Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Helmut Wielandt in Mainz.

Eine Matrix A mit nicht negativen Elementen $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;$ $n \geqq 2)$ heißt nach Frobenius[1]) unzerlegbar, wenn sie weder die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

(mit quadratischen Teilmatrizen A_{11}, A_{22}) hat, noch durch Umstellung der Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten auf diese Gestalt gebracht werden kann. Über die Eigenwerte einer solchen Matrix A hat Frobenius[1]), seine an Perron[2]) anknüpfenden Arbeiten über positive Matrizen[3]) fortsetzend, eine Reihe wichtiger Sätze bewiesen. Wir stellen seine wesentlichen Ergebnisse zusammen:

I. *Die charakteristische Gleichung*

$$\Phi(x) \equiv \det(xE - A) = 0 \tag{1}$$

besitzt eine einfache positive Wurzel r, die dem Betrage nach von keiner anderen Wurzel übertroffen wird. Die zu dieser „Maximalwurzel" r gehörige Eigenlösung kann positiv gewählt werden; r ist der einzige Eigenwert, zu dem eine nicht negative Eigenlösung existiert.

II. *Besitzt* (1) *insgesamt k Wurzeln vom Betrage r, so sind diese einfach und haben die Werte $r\, e^{\varkappa 2\pi i/k}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$. Die Gesamtheit der n Wurzeln von* (1) *gestattet die Drehung um den Nullpunkt mit dem Winkel $2\pi/k$, aber nicht mit einem kleineren Winkel*[4]). *A hat die Gestalt*

[1]) G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1912**, S. 456—477.

[2]) O. Perron, Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. **64**, S. 248—263 (1907).

[3]) G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1908**, S. 471—476; **1909**, S. 514—518.

[4]) Frobenius hat diese Aussage in anderer Form: Treten in $\Phi(x)$ genau die Potenzen x^n, x^m, $x^l, \ldots$ wirklich auf, so ist k der größte gemeinsame Teiler von $n - m$, $m - l, \ldots$.

$$
(2) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
$$

(mit quadratischen Teilmatrizen in der Diagonale) oder kann durch Umstellung der Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten auf diese Form gebracht werden.

Im folgenden werden diese Sätze auf einem neuen, erheblich kürzeren Wege bewiesen und z. T. ergänzt (vgl. Satz III). Wir stützen uns auf eine von FROBENIUS nicht erwähnte Maximum-Minimum-Eigenschaft der Maximalwurzel r, die mit einem Einschließungssatz von COLLATZ[5]) zusammenhängt.

Beweis von I. (a) *Definition von r.* Zu jeder Spalte mit nicht negativen Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n$ (kurz: zu jedem Vektor $\mathfrak{x} \geqq 0$), die nicht nur Nullen enthält, erklären wir die nicht negative Zahl $r_{\mathfrak{x}}$ durch

$$
r_{\mathfrak{x}} = \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}
$$

mit der Vereinbarung, den Bruch gleich $+\infty$ zu setzen, falls $x_\mu = 0$ ist. Mit anderen Worten: $r_{\mathfrak{x}}$ ist die größte Zahl, für welche

$$
(3) \qquad A\mathfrak{x} - r_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} \geqq 0
$$

gilt. Die Zahlen $r_{\mathfrak{x}}$ sind nach oben beschränkt. Denn bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$ die Spalte, deren Elemente sämtlich 1 sind, mit $\mathfrak{s}'$ ihre Transponierte und mit C das größte Element der Zeile $\mathfrak{s}'A$, so ist nach (3)

$$
r_{\mathfrak{x}} \leqq \frac{\mathfrak{s}' A \mathfrak{x}}{\mathfrak{s}'\mathfrak{x}} \leqq \frac{C \mathfrak{s}'\mathfrak{x}}{\mathfrak{s}'\mathfrak{x}} = C.
$$

Für manche $\mathfrak{x}$ fällt $r_{\mathfrak{x}} > 0$ aus, z. B. für $\mathfrak{x} = \mathfrak{s}$ · denn A enthält wegen der Unzerlegbarkeit keine ganz aus Nullen bestehende Zeile. Daher besitzt die Menge aller $r_{\mathfrak{x}}$ eine endliche positive obere Grenze r. Diese wird wirklich erreicht, da man zur Konkurrenz nur die $\mathfrak{x} \geqq 0$ mit $\mathfrak{s}'\mathfrak{x} = 1$ zuzulassen braucht, d. h. eine abgeschlossene beschränkte Menge von Spalten. Es ist also

$$
(4) \qquad r = \max_{\mathfrak{x} \geqq 0} \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}.
$$

(b) Nach Definition von von r gilt: *Es gibt „Extremalvektoren“ $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z} \neq 0$, $\mathfrak{z} \geqq 0$, $A\mathfrak{z} - r\mathfrak{z} \geqq 0$, aber keinen Vektor $\mathfrak{x} \geqq 0$ mit $A\mathfrak{x} - r\mathfrak{x} > 0$.*

---

[5]) L. COLLATZ, Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen. Math. Zeitschr. **48**, S. 221—226 (1942).

Dem Nachweis, daß r die in Satz I erklärte Maximalwurzel ist und daß die Extremalvektoren die zugehörigen Eigenvektoren sind, schicken wir die folgende Bemerkung voraus.

(c) *Ist* $\mathfrak{y} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \neq 0$, *so ist* $(E+A)^{n-1}\mathfrak{y} > 0$. Zum Beweis setzen wir $(E+A)^{\nu}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_{\nu}$. Dann ist $\mathfrak{y}_{\nu+1} = \mathfrak{y}_{\nu} + A\mathfrak{y}_{\nu} \geqq \mathfrak{y}_{\nu} \geqq 0$. In $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ verschwinden also höchstens diejenigen Elemente, die auch in $\mathfrak{y}_{\nu}$ verschwinden. Es kann aber nicht eintreten, daß in $\mathfrak{y}_{\nu}$ und $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ genau die gleichen Elemente verschwinden; denn dann wäre bei passender Anordnung der Elemente

$$\mathfrak{y}_{\nu} = \begin{pmatrix}\mathfrak{p}\\0\end{pmatrix} \text{ mit } \mathfrak{p} > 0,$$

$$\mathfrak{y}_{\nu+1} = \mathfrak{y}_{\nu} + A\mathfrak{y}_{\nu} = \begin{pmatrix}\mathfrak{p}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{p}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{q}\\0\end{pmatrix}.$$

Hieraus würde $A_{21}\mathfrak{p} = 0$ folgen, daher $A_{21} = 0$, entgegen der Voraussetzung der Unzerlegbarkeit von A. Wenn also $\mathfrak{y}_{\nu}$ überhaupt Nullen enthält, enthält $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ weniger; nun enthält aber $\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}$ höchstens $n-1$ Nullen, also enthält $\mathfrak{y}_{n-1}$ keine.

(d) *Jeder Extremalvektor* $\mathfrak{z}$ *ist Eigenvektor von A zum Eigenwert* r *und ist positiv.* Nach Definition ist

$$\mathfrak{z} \geqq 0,\ A\mathfrak{z} - r\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \geqq 0.$$

Wäre hierin $\mathfrak{y} \neq 0$, so würden wir durch Multiplikation mit $(E+A)^{n-1}$ für die Spalte $\mathfrak{x} = (E+A)^{n-1}\mathfrak{z}$ die Ungleichungen

$$\mathfrak{x} > 0, \qquad A\mathfrak{x} - r\mathfrak{x} = (E+A)^{n-1}\mathfrak{y} > 0$$

erhalten, im Widerspruch zu (b). Wir haben also $\mathfrak{y} = 0$, $A\mathfrak{z} = r\mathfrak{z}$. Daß $\mathfrak{z} > 0$ ist, folgt aus $0 < \mathfrak{x} = (1+r)^{n-1}\mathfrak{z}$.

(e) *Ist* α *ein beliebiger Eigenwert von A, so ist* $|\alpha| \leqq r$. Zur Abkürzung bezeichnen wir hier und im folgenden zu jeder Matrix $(m_{\varrho\sigma}) = M$ die Matrix der absoluten Beträge $(|m_{\varrho\sigma}|) = M^*$. Dann folgt aus $\alpha\mathfrak{x} = A\mathfrak{x}$ nach der Dreiecksungleichung

$$|\alpha|\,\mathfrak{x}^* \leqq A\mathfrak{x}^*, \qquad |\alpha| \leqq r_{\mathfrak{x}^*} \leqq r.$$

Hiernach ist r die in Satz I erklärte Maximalwurzel von A.

(f) *Gibt es zu dem Eigenwert* α *von A einen nicht negativen Eigenvektor* $\mathfrak{x}$, *so ist* $\alpha = r$. Mit A ist auch die transponierte Matrix A' nicht negativ und unzerlegbar; ihre Maximalwurzel ist ebenfalls r, da A und A' die gleichen Eigenwerte haben. Für einen Extremalvektor $\mathfrak{y}$ von A' gilt daher

$$\alpha\mathfrak{y}'\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'(A\mathfrak{x}) = (\mathfrak{y}'A)\mathfrak{x} = r\mathfrak{y}'\mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt $\alpha = r$, da $\mathfrak{y} > 0$, also $\mathfrak{y}'\mathfrak{x} \neq 0$ ist.

Wir haben noch zu zeigen, daß r einfache Nullstelle von $\Phi(x)$ ist. Wir beweisen zunächst etwas weniger:

(g) *A besitzt zum Eigenwert r nur einen linear unabhängigen Eigenvektor; dessen Komponenten haben alle dasselbe Vorzeichen.* Es sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Eigenvektor von A zu r, $\mathfrak{z}$ ein fest gewählter Extremalvektor. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ proportional sind. Wir bestimmen die Zahl c so, daß $\mathfrak{x} - c\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \geqq 0$ ist und eine Komponente von $\mathfrak{y}$ verschwindet. Wegen der letzten Eigenschaft kann $\mathfrak{y}$ nach (d) kein Extremalvektor sein; andererseits ist $A\mathfrak{y} = r\mathfrak{y}$, daher wäre $\mathfrak{y}$ doch Extremalvektor, wenn nicht $\mathfrak{y} = 0$ wäre. Es ist also $\mathfrak{x} = c\mathfrak{z}$.

(h) *r ist einfache Nullstelle von $\Phi(x)$.* Die Behauptung besagt: $\Phi'(r) \neq 0$. Nach der bekannten Regel über die Differentation einer Determinante ist $\Phi'(r)$ die Spur der zu $rE - A$ adjungierten Matrix P. Zunächst folgt aus (g), daß Rang $(rE - A) = n - 1$, also $P \neq 0$ ist. Ferner genügt P der Gleichung $(rE - A)P = 0$. Nach dieser ist jede nicht verschwindende Spalte von P Eigenlösung von A zu r, enthält also nach (g) nur Elemente einerlei Vorzeichens. Dasselbe gilt für die Zeilen von P, wie man durch Übergang zur Transponierten erkennt. Also haben alle Elemente von P dasselbe Vorzeichen, und es ist $\Phi'(r) = \text{Spur } P \neq 0$. (Da r die größte reelle Nullstelle von $\Phi(x)$ ist, ist $\Phi'(r)$ und damit jedes Element von P positiv).

Damit ist der Beweis von Satz I beendet. Den Beweis von Satz II stützen wir auf einen teilweise neuen Satz III (bei FROBENIUS[3]) S. 516 fehlt die für das Folgende wesentliche Diskussion des Falles $|\beta| = r$).

III. *Es sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine unzerlegbare Matrix mit nicht negativen Elementen, $B = (b_{\mu\nu})$ eine Matrix mit komplexen Elementen $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$. Es sei $|b_{\mu\nu}| \leqq a_{\mu\nu}$ für alle μ, ν. Ist r die Maximalwurzel von A und β ein beliebiger Eigenwert von B, so ist $|\beta| \leqq r$. Gilt das Gleichheitszeichen, ist also $\beta = re^{i\varphi}$, so hat B die Gestalt*

$$B = e^{i\varphi} . DAD^{-1} \tag{5}$$

mit einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente sämtlich den absoluten Betrag 1 haben; insbesondere ist dann stets $|b_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}$. (Daß umgekehrt jede Matrix B der Gestalt (5) den Eigenwert $re^{i\varphi}$ besitzt, ist klar.)

Beweis von III[6]). Aus

$$\beta\mathfrak{x} = B\mathfrak{x} \tag{6}$$

folgt wie unter I e

$$|\beta|\mathfrak{x}^* \leqq B^*\mathfrak{x}^* \leqq A\mathfrak{x}^* \tag{7}$$

und hieraus $|\beta| \leqq r_{\mathfrak{x}^*} \leqq r$. Liegt der Grenzfall $|\beta| = r$ vor, so ist $\mathfrak{x}^*$ nach (7) ein Extremalvektor, also haben wir nach I d

---

[6]) Eine ähnliche Schlußweise findet sich in einem Sonderfall bei V. ROMANOVSKY, Sur les zéros des matrices stocastiques., Comptes rend. Acad. Sci., Paris **192** 266—269 (1931).

(8) $$|\beta|\mathfrak{x}^* = A\mathfrak{x}^*, \quad \mathfrak{x}^* > 0$$

und daher nach (7)

(9) $$B^* = A, \quad |b_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}.$$

Nach Definition von $\mathfrak{x}^*$ ist $\mathfrak{x} = D\mathfrak{x}^*$ mit einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente den Betrag 1 haben. Führen wir dies samt $\beta = r e^{i\varphi}$ in (6) ein, so ergibt sich

(10) $$|\beta|\mathfrak{x}^* = C\mathfrak{x}^*$$

mit

(11) $$C = e^{-i\varphi} D^{-1} B D, \quad C^* = B^* = A.$$

Aus (8), (10) und (11) folgt $C\mathfrak{x}^* = \overset{*}{C}\mathfrak{x}^*$, also wegen $\mathfrak{x}^* > 0$:

$$C = C^*, \quad C = A, \quad B = e^{i\varphi} D A D^{-1}.$$

Beweis von II. (a) *Die Lage der Eigenwerte vom maximalen Betrag.* Es gebe genau k Wurzeln von (1), welche den größten möglichen Betrag r haben, etwa

(12) $$\alpha_\varkappa = r e^{i\varphi_\varkappa} \qquad (0 = \varphi_1 < \varphi_2 \leqq \dots \leqq \varphi_k < 2\pi).$$

Die Voraussetzungen von III werden von $B = A$ zusammen mit $\beta = \alpha_\varkappa$ erfüllt; daher gibt es eine Diagonalmatrix $D_\varkappa$ mit

(13) $$A = e^{i\varphi_\varkappa} D_\varkappa A D_\varkappa^{-1}.$$

Nach I ist r einfacher Eigenwert von A, also $r e^{i\varphi_\varkappa}$ einfacher Eigenwert der rechts stehenden Matrix, d. h. von A. Die $\varphi_\varkappa$ sind also alle voneinander verschieden. Wir zeigen, daß sie mod 2π eine additive Gruppe bilden, indem wir (13) mit $D_\lambda^{\pm 1}$ transformieren. Es ergibt sich

$$A = e^{i(\varphi_\varkappa \pm \varphi_\lambda)} T A T^{-1} \qquad (T = D_\varkappa D_\lambda^{\pm 1}).$$

Hiernach ist auch $r e^{i(\varphi_\varkappa \pm \varphi_\lambda)}$ ein Eigenwert von A, also unter den Zahlen (12) enthalten. Aus der hiermit bewiesenen Gruppeneigenschaft folgt

(14) $$\varphi_\varkappa = (\varkappa - 1)\frac{2\pi}{k} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots, k).$$

(b) *Die Drehinvarianz des Spektrums* folgt unmittelbar aus (13) und (14). Die Gesamtheit der Wurzeln von (1) gestattet genau die Drehgruppe des regelmäßigen k-Ecks.

(c) Um A auf die angekündigte Form (2) zu bringen (was nur für $k > 1$ notwendig ist), stellen wir die Zeilen und genau so die Spalten von A derart um, daß die Komponenten eines zu $\alpha_2 = r e^{2\pi i/k}$ gehörenden Eigenvektors nach ihren Argumenten geordnet erscheinen. Wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit D_2 in der Form

$$D_2 = \begin{pmatrix} E_1 e^{i\delta_1} & & & \\ & E_2 e^{i\delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_g e^{i\delta_g} \end{pmatrix} \qquad (g \geqq 1)$$

an, wobei die $\delta_\gamma \bmod 2\pi$ voneinander verschieden sind und die E_γ Einheitsmatrizen (nicht notwendig vom selben Grade) bedeuten. Führen wir die entsprechende Zerlegung von A in g^2 Teilmatrizen $A_{\gamma\varrho}$ in die für $\varkappa = 2$ angeschriebene Gleichung (13) ein, so ergibt sich

$$A_{\gamma\varrho} = e^{i(2\pi/k + \delta_\gamma - \delta_\varrho)} A_{\gamma\varrho} \qquad (1 \leqq \gamma, \varrho \leqq g),$$

also

$$A_{\gamma\varrho} = 0, \text{ wenn } 2\pi/k + \delta_\gamma \not\equiv \delta_\varrho \bmod 2\pi. \tag{15}$$

Hiernach gibt es zu jedem γ höchstens ein ϱ (und zu jedem ϱ höchstens ein γ), für welches $A_{\gamma\varrho} \neq 0$ ist; andererseits gibt es wegen der Unzerlegbarkeit von A mindestens eins; also gibt es genau eins, und es ist $\delta_\varrho \equiv 2\pi/k + \delta_\gamma$. Insbesondere kommen unter den δ_γ die k Werte $\varkappa\, 2\pi/k + \delta_1$ vor. Wir denken uns die Anordnung so gewählt, daß sie an den ersten k Stellen stehen. Dann ist

$$\delta_\varkappa = \delta_1 + (\varkappa - 1)\frac{2\pi}{k} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots k),$$

und A hat nach (15) die Gestalt

$$\begin{Bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{k-1\,k} & 0 \\ A_{k1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B \end{Bmatrix}.$$

Hierin können aber nicht mehr als die ersten k Zeilen und Spalten auftreten, da A unzerlegbar vorausgesetzt ist. Damit ist Satz II bewiesen.

Wir schließen mit zwei ergänzenden Bemerkungen. Die erste betrifft den wichtigen Fall $k = 1$, in welchem r der einzige Eigenwert vom maximalen Betrage ist (die nicht negative unzerlegbare Matrix A heißt in diesem Fall nach Frobenius primitiv). Er tritt, wie schon Perron [2]) bemerkt hat, sicher dann ein, wenn eine Potenz $A^m > 0$ ist; man erkennt nämlich aus der Darstellung (2), daß im Falle $k > 1$ jede Potenz von A Nullen enthält. Von diesem Satz hat Frobenius [1]), S. 463, die folgende Umkehrung bewiesen: Ist A primitiv, so ist von einem ersten Exponenten p an jede Potenz von A positiv:

$$A^m > 0 \text{ für } m \geqq p.$$

Über diese Zahl p macht Frobenius keine näheren Angaben, doch kann man aus seinen Erörterungen die Abschätzung $p \leqq 2n^2 - 2n$ erhalten, wobei n die Zeilenzahl von A bedeutet. Eine eingehendere Untersuchung ergibt, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll, die bestmögliche nur von n abhängige Schranke $p \leqq n^2 - 2n + 2$. Das Gleichheitszeichen steht z. B. für

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Die zweite Bemerkung geht dahin, daß die Maximalwurzel r außer der Maximum-Minimum-Eigenschaft (4) auch eine Minimum-Maximum-Eigenschaft besitzt, nämlich

$$r = \min_{\mathfrak{x}>0} \max_{\mu} \frac{\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}. \tag{16}$$

Sie läuft auf die rechte Seite der COLLATZ'schen Ungleichung

$$\min \frac{\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu} \leqq r \leqq \max \frac{\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu} \qquad (x_\nu > 0) \tag{17}$$

hinaus, wie (4) auf die linke. (COLLATZ[5]) beweist (17) nur für $A > 0$, doch gilt der einfache Beweis, der ähnlich wie I f verläuft, auch für unzerlegbare $A \geqq 0$.) Die Symmetrie von (4) und (16) legt den Gedanken nahe, daß man auch (16) zur Grundlage der ganzen Theorie hätte machen können, wie dies hier mit (4) geschehen ist. In der Tat kann man ein Stück weit ganz entsprechend vorgehen. Jedoch wird die zu dem Nachweis, daß r ein größter Eigenwert ist, verwendete einfache Schlußweise von I e unbrauchbar, weil die von der Dreiecksungleichung gelieferte Abschätzung jetzt in der falschen Richtung liegt.

(Eingegangen am 2. 11. 1949.)