

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck.)

## Zur Theorie der Hangwinde, nebst Bemerkungen zur Theorie der Berg- und Talwinde.

Von

**Friedrich Defant.**

Mit 15 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Gebirgswinden, insbesondere mit den tagesperiodischen Hangwinden. Nach einer kurzen Übersicht über die A. WAGNERSche Gebirgswindtheorie und ihren tagesperiodischen Ablauf, sowie zusammenfassenden Ausführungen der bisherigen Erkenntnisse über die Hangwinde an Berghängen wurden aus den Beobachtungen und Pilotierungen derselben mittlere, hangvertikale Windgeschwindigkeitsprofile für Hangaufwind bzw. Hangabwind für ungestörte Normaltage ermittelt. Anschließend findet eine neuere theoretische Behandlung einer stationären Hangwindströmung von L. PRANDTL eine umfassende Darstellung. Ihre Ergebnisse in bezug auf die theoretisch sich ergebenden hangvertikalen Geschwindigkeitsprofile sowie Temperaturstörungsprofile für Hangauf- bzw. Hangabwind werden eingehend mit denjenigen, welche aus den Beobachtungen gewonnen wurden, verglichen. Der Vergleich ist in den interessierenden Hangluftschichten bis zirka 100 m hangvertikal aufwärts überraschend gut. Weiterhin wird die PRANDTLsche Theorie auch auf tagesperiodischen Ablauf der Hangwinde erweitert und es ergibt sich, daß sich die Lösungen derselben für die Windgeschwindigkeit bzw. Temperaturstörung bei Vorgabe der Tagesperiode  $\sigma$  nur mit dem periodischen Faktor  $\cos \sigma t$  multiplizieren. Auch wird gezeigt, daß beim Lösungsgang die Modifikation der Größen  $\nu$  (Reibungskoeffizient) bzw.  $a$  (Temperaturleitfähigkeitskoeffizient) für die ganze Erscheinung wenig ausgibt.

Eine Diskussion und Vergleich der Hangwindgeschwindigkeitslösung mit derjenigen, die A. DEFANT beim Abfluß schwerer Luftmassen auf geneigtem Boden ermittelt hat, fällt befriedigend aus, soweit die beiden Theorien überhaupt vergleichbar sind. Die Fragen der Wahl der Reibungsgröße an solchen bewaldeten und unregelmäßigen Hangflächen und ihrer Verwendung bei Rechnungen findet eine ausführliche Darlegung. Abschließend sind mittlere rohe Berechnungen über den Lufttransport der Hangwindzirkulation und ihre Wirkung bei der Erzeugung des Berg- und Talwindes gegeben, die durch die Geschwindigkeitsverteilung vertikal zum Hang möglich wird; es ergeben

sich recht brauchbare mittlere Resultate, die einen Einblick in die Wirkungsweise der Hangwinde geben.

**Summary.** The present paper deals with the mountain winds and particularly with the slope breezes showing a diurnal variation. After a short discussion of A. WAGNER's theory on mountain winds and their diurnal variations and a summary of what is known up to now of breezes on mountain slopes, mean profiles of wind velocities above slopes for up and down blowing breezes, derived from observations and measurements with pilot-balloons, are plotted for undisturbed normal days. Then, a new theoretical treatment of a stationary slope current developed by L. PRANDTL is thoroughly discussed. Its results relative to the theoretical profiles of wind velocities above slopes as well as profiles of temperature anomalies for up and down blowing slope currents are confronted with those obtained from observations. The agreement between theory and observations is found to be surprisingly good within the first 100 meters of the slope air layer measured vertically to the slope. Moreover, PRANDTL's theory is also extended to the diurnal variations of the slope breezes, with the result that its solutions are to be multiplied only by the periodic factor  $\cos \sigma t$  if the daily period is  $\sigma$ . It is also shown that, in the course of the calculation, the variation of the value  $\nu$  (coefficient of friction), respectively  $\alpha$  (coefficient of temperature conductivity) does not play an important part.

A discussion and comparison of the solution for the velocity of slope breezes with that obtained by A. DEFANT for heavy air masses flowing down on inclined ground is found to be satisfactory as far as the two theories are comparable at all. The question which value of friction should be chosen for irregular and forest-covered slope surfaces as well as its application in calculations are discussed in detail. Finally, mean approximative calculations are given concerning the air transport of the slope wind circulation and its effect on the formation of the mountain and valley wind made possible by the distribution of velocities vertical to the slope; the mean results giving insight into the mechanism of the slope breezes are found to be very good.

**Résumé.** L'étude concerne les brises de montagne et en particulier les brises périodiques de versant. L'auteur donne tout d'abord un bref aperçu de la théorie de A. WAGNER ainsi que des indications détaillées sur les faits connus concernant les brises de versant; il donne ensuite des profils moyens de vitesse de ces brises établis sur la base d'observations et de sondages par ballons-pilote lors de journées types. Puis vient une description complète de la nouvelle théorie des courants permanents de versant due à L. PRANDTL; l'auteur compare ses résultats avec ceux de l'expérience en ce qui concerne les profils de vitesse et de température. L'accord entre la théorie et les faits, au moins dans la couche des premiers 100 m. d'épaisseur, est remarquablement bon. Il est possible d'étendre la théorie de PRANDTL aux variations périodiques diurnes des brises de versant; on constate qu'il suffit de multiplier les résultats théoriques relatifs à la vitesse du vent et à la perturbation thermique par le facteur périodique  $\cos \sigma t$ , où  $\sigma$  signifie la période diurne. On voit aussi que dans la discussion des résultats la modification des grandeurs  $\nu$  (coefficient de frottement) et de  $\alpha$  (coefficient de conductibilité thermique) a peu d'effet sur le phénomène.

Une comparaison des solutions données pour la vitesse des brises de versant avec celles que A. DEFANT a obtenues en étudiant l'écoulement de masses d'air lourdes sur un sol incliné est satisfaisante, pour autant que

les deux théories sont comparables. L'auteur discute le choix des coefficients de frottement suivant la nature du versant et leur emploi pour le calcul. Il tente enfin d'estimer à l'aide de la répartition des vitesses l'ordre de grandeur du transport de masses d'air dans la circulation des vents de versant et l'effet de ce transport sur la formation des brises de montagne et de vallée. Les résultats, assez satisfaisants, permettent d'éclairer le mécanisme des brises de versant.

## I. Einleitende Bemerkungen zu den A. WAGNERSchen Anschauungen über die Gebirgswinde.

Das Problem der periodischen Gebirgswinde ist in neuerer Zeit durch A. WAGNER, E. EKHART u. a. in zahlreichen Arbeiten behandelt und durch eine umfassende Theorie A. WAGNERS, die mit der Unterscheidung von Hangwinden, Berg- und Talwinden und Ausgleichströmungen zwischen Tiefebene und Hochflächen einen entscheidenden Schritt vorangetan hat und die früheren unterschiedlichen Auffassungen über die Gebirgswinde und ihre Entstehung einer strengeren Grundlage zugeführt hat, in befriedigender Weise gelöst werden [1 bis 31].

Auch die praktische Erforschung der Gebirgswinde und ihrer Mechanik ist durch zahlreiche Untersuchungen von E. EKHART, A. JELINEK, E. MOLL, A. RIEDEL u. a. weit vorangetragen worden und sie ging parallel mit den immer wieder neu entwickelten Anschauungen A. WAGNERS [1 bis 31].

Im Jahre 1938 hat E. EKHART in einem Aufsatz bzw. Vortrag [30] in übersichtlicher Darstellung betitelt „Die Tageszeitenwinde der Alpen“ das Gesamtsystem der Gebirgswinde behandelt und die Fragen einer Luftzirkulation zwischen Ebene und Gebirge besprochen, deren Mechanismus er zusammen mit A. BURGER in einer früheren Arbeit [25] untersucht hat.

Es mag hier der Hinweis auf diese umfassende Arbeitsreihe genügen, da sich vorliegende Arbeit lediglich mit einem Teilglied des Gebirgswindproblems, nämlich den tagesperiodisch ablaufenden Hangwinden, befassen soll und es sei mir erlaubt, zu Beginn dieser Untersuchung den grundlegenden Gedankengang der Theorie von A. WAGNER [31] aufzugreifen, um dann speziell den Anschluß an die tagesperiodischen Hangwinde zu gewinnen.

Nach Sonnenaufgang setzt in zunehmendem Maße eine Erwärmung der Gebirgshänge ein und es beginnt die den Hängen auflagernde Luft in Form von *Hangaufwinden* längs der Abhänge aufwärts zu strömen. Die Talluft als Ganzes ist zu diesem Zeitpunkt kälter als die Luft über der Ebene. Das Druckgefälle ist also, vorausgesetzt, daß in der Höhe der das Tal begleitenden Bergkämme kein ausgesprochenes Druckgefälle vorhanden ist, vom Tal gegen die Ebene gerichtet und der Talabwind ist noch im Gange.

Die längs den Hängen aufsteigende Luft biegt oberhalb oder in Höhe des Gebirgskammes der Talmitte zu und strömt dort abwärts, um vom Talabwind in allen Schichten bis zum Erdboden in Richtung gegen den

Talausgang geführt zu werden. Es ersetzt sich demnach die relativ zur Ebene kalte Talluft als Ganzes allmählich durch wärmere Hangluft und infolgedessen wird einmal ein Zeitpunkt eintreten, in dem Talluft und die Luft über der Ebene dieselbe Mitteltemperatur aufweisen. Die Flächen gleichen Druckes sind dann horizontal, es ist kein Druckgefälle mehr vorhanden und der Talabwind hört auf. Dies ist der Moment der Nullage zwischen Talab- und aufwind und die Hangwindzirkulation hat einen dem Talquerschnitt folgenden Verlauf. Alles was an Luft längs der Hänge aufsteigt, sinkt über der Talmitte ab und kehrt zu den Hängen zurück. Es ist dies auch der Zeitpunkt schnellster Erwärmung der Talluft als Ganzes.

Mit weiter zunehmender Erwärmung der Talluft gegenüber der Luft über der Ebene stellt sich nun ein Druckgefälle Ebene—Tal ein und es setzt mit zunehmender Stärke der Talaufwind ein. Je mehr Luft durch diesen taleinwärts geführt wird, desto weniger wird eine Abwärtsbewegung der Hangluftzirkulation in der Talmitte vor sich gehen und die längs der Hänge verstärkt aufsteigende Luft wird jetzt mehr und mehr in den oberen Kompensationsstrom des Talaufwindes einbezogen werden.

Nach und nach erlischt gegen den Nachmittag hin mit der Abnahme der direkten Erwärmung der Hänge langsam der Hangaufwind, nachdem sein stetig abnehmender Lufttransport nun fast zur Gänze oberhalb der Kammhöhe mit dem Kompensationsstrom des Talaufwindes der Ebene zugeführt wurde. Die Talluft erreicht ihr Temperaturmaximum, der Druckgradient Ebene—Tal ist am stärksten und wenn dann am Spätnachmittag die Hangwindzirkulation völlig erlischt, strömt die Luft lediglich der Talsohle parallel und der Talaufwind tritt bis an die seitlichen Berghänge heran.

Von da an beginnt die langsame Abkühlung der Talluft, die durch die nun einsetzenden *Hangabwinde* stetig verstärkt wird, ebenso wie die Aufwärtsbewegung über der Talmitte eine stetige Abkühlung der Talluft als Ganzes bewirkt, verstärkt durch die einsetzende Ausstrahlung.

Und so kommt der Moment, in dem zwischen Talluft und der Luft über der Ebene Temperatúrausgleich stattfindet, die Flächen gleichen Druckes eben werden und der Talaufwind durch die Nullage in den Talabwind übergeht.

Wieder verläuft die Hangwindzirkulation im Talquerschnitt allein und alle längs der Hänge absteigende Luft wird über der Talmitte aufsteigen und dem Hang in Kammhöhe zuströmen, entsprechend der Abb. 2, nur im umgekehrten Sinne. Nun setzt der Talabwind ein und alle längs der Hänge absteigende Luft wird durch diese in stetig sich verstärkendem Maße dem Talausgang zugeführt.

Die Talluft erreicht als Ganzes ihr nächtliches Temperaturminimum, die vertikale Aufwärtsbewegung über der Talmitte hört gänzlich auf und schließlich hören die Hangabwinde auf. Die Luft strömt jetzt wieder der Talsohle parallel und der Talabwind tritt infolge des Fehlens jeder Hangwinde wieder ähnlich der Abb. 4 an die seitlichen Bergabhänge heran.

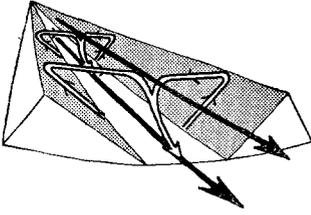


Abb. 1. Luftströmung am Morgen bei Sonnenaufgang. Beginn der Hangaufwinde (weiße Pfeile). Im Tale selbst noch Bergwind (schwarze Pfeile). Druckgefälle: talabwärts. Temperatur: Tal kalt, Ebene relativ warm. Temperaturänderung bis Abb. 2: Tal Erwärmung, Ebene Abkühlung.

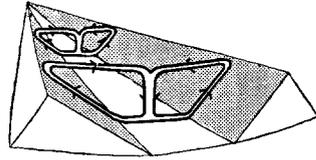


Abb. 2. Luftströmung vormittags (zirka 9 Uhr). Starke Hangaufwinde. Übergang vom Berg zum Talwind. Druckgefälle: Null. Temperatur: ausgeglichen. Temperaturänderung bis Abb. 3: starke Erwärmung im Tal, geringe Temperaturänderung über Ebene.

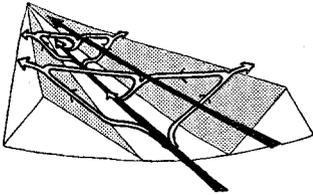


Abb. 3. Luftströmung Mittag bis früher Nachmittag. Abflauende Hangaufwinde. Talwind in voller Entwicklung. Druckgefälle: talaufwärts. Temperatur: Tal warm, Ebene relativ kalt. Temperaturänderung bis Abb. 4: keine wesentliche.

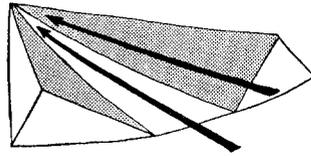


Abb. 4. Luftströmung am späten Nachmittag. Hangaufwinde erloschen. Talwind in gleicher Stärke wie bei Abb. 3, tritt bis an die seitlichen Hänge heran. Druckgefälle: talaufwärts. Temperatur: Tal warm, Ebene relativ kalt. Temperaturänderung bis Abb. 5: im Tal langsam Abkühlung.

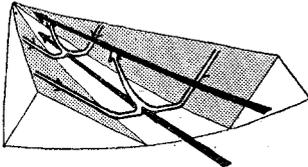


Abb. 5. Luftströmung Abends. Einsetzende Hangabwinde. Talwind abflauend. Druckgefälle: noch talaufwärts. Temperatur: im Tal wenig wärmer wie über Ebene. Temperaturänderung bis Abb. 6: im Tal starke Abkühlung, Ebene nur geringe Abkühlung.

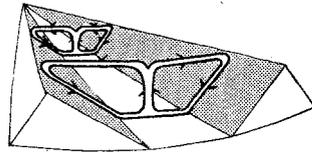


Abb. 6. Luftströmung später Abend bis erste Nachthälfte. Hangabwinde. Übergang vom Tal zum Bergwind. Druckgefälle: Null. Temperatur: ausgeglichen. Temperaturänderung bis Abb. 7: im Tal weitere starke Abkühlung.

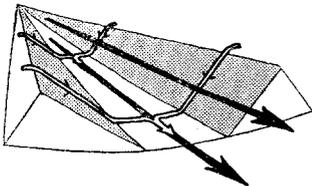


Abb. 7. Luftströmung nachts. Hangabwinde. Bergwind. Druckgefälle: talabwärts. Temperatur: im Tale kalt, Ebene relativ warm. Temperaturänderung bis Abb. 8: im Tale Abkühlung, über der Ebene geringe Abkühlung, relativ zum Tale warm.

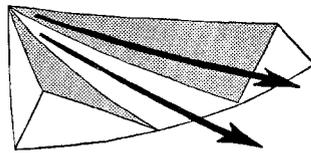


Abb. 8. Luftströmung nachts bis morgens. Hangabwinde erloschen. Bergwind, tritt bis an die seitlichen Hänge heran. Druckgefälle: talabwärts. Temperatur: im Tale kalt, über der Ebene wärmer. Temperaturänderung bis Abb. 1: im Tal und über der Ebene geringe Änderungen.

Abb. 1 bis 8: Schematische Darstellung eines Tales und der in ihm vorhandenen Luftströmungen an einem Normaltag.

Mit Sonnenaufgang und Erwärmung der Hänge beginnt der Hangaufwind wieder einzusetzen und damit schließt sich die Kette dieses tagesperiodischen Zirkulationssystems und es folgt wieder der Zustand wie ihn die Abb. 1 zeigt.

Das Wechselspiel zwischen Berg- und Talwind und den Hangwinden zeigt eine Verschiebung der Entwicklungsphase von Talab- und -aufwinden. Je nachdem diese Verschiebung groß, klein oder ausgeglichen ist, ändert sich das Bild der Gesamtzirkulation der Winde im Tale. Es ist nicht notwendig, auf die jahreszeitliche Schwankung derselben hier näher einzugehen, denn diese ist ja an sich bereits verständlich, wenn man an die treibende Kraft dieser Zirkulation, nämlich mit A. WAGNER, an den verschiedenen Gang der Temperaturschwankung im Tale und in der Ebene und an die verschiedene Einwirkung der Bestrahlung der Gehänge im Sommer und Winter, namentlich bei Schneeauflage in der letzteren Jahreszeit denkt.

Und nun wenden wir uns speziell den Hangwinden zu, deren Aufbau durch die aerologischen Untersuchungen des Innsbrucker meteorologischen Instituts bereits studiert wurde, wenn auch das Material sich nur auf wenige Meßtage bei verschiedenen äußeren Bedingungen erstreckt. Die tägliche Entwicklung der Hangwinde hinsichtlich ihrer Intensität und vertikalen Erstreckung ist ohne weiters vom Gesichtspunkt der täglichen Erwärmung bzw. Abkühlung, die durch Ein- und Ausstrahlung hervorgerufen wird, verständlich. Ebenso ist es verständlich, daß eine ungestörte Zirkulationsbewegung im Sinne der WENGERschen Hangwindtheorie fußend auf dem BJERKNESschen Zirkulationstheorem nur dann stattfindet, wenn ungestörte Ein- und Ausstrahlungsverhältnisse vorhanden sind und die Bodenbeschaffenheit des Hanges idealen gleichmäßigen Verhältnissen nahekommt. Jede Bodenstörung, sei es Bewaldung, seien es Rinnen und Gräben werden modifizierend wirken und den Hangwinden einen von einem gleichförmigen Zustand abweichenden mehr turbulenten Charakter aufprägen. Auch die zeitweise Beschattung der Gehänge spielt für die gleichmäßige Entwicklung der Hangwinde eine wichtige Rolle.

Entscheidend für die Hangwinde aber sind die Temperaturverhältnisse einerseits am Hang selbst oder in dessen unmittelbarer Nähe und andererseits jene in einiger Entfernung vom Hang, also etwa über der Talmitte in gleicher Höhe. Die tägliche Temperaturschwankung eines Punktes am Hang und eines korrespondierenden Punktes im freien Tal in gleicher Höhe ist ihrer unterschiedlichen Größe wegen eine nach WENGER entscheidende treibende Kraft, die die Hangwindzirkulation aufrecht erhält. Die Erkenntnis JELINEKS, daß bei Hangaufwinden ein stark überadiabatisches Temperaturgefälle, bei Hangabwinden dagegen Bodeninversion und zu den Zeiten der Windumkehr Isothermie vorhanden ist, ist sehr aufschlußreich und ebenso ist die Tatsache des Umschlages der Richtung der Hangwinde von Auf- in Abwinde bei einer Änderung des Temperaturgefälles von Zu- in Abnahme mit der Höhe eine aus dem Beobachtungsmaterial gewonnene Erkenntnis.

Die Schichtdicke des Hangwindes senkrecht zum Hang wird nach den bisherigen Erkenntnissen etwa zu 200 m angegeben, jedoch ist dies nur ein roher Wert, der bei ungestörter Schönwetterlage und guter Ausbildung der Hangwindzirkulation etwa 260 m erreichen kann. Der nächtliche Hangabwind scheint kleinere Schichtdicken aufzuweisen, was an sich verständlich ist. Längs des Hangprofils scheint die Schichtdicke gegen die Kammhöhe hin zuzunehmen, also stellt sich die Hangaufwind-schicht als eine nach oben zu keilförmig anwachsende, dem Hang aufliegende Windschicht dar.

Die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Hang scheint größenordnungsmäßig nach den Beobachtungen bei Werten zwischen 2 und 4 m/sec zu liegen, jedoch gilt dies nur für eine mittlere Hangneigung von etwa  $30^\circ$  und wechselt mit dem Neigungswinkel des Hanges sehr stark. In unmittelbarer Bodennähe scheinen die horizontalen wie auch die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten kleine Werte zu haben und ihre maximalen Werte sind mehr auf die mittlere Höhe der Hangwind-schicht konzentriert.

Die relativ sehr dünne Schicht der Hangwinde reagiert in verständlicher Weise auf jede äußere Einwirkung besonders rasch und jede Bestrahlungsänderung ruft eine sofortige Reaktion in der Hangwindströmung hervor. So kann beispielsweise eine vorübergehende Beschattung des Hanges bereits die Hangwindströmung empfindlich stören und der Windwechsel von Ab- in Aufwind und umgekehrt ist gebunden an die Wanderung der Schattengrenze längs des Hanges. Auch die Exposition spielt für die Entwicklung der Hangwindströmung, für ihr Einsetzen bzw. Absterben und für ihre Intensität eine entscheidende Rolle.

Dieser kurze einleitende Überblick soll für den Zweck vorliegender Arbeit genügen. Es hat mich mein Vater (Prof. Dr. A. DEFANT) auf eine theoretische neuere Ableitung der Ausbildung von Hangwinden von L. PRANDTL [33, S. 373] aufmerksam gemacht, die anscheinend gestattet, einen tieferen Einblick in das Wesen der Hangwinde zu gewinnen.

Dieser Anregung folgend, habe ich mich mit der PRANDTL'schen Darstellung, die bisher in den meteorologischen Fachkreisen keinerlei Erwähnung gefunden hat, näher befaßt und insbesondere diese Arbeit zu einer Untersuchung meines Vaters „Über den Abfluß schwerer Luftmassen auf geneigtem Boden usw.“ in Beziehung gesetzt, mit der sie einige bemerkenswerte Zusammenhänge aufweist, die für eine detaillierte Behandlung ausreichend erscheinen [32].

Die PRANDTL'sche Darstellung befaßt sich mit der Strömung geschichteter Luft an geneigten Hängen und trägt die Überschrift „Berg- und Talwind in geschichteter Luft“ vom meteorologischen Gesichtspunkt der vorstehenden Ausführungen zu Unrecht und stellt lediglich eine Behandlung der Hangwinde dar. Dies sei zur Vermeidung von Unklarheiten vorweggenommen. Für die nachfolgenden Ausführungen ist es aber unerlässlich, sich aus den bisherigen Messungen und Pilotierungen an Hängen ein mittleres quantitatives, wenn auch nur mehr oder weniger rohes Bild der Hangauf- und -abwinde zu verschaffen und ein kurzes diesbezügliches Kapitel einzuschließen.

## II. Ableitung von mittleren vertikalen Geschwindigkeitsprofilen für Hangaufwind und Hangabwind aus den Pilotierungen an Berghängen.

Die bisherigen Untersuchungen und Pilotierungen, sowie Temperaturmessungen an Berghängen des Inntals hatten alle den Zweck, tieferen Einblick in das Wesen der Hangwinde und den Nachweis derjenigen Rolle zu bringen, die die Hangwinde innerhalb der Gebirgswindzirkulation rein überlegungsmäßig spielen müssen.

Die rein schematischen kurzen Rechnungen, die WENGER [2] überschlagsmäßig für die Geschwindigkeit der Hangwinde gegeben hat, befriedigen in keiner Weise und lassen die Geschwindigkeitsverteilung vertikal zum Hang, also die Verteilung der hangprofilparallelen Geschwindigkeitskomponente mit der Höhe vertikal zum Hang, offen. Auch die bisherigen Messungen beschränken sich in der Hauptsache auf die Feststellung der vertikalen und horizontalen Geschwindigkeitskomponenten für jeden Moment der Flugbahn der Pilotballone, sowie auf die Feststellung der relativen Höhe derselben über dem Aufstiegsort.

Aber diese Behandlung der Hangwinde scheint mir weniger charakteristisch für dieselben zu sein, denn wie schon ihr Name sagt, sind die Hangwinde Strömungen, die von der Neigung der Gehänge abhängig sind und durch diese begründet und bedingt sind. So kann eine Beziehung auf ein Koordinatensystem, welches mit seinem Ursprung im Aufstiegsort der Pilotballone liegt und eine horizontale  $x$ -Achse und eine vertikale  $z$ -Achse ohne Rücksicht auf die Hangneigung besitzt, nicht voll befriedigen. Vielmehr wird es angezeigt sein, ein Koordinatensystem zu wählen, welches seinen Ursprung im Aufstiegsort, seine  $x$ -Achse in der Hangfläche in Richtung senkrecht zum Gebirgskamm und seine  $z$ -Achse vertikal zum Hang nach oben besitzt. Wir wollen demnach abweichend von den horizontalen und vertikalen Koordinaten  $x$  und  $z$ , die Hangkoordinaten mit  $s$  (in der Hangfläche) und mit  $n$  (vertikal zum Hang) benennen (mit PRANDTL). Die Behandlung der Strömung als zweidimensionales Problem schließt die dritte Koordinate parallel zur Talrichtung im Hang liegend aus.

Ich habe nun die Messungen von A. RIEDEL [19] am Abhang der Innsbrucker Nordkette benützt, um mir mittlere Profile der Hangwindgeschwindigkeit und zwar deren Komponente in der Hangprofilrichtung für Hangauf- und -abwind zu konstruieren. Und zwar habe ich für insgesamt 11 Vertikalprofile von Pilotballonaufstiegen (Doppelvisierungen) die veröffentlichten Werte der relativen Höhen der Bahnpunkte über dem Aufstiegsort, sowie deren horizontale bzw. vertikale Geschwindigkeitskomponente einer Transformation in oben beschriebenes Hangkoordinatensystem unterzogen. Dabei wurde beachtet, daß die 11 Aufstiege möglichst ungestörte Hangaufwindverhältnisse zeigten und keinerlei äußere störende Einflüsse sich bemerkbar machten. Das mehr oder weniger geneigte Hangprofil wurde durch geradlinige Stücke an-

genähert und die horizontalen bzw. vertikalen Geschwindigkeitskomponenten jedes Bahnpunktes möglichst genau gemäß diesen unterschiedlichen Teilneigungen in Komponenten parallel zum Hangprofil zerlegt, ebenso die vertikale Höhe über dem Hang für jeden Bahnpunkt berechnet.

Unter der Annahme stationärer Geschwindigkeitsverhältnisse durch alle Schichten hindurch habe ich nun die entfernungsmäßig vom Aufstiegsort auseinanderliegenden Bahnpunkte in einer mittleren Linie senkrecht zum Hang vereinigt, so wie man es ja gewöhnlich bei der Bearbeitung von Pilotballonaufstiegen tut, und konnte so Profile der hangprofilparallelen Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Hang zeichnen.

Nachfolgende Tabelle I gibt die Mittelwerte dieser hangparallelen Komponente der Windgeschwindigkeit nach 11 Hangaufwindpiloten (in m/sec) für die 5 m Höhenstufen (vertikal zum Hang) bis zu 130 m Höhe wieder.

Tabelle 1. *Hangparallele Geschwindigkeit  $w$  (in m/sec) in Abhängigkeit von  $n$ .*  
(Mittelwerte von 11 Hangaufwindpiloten.)

Höhe $n$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Mittelwert	2,29	2,91	3,39	3,70	<b>3,86</b>	<b>3,86</b>	3,80	3,67	3,53	3,39	3,24	3,09	3,04

Höhe $n$	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
Mittelwert	2,89	2,76	2,76	2,61	2,53	2,48	2,42	2,35	2,29	2,27	2,26	2,29	2,38

Es ist klar, daß nur eine gleichzeitige exakte Messung in allen diesen Höhen wahre Werte liefern könnte, jedoch zeigt die vernünftige Verteilung der Geschwindigkeiten mit der Höhe, daß selbst eine so notgedrungen rohe Berechnung doch brauchbare Werte und Unterlagen schaffen kann, bei Auswahl günstiger Aufstiegsbedingungen und möglichst sorgfältiger Auswertung.

Fast alle 11 Geschwindigkeitsverteilungen zeigen ein Anwachsen der Geschwindigkeit vom Boden bis in Höhen von 20 bis 40 m, dann einen Abfall der Geschwindigkeit. Mit steigender Höhe zeigen sich allerdings recht unterschiedliche Werte. Es muß verständlich sein, daß bald nach Durchstoß der Hangwindsschicht der Ballon von den mehr oder weniger ausgeprägten und unterschiedlichen Gradientwindströmungen darüber oder von den eigentlichen Berg- und Talwinden erfaßt wird, die dann oberhalb einer gewissen Höhe langsam in stetig zunehmendem Maß die Geschwindigkeit beeinflussen.

Diese oberen Schichten stören anscheinend keineswegs die recht anschaulich zutage tretende Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Hangwindsschicht und in dieser Schicht ist eine Gesetzmäßigkeit doch

zweifellos erkennbar. Da alle Aufstiege bei unterschiedlicher Tageszeit vorgenommen wurden, zeigen sich Schwankungen innerhalb der Geschwindigkeitsgröße der einzelnen Aufstiege, was an und für sich für

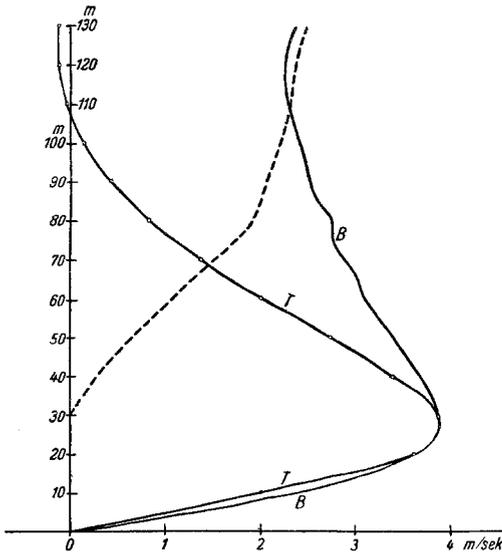


Abb. 9. Hangvertikales Windgeschwindigkeitsprofil für Hangaufwinde. *B* nach den Beobachtungen, *T* nach der Theorie, gestrichelte Kurve = Differenz zwischen *T* und *B*.

eine Mittelbildung nur günstig ist. Die mittlere Kurve zeigt die Abb. 9.

Man erkennt eine steti-ge Geschwindigkeitszunahme vom Boden bis zu einer Höhe von 27 m, wo die hangprofilparallele Geschwindigkeit mit einem Wert von 3,9 m/sec ein Maximum erreicht. Dann setzt eine stetige Abnahme der Geschwindigkeit ein, die in den Höhen 110 bis 130 m mit Werten von zirka 2,3 m/sec abschließt. Diese Beschreibung soll hier genügen; auf die in der Abb. 9 eingezeichneten weiteren Kurven komme ich später zurück.

Eine im Wesen gleiche Methode wurde bei der Konstruktion eines entsprechen-

den Hangabwindprofils angewendet. Wieder wurden nur Aufstiege bei möglichst ungestörtem Hangabwind verwendet und nach gleicher Komponentenzerlegung die Geschwindigkeiten der hangprofilparallelen Komponente und die vertikale Höhe über dem Hang für jeden Bahnpunkt ermittelt.

Die Tabelle 2 gibt die Ergebnisse in m/sec im Mittel der fünf Aufstiege wieder.

Tabelle 2. Hangparallele Geschwindigkeit *w* (in m/sec) in Abhängigkeit von *n*. (Mittelwerte aus 5 Hangabwindpiloten.)

Höhe <i>n</i>	2,5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
Mittel	0,63	0,96	1,50	1,95	2,22	<b>2,34</b>	<b>2,35</b>	2,27	2,15	2,04	1,91	
Höhe <i>n</i>	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
Mittel	1,81	1,74	1,66	1,60	1,49	1,34	1,10	0,86	0,40	0,23	0,19	-0,02

Auch hier zeigt sich wiederum die Zunahme der Geschwindigkeit in den unteren Metern bei jedem Aufstieg bis zu Höhen von 20 bis 40 m

und dann der Abfall der Geschwindigkeit, der mit steigender Höhe in ungleichmäßige Schwankungen übergeht.

Die Mittelbildung zeigt eine der Hangaufwindströmung entsprechende Geschwindigkeitsverteilung. Die Abb. 10 gibt diese mittlere Kurve wieder.

Wieder erfolgt ein Ansteigen der Geschwindigkeit vom Boden bis in eine Höhe von 27 m mit einem jetzt schwächeren Maximum von 2,36 m/sec. Dann setzt sich die Kurve mit Geschwindigkeitsabnahme nach oben zu fort und auch hier muß zweifellos der Störungseinfluß des Berg- und Talwindes bzw. des Gradientwindes in der Höhe bestimmend für das Aussehen des oberen Kurventeiles werden.

Zusammenfassend können wir also sagen: Es ergibt sich aus den Beobachtungen eine Zunahme der hangprofilparallelen Windströmung bis in eine Höhe von 27 m im Mittel bei Hangaufwind und Hangabwind, wobei dieses Maximum verständlicherweise beim Hangaufwind im Mittel stärker ist (3,9 m/sec) als bei Hangabwind (2,36 m/sec). Von dort an setzt sich die Kurve mit Geschwindigkeitsabnahme fort, die rein überlegungsmäßig bis zur Windruhe an der Obergrenze der Hangwindsschicht absinken müßte. Die Abnahme ist im Mittel deutlich erkennbar, jedoch ist der störende Einfluß der allfälligen Gradientwindströmung bzw. des Berg- und Talwindes vorhanden, der ein Absinken der Geschwindigkeit auf den Nullwert an der oberen Grenze der Hangwindsschicht nicht eintreten läßt.

Soweit das vertikale Geschwindigkeitsprofil und seine überschlagsmäßige Behandlung.

Es interessiert nun noch die thermische Schichtung vertikal zum Hang. Diese ist leider bis in größere Höhen nicht ermittelt worden und es liegen lediglich Messungen der Temperatur an den Seilbahnstützen der Innsbrucker Nordkettenbahn bzw. Patscherkofelbahn vor [27], d. h. bis zu Höhen von 20 m.

Diese Beobachtungen sind ausgeführt worden an Tagen, wo der Hang eine Schneedecke trug, durch welche in den alleruntersten Schichten (bis zu 2 m) eine besonders niedrige Temperatur erzwungen wurde. Auch an den Tagen, an denen darüber ein richtiger Hangaufwind vorhanden war. In dieser oberen Schicht (bis 20 m) zeigt sich bei Hangaufwind eine schwache Temperaturzunahme, die allmählich in die normale

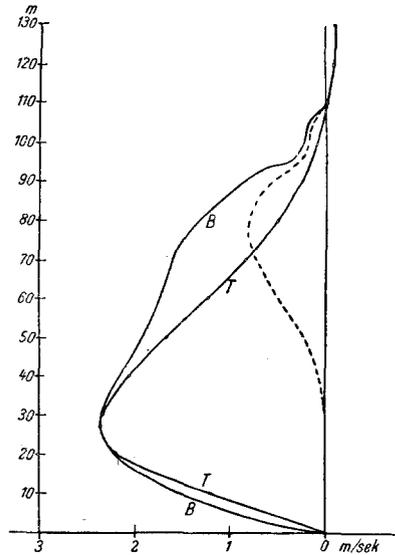


Abb. 10. Hangvertikales Windgeschwindigkeitsprofil für Hangabwinde. *B* nach den Beobachtungen, *T* nach der Theorie, gestrichelte Kurve = Differenz zwischen *T* und *B*.

Temperaturabnahme mit der Höhe übergeht. Das Temperaturgefälle senkrecht zum Hang ist durch die dem Boden auflagernde Schneedecke sicherlich wesentlich gestört und es ist zu erwarten, daß in normalen Fällen ohne Schneedecke in den alleruntersten Schichten ein überadiabatischer Gradient bei Hangaufwind vorhanden ist. A. WAGNER bemerkt, daß nach von ihm vorgenommenen Messungen dieser stark überadiabatische Temperaturgradient ein charakteristisches Merkmal des Hangaufwindes ist. Eine zahlenmäßige Darstellung desselben ist leider nicht zu geben. Bei Hangabwind unterstützt natürlich die dem Boden auflagernde Schneedecke die niedrigen Temperaturen der alleruntersten Schichten, die den Hangabwind ja erzeugen. Wie die Beobachtungen auch zeigen, ist bei Hangabwind stets eine Bodeninversion vorhanden, die erst oberhalb des Hangwindmaximums in die normale Temperaturabnahme mit der Höhe übergeht.

### III. Die PRANDTLsche Theorie stationärer Hangwindströmungen.

L. PRANDTL [33, S. 373] behandelt das Problem des Hangwindes von folgenden Gesichtspunkten aus. Über einem unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontale geneigten Hang sei eine stabil geschichtete Luft gelagert, was besagt, daß in ihr die potentielle Temperatur mit der Höhe zunimmt. Ein in einer solchen Luftschichtung eingelagertes Luftteilchen wird bei Erwärmung nur zu einer solchen Höhe aufzusteigen vermögen, in welcher es von Teilchen gleicher Temperatur umgeben ist. Wird ihm jedoch von der Unterlage, also von der Hangfläche, eine weitere Erwärmung zugeführt, so steigt es weiter auf, je nach Dauer und Stärke der Wärmezufuhr.

Wenn nun aber die geneigte Hangfläche eine bestimmte höhere Temperatur besitzt als die ihr auflagernde Luftschichte, so werden sich die Luftteilchen derselben mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fortbewegen, wenn man von der Anlaufzeit am unteren Rande des Hanges absieht.

Die Koordinaten  $x$  (horizontal) und  $z$  (vertikal) werden, wie schon erwähnt, ersetzt durch die Koordinaten  $a$  (hangparallel) und  $n$  (hangvertikal).

Nimmt man nun die potentielle Temperatur  $\vartheta$  mit stetiger Zunahme in der Form  $A + Bz$  an und fügt ihr eine gewisse Temperaturstörung  $\vartheta'$  hinzu, welche von der Wärmeleitung der erwärmten schrägen Hangfläche herrührt und in der Richtung  $n$  wirksam ist, so ergibt sich der Ansatz für die potentielle Temperatur in der Form

$$\vartheta = A + Bz + \vartheta'(n) \quad (1)$$

Bei diesem Ansatz ist die Bewegungsursache der Luft hangauf- bzw. -abwärts gegeben durch die Auftriebskraft, die senkrecht nach oben durch die Größe  $g \frac{\rho' - \rho}{\rho'}$  gegeben ist. Dabei ist  $\rho'$  die ungestörte Dichte und  $\rho$  die Dichte des betrachteten gestörten Teilchens [siehe 36, S. 47].

Nun ist  $\varrho = \frac{\varrho' T'}{T' + \vartheta'}$  und in erster Annäherung erhält man als Beschleunigung nach oben bei positivem  $\vartheta'$  den Wert  $g \beta \vartheta'$ , wenn man für  $\frac{1}{T'} = \beta$  setzt. In der Richtung des Hanges aufwärts wirkt dann die Auftriebsbeschleunigung.

Die Geschwindigkeit  $w$  parallel zum Hang in der Richtung  $s$  wird als Funktion der Richtung  $n$  erwartet und ihre zeitliche Änderung muß gleich der Summe der Auftriebsgröße  $g \beta \sin \alpha \cdot \vartheta'$  und der Reibungsgröße  $\nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$  sein, also

$$\frac{dw}{dt} = g \beta \sin \alpha \cdot \vartheta' + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad (2)$$

und für den stationären Zustand  $\left(\frac{dw}{dt} = 0\right)$  ergibt sich die Beziehung

$$0 = g \beta \sin \alpha \cdot \vartheta' + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}. \quad (3)$$

Die Wärmeleitungsgleichung für die erwärmte Hangfläche ergibt die Beziehung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} \right), \quad (4)$$

wobei  $a$  der Temperaturleitfähigkeitskoeffizient ist.

Bei bewegter Luft in Richtung  $s$  ist

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \quad (5)$$

zu setzen, worin für den stationären Zustand  $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0\right)$  wird. Vernachlässigt man in (4)  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2}$  gegenüber  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2}$ , was erlaubt ist, so ergibt die Beziehung (4) die Gleichung

$$w \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2}. \quad (5a)$$

Gemäß der Transformation der Koordinaten ist  $z = s \cdot \sin \alpha + n \cos \alpha$  und es ergibt sich aus Gleichung (5a) und (1)

$$w \cdot B \sin \alpha = a \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial n^2}. \quad (6)$$

Durch zweimalige Differentiation nach  $n$  und Einsetzen in Gl. (3) erhält man

$$0 = g \sin \alpha \beta \vartheta' + \frac{a \nu}{B \sin \alpha} \cdot \frac{\partial^4 \vartheta'}{\partial n^4}. \quad (7)$$

Die einfache Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\vartheta' = C \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot \cos \frac{n}{l}, \quad (8)$$

worin

$$l = \sqrt[4]{\frac{4 \alpha \nu}{g \beta B \cdot \sin^2 \alpha}} \quad (9)$$

ist.

Differenziert man die Lösung (8) zweimal nach  $n$  und setzt diesen Wert in (6) ein, so findet man für  $w$  die Gleichung

$$w = C \cdot \sqrt{\frac{g \beta \alpha}{B \cdot \nu}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot \sin \frac{n}{l}. \quad (10)$$

Damit ist die Lösung des Problems im Falle einer stationären Strömung längs des Hanges erzielt und sowohl die Temperaturstörung als auch die Geschwindigkeit  $w$  in Abhängigkeit von  $n$  (vertikal zum Hang) gewonnen.

Bei vorgegebener Annahme der Größe  $C$  in den Lösungsausdrücken (8) und (10), welche ein Maß für die Temperaturstörung an der Hangfläche ( $n = 0$ ) ist, gibt nun L. PRANDTL das Aussehen von  $\vartheta'$  und  $w$  in Form einer graphischen Darstellung wieder.

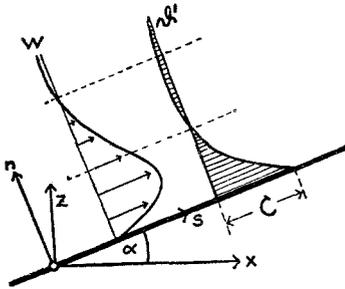


Abb. 11. Schematische Darstellung des Wind- und Temperaturstörungsprofils vertikal zum Hang nach L. PRANDTL.

Man erkennt, daß  $w$  mit der Höhe vertikal zum Hang (also in Richtung  $n$ ) in den unteren Schichten rasch zunimmt, ein Maximum erreicht und dann wieder sich langsamer, als vorher der Anstieg zum maximalen Wert war, dem Wert Null nähert, ja sogar in gewisser Höhe kleine negative Werte aufweist.

Die Kurve der Störung der potentiellen Temperatur  $\vartheta'$  zeigt am Boden den angenommenen Wert  $C$  und nimmt dann stetig mit zunehmender Höhe  $n$  ab, erreicht einen Wert Null und für

bestimmte Höhen darüber kleine negative Werte, was nach PRANDTL daraus resultiert, daß infolge Reibung durch den Wärmeartrieb auch Schichten bewegt werden, die selbst nicht erwärmt und nach einer Hebung kälter als die Umgebung im ungestörten Zustand sind.

Es ist nun zweifellos von Interesse, wie weit die PRANDTLsche Theorie in ihrer einfachen stationären Form den mittleren Beobachtungstatistiken, die ich oben ausgeführt habe, gerecht zu werden vermag.

#### IV. Diskussion der PRANDTLschen theoretischen Lösung und Vergleich mit den Beobachtungen.

Zu einem solchen Vergleich ist eine eingehende Diskussion der zu einer Berechnung anzuwendenden Konstanten nötig.

Die Annahme einer Temperaturstörung von  $5^\circ \text{C}$  am Hangboden ( $n = 0$ ), dürfte mittleren Verhältnissen recht gut entsprechen, also wollen

wir  $C = 5^\circ \text{C}$  setzen. Die potentielle Temperaturschichtung soll durch einen mittleren Wert von  $0,4^\circ/100 \text{ m}$  festgelegt werden, also ist  $B = 4 \times 10^{-5} [\text{grad} \cdot \text{cm}^{-1}]$ . Der Wert von  $\beta = \frac{1}{T}$  sei mit  $\frac{1}{283^\circ}$  angenommen. Den mittleren Neigungswinkel  $\alpha$  des Hanges wollen wir entsprechend dem Bodengefälle an der Beobachtungsstelle der Innsbrucker Nordkette (Seegrube) zu  $42,5^\circ$  annehmen.

Die Größe des Reibungskoeffizienten  $\nu$  und des Koeffizienten der Temperaturleitfähigkeit  $a$  wollen wir detaillierter behandeln.

Bezeichnen wir mit  $A_\tau$  die Austauschgröße infolge von Impulstransport (Scheinreibung) und mit  $A_q$  die Austauschgröße infolge von Transport des Wärmeinhaltes (scheinbare Wärmeleitung), so ist  $\nu = \frac{A_\tau}{\rho}$  und  $a = \frac{A_q}{\rho}$ , wenn wir mit  $\rho$  die Dichte der Luft bezeichnen.

Für *turbulente Strömungsverhältnisse* ist für die Größe  $\frac{a}{\nu} = \frac{A_q}{A_\tau}$  nach gleichzeitigen Messungen des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils im Nachlaufstrom eines erhitzten Stabes eindeutig der Wert 2 ermittelt worden. Andererseits ergaben die Messungen der Vermischung eines Luftstrahls mit Luftstrahlen anderer Temperatur ebenfalls den Wert 2 (siehe [33], S. 108). Bisher war es üblich, für die turbulenten Reibungsschichten an einer Wand  $A_q = A_\tau$ , also  $\frac{a}{\nu} = \frac{A_q}{A_\tau} = 1$  zu setzen. Man stand damit stets im Einklang mit den Versuchen.

Neueren Messungen von Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen an Platten und Rohren von F. ELIAS und H. LORENZ aus den Jahren 1930 und 1934 zufolge ergab sich aber ein Wert  $\frac{A_q}{A_\tau} = 1,4$  bzw. 1,5, welchen Wert man zur Zeit wohl als den besten ansehen muß.

$A_q$  und  $A_\tau$  schwankt für Verhältnisse in der Atmosphäre etwa zwischen 1 und 100 und erreicht in der freien Atmosphäre im Mittel  $50 \text{ gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ .

Für die *laminaren Strömungsverhältnisse* bei verschwindend kleinem Druckunterschied gibt L. PRANDTL den Wert  $\frac{\nu}{a} = 1$  an. Die Größe  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  wird für  $0^\circ \text{C}$   $0,133 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ , für  $100^\circ \text{C}$   $0,245 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ , während andererseits die Größe  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$  gleich  $0,173$  bzw.  $0,183 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$  ist, wenn man mit  $\lambda$  den Wärmeleitkoeffizienten der Luft zu  $0,0000568 \text{ cal cm}^{-1} \text{ grad}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ , mit  $\rho$  die Dichte der Luft zu  $0,001293 \text{ gr cm}^{-3}$  und  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck zu  $0,2405 \text{ cal gr}^{-1} \text{ grad}^{-1}$  annimmt. Mit diesen Werten für  $\nu$  und  $a$  erhält man mittlere Werte für  $\frac{\nu}{a}$  von 0,7 bis 0,8. Für Luft benützt POHLHAUSEN einen Wert von  $\frac{\nu}{a} = 0,733$  (siehe L. PRANDTL [33], S. 366).

Es ergeben sich mit diesen Betrachtungen und Annahmen folgende feste Zahlenwerte:

Tabelle 3.

Konstante	Zahlenwert	Dimension	
$\alpha$	42,5°	grad	Turbulenter Zustand
$g$	980,6	cm <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup>	$\frac{a}{\nu} = \frac{A_q}{A_\tau} = 1,4 \sim 1,5$
$B$	0,4°/100 m $4 \times 10^{-5}$	grad m <sup>-1</sup> grad cm <sup>-1</sup>	
$\beta$	1/283°	grad	Laminarer Zustand
$q$ (0 m)	$1,225 \times 10^{-3}$	gr cm <sup>-3</sup>	$\frac{a}{\nu} = 0,733$
$q$ (2000m)	$0,9510 \times 10^{-3}$	gr cm <sup>-3</sup>	$a$ 0,183 ~ 0,173 $\nu$ 0,245 0,133
			cm <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup> bei 100° C 0° C cm <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup>

Mit diesen konstanten Werten können wir nun eine Abschätzung mittlerer Art der PRANDTLschen Lösungsausdrücke (8), (9) und (10) vornehmen.

Es interessiert uns zuerst diejenige Höhe  $n$ , in welcher die Geschwindigkeit  $w$  ein Maximum besitzt. Dies ist dann der Fall, wenn  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$  wird.

Es ist dann

$$\frac{\partial w}{\partial n} = C \cdot \sqrt{\frac{g \beta \alpha}{B \nu}} e^{-\frac{n}{l}} \cdot \left[ \cos \frac{n}{l} - \sin \frac{n}{l} \right] = 0 \quad (11)$$

und damit ergibt sich die Höhe des Geschwindigkeitsmaximums zu

$$n = \frac{\pi}{4} \cdot l. \quad (12)$$

Diese Höhe ist aber gemäß den oben dargestellten Kurven der Abb. 9 und 10 bekannt und in beiden Kurven für Hangauf- und -abwind gleich 27 m.

Damit errechnet sich mittels der Gl. (12) die Größe  $l$  zu

$$l = 34,37 \text{ m} = 3437 \text{ cm} \quad (13)$$

Weiterhin interessiert diejenige Höhe, in welcher  $w = 0$  wird. Diese ergibt sich zu

$$n_0 = \pi \cdot l \quad (14)$$

und mit  $l = 34,37 \text{ m}$  wird dann

$$n_0 = 108 \text{ m.}$$

Mit Hilfe der Beziehung (9)

$$l = \sqrt[3]{\frac{4 a \nu}{g \beta B \sin^2 \alpha}}$$

und der Kenntnis von  $\frac{a}{\nu} \cong 1,4$  ist es nun möglich,  $A_q$  und  $A_\tau$  zu berechnen und man erhält mit den Konstanten der Tabelle 3

$$A_q = 52,9 \text{ und } A_\tau = 37,8 \text{ [gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}\text{]}. \quad (15)$$

Diese Werte liegen größenordnungsmäßig recht gut im Bereiche des Möglichen. Das gilt für eine Neigung des Hanges von  $42,5^\circ$  entsprechend der mittleren Hangneigung der Nordkette in Höhe der Seegrube. Für andere Stellen, wo die mittlere Hangneigung nur  $18^\circ$  betrug, ergaben sich aus den Hangabwindmessungen die Werte

$$A_a = 24,2 \text{ und } A_r = 16,9 \text{ [gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}] \quad (15a)$$

Wir wenden uns nun der Gl. (10) zu, die uns die vertikale Verteilung der Geschwindigkeit  $w$  über dem Hang gibt, und deren zahlenmäßiger Auswertung. Für die Höhe von 27 m, in welcher das Maximum von  $w$  sowohl bei Hangaufwind als auch -abwind eintritt, beträgt  $w$  für den Hangaufwind 3,9 m/sec und für den Hangabwind  $-2,36$  m/sec.

Die Größe von  $e^{-\frac{n}{l}} \cdot \sin \frac{n}{l}$  ergibt sich für  $n = 27$  m und  $l = 34,37$  m zu 0,33 und man erhält die Größe

$$C \cdot \sqrt{\frac{g \beta a}{B \nu}} \begin{cases} < \text{für Hangaufwind} & 3,9/0,33 = 1182 \text{ cm/sec} \\ < \text{für Hangabwind} & -2,36/0,33 = -715 \text{ cm/sec.} \end{cases}$$

Die Größe  $\sqrt{\frac{g \beta a}{B \nu}}$  ist bestimmbar und damit kann man  $C$  berechnen. Es ist

$$C \begin{cases} < \text{für Hangaufwind} = 3,4^\circ \\ < \text{für Hangabwind} = -2,05^\circ. \end{cases} \quad (16)$$

Nun ist es möglich, den Gesamtausdruck der Gl. (10) für verschiedene Höhen  $n$  (alle 10 m von  $n = 10$  bis 130 m) auszuwerten.

Es ergibt sich damit folgende Tabelle 4, die uns die theoretische vertikale Verteilung von  $w$  bei Hangauf- und -abwind wiedergibt.

Tabelle 4.

$n$ Meter	$e^{-\frac{n}{l}} \cdot \sin \frac{n}{l}$	$w$ (m/sec) Aufwind	$w$ (m/sec) Abwind
10	0,1703	+2,01	-1,21
20	3070	+3,62	-2,20
27	3300	+3,90	-2,36
30	3276	+3,87	-2,34
40	2872	+3,39	-2,05
50	2321	+2,74	-1,66
60	1722	+2,03	-1,23
70	1169	+1,38	-0,84
80	0711	+0,84	-0,51
90	0366	+0,43	-0,26
100	0127	+0,15	-0,09
108	0,0000	0,0	0,0
110	-0,0024	-0,03	+0,02
120	-0,0104	-0,12	+0,08
130	-0,0136	-0,13	+0,10

Wir kehren nun noch einmal zu den Abb. 9 und 10 zurück und betrachten die Kurven  $w$ , welche sich theoretisch gemäß den Werten der Tabelle 4 nach der PRANDTL'schen Theorie ergeben, im Vergleich mit den aus den Beobachtungen gewonnenen mittleren Verteilungen. Man erkennt, daß die theoretischen Kurven mit den mittleren Kurven aus den Beobachtungen bis zur Höhe von 27 m (maximale Geschwindigkeit  $w$ ) in beiden Fällen nahezu übereinstimmt und daß die Übereinstimmung überraschend gut ist. Die dabei noch auftretenden Differenzen der Geschwindigkeit von maximal 0,4 m/sec liegen innerhalb der Meßgenauigkeit und des angewendeten Verfahrens und sind belanglos. Über der Höhe  $n = 27$  m jedoch folgt, wie erwartet, die theoretische Kurve nicht den Beobachtungskurven, sondern nimmt stetig bis zur Höhe  $n_0 = 108$  m, wo  $w = 0$  ist, ab und erreicht dann sogar mäßige negative Geschwindigkeitswerte. Um diesen theoretischen Verlauf auch in den Mittelkurven der Beobachtungen zu erzielen, den diese ja infolge des störenden Einflusses des Gradientwindes bzw. des Berg- und Talwindes, wie schon eingangs erwähnt, nicht zeigen können, muß man eine Geschwindigkeitsverteilung in den einzelnen Höhen von ihren Werten abziehen, welche durch die gestrichelte Linie in beiden Darstellungen markiert ist. Es zeigt sich, daß oberhalb einer Höhe von 30 m sich in beiden Fällen bereits ein solch störender Einfluß geltend macht, jedoch sind die Beträge hier noch minimal und man kann erst von Höhen  $n = 70$  bis 80 m an von namhafteren Beträgen sprechen, die störend auf den reinen Hangwind wirken. Höhen aber von etwa 100 m über der Beobachtungsstation Seegrube (1905 m) bedeuten schon Stellen, bei denen ein Einfluß des oberen Gradientwindes oder auch des Berg- und Talwindes sehr plausibel ist.

Man darf im großen und ganzen mit dem Vergleich von Theorie und Beobachtung innerhalb der reinen Hangwindsschichte recht zufrieden sein.

Wir wenden uns nun der Auswertung der Gl. (8) für die vertikale Temperaturverteilung zu. Mangels geeigneter Meßergebnisse müssen wir uns hier mit dem theoretischen Bild der Verteilung der Störung der potentiellen Temperatur mit der Höhe  $n$  vertikal zum Hang zufrieden geben.

Die Berechnung der Werte  $\vartheta'$  für verschiedene Höhen  $n$  (alle 10 m von  $n = 10$  bis 130 m) gibt die Tabelle 5 für Hangaufwind und Hangabwind.

Tabelle 5.

Vertikale Höhe $n$ (Meter)	potentielle Temperatur-Störung $\vartheta'$		Vertikale Höhe $n$ (Meter)	Potentielle Temperatur-Störung $\vartheta'$	
	°C Aufwind	°C Abwind		°C Aufwind	°C Abwind
0	3,4	—2,05	80	—0,23	0,14
10	2,43	—1,47	90	—0,21	0,13
20	1,59	—0,96	100	—0,18	0,11
30	0,91	—0,55	108	—0,15	0,09
40	0,42	—0,25	110	—0,14	0,08
50	0,09	—0,03	120	—0,12	0,07
60	—0,10	0,03	130	—0,06	0,04
70	—0,20	0,12			

Die graphische Darstellung der  $\vartheta'$ -Werte der Tabelle 5 mit zunehmender Höhe zeigt, daß in den unteren Schichten die Größe der  $\vartheta'$ -Werte rasch abnimmt bzw. zunimmt und in einer bestimmten Höhe gleich Null wird.

Diese Höhe, wo  $\vartheta' = 0$  wird, ergibt sich zu  $n = \frac{\pi}{2} l = 54,05$  m. Die Schicht der Temperaturstörung  $\vartheta'$  ist also nur halb so hoch wie die Hangwindschicht ( $w$ ).

Von dieser Höhe an wird die Kurve für den Hangaufwind negativ und umgekehrt die Kurve für den Hangabwind positiv; die Kurven ändern sich mit zunehmender Höhe jedoch nur sehr wenig.

Dies bedeutet, daß sich sowohl bei Hangaufwind als auch bei Hangabwind die Temperaturstörung der Temperaturschichtung über dem Hang theoretisch bis in Höhen von zirka 50 m erstrecken müßte.

Die richtige Temperaturverteilung über dem Hang nach der Theorie erhält man erst, wenn man die Temperaturstörung der mittleren Temperaturverteilung überlagert, d. h. die Gl. (1) mit den gegebenen Zahlenwerten auswertet.

Dies ist in den Abb. 13 und 14 für Hangauf- und -abwind durchgeführt worden.

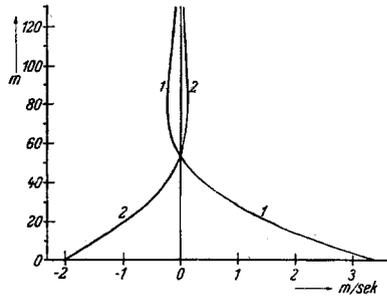


Abb. 12. Hangvertikale Verteilung der Temperaturstörung  $\vartheta'$  für Hangaufwinde (1) und Hangabwinde (2).

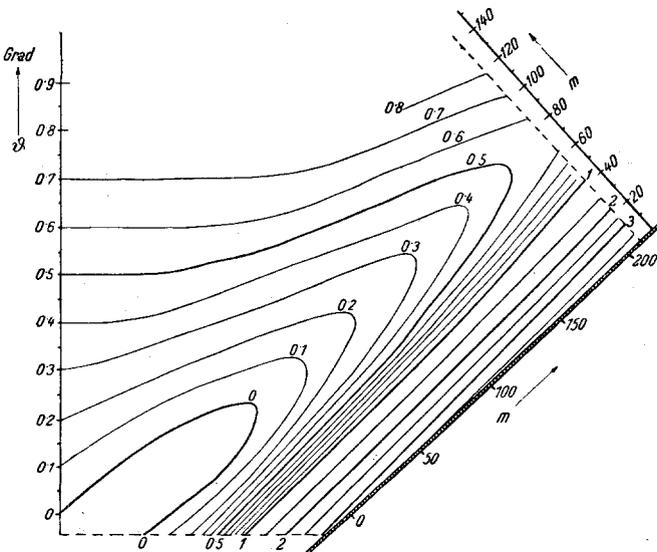


Abb. 13. Vertikale Verteilung der potentiellen Temperatur über dem Hang bei Hangaufwind.

Man erkennt aus der Abb. 13 (Hangaufwind) in den unteren Schichten eine rasche Änderung der potentiellen Temperatur mit der Höhe, und zwar überadiabatische Gradienten, da die potentielle Temperatur mit der Höhe bis durchschnittlich 70 bis 80 m senkrecht über dem Hang zunimmt und sich erst von hier ab die Temperaturverteilung allmählich der normalen Temperaturabnahme mit der Höhe von  $0,6^\circ/100$  m nähert.

Verfolgt man eine einzelne Isotherme, die in größerer Entfernung vom Hang eben verläuft, so sieht man, daß sie in einem gewissen Bereich

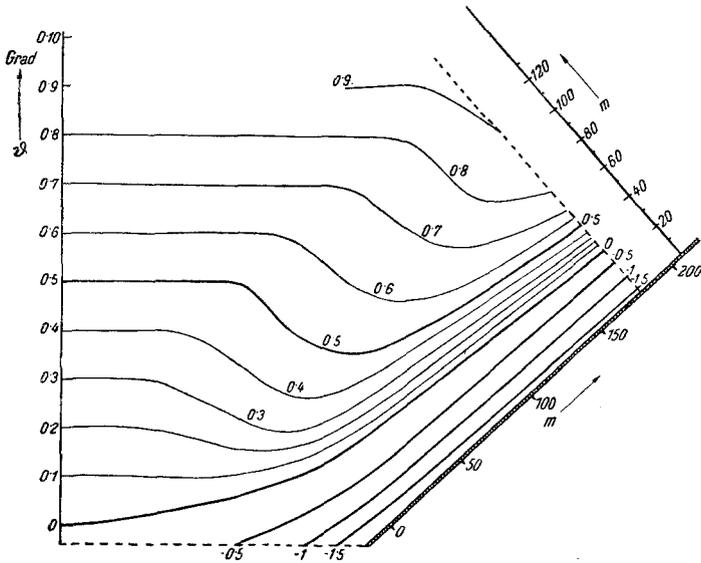


Abb. 14. Vertikale Verteilung der potentiellen Temperatur über dem Hang bei Hangabwind.

bei Annäherung an den Hang etwas aufzusteigen beginnt und dann in die durch den Hangwind bedingte Aufwölbung hangaufwärts einmündet. Auf diese Erscheinung habe ich bereits früher hingewiesen.

Die Abb. 14 (Hangabwind) hat eine ganz andere Form. Hier herrscht bis zur Höhe von etwa 70 bis 80 m senkrecht über dem Hang eine Bodeninversion und erst darüber geht die Temperaturverteilung ziemlich rasch in die normale Abnahme von  $0,6/100$  m über. Diese theoretische Temperaturverteilung wurde durch die Beobachtungen qualitativ bestätigt.

Bei diesem Vergleich mit den Beobachtungen ist sowohl bei der Wind- als auch bei der Temperaturverteilung zu beachten, daß in der Theorie stets mit einem in der ganzen Schichte konstanten Reibungs- und Wärmeaustauschkoeffizienten gearbeitet wurde. In Wirklichkeit dürfte diese Annahme nur in roher Weise den Verhältnissen in der Natur gerecht werden. Der Einfluß einer mit der Höhe veränderlichen Größe dieses Koeffizienten hat vielleicht weniger Einfluß auf die äußere Form der

Wind- und Temperaturverteilung in vertikaler Richtung über dem Hang als vielmehr auf die Mächtigkeit der Schichte, in der die Wind- und Temperaturstörung sich auswirkt. Ohne Zweifel gibt die PRANDTLsche Theorie in erster Annäherung einen recht brauchbaren Einblick in den ganzen Mechanismus, welcher zwischen Wärmestörung und Windstörung bei Hangwinden vorhanden ist.

### V. Erweiterte Theorie der Hangwindströmung mit tagesperiodischem Ablauf und Diskussion derselben.

Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, ob die hier gegebene PRANDTLsche Theorie nicht auch für den nichtstationären Fall anwendbar wäre und welche Änderungen damit verbunden sind. In diesem Fall ist  $\frac{\partial w}{\partial t}$  und  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  nicht mehr 0 zu setzen und wir erhalten entsprechend den Gl. (2) und (6) die Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g \beta \cdot \sin \alpha \cdot \vartheta + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad (17)$$

und

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = - B \cdot \sin \alpha \cdot w + a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2}.$$

Bezeichnen wir  $g \beta \cdot \sin \alpha = A_1$  und  $B \sin \alpha = A_2$ , so wird

$$\frac{\partial w}{\partial t} - A_1 \vartheta - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + A_2 w - a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2} = 0.$$

$\vartheta$  und  $w$  sind nun nicht mehr allein abhängig von  $n$  zu setzen, sondern abhängig von der Zeit  $t$ , und zwar mit einer Periode  $\sigma = 24$  Stunden, also der Tagesperiode, da die Störung  $\vartheta$  eine solche Tagesperiode aufweist.

Zweckmäßigerweise setzt man demnach

$$\vartheta = E e^{(i-1) \cdot kn + i \sigma t}, \quad (19)$$

$$w = -i D e^{(i-1) \cdot kn + i \sigma t}$$

an, so daß

$$\vartheta = -\frac{E}{i D} \cdot w \text{ und } w = -\frac{i D}{E} \cdot \vartheta \text{ ist.}$$

$D$  und  $E$  sind freie Konstanten.

Mit diesen Ansatzausdrücken gehen die Differentialgleichungen (18) in

$$i \sigma + \frac{A_1 E}{i D} + 2 i k^2 \cdot \nu = 0, \quad (20)$$

$$i \sigma - \frac{i A_2 D}{E} + 2 i k^2 \cdot a = 0$$

über und mit  $\frac{E}{D} = x$  wird aus ihnen das Gleichungspaar

$$\begin{aligned}\sigma - A_1 \cdot x + 2k^2 \cdot \nu &= 0, \\ \sigma - \frac{A_2}{x} + 2k^2 \cdot a &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Dies sind zwei Gleichungen, die zur Bestimmung von  $k$  und  $x$  ausreichen. Bevor wir eine solche Bestimmung vornehmen, wollen wir einige Zwischenfragen klären.

a) Für den Fall  $\sigma = 0$  müssen sich die PRANDTLschen Lösungen für  $w$  und  $\vartheta$  des stationären Zustandes ergeben.

Für  $\sigma = 0$  wird aus der Gl. (21)

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{A_2} \cdot x^2 = \frac{\nu}{a} \text{ und daraus } x &= \sqrt{\frac{B\nu}{a^2 g \beta}} = \frac{E}{D} \text{ und} \\ k^2 = \frac{A_1 \cdot x}{2\nu} \text{ und daraus } k &= \sqrt[4]{\frac{g \beta B \sin^2 \alpha}{4 \nu a}} = \frac{1}{l}.\end{aligned}$$

Aus den Formeln (19) wird mit  $\sigma = 0$  und  $D \cdot \sqrt{\frac{B\nu}{a g \beta}} = E =$  PRANDTLschen Konstante  $C$  und  $k = \frac{1}{l}$ .

$$\vartheta = C e^{\frac{in}{l}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} = C e^{-\frac{n}{l}} \cdot \cos \frac{n}{l}.\quad (22)$$

$$w = -i C \cdot \sqrt{\frac{a g \beta}{B \nu}} \cdot e^{\frac{in}{l}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} = C \cdot \sqrt{\frac{a g \beta}{B \nu}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot \sin \frac{n}{l}.$$

Bei Berücksichtigung nur der reellen Teile von  $e^{\frac{in}{l}}$  ergeben sich also erwartungsgemäß die PRANDTLschen Lösungen für  $w$  und  $\vartheta$ .

b) Es interessiert nun, wie weit man eine Abweichung von der PRANDTLschen Lösung erhält, wenn man die Größe  $\frac{\nu}{a} = 1$  annimmt, was, wie wir wissen, nicht streng der Fall ist (siehe [33], S. 366).

Für  $\nu = a$  wird aus den Gl. (21)

$$x = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{B}{g \beta}},\quad (23)$$

welcher Ausdruck demjenigen für  $\sigma = 0$  mit  $\nu = a$  identisch ist.

Dagegen wird

$$k^2 = \frac{\sqrt{A_1 A_2} - \sigma}{2\nu} = \sqrt{\frac{g \beta B \sin^2 \alpha}{4 \nu^2}} - \frac{\sigma}{2\nu} = \frac{1}{l^2} - \frac{\sigma}{2\nu}$$

oder

$$k = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma l^2}{2\nu}}.\quad (24)$$

Dieser Ausdruck für  $k$  unterscheidet sich von demjenigen Wert  $k$  für  $\sigma = 0$  um die Größe  $\frac{\sigma l^2}{2\nu}$  unter dem Wurzelzeichen.

Mit den Werten

$$\sigma = \frac{2\pi}{24 \text{ Stunden}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ sec}}; \quad l = 34,37 \text{ m}; \quad \nu = \frac{Ar}{\varrho} = \frac{37,77}{1,293 \times 10^{-3}}$$

ergibt sich die Größe  $\frac{\sigma l^2}{2\nu}$  zu 0,014704 und damit wird

$$k = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{1 - 0,014704}, \quad (25)$$

was mit großer Annäherung gleich  $\frac{1}{l}$  ist, d. h., es ist auch der Wert  $k$  für  $\nu = a$  mit großer Genauigkeit jenem Wert  $k$ , welcher sich bei  $\sigma = 0$  ergibt, gleichzusetzen.

Man kann demnach feststellen, daß die Wahl von  $\nu = a$  oder  $\frac{\nu}{a} = 1$  gegenüber  $\frac{\nu}{a} \neq 1$  oder  $\frac{\nu}{a} \cong 0,7$  keine beachtenswerte Rolle für die Lösungen spielt. Ein Resultat, welches immerhin einiges Interesse verdient.

c) Wir haben nun noch die Werte  $x$  und  $k$  für den Fall  $\nu \neq a$  zu behandeln und den Vergleich mit den Werten  $x$  und  $k$  bei  $\sigma = 0$  anzustellen.

Aus (21) ergibt sich mit  $\nu \neq a$  zur Bestimmung der Größe  $x$  die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{\sigma}{A_1} \left(1 - \frac{\nu}{a}\right) x - \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\nu}{a} = 0$$

oder

$$x = + \frac{\sigma}{2A_1} \left(1 - \frac{\nu}{a}\right) \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4A_1^2} \left(1 - \frac{\nu}{a}\right)^2 + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\nu}{a}}. \quad (26)$$

Bei Berechnung der Größe von  $\frac{\sigma}{2A_1} \left(1 - \frac{\nu}{a}\right)$  ergibt sich  $4,44 \times 10^{-6}$ , also ein außerordentlich kleiner Wert. Das quadratische Glied unter dem Wurzelzeichen kann daher gegen die Größe  $\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\nu}{a}$  unbedingt vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\sqrt{\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\nu}{a}} = 2,871 \times 10^{-3}.$$

Dieses letztere Glied gibt also bei weitem den Hauptausschlag bei der Berechnung von  $x$ , und wir können mit größter Annäherung setzen

$$x = \sqrt{\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\nu}{a}} = \sqrt{\frac{B\nu}{g\beta a}}. \quad (27)$$

Somit besteht auch für den Fall  $\nu \neq a$  kein wesentlicher Unterschied des Wertes  $x$  gegenüber dem stationären Fall PRANDTL'S ( $\sigma = 0$ ).

Für  $k$  erhält man aus (21) bei  $\nu \neq a$  die Bestimmungsgleichung

$$k^2 = \frac{\sqrt{\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\nu}{a}}}{2\nu} - \frac{\sigma}{2\nu} = \sqrt{\frac{g\beta B \sin^2 \alpha}{4\nu a}} - \frac{\sigma}{2\nu} = \frac{1}{l^2} - \frac{\sigma}{2\nu}$$

oder

$$k = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma l^2}{2\nu}} \approx \frac{1}{l}. \quad (28)$$

Wir haben bereits gezeigt, daß dieser Wert für  $k$  mit größter Näherung gleich  $\frac{1}{l}$  zu setzen ist und es ist daher im Falle  $\nu \neq a$  der Wert von  $k$  gleich jenem Wert von  $k$  für  $\sigma = 0$ . Damit haben wir aber bewiesen, daß mit größter Annäherung unsere Lösungen für die potentielle Temperaturstörung  $\vartheta$  und die Geschwindigkeit  $w$  bei allen Annahmen für  $\nu$  und  $a$  in bezug auf  $k = \frac{1}{l}$  und  $x = \frac{E}{D} = \sqrt{\frac{B\nu}{ag\beta}}$ , auch im Falle  $\sigma \neq 0$  (tagesperiodische Änderung der Hangwinde) genau so wie im PRANDTL'schen stationärem Fall  $\sigma = 0$  gesetzt werden dürfen.

Die Lösungen lauten daher vollständig

$$\begin{aligned} \vartheta &= C \cdot e^{\frac{in}{l}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot e^{i\sigma t}, \\ w &= -iC \cdot \sqrt{\frac{ag\beta}{\nu B}} \cdot e^{\frac{in}{l}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (29)$$

und deren reelle Teile allein

$$\begin{aligned} \vartheta &= C \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot \cos \frac{n}{l} \cdot \cos \sigma t = \underline{\vartheta_{\text{stat}} \cdot \cos \sigma t}, \\ w &= C \cdot \sqrt{\frac{ag\beta}{\nu B}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cdot \sin \frac{n}{l} \cdot \cos \sigma t = \underline{w_{\text{stat}} \cdot \cos \sigma t}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Gl. (30) zeigen, daß sich mit der Vorgabe nicht stationärer Verhältnisse unter Annahme einer mit der Tagesperiode ablaufenden Hangwindzirkulation an der PRANDTL'schen Hangwindtheorie in bezug auf seine Lösungen für die potentielle Temperaturstörung  $\vartheta$  und die hangparallele Geschwindigkeit  $w$  an und für sich nichts Entscheidendes ändert und sich die Lösungen für  $\vartheta$  und  $w$  nur mit dem periodischen Faktor  $\cos \sigma t$  multiplizieren. Auch die Modifikation von  $\nu$  und  $a$  läßt in bezug auf die Rechnung stets mit großer Genauigkeit zu, daß man die Konstanten  $E$ ,  $D$ ,  $x$ ,  $k$  durch die PRANDTL'schen Konstanten  $C$  und  $l$  in den Lösungen ersetzen kann.

Dieses an und für sich einfache Resultat für die wesentlich kompliziertere Annahme eines periodischen Ablaufens der Hangwinde gegenüber einer Annahme des stationären Zustandes besitzt sicher einiges Interesse und ist bemerkenswert.

## VI. Vergleich der PRANDTL'schen Darstellung mit A. DEFANT'S Arbeit über den Abfluß kalter Luftmassen auf geneigtem Boden.

Ich komme nun auf die Arbeit meines Vaters über den Abfluß schwerer Luftmassen auf geneigtem Boden und seine theoretischen Betrachtungen

über die Stabilitätsverhältnisse solch stationär abfließender Luftströme zu sprechen. Eine zweifach geschichtete Atmosphäre der endlichen Höhe  $H$  sei über geneigtem Boden aufgebaut. In der unteren Luftschicht sei eine konstante potentielle Temperatur  $\vartheta$ , in der oberen  $\vartheta_1$  vorhanden. Die Höhe der Grenzfläche zwischen diesen verschieden aufgebauten Schichten sei mit  $\eta$  bezeichnet.

Unter der Annahme, daß die Höhe  $H$  der oberen Begrenzung der Oberschicht gegenüber der Höhe  $\eta$  der Unterschicht so groß sei, daß die obere Begrenzung stets als horizontal gedacht werden kann, wird

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \cos \alpha \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta_1} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - g \frac{\vartheta}{\vartheta_1} \cdot \sin \alpha, \quad (31)$$

wenn man mit  $x$  die Richtung in der Hangfläche positiv nach abwärts bezeichnet, die der früher gebrauchten Koordinate  $-s$  identisch ist.

Mit Gl. (31) und den für ein Hangkoordinatensystem ( $x$  hangparallel,  $z$  hangvertikal) gültigen Bewegungsgleichungen ergibt sich für die Gradientenkraft in der  $x$ -Richtung

$$\frac{dw}{dt} = g \cos \alpha \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta_1} \left[ \operatorname{tg} \alpha - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]. \quad (32)$$

Diese Gleichung ist nun von größtem Interesse, da sie unter Vergleich der Größen innerhalb des Klammersausdruckes eine Abschätzung des Einflusses gestattet, einerseits des Bodengefälles ( $\operatorname{tg} \alpha$ ) andererseits des Druckgefälles längs der Bodenneigung, dargestellt durch die Veränderung der Höhe  $\eta$  der Grenzfläche in der  $x$ -Richtung  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$ . Ist die Grenzfläche parallel der Bodenneigung, so wirkt nur die Schwere allein, da  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$  ist. Ist  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  positiv oder negativ, so erfolgt eine Abschwächung bzw. Verstärkung der Schwerewirkung. Der Vergleich der Größenordnung von  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  bringt das Resultat, daß beide Glieder gleiche Größe besitzen können und es nicht angeht, eines gegenüber dem anderen zu vernachlässigen. Nimmt man als Reibungskraft den TAYLORschen Ansatz für die ganze Luftsäule über der Flächeneinheit des Bodens in der Form  $\mu \cdot w^2$  an ( $\mu$  für nicht zu rauhen Boden = 0,002), so ergibt sich für eine stationäre Luftströmung längs des Hanges mit der Annahme  $\eta = Z = \text{const}$ ,  $w = W = \text{const}$ , eine Gleichung für die hangparallele Geschwindigkeit  $W$  in der Form

$$W = \left( \frac{gZ}{\mu} \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta_1} \cdot \sin \alpha \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Der Unterschied des PRANDTLschen Ergebnisses gegenüber diesem Ergebnis von A. DEFANT besteht nun darin, daß L. PRANDTL eine Gleichung für die stationäre Luftströmung parallel zum Hang gewinnt, die gestattet, ein vertikales Geschwindigkeitsprofil zu entwerfen, während obiger Ausdruck (33) lediglich ein *mittleres* Maß für die Geschwindigkeit längs des Hanges in der gegen die unteren Schicht gibt.

Die theoretischen Grundlagen beider Arbeiten sind wohl die gleichen, jedoch gibt PRANDTL eine geschichtete Atmosphäre vor, deren Schichtung am Hang durch die Wärmeübertragung von der erwärmten Hangfläche her gestört wird, während A. DEFANT mit einer zweigeschichteten Atmosphäre arbeitet, in der der vorgegebene Unterschied der potentiellen Temperatur in den zwei Schichten die eine Bewegungsursache für die untere Schicht gibt. Das Vorhandensein der Grenzfläche zwischen der unteren und oberen Schicht gibt aber hier die Möglichkeit, auch noch ein Druckgefälle längs dieses Hanges in Rechnung zu stellen, eine Möglichkeit, die die PRANDTLsche Darstellung nicht besitzt; dadurch ist es möglich, eine Abschätzung zwischen einem solchen von oben kommenden Druckgefälle und der Wirkung der Schwere auf die Luftbewegung in der Unterschicht vorzunehmen.

Es bietet sich im Anschluß daran auch die weitere Möglichkeit, die Stabilität einer solchen Luftströmung näher zu untersuchen und A. DEFANT ermittelt in Übereinstimmung mit H. JEFFREYS das Einsetzen instabiler Verhältnisse im abfließenden Luftstrom, wenn das Bodengefälle größer als das Vierfache des Reibungskoeffizienten wird ( $\operatorname{tg} \alpha \geq 4 \mu$ ).

Ein Vergleich, der durch die beiden Theorien gegebenen Geschwindigkeiten läßt sich nicht leicht durchführen, da die Grundlagen der Theorien doch so stark voneinander abweichen. Insbesondere wird in der Arbeit von A. DEFANT für die Reibung der TAYLORSche Reibungsansatz (Schubspannung  $\tau = \mu \cdot \rho \cdot w^2$ ) für die ganze untere Schicht genommen, wobei die Reibungskonstante  $\mu$  je nach der Unterlage recht verschiedene Werte annehmen kann. Will man obigen Ausdruck (33) für  $W$  zur Berechnung der hangparallelen stationären Geschwindigkeit benützen, dann muß man erstens über die Schichtdicke  $Z$ , zweitens über den Temperaturunterschied der beiden Schichten  $\vartheta_1 - \vartheta$  und drittens über die Größe des Reibungskoeffizienten eine Annahme machen. Man kann auch so vorgehen, daß man für die *mittlere* Geschwindigkeit der ganzen Unterschicht einen Mittelwert des Geschwindigkeitsprofils der PRANDTLschen Lösung (siehe Abb. 9 und 10) sowie einen Mittelwert der Temperaturstörung bis zur selben Höhe wählt und daraus nach der Beziehung (33) den Wert von  $\mu$  berechnet. Solche Berechnungen habe ich mit größter Genauigkeit durchgeführt und sie zeigen alle, daß sie zu Werten von  $\mu$  führen, die größenordnungsmäßig bei Werten von 0,05 bis 0,10 liegen. Dies deutet darauf hin, daß die Turbulenz dieser Strömung recht groß sein muß, was ja an sich verständlich ist, wenn man bedenkt, daß im Aufbau der zwei Schichten ein ausgesprochen instabiler Zustand vorliegt, wenn die potentielle Temperatur  $\vartheta_1$  der Oberschicht größer ist als  $\vartheta$  der Unterschicht. Weiter muß man beachten, daß die Rauigkeitsverhältnisse der Hänge, an denen die Beobachtungen ausgeführt wurden, recht beträchtlich sind, da sie einerseits mit Hochwald bewachsen sind, andererseits durch Rinnen und Furchen keine gleichmäßige Hangfläche bilden.

Daß übrigens für den *turbulenten Fall* die Annahme der Schubspannung  $\tau$  an dem rauhen Hang in der Form  $\tau = \mu \rho w_1^2$  zu denselben

Geschwindigkeitswerten führt, wie die frühere Annahme in der PRANDTL'schen Lösung hat L. PRANDTL selbst gezeigt (siehe [33], S. 375).

Der Wärmeartrieb der ganzen erwärmten Schicht von der Dicke  $l$  muß annähernd der Schubspannung  $\tau$  gleichgesetzt werden. Das ergibt ( $w_1 =$  maximale Geschwindigkeit)

$$\mu \varrho w_1^2 \sim g \varrho \sin \alpha \cdot \beta \cdot C \cdot l. \quad (34)$$

Nun ist  $\tau = A_\tau \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \sim A_\tau \frac{w_1}{l} = \mu \varrho w_1^2$ , so daß  $A_\tau \sim \varrho \cdot w_1 \cdot l \cdot \mu$  ist.

Weiter ist nach Gl. (6), wenn man  $a = \frac{A_q}{\varrho}$  setzt,

$$w_1 \cdot B \sin \alpha \sim \frac{A_q}{\varrho} \cdot \frac{C}{l^2}.$$

Die letzten beiden Beziehungen führen zur Beziehung

$$l \sim \frac{A_q}{A_\tau} \cdot \frac{C}{B \sin \alpha} \cdot \mu. \quad (35)$$

Die Gl. (34) führt dann mit diesem Ausdruck zu

$$w_1 \sim C \cdot \sqrt{\frac{A_q}{A_\tau} \cdot \frac{g \beta}{B}}. \quad (36)$$

Diese Beziehung ist aber inhaltlich identisch mit der Gl. (10), wenn man in (10) die Größe  $\frac{a}{v}$  durch das Verhältnis der Austauschwerte  $\frac{A_q}{A_\tau}$  ersetzt.<sup>1</sup>

Auch der turbulente Fall führt zu keinen anderen Geschwindigkeiten als der laminare Fall.

## VII. Bemerkungen zur Theorie der Berg- und Talwinde.

L. PRANDTL hat im Anschluß an seine Theorie der Hangwinde die Bemerkung angefügt, daß durch die Strömungen an den Berghängen (Hangwinde), aufwärts bei Erwärmung, abwärts bei Abkühlung, in der Talsohle und an den Kämmen „Senken“ bzw. „Quellen“ für die freie Strömung entstehen, die sich in den Strömungen längs des Tales auswirken müssen. Ist z. B., wie er sich ausdrückt, ein langes Tal zwischen hohen Bergen von stabil geschichteter Luft erfüllt, so kann Ersatz für die in den Senken am Fuß der erwärmten Hänge weggeführte Luft nur dadurch entstehen, daß vom Talausgang her Luft taleinwärts strömt, die sich wegen der Schichtung nur horizontal bewegen kann.

Diese Erklärung der Berg- und Talwinde durch L. PRANDTL kann nur Gültigkeit haben, wenn die längs der Hänge aufsteigenden Luftmassen völlig oder zum größten Teil abtransportiert werden und nicht mehr ins Tal zurückkehren. Nach den Beobachtungen und der Theorie von A. WAGNER ist dies nicht zu allen Tageszeiten der Fall. Im Gegenteil

<sup>1</sup> In der PRANDTL'schen Ableitung steht unter dem Wurzelzeichen an Stelle von  $\frac{A_q}{A_\tau}$  der Reibungskoeffizient  $\mu$  (in der PRANDTL'schen Schreibweise  $\zeta$ ), was auf einen Rechenfehler zurückgeht.

ist zur Erzeugung des Druckgefälles Ebene—Tal zur Erwärmungszeit unbedingt eine geschlossene Hangwindzirkulation (siehe Abb. 2) erforderlich, denn nur durch eine solche wird die kalte Luftsäule vom Morgen an im Laufe des Vormittags bis Mittags von erwärmter Hangwindluft ersetzt bzw. verdrängt, so daß bei gleichem Druck in der Kammhöhe eine kältere Luftmasse über der Ebene einer wärmeren über der Talsohle gegenübersteht. Dies ergibt ein Druckgefälle Ebene—Tal. Die Annahme von „Senken“ und „Quellen“ wird also nur einem Teil dieser Erscheinung gerecht. Bei der Entstehung des Bergwindes verhält es sich etwas anders, weil die von den Hängen abfließende Luft über dem Tal nicht leicht aufsteigen kann und entlang der Talsohle zur Ebene hin abfließen wird.

Die beobachteten bzw. berechneten Hangwindprofile geben die Möglichkeit abzuschätzen, in welcher Zeit bei *geschlossener* Hangwindzirkulation die aufsteigende Hangluft imstande ist, die Luftmassen über der Talsohle zu ersetzen. Die Erwärmung am Hang erfolgt nach der Beziehung (8) bis zur Höhe von  $n = \frac{\pi}{2} \cdot l$ . Berechnen wir aus der Beziehung (10) für  $w$  die mittlere Aufwindgeschwindigkeit dieser Schicht, dann erhält man durch einfache Integration vom Hangboden bis zur Höhe  $\frac{\pi}{2} \cdot l$  die Beziehung

$$W_m = \frac{C}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \beta a}{B v}} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} \right]. \quad (37)$$

Wählt man für  $C = 1182$  cm/sec (siehe S. 437), so ergibt sich für diese mittlere Aufwindgeschwindigkeit  $W_m = 2,98$  m/sec.

Bei einer Schichtdicke von  $\frac{\pi}{2} \cdot l = 54,05$  m (siehe S. 439) und der Breite 1 m erhält man als Transport durch diesen Querschnitt pro Sekunde  $161$  m<sup>3</sup> bzw. pro Stunde  $5,8 \times 10^5$  m<sup>3</sup>. Diese am Hang erwärmte Luftmasse tritt in dieser Zeit in Kammhöhe bzw. in den Schichten darunter in die Luftsäule über der Talsohle ein. Nehmen wir diese Luftsäule, dem Inntal entsprechend, zu etwa 1750 m hoch, ihre Basisfläche der halben Breite der Talsohle entsprechend zu  $1\frac{1}{2}$  km  $\times$  1 m = 1500 m<sup>2</sup> an, so ergibt sich ein Volumen von rund  $2,6 \cdot 10^6$  m<sup>3</sup>.

Dieses Volumen über der halben Talsohle dividiert durch die obige Transportmenge ergibt

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Transport}} = \frac{2,6 \times 10^6 \text{ m}^3}{5,8 \times 10^5 \text{ m}^3/\text{Std}} = 4,5 \text{ Stunden.} \quad (38)$$

Das heißt, in etwa  $4\frac{1}{2}$  Stunden wird die Luftmasse über der Talsohle bei geschlossener Zirkulation von warmer Hangluft ersetzt.

Nimmt man den Beginn der Erwärmung zu etwa  $8\frac{1}{2}$  Uhr vormittags an, dann würde der größte Druckgegensatz zwischen Ebene und Tal um etwa 13 Uhr eintreten und zu dieser Zeit die Hauptphase der Entwicklung des Talaufwindes einsetzen. Da vom Talausgang bis z. B. Innsbruck die Luftmassen sich erst in Bewegung setzen müssen, wird die größte

Entfaltung des Talaufwindes in Innsbruck etwa zwischen 15 und 16 Uhr erfolgen, was mit den Beobachtungen (siehe [4], Abb. 1) übereinstimmt. Diese rohe Schätzung gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Hangwindzirkulation geschlossen ist. Wenn in den oberen Teilen des Tales ein Teil der Hangaufwindluft weggeführt wird, so dauert der Prozeß entsprechend länger. Man erkennt aber aus dieser Berechnung immerhin, daß die Rückkehr der Hangaufwinde zurück zur Talmitte einen Umstand darstellt, der für die Theorie der Berg- und Talwinde von großer Bedeutung ist.

Eine Theorie der Hangwinde würde eigentlich erst vollständig sein, wenn auch der absteigende Ast in der Talmitte Berücksichtigung finden würde. Zu den früheren Gleichungen käme zur Erfassung der in sich geschlossenen Zirkulation noch die Kontinuitätsgleichung und man würde zu einem ähnlichen Problem kommen, wie es bei der Wärme-konvektion über einer ebenen Platte (siehe [33], S. 371) auftritt.

Im Unterschiede hierzu müßte diese ebene Platte durch gegeneinander geneigte Flächen, entsprechend Berg und Tal, ersetzt werden, wodurch die Größe der Konvektionszelle festgelegt sein würde. Die theoretische Durchführung einer solchen Berechnung aber dürfte auf mathematische Schwierigkeiten stoßen.

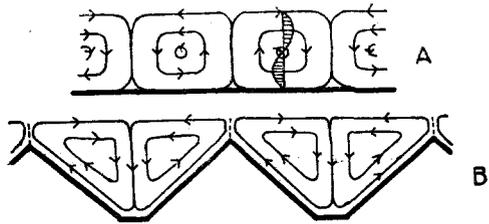


Abb. 15. A. Wärmekonvektionszellen über einer erwärmten horizontalen Platte. B. Hangwind-Konvektionszellen über gebirgigem Gelände (schematisch).

#### Literaturverzeichnis.

1. H. TOLLNER: Berg- und Talwinde in Österreich. Jb. Zentr.-Anst. f. Meteorol. u. Geod. Wien, Beiheft zu Jg. 1928, 91.
2. R. WENGER: Zur Theorie der Berg- und Talwinde. Meteorol. Z. 1923, 193.
3. H. TOLLNER: Gletscherwinde in den Ostalpen. Meteorol. Z. 1931, 414.
4. E. EKHART: Zur Aerologie des Berg- und Talwindes. Beitr. Physik. fr. Atm. 18, 1 (1932).
5. E. EKHART: Weitere Beiträge zum Problem des Berg- und Talwindes. Beitr. Physik. fr. Atm. 18, 242 (1932).
6. E. VAN EVERDINGEN: Zur Theorie der Berg- und Talwinde. Beitr. Physik fr. Atm. 19, 109 (1932).
7. A. WAGNER: Hangwind — Ausgleichsströmung — Berg- und Talwinde. Meteorol. Z. 1932, 209.
8. A. WAGNER: Der tägliche Luftdruck und Temperaturgang in der freien Atmosphäre und in Gebirgstälern. Gerlands Beitr. Geophysik 37, 315 (1932).
9. A. WAGNER: Neue Theorie des Berg- und Talwindes. Meteorol. Z. 1932, 331.
10. C. BRAAK: Der Malojawind. Meteorol. Z. 1933, 231.
11. A. ROSCHKOTT, F. STEINHAUSER u. F. LAUSCHER: Winduntersuchungen im Sonnblickgebiet. 42. Jb. Sonnblickverein 1933, 15.

12. A. JELINEK: Untersuchung periodischer Tageswinde in Südtirol. Beitr. Physik fr. Atm. **21**, 223 (1934).
13. E. EKHART: Neuere Untersuchungen zur Aerologie der Talwinde: Die periodischen Tageswinde in einem Quertale der Alpen. Beitr. Physik fr. Atm. **21**, 245 (1934).
14. F. LAUSCHER und O. ECKEL: Pilotbeobachtungen im Gailtal (Kärnten). Meteorol. Z. **1934**, 201.
15. W. SCHWABL: Zur Kenntnis der Beeinflussung der Allgemeinströmung durch ein Gebirgstal. Meteorol. Z. **1934**, 342.
16. E. EKHART: Über einige Gletscherwindmessungen in den Ötztaler Alpen. Z. Gletscherkunde **22**, 217 (1935).
17. E. MOLL: Aerologische Untersuchungen periodischer Gebirgswinde in V-förmigen Alpentälern. Beitr. Physik fr. Atm. **22**, 177 (1935).
18. T. ZUCHRISTIAN: Ergebnisse der Windregistrierungen auf einer Kammstation (Hafelekar 2265 m). Meteorol. Z. **1935**, 177.
19. A. RIEDEL: Zur Aerologie der periodischen Gebirgswinde an einem Südhange. Ergebnisse von Doppelvisierungen im Innsbrucker Nordkettengebiet. Dissert. Innsbruck (1935).
20. F. BONDY: Über Beziehungen zwischen periodischen Talwinden und verschiedenen meteorologischen Faktoren. Dissert. Innsbruck (1935).
21. E. SCHALLER: Aerologische Untersuchung des periodischen Talwindsystems von Trient. Dissert. Innsbruck (1936).
22. E. EKHART: Die Windverhältnisse über einer inneralpinen Station. Beitr. Physik fr. Atm. **23**, 165 (1936).
23. E. EKHART: Die Windverhältnisse des Arlbergs. I. Teil: Bodenbeobachtungen. Gerlands Beitr. Geophysik **48**, 313 (1936).
24. E. EKHART: Die Windverhältnisse des Arlbergs. II. Teil: Aerologische Beobachtungen. Gerlands Beitr. Geophysik **49**, 7 (1936).
25. A. BURGER und E. EKHART: Über die tägliche Zirkulation der Atmosphäre im Bereiche der Alpen. Gerlands Beitr. Geophysik **49**, 341 (1937).
26. A. JELINEK: Beiträge zur Mechanik der periodischen Hangwinde. Beitr. Physik fr. Atm. **24**, 60 (1937).
27. A. JELINEK: Über den thermischen Aufbau der periodischen Hangwinde. Beitr. Physik fr. Atm. **24**, 85 (1937).
28. A. JELINEK und A. RIEDEL: Über die Schichtdicke der periodischen Lokalwinde im Inntal. Beitr. Physik fr. Atm. **24**, 205 (1937).
29. E. EKHART: Die tägliche Zirkulation der Atmosphäre im Bereiche der Alpen. Forsch. u. Fortschr. **1937**, 210.
30. E. EKHART: Die Tageszeitenwinde der Alpen, eine Darstellung nach dem neuesten Stande unseres Wissens. Naturwiss. **1938**, 21.
31. A. WAGNER: Theorie und Beobachtung der periodischen Gebirgswinde. Gerlands Beitr. Geophysik **52**, 408 (1938).
32. A. DEFANT: Der Abfluß schwerer Luftmassen auf geneigtem Boden nebst einigen Bemerkungen zu der Theorie stationärer Luftströme. Sitzber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math.-Klasse XVIII **1933**, 3.
33. L. PRANDTL: Strömungslehre. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1942.
34. H. LETTAU: Atmosphärische Turbulenz. Akad. Verlagsgesellschaft m. b. H. Leipzig 1939.
35. H. KOSCHMIEDER: Dynamische Meteorologie. Akad. Verlagsgesellschaft m. b. H. Leipzig 1933.
36. F. M. EXNER: Dynamische Meteorologie. 2. Aufl. Verlag Julius Springer Wien 1925.