

Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen

Von

O. Mayer, Karlsruhe

(Eingegangen am 25. April 1969)

Zusammenfassung — Summary

Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen. Die bei der numerischen Behandlung mathematischer Probleme auf digitalen Rechenanlagen auftretenden Rundungsfehler lassen sich, wie in [1], [6] und [8] gezeigt wird, mit Hilfe der Intervallrechnung erfassen.

In der vorliegenden Arbeit werden Struktur und Eigenschaften der in der Intervallrechnung auftretenden Räume untersucht und einige für die Intervallrechnung typische Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt: Die algebraische Struktur dieser Räume wird axiomatisch erfaßt in der Definition des quasilinearen Raumes, einer Verallgemeinerung des linearen Raumes; anschließend werden metrische Strukturen in diesen Räumen behandelt; da für Anwendungen nur Metriken geeignet sind, die eine gewisse Verträglichkeit mit der algebraischen Struktur besitzen, werden diesbezügliche Eigenschaften eingeführt und untersucht. Speziell für die Intervallrechnung mit Vektoren und Matrizen werden Metriken mit solchen Eigenschaften entwickelt, die dann im Zusammenspiel mit der algebraischen Struktur für Abschätzungen geeignet sind. Damit werden für gewisse Gleichungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, sowie intervallmäßige Iterationsverfahren zur Berechnung der Lösung untersucht und die Konvergenzkriterien bestimmt. Die praktische Durchführung solcher Verfahren auf einer Rechenanlage wird abschließend behandelt.

Algebraic and Metric Structures in Interval Arithmetic and Applications. As in [1], [6] and [8] is shown, round-off errors in numerical computation can be controlled with the aid of the interval analysis.

This paper deals with the structure and the characteristics of the spaces occurring in interval analysis and presents some applications. At first the algebraic structure of these spaces is abstractly described by the definition of the quasilinear space, a generalization of the linear space. Then metric structures in these spaces are treated. As for applications only metrics are apt, which have a certain compatibility with the algebraic structure, such properties are introduced and examined. For the interval arithmetic with matrices and vectors metrics are developed, which are compatible with the algebraic structure and so are apt to estimate with. With these results for certain equations existence and uniqueness of the solution is proved as well as some iteration methods of interval analysis for the evaluation of the solution are examined and tests of convergence deduced. Finally it is shown how these iteration methods are to be carried out on a computer.

1. Grundlagen der Intervallrechnung

1.1. Algebraische Strukturen in der Intervallrechnung — Der quasilineare Raum

Es sei \mathbf{R} der Körper der reellen Zahlen, Elemente aus \mathbf{R} bezeichnen wir mit a, b, c, \dots .

$\mathbf{I}(\mathbf{R})$ sei die Menge der abgeschlossenen Intervalle reeller Zahlen der Gestalt $[a_1, a_2] := \{a \mid a_1 \leq a \leq a_2\}$; es ist $\mathbf{I}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{R}$. Elemente aus $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ bezeichnen wir zur Abkürzung mit A, B, C, \dots ; wollen wir zusätzlich ausdrücken, daß sie bereits in \mathbf{R} liegen, so schreiben wir auch $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots$.

Im Anschluß an [1], [6] und [13] definieren wir eine Arithmetik in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$:

Gleichheit sei dabei die Identität; die Verknüpfungen $+$, $-$, \cdot , $:$ werden erklärt im Sinne der Komplexverknüpfung: Bezeichnet $*$ eine dieser Verknüpfungen, so sei $A * B := \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Diese Verknüpfungen führen nicht aus $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ hinaus, wenn man bei der Division voraussetzt, daß der Divisor die 0 nicht enthält.

Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ und haben je ein neutrales Element, nämlich die Zahlen 0 und 1. $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ ist jedoch kein Körper; dazu wird in [1] gezeigt:

a) Ein beliebiges Element $[a_1, a_2] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ mit $a_1 \neq a_2$ besitzt keine Inversen bezüglich Addition und Multiplikation.

b) Das distributive Gesetz ist nicht erfüllt; es gilt nur das sogenannte subdistributive Gesetz

$$(A + B)C \subset AC + BC.$$

Wir bemerken, daß hier in speziellen Fällen noch strenge Gleichheit gilt; so ist etwa für $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a b \geq 0, C \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$

$$(a + b)C = aC + bC.$$

Erwähnt sei noch die sogenannte Teilmengeneigenschaft der Intervallarithmetik (siehe [1]): Sind $A, B, C, D \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ mit $A \subset B, C \subset D$ und $* \in \{+, -, \cdot, :\}$, dann ist $A * C \subset B * D$.

Die oben gegebene Definition einer Intervallrechnung über dem reellen Zahlkörper \mathbf{R} ist verallgemeinerungsfähig:

Es sei \mathbf{B} (mit Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$) ein halbgeordneter linearer Raum über \mathbf{R} , die Halbordnung sei dabei mit der linearen Struktur verträglich, d. h. es gelte (siehe etwa [9]):

$$\vec{a} \leq \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{d} \leq \vec{b} + \vec{d} \wedge c \vec{a} \leq c \vec{b} \\ \text{für alle } \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \in \mathbf{B} \text{ und alle } c \in \mathbf{R}, c \geq 0. \end{cases}$$

$\mathbf{I}(\mathbf{B})$ sei die Menge aller Teilmengen $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] := \{\vec{a} \in B \mid \vec{a}_1 \leq \vec{a} \leq \vec{a}_2\}$; wir sprechen auch hier von Intervallen und bezeichnen sie mit \vec{A}, \vec{B}, \dots . Evident ist $\mathbf{I}(\mathbf{B}) \supset \mathbf{B}$.

Wir erklären auf $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ eine algebraische Struktur und definieren dazu Gleichheit als Mengenidentität,

Addition und Subtraktion durch

$$\vec{A} \pm \vec{B} := \{\vec{a} \pm \vec{b} \mid \vec{a} \in \vec{A} \wedge \vec{b} \in \vec{B}\},$$

weiter eine skalare Multiplikation mit reellen Zahlen a durch

$$a \vec{A} := \{a \vec{a} \mid \vec{a} \in \vec{A}\}.$$

Die Verträglichkeit der Halbordnung mit der algebraischen Struktur in \mathbf{B} bewirkt, daß diese Verknüpfungen nicht aus $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ hinausführen.

Bezüglich der skalaren Multiplikation gilt auch hier nur ein subdistributives Gesetz

$$(a + b) \vec{C} \subset a \vec{C} + b \vec{C}$$

mit $(a + b) \vec{C} = a \vec{C} + b \vec{C}$ für alle $a, b \geq 0$,

aber $(a + b) \vec{C} \neq a \vec{C} + b \vec{C}$ für $a, b < 0$ und $\mathbf{B} \not\equiv \mathbf{C} \in \mathbf{I}(\mathbf{B})$.

Die dadurch auf $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ erklärte Struktur wird axiomatisch erfaßt in der folgenden

Definition 1.1. Es sei QL eine Menge von Elementen A, B, C, \dots , \mathbf{R} der reelle Zahlkörper mit Elementen a, b, c, \dots ; dazu sei je eine Abbildung $(A, B) \rightarrow A + B$ von $QL \times QL$ in QL und $(a, A) \rightarrow aA$ von $\mathbf{R} \times QL$ in QL definiert (wir nennen sie Addition bzw. skalare Multiplikation), so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$(QL 1) \quad A + B = B + A$$

$$(QL 2) \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(QL 3) \quad a(B + C) = aB + aC$$

$$(QL 4) \quad (a + b)C = aC + bC \quad \text{für alle } a, b \geq 0$$

$$(QL 5) \quad a(bC) = (ab)C$$

$$(QL 6) \quad \text{Es existiert ein sogenanntes Nullelement } \ominus \in QL \text{ mit der Eigenschaft: } 0A = \ominus \text{ für alle } A \in QL$$

$$(QL 7) \quad 1A = A$$

Ausgestattet mit dieser Struktur heißt QL quasilinearer Raum über dem Zahlkörper \mathbf{R} .

Der quasilineare Raum ist eine Verallgemeinerung des linearen Raumes; er unterscheidet sich von diesem durch die schwächere Form des Distributivgesetzes; ersetzt man nämlich $(QL 4)$ durch die stärkere Forderung

$$(L 4) \quad (a + b)C = aC + bC \quad \text{für alle } a, b \in \mathbf{R},$$

so erhält man eine Definition für den linearen Raum (vergleiche etwa [12], S. 123, 124).

Beispiele für nichtlineare quasilineare Räume sind die in 1.1 definierten Intervallräume $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ und $\mathbf{I}(\mathbf{B})$.

Es gilt der folgende

Satz 1.1. *In einem quasilinearen Raum ist nur das in Axiom (QL 6) postulierte Nullelement \ominus ein neutrales Element der Addition.*

Der in [12] (S. 124) für die entsprechende Aussage in linearen Räumen angegebene Beweis bleibt auch unter den hier abgeschwächten Voraussetzungen gültig.

Für $(-1)X$ schreiben wir $-X$, für $Y + (-X)$ auch $Y - X$, dabei ist möglich, daß $X + (-X) = X - X \neq \ominus$.

Beispiel. Für $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ und $A \notin \mathbf{R}$ ist stets $A - A \neq \ominus$.

Die Eindeutigkeit der inversen Elemente läßt sich auch in quasilinearen Räumen zeigen: Sind etwa B und C invers zu A , dann ist $B = B + \ominus = B + (A + C) = (B + A) + C = C$; die Existenz inverser Elemente dagegen ist nicht beweisbar, dies wird erst möglich, wenn anstelle des schwächeren Distributivgesetzes (QL 4) die stärkere Forderung (L 4) erfüllt ist; dann liegt aber ein linearer Raum vor.

Wir erwähnten auch oben, daß der quasilineare Raum $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ nicht zu allen Elementen Inverse enthält.

1.2. Norm und Metrik in quasilinearen Räumen

Definition 1.2. Ein reelles Funktional $n(A)$ definiert auf einem quasilinearen Raum QL heißt Norm, wenn

- 1) $A \neq \ominus \Rightarrow n(A) > 0$
- 2) $n(A + B) \leq n(A) + n(B)$
- 3) $n(cA) = |c| n(A)$

Im linearen normierten Raum ist bekanntlich die Norm $n(A - B)$ der Differenz zweier Elemente A und B eine Metrik; in quasilinearen Räumen gilt das nicht: Hier ist im allgemeinen $A - A \neq \ominus$, also $n(A - A) \neq 0$ und damit $n(A - B)$ keine Metrik.

Für die Untersuchung von Abbildungen zwischen solchen Räumen benötigt man nun Metriken, die gewisse Verträglichkeitseigenschaften in bezug auf die algebraische Struktur besitzen; solche Verträglichkeitseigenschaften werden definiert in der folgenden

Definition 1.3. Die in einem quasilinearen Raum erklärte Metrik $q(A, B)$ heißt

- homogen, wenn (H) $q(cA, cB) = |c| q(A, B)$,
 translationsinvariant, wenn (T) $q(A + C, B + C) = q(A, B)$,
 supermetrisch, wenn (S) $q(A + B, C + D) \leq q(A, C) + q(B, D)$.

Bemerkung. Die hier eingeführte supermetrische Eigenschaft ist der

algebraischen Struktur des quasilinearen Raumes besonders angepaßt: Sie ist in linearen Räumen äquivalent zur Translationsinvarianz der Metrik, bedeutet aber in quasilinearen Räumen eine echte Abschwächung der Translationsinvarianz.

Beweis. Es liege ein quasilinearer Raum vor; aus (T) folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung sofort (S).

Der umgekehrte Schluß von (S) auf (T) benötigt die Existenz inverser Elemente und ist deshalb nur in linearen Räumen möglich; dort aber gilt:

$$q(A + B, C + B) \leq q(A, C) \text{ und}$$

$$q(A, C) = q((A + B) + (-B), (C + B) + (-B)) \leq q(A + B, C + B).$$

Daß die supermetrische Eigenschaft in quasilinearen Räumen eine echte Abschwächung der Translationsinvarianz ist, belegen wir weiter unten durch Angabe einer supermetrischen und nicht translationsinvarianten Metrik im quasilinearen Raum $\mathbf{I}(\mathbf{R})$.

Wir betrachten jetzt einige *Beispiele für Metriken in den quasilinearen Räumen $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ und $\mathbf{I}(\mathbf{B})$* ; vor allem im Hinblick auf Anwendungen untersuchen wir auch Verträglichkeitseigenschaften dieser Metriken bezüglich der algebraischen Struktur des jeweils zugrundeliegenden Raumes.

Definition 1.4. In $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ erklären wir im Anschluß an [6] für zwei Elemente $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ als Abstand

$$q(A, B) := \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|).$$

Satz 1.2. $q(A, B)$ ist eine homogene und translationsinvariante Metrik in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$, d. h. es gilt

- 1) $q(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- 2) $q(A, B) \leq q(A, C) + q(B, C)$
- 3) $q(cA, cB) = |c| q(A, B)$
- 4) $q(A + C, B + C) = q(A, B)$

Die kennzeichnenden Metrikeigenschaften 1) und 2) wurden bereits in [6] bewiesen; auch 3) und 4) folgen unmittelbar aus der Definition von $q(A, B)$.

Definition 1.5. Zu $A = [a_1, a_2] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ heißt $|A| := q(A, 0) = \max(|a_1|, |a_2|)$ Absolutbetrag von A .

Satz 1.3. Für alle $A, B, C \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ gilt: $q(AB, AC) \leq |A| q(B, C)$.

Zum *Beweis* wird $q(AB, AC)$ mit Hilfe von Satz 1.2/3 abgeschätzt.

Die hier in Satz 1.2/3,4 und Satz 1.3 bewiesenen Eigenschaften der schon in [6] eingeführten Metrik $q(A, B)$ sind grundlegend für die Entwicklungen in Abschnitt 2 dieser Arbeit: Die Homogenität und Translationsinvarianz der Metrik $q(A, B)$ (Satz 1.2/3,4) bedeutet eine Ver-

träglichkeit mit der algebraischen Struktur; Satz 1.3 sagt aus, daß die Metrik mit dem Absolutbetrag in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ verträglich ist. Erst aufgrund dieser Verträglichkeitseigenschaften wird die Metrik $q(A, B)$ für Anwendungen, d. h. insbesondere für Abschätzungen brauchbar.

Wir bringen jetzt noch das oben erwähnte *Beispiel für eine supermetrische und nicht translationsinvariante Metrik* in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$: Zu $A = [a_1, a_2] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ sei $d(A) := a_2 - a_1$, dann ist

$$q d(A, B) := \begin{cases} q(A, B) & \text{für } A, B \in \mathbf{R} \subset \mathbf{I}(\mathbf{R}) \\ q(A, B) + \frac{|d(A) - d(B)|}{\max\{d(A), d(B)\}} & \text{sonst} \end{cases}$$

eine supermetrische und nicht translationsinvariante Metrik in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$.

Betrachten wir jetzt den Intervallraum $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ über einem halbgeordneten linearen Raum \mathbf{B} : Jede in \mathbf{B} gegebene Metrik $q(\vec{a}, \vec{b})$ läßt sich in vielfacher Weise auf $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ fortsetzen; wir erklären hier als Abstand von $\vec{A} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ und $\vec{B} = [\vec{b}_1, \vec{b}_1] \in \mathbf{I}(\mathbf{B})$ etwa

$$q(\vec{A}, \vec{B}) := \max(q(\vec{a}_1, \vec{b}_1), q(\vec{a}_2, \vec{b}_2)).$$

Satz 1.4. *Ist die Ausgangsmetrik $q(\vec{a}, \vec{b})$ in \mathbf{B} homogen bzw. supermetrisch (homogen und supermetrisch ist sie genau dann, wenn sie durch eine Norm erklärbar ist), dann wird die Metrik $q(\vec{A}, \vec{B})$ in $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ homogen bzw. translationsinvariant.*

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Metrik $q(\vec{A}, \vec{B})$.

Satz 1.5. *Ist \mathbf{B} vollständig bezüglich der Metrik $q(\vec{a}, \vec{b})$, so ist $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ vollständig bezüglich der Metrik $q(\vec{A}, \vec{B})$ dann und nur dann, wenn der der Halbordnung in \mathbf{B} zugeordnete Positivitätskegel (siehe dazu etwa [9], S. 205) abgeschlossen ist.*

Beweis. Aus der Definition der Metrik $q(\vec{A}, \vec{B})$ durch $q(\vec{a}, \vec{b})$ folgt: Ist $\{[a_\nu, b_\nu]\}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathbf{I}(\mathbf{B})$, dann sind die Folgen $\{a_\nu\}$ und $\{b_\nu\}$ CAUCHY-konvergent in \mathbf{B} ; wegen der Vollständigkeit von \mathbf{B} existieren in \mathbf{B} $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu$; aus $a_\nu \leq b_\nu$ für alle ν und der Abgeschlossenheit des Positivitätskegels folgt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu$. Damit enthält $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ ein Element $[\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu, \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu]$, und dieses ist gleich $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [a_\nu, b_\nu]$.

Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Grenzelementes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [a_\nu, b_\nu]$ zu jeder CAUCHY-Folge von Intervallen $[a_\nu, b_\nu]$ die Abgeschlossenheit des Positivitätskegels.

Speziell für den Raum $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ gilt damit das folgende

Korollar. $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ ist vollständig bezüglich der Metrik $q(A, B)$.

2. Intervallrechnung für Vektoren und Matrizen

In diesem Abschnitt wird zunächst im Anschluß an [2] eine Intervallrechnung für Vektoren und Matrizen erklärt; für die dabei auftretenden quasilinearen Räume werden Metriken entwickelt, die hinreichende Verträglichkeitseigenschaften bezüglich der algebraischen Struktur besitzen, so daß sie für Abschätzungen geeignet sind. Mit ihrer Hilfe werden Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewisser Gleichungen sowie Konvergenzkriterien für intervallmäßige Iterationsverfahren hergeleitet.

Es sei

$V_n(\mathbf{R}) := \mathbf{R}^n$ die Menge der n -Tupel reeller Zahlen,

$V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ die Menge der n -Tupel von Intervallen aus $\mathbf{I}(\mathbf{R})$,

$M_n(\mathbf{R})$ bzw. $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ die Menge der $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus \mathbf{R} bzw. $\mathbf{I}(\mathbf{R})$.

Elemente dieser Mengen bezeichnen wir mit $\mathfrak{a} = (A_i), \mathfrak{b} = (B_i), \dots$; $\mathfrak{a} = (A_i), \mathfrak{b} = (B_i), \dots$; $\mathfrak{A} = (A_{ik}), \mathfrak{B} = (B_{ik}), \dots$; $\mathfrak{A} = (A_{ik}), \mathfrak{B} = (B_{ik}), \dots$. Wir sprechen von reellen Vektoren, Intervallvektoren, reellen Matrizen und Intervallmatrizen.

In allen diesen Mengen erklären wir Gleichheit, Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation mit reellen Zahlen wie üblich komponentenweise. Damit werden $V_n(\mathbf{R})$ und $M_n(\mathbf{R})$ lineare, $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ quasilineare Räume; die letzteren erhält man auch durch die in 1.1 angegebene Konstruktion des Intervallraumes $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ über einem linearen halbgeordneten Raum \mathbf{B} , wenn man für \mathbf{B} die Räume $V_n(\mathbf{R})$ bzw. $M_n(\mathbf{R})$ jeweils mit ihrer natürlichen Halbordnung zugrundelegt.

Eine Multiplikation von Intervallmatrizen mit Intervallvektoren oder Intervallmatrizen definieren wir wie üblich als Matrixmultiplikation über die Komponenten, entsprechend werde eine Intervallmatrix bzw. ein Intervallvektor mit einem Intervall multipliziert, indem man alle Komponenten damit multipliziert.

Damit ist $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ ein Raum von Operatoren über $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; für die Untersuchung von Abbildungen des quasilinearen Raumes $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ benötigt man Metriken, die Verträglichkeitseigenschaften bezüglich der algebraischen Struktur besitzen, ähnlich den Eigenschaften der Metrik $q(A, B)$ in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$: Sie sollen einmal homogen und translationsinvariant sein; weiter soll für beliebige \mathfrak{A} aus $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, \mathfrak{x} und \mathfrak{y} aus $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ der Abstand von $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{y}$ in der Form

$$q(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{A}\mathfrak{y}) \leq p(\mathfrak{A}) q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

abschätzbar sein durch den Abstand von \mathfrak{x} und \mathfrak{y} multipliziert mit einem positiven Funktional $p(\mathfrak{A})$ von \mathfrak{A} ; dies kann etwa eine Norm sein.

Zur Vorbereitung auf die Entwicklung solcher Metriken definieren wir zunächst Absolutbeträge und untersuchen die Eigenschaften spezieller Normen für Intervallvektoren und Intervallmatrizen.

2.1. Absolutbeträge, Normen und Metriken

Definition 2.1. Wir erklären als Absolutbetrag

eines Intervalles $A = [a_1, a_2] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ die reelle Zahl $|A| := \max(|a_1|, |a_2|)$, eines Vektors $x = (X_i) \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ den Vektor $|x| := (|X_i|) \in V_n(\mathbf{R})$, einer Matrix $\mathfrak{A} = (A_{ik}) \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ die Matrix $|\mathfrak{A}| := (|A_{ik}|) \in M_n(\mathbf{R})$.

Bei Einschränkung dieser Definition auf reelle Zahlen bzw. Vektoren und Matrizen, deren Komponenten reelle Zahlen sind, erhält man gerade den üblichen Absolutbetrag, der sich in diesen Räumen bei Zugrundelegung der natürlichen Halbordnung ergibt (vergleiche die Definition des Absolutbetrages in halbgeordneten linearen Räumen nach [9], S. 207).

Definition 2.2. Normen für Vektoren $x, y \in V_n(\mathbf{R})$ oder $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ bzw. Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M_n(\mathbf{R})$ bzw. $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ heißen *monoton*, wenn

$$(M) \quad \begin{aligned} |x| \leq |y| &\Rightarrow \|x\| \leq \|y\| \\ |\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{B}| &\Rightarrow \|\mathfrak{A}\| \leq \|\mathfrak{B}\|. \end{aligned}$$

Eine *äquivalente Definition* erhält man durch die Forderung der Eigenschaft

$$(A) \quad \begin{aligned} \|x\| &= \||x|\| \\ \|\mathfrak{A}\| &= \||\mathfrak{A}|\|. \end{aligned}$$

Bemerkung. Für Vektornormen in $V_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^n$ bzw. \mathbf{C}^n wird die Äquivalenz der Eigenschaften (M) und (A) bereits in [4] (S. 47ff.) bewiesen; Normen mit diesen Eigenschaften werden dort *monoton* (wegen (A) auch *absolut*) genannt. Die Definition der Monotonie wird hier ausgedehnt auf Normen in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, $M_n(\mathbf{R})$ und $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; auch für diese Normen sind (M) und (A) äquivalent:

Zunächst folgt für alle Normen (A) unmittelbar aus (M); der Schluß von (A) auf (M) läßt sich für Normen in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ mit Hilfe von (A) auf den in $V_n(\mathbf{R})$ zurückführen; er gilt dann auch für Normen in $M_n(\mathbf{R})$ und $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, da diese stets als Vektornormen in $V_{n^2}(\mathbf{R})$ bzw. $V_{n^2}(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ aufgefaßt werden können.

Multiplikative Normen werden auch bei Intervallmatrizen durch die Forderung $\|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\| \leq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{B}\|$ *definiert*; bei verträglichen Normen für Intervallvektoren und Intervallmatrizen fordern wir Multiplikativität der Matrixnorm und $\|\mathfrak{A}x\| \leq \|\mathfrak{A}\| \|x\|$; verträgliche Normen nennen wir *zugeordnet*, wenn zu jedem $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ ein $y \neq 0$ aus $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ existiert mit $\|\mathfrak{A}y\| = \|\mathfrak{A}\| \|y\|$.

Für Vektornormen in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ mit der Eigenschaft $x \supset y \Rightarrow \|x\| \geq \|y\|$ (dies gilt z. B. für alle Normen, die in der Form $\|x\| = \sup_{r \in \mathbf{r}} \|x\|_r$ durch Normen in $V_n(\mathbf{R})$ darstellbar sind; dazu gehören insbesondere die monotonen Normen) zeigt man ähnlich, wie für Vektornormen im \mathbf{R}^n oder \mathbf{C}^n die Existenz beliebig vieler verträglicher und genau einer zugeordneten Matrixnorm; diese hat die Gestalt $\|\mathfrak{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathfrak{A}x\|$.

Ist dabei die Ausgangsnorm in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ monoton, so wird auch die zugeordnete Matrixnorm in $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ monoton; die Zuordnung kann dann stets durch einen Vektor mit der Eigenschaft $\eta = -\eta$ verifiziert werden.

Wir weisen noch darauf hin, daß die einer monotonen Vektornorm in $V_n(\mathbf{R})$ zugeordnete Matrixnorm in $M_n(\mathbf{R})$ nicht notwendig monoton ist; man erkennt dies etwa am Beispiel der euklidischen Vektornorm, die zugeordnete Norm ist die sogenannte Spektralnorm (siehe etwa [10], S. 9), und diese erweist sich als nicht monoton.

Beispiele für zugeordnete monotone Normen in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ geben etwa die mit positiven Gewichten k_1, \dots, k_n gebildeten Normen

$$\|\xi\| := \max_i \frac{1}{k_i} |X_i| \quad \text{und} \quad \|\mathfrak{A}\| := \max_i \frac{1}{k_i} \sum_j |A_{ij}| k_j;$$

die Zuordnung wird verifiziert durch den Vektor $\eta = ([-k_i, k_i])$.

Satz 2.1. *Zu jeder multiplikativen Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ in $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ existieren beliebig viele verträgliche Vektornormen in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$.*

Man zeigt dies wie üblich (siehe etwa [4], S. 42): Sind l_1, \dots, l_n reelle Zahlen, mindestens eine $\neq 0$; dann gibt für Vektoren $\xi = (X_i) \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$

$$\|\xi\|_V := \left\| \begin{pmatrix} l_1 X_1 & \dots & l_n X_1 \\ \vdots & & \vdots \\ l_1 X_n & \dots & l_n X_n \end{pmatrix} \right\|_M$$

eine zur Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ verträgliche Vektornorm.

Zusatz. Ist die Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ monoton, so wird auch die Vektornorm $\|\cdot\|_V$ monoton, denn mit $\|\cdot\|_M$ erfüllt auch $\|\cdot\|_V$ die Monotonie-eigenschaft (A).

Wir bringen noch einen Satz über den Zusammenhang der multiplikativen monotonen Normen für Matrizen $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$ oder $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ mit dem Spektralradius $\varrho(|\mathfrak{A}|)$ ihres Absolutbetrages $|\mathfrak{A}|$; zur Vorbereitung erinnern wir an eine entsprechende Beziehung für Matrizen $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$ und multiplikative Normen in $M_n(\mathbf{R})$:

Satz 2.2. *Es sei $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$, dann gilt (siehe etwa [4], S. 45, 46):*

- (Ra) *Für jede multiplikative Norm $\|\cdot\|$ in $M_n(\mathbf{R})$ ist $\|\mathfrak{A}\| \geq \varrho(\mathfrak{A})$.*
- (Rb) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine multiplikative Norm $\|\cdot\|$ in $M_n(\mathbf{R})$, für die $\|\mathfrak{A}\| < \varrho(\mathfrak{A}) + \varepsilon$.*

Die entsprechende Aussage für monotone Normen gibt jetzt

Satz 2.3. *Es sei $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$ bzw. $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, dann gilt:*

- (Ia) *Für jede multiplikative monotone Norm $\|\cdot\|_M$ in $M_n(\mathbf{R})$ bzw. $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ ist $\|\mathfrak{A}\|_M \geq \varrho(|\mathfrak{A}|)$.*

(Ib) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine multiplikative monotone Norm $\|\cdot\|_M$ in $M_n(\mathbf{R})$ bzw. $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, für die $\|\mathfrak{A}\|_M < \varrho(|\mathfrak{A}|) + \varepsilon$.

Beweis. Monotone Normen sind gekennzeichnet durch $\|\mathfrak{A}\| = \|\|\mathfrak{A}\|\|$; damit folgt (Ia) sofort aus (Ra). Ein entsprechender Schluß von (Rb) auf (Ib) ist jedoch nicht möglich; für den Beweis von (Ib) kann man sich aber auf mit Gewichten k_1, \dots, k_n gebildete monotone Normen der oben erwähnten Gestalt beschränken; für diese folgt (Ib) aus der PERRON-FROBENIUS-Theorie für nichtnegative Matrizen (siehe etwa [10]: Für irreduzible Matrizen folgt (Ib) aus Theorem 2.2; für reduzible Matrizen ist zusätzlich eine Stetigkeitsüberlegung durchzuführen).

Mit Hilfe monotoner Normen lassen sich jetzt in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ Metriken mit den zu Beginn dieses Abschnitts geforderten Eigenschaften erzeugen:

Satz 2.4. *Es seien $\mathfrak{x} = (X_i), \mathfrak{y} = (Y_i) \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und $\|\cdot\|_V$ eine monotone Vektornorm in $V_n(\mathbf{R})$, dann ist $q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \|(q(X_i, Y_i))\|_V$ eine homogene, translationsinvariante Metrik in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, d. h. es gilt:*

- 1) $q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$
- 2) $q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + q_V(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$
- 3) $q_V(c \mathfrak{x}, c \mathfrak{y}) = |c| q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$
- 4) $q_V(\mathfrak{x} + \mathfrak{z}, \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$

Bemerkungen zum Beweis. 1), 3) und 4) gelten auch bei Anwendung beliebiger Vektornormen in $V_n(\mathbf{R})$; 2) gilt nur, wenn die verwendete Vektornorm die Monotonieeigenschaft (M) wenigstens im positiven Hyperoktanten erfüllt.

Zusatz. $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ ist vollständig bezüglich der Metrik $q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, denn Konvergenz in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ ist äquivalent mit Konvergenz in jeder Komponente bezüglich der Metrik $q(X, Y)$ des Raumes $\mathbf{I}(\mathbf{R})$; $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ aber ist vollständig.

Satz 2.5. *Es seien $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, $\mathfrak{b}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, dann gilt (für die i -te Komponente eines Vektors \mathfrak{z} schreiben wir auch $(\mathfrak{z})_i$):*

$$(q((\mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b})_i, (\mathfrak{A} \mathfrak{y} + \mathfrak{b})_i)) \leq |\mathfrak{A}| (q((\mathfrak{x})_i, (\mathfrak{y})_i)).$$

Zum *Beweis* wird komponentenweise abgeschätzt; benutzt werden dabei vor allem die in Satz 1.2/3, 4 und Satz 1.3 bewiesenen Verträglichkeitseigenschaften der Metrik $q(X, Y)$ in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$.

Korollar. *Es seien $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_M$ verträgliche monotone Normen in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; dann gilt für die mit $\|\cdot\|_V$ gebildete Metrik $q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$:*

$$q_V(\mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}, \mathfrak{A} \mathfrak{y} + \mathfrak{b}) \leq \|\mathfrak{A}\|_M q_V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Dies ergibt sich durch Anwenden der verträglichen monotonen Normen auf die Vektorungleichung von Satz 2.5.

2.2. Die Gleichung $x = \mathfrak{A}x + b$

Zu vorgegebenem $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, $b \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ betrachten wir die Abbildung $x \rightarrow \mathfrak{A}x + b$ des $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ in sich und fragen nach Fixelementen dieser Abbildung; ein solches Fixelement nennen wir auch Lösung der Gleichung $x = \mathfrak{A}x + b$. Wir sprechen dabei bewußt nicht von einem linearen Gleichungssystem, weil hier eine nichtlineare Abbildung in einem nichtlinearen Raum zugrundeliegt. Wegen des Fehlens inverser Elemente kann man die Lösung auch nicht wie bei linearen Gleichungssystemen durch Invertieren einer Matrix gewinnen.

Satz 2.6. *Es sei $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$; dann hat die Abbildung $x \rightarrow \mathfrak{A}x + b$ für beliebiges $b \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ genau einen Fixpunkt x^* , d. h. die Gleichung $x = \mathfrak{A}x + b$ genau eine Lösung x^* ; die Iteration $x_{v+1} = \mathfrak{A}x_v + b$ konvergiert für jeden Anfangsvektor $x_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ gegen x^* .*

Beweis. Wegen $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$ existiert nach Satz 2.3 eine monotone multiplikative Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ in $M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, für die $\|\mathfrak{A}\|_M < 1$; zu dieser existiert nach Satz 2.1 eine verträgliche monotone Vektornorm $\|\cdot\|_V$ in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; mit dieser erklären wir die Metrik $q_V(x, y)$ in $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; in dieser Metrik ist die Abbildung kontrahierend (nach dem Korollar zu Satz 2.5). Wegen der Vollständigkeit von $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ folgt daraus die Behauptung.

Die Umkehrung von Satz 2.6 ist enthalten im folgenden

Satz 2.7. *Gegeben seien $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und $b \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; konvergiert die Iteration $x_{v+1} = \mathfrak{A}x_v + b$ mit jedem Anfangsvektor $x_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ gegen denselben Vektor $x^* \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, dann ist $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$.*

Beweis. Wir definieren für $A := [a_1, a_2] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ als Durchmesser die reelle Zahl $d(A) := a_2 - a_1 = \sup_{a, \underline{a} \in A} |a - \underline{a}|$; damit gilt für $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$:

$$d(A + B) = d(A) + d(B) \quad \text{und} \quad d(A \cdot B) \geq |A| d(B).$$

Jetzt betrachten wir die Komponentendurchmesser $d(X_{iv})$ der Iterationsvektoren $x_v = (X_{iv})$; dann gilt für alle i :

$$d(X_{iv+1}) = d\left(\sum_l A_{il} X_{lv}\right) + d(B_i) \geq \sum_l d(A_{il} X_{lv}) \geq \sum_l |A_{il}| d(X_{lv}).$$

Für den Vektor $(d(X_{iv}))$ der Komponentendurchmesser von $x_v = (X_{iv})$ gilt damit:

$$(d(X_{iv})) \geq |\mathfrak{A}| (d(X_{iv-1})) \geq \dots \geq |\mathfrak{A}|^v (d(X_{i0})).$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge der x_v für jeden Anfangsvektor $x_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ gegen $x^* = (X_i^*)$; dies beinhaltet die Konvergenz der Vektorfolge $(d(X_{iv}))$ gegen $(d(X_i^*))$. Daraus folgt: Zu jedem $x_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n(x_0, \varepsilon)$ derart, daß für alle $v \geq n(x_0, \varepsilon)$

$$(d(X_i^*) + \varepsilon) \geq |\mathfrak{A}|^v (d(X_{i0})).$$

Daraus aber folgt schließlich $\lim_{v \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}|^v = \mathfrak{D}$ (= Nullmatrix); dies wieder ist äquivalent mit $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$ (siehe etwa [10], Theorem 1.4).

Satz 2.6 und 2.7 liefern zusammen ein *notwendiges und hinreichendes Konvergenzkriterium für die Iteration* $\mathfrak{x}_{v+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}$:

Die Iteration $\mathfrak{x}_{v+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}$ *mit* $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, $\mathfrak{b} \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ *konvergiert für jeden Anfangsvektor* $\mathfrak{x}_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ *dann und nur dann, wenn* $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$.

Bemerkung. Im Spezialfall einer Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und eines Vektors $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \in V_n(\mathbf{R}) \subset V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ kann die Iteration $\mathfrak{x}_{v+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}$ entweder in herkömmlicher Weise mit Vektoren \mathfrak{x}_v aus $V_n(\mathbf{R})$ oder aber wie oben beschrieben mit Intervallvektoren aus $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ gestartet und durchgeführt werden: Sie konvergiert dabei bekanntlich für alle $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0 \in V_n(\mathbf{R})$ dann und nur dann, wenn $\varrho(\mathfrak{A}) < 1$, aber — das wurde oben gezeigt — für alle $\mathfrak{x}_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ dann und nur dann, wenn $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$.

Für Matrizen $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$ ist nun $\varrho(\mathfrak{A}) \leq \varrho(|\mathfrak{A}|)$. (Diese Ungleichung wird in [10], Lemma 2.3 für irreduzible Matrizen bewiesen; wegen der stetigen Abhängigkeit des Spektralradius von den Matrixkomponenten gilt sie dann auch für reduzible Matrizen.) Man erkennt:

Die Konvergenz für die umfassendere Menge von Anfangsvektoren (es ist $V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R})) \supset V_n(\mathbf{R})$) *ist äquivalent zur stärkeren Forderung* $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$.

Ist jetzt für eine Matrix $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$ $\varrho(\mathfrak{A}) < 1$, aber $\varrho(|\mathfrak{A}|) > 1$, so besitzt die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ für beliebige $\mathfrak{b} \in V_n(\mathbf{R})$ genau eine Lösung \mathfrak{x}^* , und die Iteration $\mathfrak{x}_{v+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}$ konvergiert für alle $\mathfrak{x}_0 \in V_n(\mathbf{R})$ gegen diese; dagegen divergiert sie für beliebige $\mathfrak{x}_0 \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, die nicht in der Teilmenge $V_n(\mathbf{R})$ liegen. Für die Komponentendurchmesser $d(X_{iv})$ der Iterationsvektoren $\mathfrak{x}_v = (X_{iv})$ gilt nämlich jetzt $(d(X_{iv})) = |\mathfrak{A}|^v (d(X_{i0}))$ (vergleiche die Abschätzung im Beweis von Satz 2.7).

Für $\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$ (alle Komponenten gleich) wird $(d(X_{i0})) = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$,

und die Folge der Vektoren $(d(X_{iv}))$, also auch der \mathfrak{x}_v divergiert. Beispiele für solche Matrizen \mathfrak{A} lassen sich leicht angeben, etwa für $n = 2$

$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.6 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$; hier ist $\varrho(\mathfrak{A}) = \sqrt{0.72} < 1$, aber $\varrho(|\mathfrak{A}|) = 1.2 > 1$.

Mit $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$ wird $\mathfrak{x}_v = \begin{pmatrix} [-1.2^v, 1.2^v] \\ [-1.2^v, 1.2^v] \end{pmatrix}$.

2.3. Gesamt- und Einzelschrittverfahren zur Lösung der Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$

Wir betrachten weiter die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, $\mathfrak{b} \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ und zerlegen \mathfrak{A} in die Summe $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} + \mathfrak{D} + \mathfrak{N}$; dabei sei \mathfrak{L}

eine strenge untere, \mathfrak{R} eine strenge obere Dreiecksmatrix, \mathfrak{D} eine Diagonalmatrix.

Definition 2.3. Wir bezeichnen die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{\nu+1} &= \mathfrak{A} \mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{b} && \text{als Gesamtschrittverfahren,} \\ \mathfrak{x}_{\nu+1} &= \mathfrak{L} \mathfrak{x}_{\nu+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{b} && \text{als Einzelschrittverfahren.} \end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{L} \mathfrak{x} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \mathfrak{x}$ ist auch jedes Fixelement des Einzelschrittverfahrens Lösung der Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$.

Wir zeigen nun, daß beim Gesamt- und Einzelschrittverfahren stets entweder beide konvergieren oder beide divergieren.

Das hinreichende und notwendige Konvergenzkriterium für das Gesamtschrittverfahren $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$ folgte aus Satz 2.6 und 2.7, letztlich aus den darin verwendeten Matrixungleichungen

$$(q((\mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b})_i, (\mathfrak{A} \mathfrak{y} + \mathfrak{b})_i)) \leq |\mathfrak{A}| (q((\mathfrak{x})_i, (\mathfrak{y})_i)) \quad (1)$$

und

$$(d(X_{i\nu})) \geq |\mathfrak{A}|^{\nu} (d(X_{i0})). \quad (2)$$

Entsprechende Ungleichungen gelten auch beim Einzelschrittverfahren: Zu $\mathfrak{x} \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ sei $E(\mathfrak{x}) \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ definiert durch die Gleichung $E(\mathfrak{x}) = \mathfrak{L} E(\mathfrak{x}) + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$; dann ist $\mathfrak{x} \rightarrow E(\mathfrak{x})$ die dem Einzelschrittverfahren zugrundeliegende Abbildung. Bei der Abbildung zweier Elemente $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$ gilt nun für den Vektor der Komponentenabstände $q((E(\mathfrak{x}))_i, (E(\mathfrak{y}))_i)$ die Abschätzung

$$(q((E(\mathfrak{x}))_i, (E(\mathfrak{y}))_i)) \leq (\mathfrak{C} - |\mathfrak{L}|)^{-1} (|\mathfrak{D} + \mathfrak{R}|) (q((\mathfrak{x})_i, (\mathfrak{y})_i)). \quad (3)$$

Ist nun $\varrho((\mathfrak{C} - |\mathfrak{L}|)^{-1} (|\mathfrak{D} + \mathfrak{R}|)) < 1$, so erhält man mit Schlüssen wie in Satz 2.6: *Die Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow E(\mathfrak{x})$ hat genau ein Fixelement \mathfrak{x}^* und die sukzessive Approximation $\mathfrak{x}_{\nu+1} = E(\mathfrak{x}_{\nu})$, d. h. das Einzelschrittverfahren konvergiert gegen \mathfrak{x}^* . (Wie oben gezeigt wurde, löst \mathfrak{x}^* auch $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$.)*

Umgekehrt gilt im Falle der Konvergenz für die Komponentendurchmesser $d(X_{i\nu})$ der Iterationsvektoren $\mathfrak{x}_{\nu} = (X_{i\nu})$ die (2) analoge Abschätzung

$$(d(X_{i\nu})) \geq ((\mathfrak{C} - |\mathfrak{L}|)^{-1} (|\mathfrak{D} + \mathfrak{R}|))^{\nu} (d(X_{i0})); \quad (4)$$

aus dieser folgt, entsprechend der Beweisführung von Satz 2.7

$$\varrho((\mathfrak{C} - |\mathfrak{L}|)^{-1} (|\mathfrak{D} + \mathfrak{R}|)) < 1.$$

Damit gilt insgesamt

Satz 2.8. *Das Einzelschrittverfahren*

$$\mathfrak{x}_{\nu+1} = \mathfrak{L} \mathfrak{x}_{\nu+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{b}$$

konvergiert dann und nur dann, wenn

$$\rho((\mathbb{E} - |\mathcal{L}|)^{-1} (|\mathcal{D} + \mathcal{R}|)) < 1.$$

Der Zusammenhang zwischen den Konvergenzkriterien beim Gesamt- und Einzelschrittverfahren wird hergestellt durch

Satz 2.9. *Ist $\mathcal{A} = \mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{R}$ eine reelle nichtnegative Matrix aus $M_n(\mathbf{R})$ mit der oben beschriebenen Zerlegung, dann gilt für*

a) $\rho(\mathcal{A}) < 1$: $\rho((\mathbb{E} - \mathcal{L})^{-1} (\mathcal{D} + \mathcal{R})) \leq \rho(\mathcal{A}) < 1$

mit strenger Ungleichheit bei irreduziblem \mathcal{A} ,

b) $\rho(\mathcal{A}) \geq 1$: $\rho((\mathbb{E} - \mathcal{L})^{-1} (\mathcal{D} + \mathcal{R})) \geq \rho(\mathcal{A}) \geq 1.$

Dieser Satz wird in [3] bewiesen; er verallgemeinert den bekannten Satz von STEIN-ROSENBERG (siehe etwa [10]) auf den Fall $\mathcal{D} \neq 0$. Mit $\mathcal{A} := |\mathcal{A}|$ folgt daraus

Satz 2.10. *Konvergiert bzw. divergiert das Gesamtschrittverfahren $\underline{x}_{v+1} = \mathcal{A} \underline{x}_v + \mathfrak{b}$ mit einer Matrix $\mathcal{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, so konvergiert bzw. divergiert auch das zugehörige Einzelschrittverfahren*

$$\underline{x}_{v+1} = \mathcal{L} \underline{x}_{v+1} + (\mathcal{D} + \mathcal{R}) \underline{x}_v + \mathfrak{b}.$$

Bemerkung. Aufgrund der Gleichungen (1) und (3) kann das Konvergenzverhalten beim Gesamt- und Einzelschrittverfahren abgeschätzt und verglichen werden. Wir gehen ähnlich vor wie bei reellen linearen Gleichungssystemen; bei diesen wird das Konvergenzverhalten einer Iteration $\underline{x}_{v+1} = \mathfrak{B} \underline{x}_v + \mathfrak{b}$ allgemein anhand des Spektralradius $\rho(\mathfrak{B})$ beurteilt (siehe dazu [10], S. 67). Für die Abweichung $(\underline{x}_v - \underline{x}^*)$ der v -ten Näherung \underline{x}_v von der exakten Lösung \underline{x}^* gilt nämlich $(\underline{x}_v - \underline{x}^*) = = \mathfrak{B}^v (\underline{x}_0 - \underline{x}^*)$; wendet man hierauf eine beliebige Vektornorm $\|\cdot\|_v$ und die zugeordnete Matrixnorm $\|\cdot\|_m$ an, so erhält man

$$\|\underline{x}_v - \underline{x}^*\|_v \leq \|\mathfrak{B}^v\|_m \|\underline{x}_0 - \underline{x}^*\|_v.$$

Wegen $\lim_{v \rightarrow \infty} \|\mathfrak{B}^v\|_m^{\frac{1}{v}} = \rho(\mathfrak{B})$ (dies wird in [13], Theorem 3.2 für die sogenannte Spektralnorm bewiesen, gilt aber für jede zugeordnete Matrixnorm) erscheint $\rho(\mathfrak{B})$ als natürliches Maß für die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit.

Entsprechendes gilt nun auch bei der intervallmäßigen Iteration; ist \underline{x}^* die (im Falle der Konvergenz eindeutige) Lösung von $\underline{x} = \mathcal{A} \underline{x} + \mathfrak{b}$, so erhält man mit $\mathfrak{h} := \underline{x}^*$ aus (1) und (3) für die Iterationsvektoren \underline{x}_v des Gesamtschrittverfahrens

$$(q((\underline{x}_v)_i, (\underline{x}^*)_i)) \leq |\mathcal{A}|^v (q((\underline{x}_0)_i, (\underline{x}^*)_i)) \tag{5}$$

bzw. Einzelschrittverfahrens

$$(q((\underline{x}_v)_i, (\underline{x}^*)_i)) \leq ((\mathbb{E} - |\mathcal{L}|)^{-1} (|\mathcal{D} + \mathcal{R}|))^v (q((\underline{x}_0)_i, (\underline{x}^*)_i)). \tag{6}$$

Durch Anwenden einer monotonen Vektornorm und der zugeordneten Matrixnorm auf (5) und (6) gelangt man zu entsprechenden Normungleichungen; aufgrund derselben Überlegungen wie oben kann jetzt der Spektralradius $\rho(|\mathfrak{A}|)$ bzw. $\rho((\mathfrak{E} - |\mathfrak{L}|)^{-1}(|\mathfrak{D} + \mathfrak{R}|))$ als ein Maß für das jeweilige asymptotische Konvergenzverhalten angesehen werden. In diesem Maß ist nach Satz 2.9 das Einzelschrittverfahren schneller.

Bei Iteration mit Einschließungsmengen läßt sich das Konvergenzverhalten beim Gesamt- und Einzelschrittverfahren noch verbessern; Grundlagentheorie dafür sind die folgenden Sätze:

Satz 2.11. *Die Gleichung $x = \mathfrak{A}x + b$ habe die Lösung x^* ; dann gilt für die Iteration $x_{v+1} = \mathfrak{A}x_v + b$ oder $x_{v+1} = \mathfrak{L}x_{v+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R})x_v + b$.*

(GE) Aus $x_0 \supset x^*$ folgt $x_v \supset x^*$ für alle v .

(Dies folgt für beide Verfahren aus der Teilmengeneigenschaft der Intervallarithmetik.)

Ist zusätzlich $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$, so ist die Lösung x^* eindeutig und $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = x^*$.

In der Intervallarithmetik wird mit Mengen gerechnet, deshalb liegt es nahe, auch mengentheoretische Operationen in die Iterationsvorschriften miteinzubeziehen:

Beim Gesamtschrittverfahren betrachten wir die Iterationsvorschrift:

$$(GD) \quad \eta_{v+1} = (\mathfrak{A}\eta_v + b) \cap \eta_v.$$

Beim Einzelschrittverfahren wird entsprechend die $(v + 1)$ -te Näherung η_{v+1} zu gegebenem η_v implizit definiert durch die Gleichung

$$(ED) \quad \eta_{v+1} = (\mathfrak{L}\eta_{v+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R})\eta_v + b) \cap \eta_v.$$

Wie beim gewöhnlichen Einzelschrittverfahren lassen sich die Komponenten von η_{v+1} aufgrund dieser Vorschrift der Reihe nach berechnen (das Einbeziehen der Durchschnittsbildung erhöht den Speicherbedarf nicht!).

Ersichtlich gilt

Satz 2.12. *Es sei $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$ und $\eta_0 \supset x^*$; bei Zugrundelegung des modifizierten Gesamt- oder Einzelschrittverfahrens (GD) bzw. (ED) bilden die η_v eine absteigende, gegen die eindeutige Lösung x^* konvergente Mengensequenz; d. h. es ist*

$$\eta_0 \supset \eta_1 \supset \dots \supset \eta_v \supset \eta_{v+1} \supset \dots \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \eta_v = x^*.$$

Gegenüber den Verfahren ohne Durchschnittsbildung

$$(G) \quad x_{v+1} = \mathfrak{A}x_v + b \quad \text{bzw.}$$

$$(E) \quad x_{v+1} = \mathfrak{L}x_{v+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R})x_v + b$$

gilt jeweils:

$$\text{Aus } x_0 = \eta_0 \text{ folgt } x_v \supset \eta_v \text{ für alle } v.$$

3. Anwendungen

Die Intervallrechnung entstand aus dem Bedürfnis, die bei der numerischen Behandlung mathematischer Probleme auf digitalen Rechenanlagen unvermeidbaren Rundungsfehler unter Kontrolle zu bringen und als Ergebnis einer numerischen Rechnung nicht nur irgendwelche Näherungswerte, sondern sichere Schranken für die exakte Lösung des gegebenen Problems zu bestimmen. Dies setzt ein Rechnen mit speziellen Mengen reeller Zahlen, nämlich abgeschlossenen Intervallen voraus, das auf der Maschine geeignet zu approximieren ist (siehe dazu [1], [8], [11]).

Die Intervallrechnung bietet nun darüber hinaus die Möglichkeit, bei Problemen, deren Ausgangsdaten nicht exakt vorliegen, sondern innerhalb gewisser Schranken streuen, Einschließungsschranken für die Ergebnisse zu bestimmen; wir zeigen dies am Beispiel der Gleichungsauflösung:

Satz 3.1. *Es sei $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{R})$, $\mathfrak{b} \in V_n(\mathbf{R})$, $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$, $\mathfrak{b} \in V_n(\mathbf{I}(\mathbf{R}))$; \mathfrak{x}^* sei die eindeutige Lösung von $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$, \mathfrak{x}^* sei Lösung von $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$; weiter sei $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{b}$, dann ist $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{x}^*$.*

Beweis. Wir legen in $V_n(\mathbf{R})$ den euklidischen Abstand zugrunde, dann ist $\{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in V_n(\mathbf{R}) \wedge \mathfrak{x} \in \mathfrak{x}^*\}$ eine kompakte, konvexe Teilmenge; diese wird durch die stetige Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ in sich abgebildet, sie enthält also nach dem BROUWERSchen Fixpunktsatz mindestens einen Fixpunkt der Abbildung; nach Voraussetzung ist aber \mathfrak{x}^* der einzige.

Nach den Ergebnissen von Abschnitt 2 kann \mathfrak{x}^* im Falle $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$ durch Iteration bestimmt werden; bei Durchführung dieser Iteration auf einer digitalen Rechenanlage ergibt sich das folgende Problem:

Auf jeder digitalen Rechenanlage ist nur eine endliche Teilmenge \mathbf{R}_M von reellen Zahlen, also auch nur eine endliche Teilmenge $\mathbf{I}(\mathbf{R}_M) \subset \mathbf{I}(\mathbf{R})$ vorhanden; die Elemente von $\mathbf{I}(\mathbf{R}_M)$ werden in einer Maschinenintervallarithmetik verknüpft, die die Verknüpfungen in $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ approximiert.

Die nach der Rechenvorschrift $\mathfrak{x}_{p+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_p + \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{x}_{p+1} = \mathfrak{Q} \mathfrak{x}_{p+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \mathfrak{x}_p + \mathfrak{b}$ in einer vorgegebenen Maschinenintervallarithmetik berechnete Approximation \mathfrak{x}_M^* für die theoretisch exakte Lösung \mathfrak{x}^* stimmt deshalb im allgemeinen nicht mit \mathfrak{x}^* überein und kann auch noch vom Anfangsvektor \mathfrak{x}_0 abhängen. Dann ist aber \mathfrak{x}_M^* möglicherweise nicht mehr Einschließungsmenge für die Lösungen aller in $\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ im Sinne von Satz 3.1 „enthaltenen“ reellen linearen Gleichungssysteme. Unser Ziel muß deshalb sein, die Rechnung auf der Maschine so zu führen, daß die berechnete Näherung \mathfrak{x}_M^* Obermenge der exakten Lösung \mathfrak{x}^* ist und sie noch möglichst gut approximiert.

Um die Einschließungseigenschaft $\mathfrak{x}_M^* \supset \mathfrak{x}^*$ zu erhalten, genügt es im wesentlichen, die Iteration $\mathfrak{x}_{p+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_p + \mathfrak{b}$ (oder $\mathfrak{x}_{p+1} = \mathfrak{Q} \mathfrak{x}_{p+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \mathfrak{x}_p + \mathfrak{b}$) auf der Rechenanlage mit Einschließungsmengen durchzuführen; Grundlage dafür ist Eigenschaft (GE) aus Satz 2.11.

Wir fragen nun, welche Eigenschaften eine Maschinenintervallarithmetik besitzen muß, damit (GE) auch für die auf der Rechenanlage be-

rechneten Iterationsvektoren gilt. Jede Maschinenintervallarithmetik ist eine Approximation der über dem Körper der reellen Zahlen aufgebauten Intervallarithmetik. Von der Aufgabe der Intervallrechnung her ergibt sich nun als grundsätzliche Forderung, daß die in der Maschinenintervallarithmetik berechneten Ergebnisintervalle stets die entsprechenden der exakten Intervallarithmetik enthalten. Diese Forderung wird in einfacher Weise dadurch erfüllt, daß man bei der Approximation der Elemente aus $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ durch Maschinenintervalle aus $\mathbf{I}(\mathbf{R}_M)$ und bei allen Verknüpfungen in $\mathbf{I}(\mathbf{R}_M)$ grundsätzlich nach außen rundet (siehe dazu [1]). Damit überträgt sich hier zunächst die Einschließungseigenschaft $x_0 \supset x^*$ auf die Darstellung von x_0 in der Maschine und dann auf die davon ausgehend in der Maschinenintervallarithmetik berechneten Iterationsvektoren; sie gilt dann auch für das eventuell vorhandene Grenzelement x_M^* .

Anfangsvektoren mit der Einschließungseigenschaft $x_0 \supset x^*$ lassen sich durch Abschätzen von x^* bestimmen; die einfachsten Möglichkeiten verwenden eine Normalabschätzung von x^* aufgrund der Identität $x^* = \mathfrak{A} x^* + \mathfrak{b}$; bei feineren Verfahren wird x^* komponentenweise abgeschätzt. Wir gehen darauf hier nicht näher ein und setzen voraus, daß Anfangsvektoren x_0 mit $x_0 \supset x^*$ zur Verfügung stehen; dann können das Gesamt- und Einzelschrittverfahren in der modifizierten, wegen der Durchschnittsbildung schnelleren Form (GD) und (ED) angewendet werden. In beiden Fällen gilt für die Iterationsvektoren η_p

$$x_0 = \eta_0 \supset \eta_1 \supset \dots \supset \eta_p \supset \eta_{p+1} \dots \text{ mit } \lim_{p \rightarrow \infty} \eta_p = x^*.$$

Da auf jeder Rechenanlage nur eine endliche Teilmenge von reellen Zahlen zur Verfügung steht, muß jede solche Iteration nach endlich vielen Schritten auf der Stelle treten. Damit erhält man ein einwandfreies Abbrechkriterium:

Die Iteration wird abgebrochen, sobald zwei aufeinanderfolgende Iterationsvektoren gleich sind. Der letzte Iterationsvektor gibt die in der vorgegebenen Maschinenintervallarithmetik bei vorgegebenem Anfangsvektor bestmöglichen Schranken für die exakte Lösung x^ .*

Numerische Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden an einer Z 23 der Universität Karlsruhe gerechnet; die dort implementierte Maschinenintervallarithmetik ist in [11] beschrieben.

In der Gleichung $x = \mathfrak{A} x + \mathfrak{b}$ sei

im 1. Beispiel

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} [0.05, & 0.15] [0.35, & 0.45] [0, & 0.05] \\ [0.2, & 0.3] [-0.01, & 0.01] [0.2, & 0.25] \\ [-0.2, & -0.1] [-0.25, & -0.15] [0, & 0.1] \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} [0.09, & 0.11] \\ [0.04, & 0.06] \\ [-0.15, & -0.05] \end{pmatrix},$$

im 2. Beispiel

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} [0.395, 0.405] [0.095, 0.105] [- 0.105, - 0.095] \\ [0.195, 0.205] [- 0.005, 0.005] [- 0.205, - 0.195] \\ [0.295, 0.305] [0.195, 0.205] [0.095, 0.105] \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} [0.095, 0.105] \\ [0.245, 0.255] \\ [- 0.205, - 0.195] \end{pmatrix}.$$

Beide Male ist hier $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$; damit existiert jeweils genau eine Lösung \mathfrak{x}^* , und die Konvergenz der besprochenen Iterationsverfahren ist gesichert. Anfangsvektoren η_0 mit $\eta_0 \supset \mathfrak{x}^*$ bestimmen wir durch Abschätzen von $\mathfrak{x}^* = (X_i^*)$.

Im Falle der Konvergenz, also $\rho(|\mathfrak{A}|) < 1$ existieren zu \mathfrak{A} stets positive Zahlen k_1, k_2, \dots, k_n derart, daß

$$\frac{1}{k_i} \sum_j |A_{ij}| k_j < 1 \text{ für alle } i \quad (\text{vergleiche Satz 2.2});$$

damit gilt $|X_i^*| \leq c := \max_i \frac{|B_i|}{1 - \frac{1}{k_i} \sum_j |A_{ij}| k_j}$ für alle i ,

und der Vektor $\eta_0 = (Y_{i0})$ mit $Y_{i0} = [-c, c]$ für alle i erfüllt $\eta_0 \supset \mathfrak{x}^*$.

In beiden Beispielen kommt man nun mit $k_1 = \dots = k_n = 1$ zum Ziel (d. h. es gilt das sogenannte „Zeilensummenkriterium“).

Im 1. Beispiel erhält man $c = 0.333333335$; mit dem Anfangsvektor η_0 kommt das Gesamtschrittverfahren (GD) nach 34, das Einzelschrittverfahren (ED) nach 21 Schritten zum Stehen bei

$$\mathfrak{x}_M^* = \begin{pmatrix} [0.802453011_{10} - 1, 0.185100626] \\ [- 0.425774133_{10} - 2, 0.105190070] \\ [- 0.237019604, - 0.569600946] \end{pmatrix}.$$

Im 2. Beispiel wird $c = 0.532467535$; mit η_0 als Anfangsvektor steht das Gesamtschrittverfahren (GD) nach 39, das Einzelschrittverfahren (ED) nach 31 Schritten.

Ergebnis:

$$\mathfrak{x}_M^* = \begin{pmatrix} [0.212384260, 0.250952486] \\ [0.295837054, 0.327473663] \\ [0.945904107_{10} - 1, - 0.567153486_{10} - 1] \end{pmatrix}.$$

Literatur

- [1] APOSTOLATOS, N., und U. KULISCH: Grundlagen einer Maschinenintervallarithmetik. *Comp.* **2**, 89–104 (1967).
- [2] APOSTOLATOS, N., und U. KULISCH: Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen. *Elektr. Rechenanlagen* **10**, 73–83 (1968).
- [3] APOSTOLATOS, N., und U. KULISCH: Über die Konvergenz des Relaxationsverfahrens bei nicht-negativen und diagonaldominanten Matrizen. *Comp.* **2**, 17–24 (1967).

- [4] HOUSEHOLDER, A. S.: The Theory of Matrices in Numerical Analysis. New York-Toronto-London: Blaisdell Publishing Company. 1964.
- [5] KULISCH, U.: Grundzüge der Intervallrechnung, Überblicke, Mathematik 2, 51–98. Mannheim: Bibliographisches Institut. 1969.
- [6] MOORE, R. E.: Intervall Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc. 1966.
- [7] NICKEL, K.: Über die Notwendigkeit einer Fehlerschrankenarithmetik für Rechenautomaten. Numerische Mathematik 9, 69–79 (1966).
- [8] NICKEL, K.: Error-bounds and Computer-arithmetic. Vortrag IFIP Congress Edinburgh. 1968.
- [9] SCHÄFER, H. H.: Topological Vector Spaces. Macmillan Series in Advanced Mathematics and Theoretical Physics. 1966.
- [10] VARGA, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1962.
- [11] WIPPERMANN, H. W.: Realisierung einer Intervallarithmetic in einem ALGOL-60-System. Elektronische Rechenanlagen 9, 224–233 (1967).
- [12] WULICH, B. S.: Einführung in die Funktionalanalysis. Leipzig: Teubner-Verlag. 1961.
- [13] YOUNG, R. C.: The Algebra of Many-valued Quantities. Mathematische Annalen, 104, 261–290 (1931).

Dr. Otto Mayer
Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik und Rechenzentrum
Englerstraße 2, D-75 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland