{bk}^{ai}$ genügen daher die x_k^i dem System (2.1.6),

also ist

$$ x_k^i = c\,\pi_k^i \text{ mit } c \geqslant 0. $$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $c = 1$.

Nun ist leicht einzusehen, daß zu gegebenem $j \geqslant 1$ ein $n_0(j)$ existiert mit ${}^{n}r_{00}^{00(j)} = r_{00}^{00(j)}$ für $n \geqslant n_0$. Das liefert aber mit

$$ {}^{n+1}r_{00}^{00(j)} \leqslant {}^{n}r_{00}^{00(j)} \text{ für alle } n \geqslant 0, j \geqslant 1 $$

die Ungleichungen

$$ {}^{n+1}r_{00}^{00(j)} \geqslant r_{00}^{00(j)} \text{ für } n \geqslant 0, \ j \geqslant 1, $$

also

$$ {}^{n}\pi_0^0 \geqslant \pi_0^0 \text{ für } n \geqslant 0. $$

Somit ist $c \geqslant 1$. Andererseits liefert ein bekanntes Lemma von Fatou

$$ 1 = \lim_n \sum_i \sum_k {}^{n}\pi_k^i \geqslant \sum_i \sum_k \lim_n {}^{n}\pi_k^i = c. $$

Also ist $c = 1$, q.e.d.

Korollar. *Im positiven Falle ist Frage B′ zu bejahen, im dissipativen Falle zu verneinen.*

Beweis. Starke Konvergenz der Operatorenfolge $\{{}^{n}\pi\}$ gegen π ist äquivalent der Bedingung

$$ \lim_n \sum_i \sum_k |\, {}^{n}\pi_k^i - \pi_k^i \,| = 0. $$

(Lemma 2.3.1).

Im positiven Fall ist

$$\sum_i \sum_k |{}^n\pi_k^i - \pi_k^i| = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} ({}^n\pi_k^i - \pi_k^i) + \sum_{\text{Rest}} \pi_k^i =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \pi_k^i + \sum_{\text{Rest}} \pi_k^i = 1 - 1 + 2 \sum_{\text{Rest}} \pi_k^i < \varepsilon$$

für $n > n_0(\varepsilon)$.

Im dissipativen Fall ist $\sum_i \sum_k |{}^n\pi_k^i - \pi_k^i| = 1$ für alle n.

Wir haben somit eine weitere Möglichkeit erhalten, Näherungswerte für die π_k^i zu bestimmen.

Literatur

[1] CHUNG, K. L.: MARKOV Chains with Stationary Transition Probabilities, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960.

[2] DUNFORD, N., and J. T. SCHWARTZ: Linear Operators I, New York: Interscience Publishers, Inc. 1958.

[3] HARDY, G. H.: Divergent Series, Oxford: Clarendon Press. 1956.

[4] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXXI. 1957.

[5] KENDALL, D. G., and G. E. H. REUTER: The Calculation of the Ergodic Projection for MARKOV Chains and Processes with a Countable Number of States. Acta Math. **97**, 103–144 (1957).

[6] KHINTCHINE, A. Y.: Mathematical Methods in the Theory of Queuing. Griffin's statistical monographs and courses, **7**, (1960).

[7] TROTTER, H. F.: Approximation of Semi-Groups of Operators. Pacific J. Math. **8**, 887–919 (1958).

Rolf Schassberger
Department of Mathematics
University of Alberta, Calgary, Alberta, Canada