Gesetze in Ringen. I.

Herrn OSKAR PERRON zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Wilhelm Specht in Erlangen.

Den nachfolgenden Untersuchungen zugrundegelegt ist die Gesamtheit aller Ringe der Charakteristik Null im Sinne von E. STEINITZ [1]), also die Gesamtheit aller Systeme mathematischer Größen, in denen Addition und Multiplikation mit den folgenden üblichen Eigenschaften erklärt sind: Die Addition soll dem kommutativen und dem assoziativen Gesetze genügen und ausnahmslos umkehrbar sein, die Multiplikation dagegen im allgemeinen nur dem assoziativen Gesetze genügen, das distributive Gesetz aber beidseitig erfüllt sein.

Die Forderung der Charakteristik Null besagt, daß die Vielfachen λa eines von 0 verschiedenen Elementes a eines Ringes sämtlich verschieden sein sollen, daß also $\lambda a = 0$ mit ganzem λ nur dann gelten soll, wenn $\lambda = 0$ oder $a = 0$ ist [2]). Diese Forderung ist für diese Untersuchungen eine wesentliche und notwendige Einschränkung, da die herangezogenen Hilfsmittel aus der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe schon für Primzahlcharakteristiken nicht mehr in ausreichendem Umfange zur Verfügung stehen.

Weitere Bedingungen werden den Ringen der zu untersuchenden Gesamtheit im allgemeinen nicht auferlegt, insbesondere nicht die Bedingung der Existenz der Einheit, wenn auch die Ringe mit Einheit im Verlauf der Untersuchungen einer eingehenderen Betrachtung unterzogen werden.

In der Gesamtheit aller Ringe der Charakteristik Null sind die kommutativen Ringe durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß in ihnen auch die Multiplikation dem kommutativen Gesetze genügt, also die Bedingung

$$f(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

für jedes Wertepaar der Unbestimmten x_1, x_2 des Ringes erfüllt ist, obwohl der Ausdruck $f(x_1, x_2)$ in einem noch schärfer zu kennzeichnenden Sinne formal nicht verschwindet.

---

1) Vgl. E. STEINITZ, Algebraische Theorie der Körper, Journal f. d. reine und angew. Math. **137** (1910), 167—308. Buchausgabe Walter de Gruyter, Berlin 1930.

2) Durchwegs werden ganze rationale Zahlen mit griechischen, Ringelemente mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

In einem nilpotenten Ringe gilt mit einem festen Exponenten n die Gleichung

$$f(x_1) \equiv x_1^n = 0$$

für jeden Wert der Unbestimmten x_1 des Ringes, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1)$ formal nicht verschwindet.

Im Ring aller zweireihigen Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

aus ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gilt die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum \pm x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3} x_{\nu_4} = 0,$$

in der die Summe über alle Permutationen der ersten vier Ziffern zu erstrecken und das Vorzeichen danach zu wählen ist, ob die Permutation gerade oder ungerade ist, für jedes Wertequadrupel der Unbestimmten x_1, x_2, x_3, x_4 aus diesem Matrixring, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ formal nicht verschwindet.

Im Ring aller dreireihigen Matrizen der Gestalt

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix},$$

aus ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gilt die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 x_2 - x_2 x_1) x_3 - x_3 (x_1 x_2 - x_2 x_1) = 0$$

für jedes Wertetripel der Unbestimmten x_1, x_2, x_3 aus diesem Ring, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1, x_2, x_3)$ formal nicht verschwindet.

Wie diese Beispiele erkennen lassen, können für einen Ring $\mathfrak{R}$ unter Umständen gewisse formal nichtverschwindende Ausdrücke

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

aufgestellt werden mit der Eigenschaft, daß für jede Wertereihe der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

erfüllt ist. Eine solche Gleichung will ich ein *Gesetz* des Ringes nennen [3]).

---

[3]) Von einem sehr abstrakten, formalen Standpunkt aus gelangt G. Birkhoff zu ähnlichen Begriffbildungen in seiner Arbeit On the structure of abstract algebras, Proceedings Cambridge Phil. Soc. **31** (1935), 433—454. Von ihm habe ich die Bezeichnung Gesetz (Law) übernommen. Spezielle Gesetze, dort Rechenregeln genannt, treten in den geometrischen Grundlagenuntersuchungen von K. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Ann. **113** (1937), 528—567 auf. Naturgemäß finden sich einige Berührungspunkte, die indes lediglich die einfachsten formalen Dinge betreffen. Entsprechende Fragestellungen für Gruppen behandelt B. H. Neumann, Identical relations in groups I, Math. Ann. **114** (1937), 506—525.

Die Menge aller in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze erfüllt gewisse Vollständigkeitsbedingungen, die unabhängig von Struktureigenschaften des Ringes allgemein charakterisiert werden können. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß zu einer beliebig gewählten Menge von Gesetzen, die diese Vollständigkeitsbedingungen erfüllt, stets Ringe existieren, in denen genau die Gesetze dieser Menge gelten und keine anderen. Besitzt der Ring $\mathfrak{R}$ insbesondere eine Einheit, so erfüllt die Menge der in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze eine einfache zusätzliche Vollständigkeitsbedingung. Auch hier kann nachgewiesen werden, daß zu einer beliebigen Menge von Gesetzen, die außer den allgemeinen Vollständigkeitsbedingungen diese zusätzliche Forderung erfüllt, auch Ringe mit Einheit existieren, in denen genau die Gesetze dieser Menge gelten und keine anderen.

Die eben erwähnten Vollständigkeitsbedingungen haben ihren Ursprung darin, daß aus einem im Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze durch genau zu kennzeichnende Verfahren stets weitere Gesetze als Folgegesetze abgeleitet werden können. Diese Tatsache legt die Frage nahe, ob nicht die Menge aller in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze aus einer Teilmenge von Gesetzen möglichst einfacher Struktur abgeleitet werden könne. In der Tat lassen sich alle in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze aus den *mehrfach linearen* Gesetzen herleiten, die wiederum auf eine endliche oder unendliche, nach wachsenden Dimensionszahlen geordnete Folge von mehrfach linearen Gesetzen zurückgeführt werden können. Es ist mir hier bisher noch keine Entscheidung der Frage gelungen, ob sich für jeden Ring $\mathfrak{R}$ eine endliche Folge von mehrfach linearen Gesetzen angeben läßt, aus denen alle in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze abgeleitet werden können, oder ob auch Ringe existieren, in denen für die Herleitung aller in ihnen geltenden Gesetze eine unendliche Folge von mehrfach linearen Gesetzen erforderlich ist.

Eingehendere Untersuchungen können für Ringe mit Einheit durchgeführt werden. Zunächst läßt sich zeigen, daß eine Beschränkung auf Gesetze möglich ist, deren formal gebildeten partiellen Ableitungen nach sämtlichen Unbestimmten verschwinden. Für die mehrfach linearen Gesetze, deren partielle Ableitungen sämtlich verschwinden, können mit Hilfe der höheren Kommutatoren genaue Strukturaussagen gemacht werden. Sie lassen sich als lineare Verbindungen von speziellen geordneten Kommutatorprodukten darstellen.

I.

Aus einer abzählbaren Menge von Symbolen

$$(x) = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

die ich im folgenden stets als *Unbestimmte* bezeichnen will, bilde man zu jeder natürlichen Zahl $k = 1, 2, 3, \ldots$ die gleichfalls abzählbare

Menge formaler Potenzprodukte

$$x_{\nu_1} x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_k}$$

der Dimension k, worin die Indizes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Nimmt man der Reihe nach für die Dimensionszahl k alle natürlichen Zahlen, so erhält man die (wiederum abzählbare) Menge aller Potenzprodukte beliebiger Dimension in den Unbestimmten der Folge (x), die in einer willkürlichen, für das Weitere festgehaltenen Abzählung mit

$$(X) = X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

bezeichnet werden mögen. Nur dann sollen zwei solche Potenzprodukte als gleich angesehen werden, wenn sie formal übereinstimmen:

$$x_{\mu_1} x_{\mu_2} \ldots x_{\mu_k} = x_{\nu_1} x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_l}$$

nur wenn

$$k = l \quad \text{und} \quad \mu_1 = \nu_1, \; \mu_2 = \nu_2, \ldots, \mu_k = \nu_k.$$

Ist in der Folge (X) etwa $X_\alpha = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \ldots x_{\mu_k}$ ein Potenzprodukt der Dimension k und $X_\beta = x_{\nu_1} x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_l}$ ein Potenzprodukt der Dimension l, so läßt sich aus ihnen durch formales Zusammensetzen ein Potenzprodukt $X_\alpha X_\beta$ von der Dimension $k + l$ bilden, das in der Folge (X) etwa als X_γ erscheint:

$$X_\gamma = X_\alpha X_\beta = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \ldots x_{\mu_k} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_l}.$$

Man erkennt sogleich, daß es zu einem vorgegebenen Potenzprodukt X_γ nur endlich viele Paare von Potenzprodukten X_α, X_β gibt, deren formale Zusammensetzung gerade X_γ liefert.

Mit Hilfe der Folge (X) werde nun die (wiederum abzählbare) Menge $\mathfrak{F}$ aller Symbole

$$f(x) = \varrho_1 X_1 + \varrho_2 X_2 + \varrho_3 X_3 + \cdots = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varrho_\alpha X_\alpha \tag{1}$$

gebildet, worin die Koeffizienten ϱ_α ganze Zahlen darstellen, von denen indes stets nur endlich viele von Null verschieden sein sollen.

Jeden Ausdruck $f(x)$ der Gestalt (1) will ich eine *Form* in den Unbestimmten (x) nennen. Kommen in der Darstellung (1) einer Form $f(x)$ noch Potenzprodukte der Dimension k, aber keine Potenzprodukte höherer Dimension als k wirklich vor, so ist $f(x)$ eine *Form der Dimension* k. Ferner will ich für eine Form $f(x)$ auch das Zeichen $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verwenden, um anzudeuten, daß in der Darstellung (1) der Form $f(x)$ die Unbestimmten $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ nicht mehr auftreten, wobei aber nicht verlangt werden soll, daß sämtliche Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Form auch wirklich erscheinen.

Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Formen $f(x)$ bildet nun einen Ring der Charakteristik Null, den *Formenring* $\mathfrak{F}$, wenn nachstehende Festsetzungen getroffen werden:

1. Zwei Formen $f(x) = \sum_\alpha \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_\alpha \sigma_\alpha X_\alpha$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\varrho_\alpha = \sigma_\alpha$ für jeden Index α erfüllt ist.

2. Die Summe zweier Formen $f(x) = \sum_\alpha \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_\alpha \sigma_\alpha X_\alpha$ ist erklärt durch

$$f(x) + g(x) = \sum_\alpha (\varrho_\alpha + \sigma_\alpha) X_\alpha.$$

3. Das Produkt zweier Formen $f(x) = \sum_\alpha \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_\beta \sigma_\beta X_\beta$ ist erklärt durch

$$f(x)\,g(x) = \sum_\gamma \tau_\gamma X_\gamma \quad \text{mit} \quad \tau_\gamma = \sum \varrho_\alpha \sigma_\beta,$$

wobei α, β alle Indizespaare durchlaufen, für die $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ ist.

Daß die Menge $\mathfrak{F}$ unter diesen Festsetzungen alle Ringeigenschaften besitzt, erkennt man sehr leicht aus der Bemerkung, daß die Produktbildung nichts anderes darstellt als das formale Ausmultiplizieren der beiden Ausdrücke $f(x)$ und $g(x)$ zu

$$f(x)\,g(x) = \sum_{\alpha,\,\beta} \varrho_\alpha \sigma_\beta X_\alpha X_\beta,$$

worin nun noch die Glieder mit gleichen Potenzprodukten $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ zu einem Glied zusammenzufassen sind. Insbesondere ist danach eine Form $f(x) = \sum_\alpha \varrho_\alpha X_\alpha$ nur dann die *Nullform* 0 des Ringes $\mathfrak{F}$, wenn für alle Indizes $\varrho_\alpha = 0$ ist.

Eine Form $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt weiter *homogen* von der Dimension k, wenn in ihrer Darstellung (1) nur Potenzprodukte der Dimension k in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wirklich auftreten, wenn also in leichtverständlicher Schreibweise für jedes ganze τ die Gleichung

$$f(\tau x_1, \tau x_2, \ldots, \tau x_n) = \tau^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

besteht. Ferner heißt eine Form $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogen bezüglich der Unbestimmten* x_λ von der Dimension k_λ mit einem festen λ der Reihe $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, wenn die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = \tau^{k_\lambda} f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n) \tag{3}$$

für jedes ganze τ erfüllt ist. Offenbar ist eine Form homogen, wenn sie bezüglich aller (in ihr wirklich auftretenden) Unbestimmten homogen ist. Eine allgemeine Form $f(x)$ der Dimension k kann stets als Summe

$$f(x) = \sum_{\varkappa=1}^{k} f_\varkappa(x)$$

homogener Formen $f_\varkappa(x)$ der durch den Index angegebenen Dimension dargestellt werden; eine ähnliche Zerlegung in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{k} f_\varkappa(x)$$

ist aber auch möglich nach Formen $f_\varkappa(x)$, die bezüglich einer der

Unbestimmten x_λ in der durch den Index $\varkappa$ angegebenen Dimension homogen sind, wobei sinngemäß $f_0(x)$ eine Form bezeichnet, für die die Gleichung

$$f_0(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

besteht, in der die Unbestimmte x_λ also nicht wirklich auftritt.

Ist nun $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige, von der Nullform verschiedene Form der Dimension k, ferner $\mathfrak{R}$ ein beliebiger vorgegebener Ring der Charakteristik Null, so stellt für jede Wertereihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Elementen aus $\mathfrak{R}$ der durch die formale Substitution $x_\lambda \to a_\lambda$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gebildete Ausdruck $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wiederum ein Element des Ringes $\mathfrak{R}$ dar. Ich sage, *im Ringe $\mathfrak{R}$ gelte das Gesetz*

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

der Dimension k, wenn stets, wie auch die Wertereihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{R}$ gewählt sein mag, die Gleichung

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

erfüllt ist.

Ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem wenigstens ein Gesetz der Dimension k, aber kein Gesetz niedrigerer Dimension gilt, heiße *Ring k-ter Stufe*; ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem überhaupt kein Gesetz irgendeiner Dimension gilt, soll als *gesetzloser Ring* bezeichnet werden. Die Existenz gesetzloser Ringe, allgemeiner die Existenz von Ringen jeder Stufe, wird im nächsten Abschnitt nachgewiesen werden.

Jedem in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze $g(x) = 0$ entspricht eine eindeutig bestimmte Form $g(x)$ aus dem Formenring $\mathfrak{F}$, der Gesamtheit aller in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze daher eine wohlbestimmte Teilmenge $\mathfrak{g}$ des Ringes $\mathfrak{F}$, die kurz als der *Typus* des Ringes $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden soll. Besteht $\mathfrak{g}$ allein aus der Nullform des Ringes $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{R}$ ein gesetzloser Ring, weshalb $\mathfrak{g} = 0$ den Typus jedes gesetzlosen Ringes darstellt. Allgemeiner stellt eine Teilmenge $\mathfrak{g}$, die als Typus eines vorgegebenen Ringes $\mathfrak{R}$ gefunden wurde, den Typus einer Klasse von Ringen dar, deren Mitglieder gemeinsame innere strukturelle Eigenschaften besitzen, die durch die Gültigkeit des Gesetzes $g(x) = 0$ für jede beliebige Form $g(x)$ aus $\mathfrak{g}$ bestimmt werden.

Es ist daher eine erste Aufgabe dieser Untersuchungen, die möglichen Typen $\mathfrak{g}$ festzustellen und durch Vollständigkeitseigenschaften zu kennzeichnen. Zu diesem Zwecke gebe ich im folgenden eine Reihe von Regeln an, die erlauben, aus einem Satze von in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetzen neue, gleichfalls in $\mathfrak{R}$ geltende Gesetze abzuleiten:

1. Sind $g_1(x) \equiv g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$; $g_2(x) \equiv g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ zwei in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetze, so gilt mit beliebigen ganzen Zahlen γ_1, γ_2 in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \gamma_1 g_1(x) + \gamma_2 g_2(x) = 0.$$

2. Ist $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, ferner $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige Form aus $\mathfrak{F}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die Gesetze

$$h_1(x) \equiv h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv g(x) f(x) = 0,$$
$$h_2(x) \equiv h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x) g(x) = 0.$$

3. Gilt in $\mathfrak{R}$ das Gesetz $\gamma g(x) = \gamma g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ mit einer von 0 verschiedenen ganzen Zahl γ und einer Form $g(x)$ aus $\mathfrak{F}$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz

$$g(x) = 0.$$

4. Ist $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, sind ferner

$$f_\nu(x) \equiv f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebige Formen aus $\mathfrak{F}$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das aus $g(x) = 0$ durch die formale Substitution $x_\nu \to f_\nu(x)$ entstehende Gesetz

$$h(x) \equiv h(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0.$$

Der Beweis dieser vier Regeln bedarf wohl keiner näheren Ausführung.

Für Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e tritt hierzu noch die Regel der *formalen partiellen Ableitung:* Zu diesem Zwecke erweitere ich zunächst den Formenring $\mathfrak{F}$ zu dem *erweiterten Formenring* $\mathfrak{F}^*$ mit Einheit e. Man hat dazu nur die Menge $\mathfrak{F}^*$ aller Symbole

$$f^*(x) = \varrho_0 e + f(x)$$

mit beliebigem ganzzahligem ϱ_0 und beliebigem $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ zu bilden und folgende Festsetzungen zu treffen:

1. Die Gleichung

$$\varrho_0 e + f(x) = \sigma_0 e + g(x)$$

soll dann und nur dann gelten, wenn $\varrho_0 = \sigma_0$ und $f(x) = g(x)$ ist.

2. Die Summe zweier Elemente wird erklärt durch

$$(\varrho_0 e + f(x)) + (\sigma_0 e + g(x)) = (\varrho_0 + \sigma_0) e + (f(x) + g(x)).$$

3. Das Produkt zweier Elemente wird erklärt durch

$$(\varrho_0 e + f(x))(\sigma_0 e + g(x)) = \varrho_0 \sigma_0 e + (\varrho_0 g(x) + \sigma_0 f(x) + f(x) g(x)).$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{F}^*$ ein Ring mit der Einheit e.

Werden nun im erweiterten Formenring $\mathfrak{F}^*$ die partiellen Ableitungen von e und x_ν formal erklärt durch

$$\frac{\partial e}{\partial x_\lambda} = 0; \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\nu\lambda} e \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit dem bekannten Kroneckerschen Symbol

$$\delta_{\nu\lambda} = 0 \text{ für } \nu \neq \lambda; \quad \delta_{\nu\nu} = 1 \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so gestatten die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial (f(x) + g(x))}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda}$$

$$\frac{\partial (f(x)\, g(x))}{\partial x_\lambda} = f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_\lambda} g(x)$$

die Bildung der formalen partiellen Ableitungen nach den Unbestimmten x_λ für jede beliebige erweiterte Form $\varrho_0 e + f(x)$.

Offensichtlich erhält man allgemeiner die höheren partiellen Ableitungen $\frac{\partial^\varkappa f(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa}$ auch aus der formalen Entwicklung des Ausdruckes

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda + \xi e, \ldots, x_n) = f(x) + \xi f_1(x) + \xi^2 f_2(x) + \cdots + \xi^k f_k(x)$$

nach Potenzen der (mit allen Unbestimmten x_λ vertauschbar angenommenen) weiteren Unbestimmten ξ vermittels der Gleichungen

$$\frac{\partial^\varkappa f(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa} = \varkappa!\, f_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Unter diesen Festsetzungen gilt für Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e die nachstehende Regel:

5. Ist $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die Gesetze

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} = 0.$$

Neben dem Gesetz $g(x) = 0$ gilt nämlich, da $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitzt, bei beliebig gewähltem ganzem ξ auch das Gesetz

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda + \xi e, \ldots, x_n) \equiv g(x) + \xi g_1(x) + \xi^2 g_2(x) + \cdots + \xi^k g_k(x) = 0.$$

Hieraus folgt aber aufgrund der Regel 3 in bekannter Weise durch Wahl von $k+1$ verschiedenen ganzen Werten für ξ die Gültigkeit der Gesetze

$$g(x) = 0,\ g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0,\ \ldots,\ g_k(x) = 0,$$

von denen insbesondere $g_1(x)$ das Gesetz

$$g_1(x) \equiv \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda} = 0$$

liefert. Daß der Ausdruck $g_1(x)$ dem Formenring $\mathfrak{F}$ angehört, liegt auf der Hand, da in einem Gesetz $g(x) = 0$ für einen Ring mit Einheit e gewiß keine Potenzprodukte der Dimension 1 auftreten können.

Allgemeiner folgt aus der Gültigkeit des Gesetzes $g(x) = 0$ in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e die Gültigkeit des Gesetzes

$$\frac{1}{\varkappa!} \frac{\partial^\varkappa g(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

und durch Wiederholung des Verfahrens die Gültigkeit des Gesetzes

$$\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_n!}\,\frac{\partial^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n}g(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}\ldots\partial x_n^{\varkappa_n}}=0$$

für jede Reihe nichtnegativer ganzer Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, die die Bedingung

$$\varkappa + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n \leqq k$$

erfüllt.

II.

Die beiden ersten Regeln, die zur Bildung neuer Gesetze aus bereits bekannten, in einem Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetzen angegeben wurden, zeigen, daß der Typus $\mathfrak{g}$ eines Ringes $\mathfrak{R}$ ein (zweiseitiges) Ideal im Formenring $\mathfrak{F}$ ist. Die weiteren Regeln legen die folgenden Definitionen nahe:

Ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ heißt *T-Ideal*, wenn es außer den Idealeigenschaften noch die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1. Gehört ein Vielfaches $\gamma g(x)$ einer Form $g(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ zu $\mathfrak{a}$, so gehört die Form $g(x)$ selbst zu $\mathfrak{a}$.

2. Gehört die Form $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu $\mathfrak{a}$, so gehört auch die Form

$$h(x) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

zu $\mathfrak{a}$, die aus $g(x)$ durch die formale Substitution

$$x_\nu \to f_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit beliebigen (nicht notwendig zu $\mathfrak{a}$ gehörenden) Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ erhalten wird.

Ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ heißt *T*-Ideal*, wenn es ein *T*-Ideal ist und überdies die Eigenschaft besitzt:

3. Gehört die Form $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu $\mathfrak{a}$, so gehören auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zu $\mathfrak{a}$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen findet man sogleich den

Satz 1. *Der Typus $\mathfrak{g}$ eines Ringes $\mathfrak{R}$ ist ein T-Ideal und sogar ein T*-Ideal, falls $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitzt.*

Die Umkehrung dieses Satzes stellt eine vollständige Lösung des mit diesen Untersuchungen verknüpften Existenzproblems dar. Es gilt nämlich, wie nunmehr gezeigt werden soll, der

Satz 2. *Zu jedem T-Ideal $\mathfrak{g}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ gibt es einen Ring $\mathfrak{R}$, zu jedem T*-Ideal $\mathfrak{g}$ des Formenringes $\mathfrak{F}^*$ gibt es einen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e, der den Typus $\mathfrak{g}$ besitzt.*

Zum Beweise bilde man, genau entsprechend der Bildung des Formenringes $\mathfrak{F}$ im Abschnitt I, aus einer abzählbaren Menge von Unbestimmten

$$(u) = u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

den Formenring $\mathfrak{U}$ aller Formen

$$f(u) = \varrho_1 U_1 + \varrho_2 U_2 + \varrho_3 U_3 + \cdots = \sum_\alpha \varrho_\alpha U_\alpha$$

in den Potenzprodukten U_α beliebiger Dimension mit ganzzahligen Koeffizienten ϱ_α, von denen stets nur endlich viele von Null verschieden sein sollen. Der Ring $\mathfrak{U}$ ist ein gesetzloser Ring. Wäre nämlich

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein in $\mathfrak{U}$ gültiges Gesetz, so müßte insbesondere die Gleichung

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

gelten, was nur für die Nullform $g(x) \equiv 0$ zutreffen kann.

Auch der erweiterte Formenring $\mathfrak{U}^*$, der von allen Symbolen

$$f^*(u) = \varrho_0 e + f(u)$$

mit beliebigem ganzzahligem ϱ_0 und beliebigem $f(u)$ aus $\mathfrak{U}$ gebildet wird, ist gesetzlos, da er ja den Formenring $\mathfrak{U}$ als Teilring enthält.

Nun sei $\mathfrak{g}$ ein beliebiges T-Ideal des Formenringes $\mathfrak{F}$; ihm entspricht durch die Zuordnung

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{u}$ des Formenringes $\mathfrak{U}$. Der Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ ist dann, wie leicht gezeigt werden kann, ein Ring vom Typus $\mathfrak{g}$.

Ist nämlich $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Form des T-Ideals $\mathfrak{g}$, so ist auch

$$h(x) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

mit beliebigen Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine Form aus $\mathfrak{g}$ und daher

$$g(f\ (u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \equiv 0\,(\mathfrak{u})$$

mit beliebigen Elementen $f_\nu(u)$ des Ringes $\mathfrak{U}$. Mithin gilt im Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ das Gesetz $g(x) = 0$.

Gilt andererseits im Ringe $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ das Gesetz

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

so gilt insbesondere für die ersten n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0\,(\mathfrak{u}),$$

weshalb die Form $g(x)$ zu dem T-Ideal $\mathfrak{g}$ gehört.

Ist $\mathfrak{g}$ ein T^*-Ideal des Formenringes $\mathfrak{F}$, so entspricht ihm in der gleichen Zuordnung

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{u}$ des erweiterten Formenringes $\mathfrak{U}^*$. Der Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ ist dann ein Ring mit Einheit und besitzt den Typus $\mathfrak{g}$.

Ist nämlich $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Form aus dem T^*-Ideal $\mathfrak{g}$, so ist, da alle partiellen Ableitungen

$$\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_n!}\,\frac{\partial^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n} g(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}\ldots\partial x_n^{\varkappa_n}} \quad \text{mit} \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n \leqq k$$

ebenfalls zu $\mathfrak{g}$ gehören, auch der Ausdruck

$$g(\varrho_1 e + x_1, \varrho_2 e + x_2, \ldots, \varrho_n e + x_n)$$

mit beliebigen ganzen Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ eine Form aus $\mathfrak{g}$, folglich auch

$$g(\varrho_1 e + f_1(x), \varrho_2 e + f_2(x), \ldots, \varrho_n e + f_n(x))$$

mit beliebigen Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine Form aus $\mathfrak{g}$, mithin

$$g(\varrho_1 e + f_1(u), \varrho_2 e + f_2(u), \ldots, \varrho_n e + f_n(u)) \equiv 0\,(\mathfrak{u})$$

mit beliebigen Elementen $\varrho_\nu e + f_\nu(u)$ aus $\mathfrak{U}^*$. Daher gilt im Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ das Gesetz $g(x) = 0$.

Gilt andererseits in $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ das Gesetz

$$g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

so ist insbesondere für die ersten n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0\,(\mathfrak{u}),$$

weshalb $g(x)$ zum T^*-Ideal $\mathfrak{g}$ gehört.

Damit ist der Satz 2 in vollem Umfange bewiesen.

III.

Von besonderer Bedeutung ist für die weiteren Untersuchungen der Begriff der *mehrfach linearen Form*: Aus den ersten n Unbestimmten der Folge (x) lassen sich das spezielle Potenzprodukt

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n$$

und weiter durch Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ insgesamt $n!$ verschiedene Potenzprodukte

$$x^P = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} \quad \text{bei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

herstellen. Dann ist auch der Ausdruck

$$L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_P \gamma_P x^P \tag{4}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten γ_P, in dem die Summe über alle Permutationen P zu erstrecken ist, eine homogene Form des Formenringes $\mathfrak{F}$

von der Dimension n, die dann und nur dann die Nullform darstellt, wenn alle Zahlen γ_P gleich Null sind. Überdies erfüllt eine Form $L(x)$ dieser Gestalt die Bedingungen

$$L(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = \tau L(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n) \tag{5}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

bei beliebigem ganzem τ, ist also homogen von der Dimension 1 bezüglich jeder Unbestimmten x_λ. Daher will ich eine solche Form als *mehrfach linear*, genauer als *n-fach linear* bezeichnen. Umgekehrt erkennt man mühelos, daß jede Form $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus $\mathfrak{F}$, die den Bedingungen (5) genügt, n-fach linear ist.

Die Tatsache, daß aus einem oder mehreren in einem Ring gültigen Gesetzen mit Hilfe der im Abschnitt I angegebenen Regeln auf mannigfache Weise neue in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetze hergeleitet werden können, legt die weitere Frage nahe, ob nicht für jeden Ring Gesetze besonders einfacher Gestalt ausfindig gemacht werden können, aus denen alle weiteren in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze durch diese Regeln sich ableiten lassen. Um eine bequeme und kurze Bezeichnung für diesen Sachverhalt zu haben, nenne ich eine Menge von im Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetzen *vollständig*, wenn aus diesen durch Anwendung jener Regeln sämtliche in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze hergeleitet werden können, wobei naturgemäß wieder zu unterscheiden sein wird, ob der Ring $\mathfrak{R}$ eine Einheit besitzt oder nicht, da im ersten Fall auch die fünfte Regel in Anwendung zu bringen ist.

Eine entscheidende Rolle spielt hierbei der folgende

Satz 3. *Die Menge der in einem Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen mehrfach linearen Gesetze ist vollständig.*

Zum Beweise dieses Satzes zeige ich zunächst, daß alle in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze sich aus den bezüglich der einzelnen Unbestimmten homogenen Gesetzen herleiten lassen. Es genügt, da die Unbestimmten in ihren Rollen vertauscht werden können, dies hinsichtlich der Unbestimmten x_1 nachzuweisen.

Eine Form $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Dimension k läßt sich als Summe

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{k} f_\varkappa(x)$$

von bezüglich der Unbestimmten x_1 homogenen Formen $f_\varkappa(x)$ der durch den Index $\varkappa$ gegebenen Dimension darstellen. Gilt nun in $\mathfrak{R}$ das Gesetz $f(x) = 0$, so gelten auch die Gesetze

$$f(\tau x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{k} \tau^\varkappa f_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

wobei τ beliebige ganzzahlige Werte annehmen darf. Mithin ist schon

$$f_\varkappa(x\ , x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k$$

ein Gesetz in $\mathfrak{R}$. Umgekehrt gewinnt man aus diesen Gesetzen durch Summenbildung das ursprüngliche Gesetz.

Für den weiteren Beweisgang verwende ich ein Verfahren, das gestattet, das vorgegebene Gesetz $g(x)=0$ der Dimension k, das nunmehr homogen bezüglich aller in ihm wirklich auftretenden Unbestimmten angenommen werden darf, durch Einführung weiterer Unbestimmten durch eine Reihe gleichwertiger mehrfach linearer Gesetze zu ersetzen. Hat $g(x)=0$ bereits bezüglich aller Unbestimmten x_ν für $\nu=1,2,\ldots,n$ die Dimension $k_\nu=1$, so ist $g(x)$ schon selbst mehrfach linear. Daher kann unter Vertauschung oder Umbenennung der Unbestimmten, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit des Beweises, angenommen werden, daß

$$g(\tau x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau^{k_1} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{mit } k_1 \geqq 2$$

ist. Überdies genügt es, das Verfahren an der Unbestimmten x_1 aufzuzeigen, da es ohne weiteres auch an den anderen Unbestimmten in gleicher Weise durchzuführen ist.

Neben dem Gesetz $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ gilt im Ringe $\mathfrak{R}$ auch das daraus hergeleitete Gesetz

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &= g(x_1+x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

aus dem insbesondere die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1) &= g(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (2^{k_1}-2)\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

hervorgeht, die zeigt, daß $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ nicht Nullform ist, und daß das Gesetz $g(x)=0$ aus dem Gesetz $f(x)=0$ durch Identifizierung der Unbestimmten x_1 und x_{n+1} herleitbar ist.

Nun ist $f(x)$ homogen von gleicher Dimension wie die Form $g(x)$; überdies ist $f(x)$ auch bezüglich der Unbestimmten $x_2, x_3, \ldots, x_n$ homogen von gleicher Dimension wie $g(x)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \\ &\qquad = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0, \\ &f(0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &\qquad = g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) - g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0, \end{aligned}$$

weshalb in jedem in $f(x)$ auftretenden Potenzprodukt wenigstens einmal x_1 und wenigstens einmal x_{n+1} auftreten muß. Daher besitzt die Form $f(x)$ bezüglich x_1 ebenso wie bezüglich x_{n+1} höchstens die Dimension k_1-1.

Wird nunmehr das neue Gesetz $f(x)=0$ nach seinen bezüglich x_1 homogenen Summanden zerlegt, so kann das Verfahren für die Summanden einzeln weiter durchgeführt werden. Nach einer endlichen Kette von Schritten findet man eine Reihe von mehrfach linearen Gesetzen, aus denen umgekehrt das ursprüngliche Gesetz wieder abgeleitet werden kann. Gilt beispielsweise in einem Ringe $\mathfrak{R}$ das Gesetz

$$x_1^3 = 0,$$

so gilt auch das Gesetz

$$(x_1 + x_2)^3 - x_1^3 - x_2^3 = x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + x_1 x_2^2 = 0,$$

mithin auch die beiden Gesetze

$$x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1 + x_1^2 x_2 = 0; \quad x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + x_1 x_2^2 = 0,$$

die auseinander durch Vertauschung der Unbestimmten hervorgehen. Der nächste Schritt liefert

$$x_2(x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_3) x_2 (x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)^2 x_2 - x_2 x_1^2 - x_1 x_2 x_1 \\ - x_1^2 x_2 - x_2 x_3^2 - x_3 x_2 x_3 - x_3^2 x_2 = 0,$$

oder

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_2 + x_2 x_1 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2 + x_3 x_2 x_1 = 0.$$

Mithin ist dieses dreifach lineare Gesetz mit dem ursprünglichen Gesetz völlig gleichwertig.

Auf Grund dieses Satzes können sich nun die weiteren Untersuchungen auf die Behandlung der mehrfach linearen Gesetze eines Ringes $\mathfrak{R}$ beschränken. Daher soll auch im folgenden, sofern nichts anderes angegeben, unter einer Form nur noch eine mehrfach lineare Form, unter einem Gesetz nur noch ein mehrfach lineares Gesetz verstanden werden.

Aus einer n-fach linearen Form

$$L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_P \gamma_P x^P = \sum_P \gamma_P (x_1 x_2 \ldots x_n)^P$$

läßt sich durch eine Permutation Q der Unbestimmten eine neue n-fach lineare Form

$$L^Q(x) = \sum_P \gamma_P x^{PQ} = \sum_P \gamma_{PQ^{-1}} x^P$$

gewinnen. Ferner ist jede lineare Verbindung

$$L(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$$

zweier n-fach linearer Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten α_1, α_2 wiederum eine n-fach lineare Form. Daher bildet die Gesamtheit aller n-fach linearen Formen einen *symmetrischen Modul*[4]).

[4]) Vgl. W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **39** (1935), 696—711; Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **42** (1937), 774—779.

Allgemein nenne ich jede Menge M von n-fach linearen Formen einen *symmetrischen Modul*, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Enthält M die Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$, so enthält M auch jede Form $L(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$ mit beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2.

2. Enthält M ein Vielfaches $\gamma L(x)$ der Form $L(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ, so enthält M auch die Form $L(x)$.

3. Enthält M die Form $L(x)$, so enthält M auch die Form $L^P(x)$ bei beliebiger Permutation P der Unbestimmten.

Insbesondere bildet bei einer festgewählten n-fach linearen Form

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P,$$

deren ganzzahligen Koeffizienten γ_P teilerfremd sind, die Gesamtheit aller Formen der Gestalt

$$F(x) = \sum_P \alpha_P L^P(x)$$

mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten α_P, wobei über sämtliche Permutationen der Unbestimmten zu summieren ist, einen symmetrischen Modul, den ich als *den durch die Form $L(x)$ erzeugten symmetrischen Modul* $\mathsf{M}(L(x))$ bezeichne.

Ist M ein beliebiger symmetrischer Modul n-fach linearer Formen, so kann, da der Modul aller n-fach linearen Formen eine linear unabhängige Basis in den $n!$ Formen x^P besitzt, auch für M eine linear unabhängige Basis von Formen $L_\varrho(x)$ (mit $\varrho = 1, 2, \ldots, r$) angegeben werden, derart daß jede Form $L(x)$ des Moduls M eindeutig als lineare Verbindung

$$L(x) = \sum_\varrho \alpha_\varrho L_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_ϱ erhalten werden kann. Insbesondere gelten also Beziehungen der Gestalt

$$L_\varrho^P(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^P L_\sigma(x) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

für jede Permutation P mit ganzen Zahlen $d_{\varrho\sigma}^P$. Da weiter für jedes Paar P, Q von Permutationen hieraus die Gleichungen

$$L_\varrho^{PQ}(x) = \sum_\tau d_{\varrho\tau}^P L_\tau^Q(x) = \sum_{\tau,\sigma} d_{\varrho\tau}^P d_{\tau\sigma}^Q L_\sigma(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^{PQ} L_\sigma(x)$$

folgen, findet man wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis

$$\sum_\tau d_{\varrho\tau}^P d_{\tau\sigma}^Q = d_{\varrho\sigma}^{PQ}$$

oder

$$D(P)\,D(Q) = D(PQ)$$

für die r-reihigen ganzzahligen Matrizen

$$D(P) = (d_{\varrho\sigma}^P) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

Jeder symmetrische Modul M n-fach linearer Formen liefert demnach eine *Darstellung der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ durch ganzzahlige Matrizen[5]).

Der Satz von der vollständigen Zerlegbarkeit endlicher Matrixgruppen sowie die Tatsache, daß jede Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch ganzzahlige Matrizen in absolut unzerlegbare, gleichfalls ganzzahlige Bestandteile zerlegt werden kann, führen sogleich auf einige Aussagen über symmetrische Moduln n-fach linearer Formen, die ich ohne nähere Begründung nachstehend angebe[6]):

1. Ist M_1 ein symmetrischer Teilmodul des symmetrischen Moduls M, so gibt es einen zweiten symmetrischen Teilmodul M_2 von M, derart daß in direkter Zerlegung gilt:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2.$$

2. Jeder symmetrische Modul M ist als direkte Summe

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \cdots + \mathsf{M}_k$$

unzerlegbarer symmetrischer Teilmoduln darstellbar.

3. Ein symmetrischer Modul M ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn er keinen symmetrischen Teilmodul enthält.

4. Ein unzerlegbarer symmetrischer Modul M wird durch jede von Null verschiedene, in ihm enthaltene n-fach lineare Form $L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$ erzeugt, deren Koeffizienten γ_P teilerfremd sind:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(L(x)).$$

Diese Aussage kann, was für die weiteren Betrachtungen besonders wichtig ist, in folgender Weise auf beliebige symmetrische Moduln ausgedehnt werden:

5. Zu jedem symmetrischen Modul M kann eine erzeugende Form $L(x)$ angegeben werden:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(L(x)).$$

Da nämlich der Modul Γ aller n-fach linearen Formen den Modul M als Teilmodul enthält, gibt es einen zweiten symmetrischen Teilmodul M^*, so daß in direkter Zerlegung

$$\Gamma = \mathsf{M} + \mathsf{M}^*$$

ist. Mithin läßt sich jede Form $L(x)$, insbesondere also das Potenzprodukt $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ eindeutig als Summe einer Form $F(x)$ aus M und einer Form $G(x)$ aus M^* darstellen:

$$x = F(x) + G(x) \quad \text{mit} \quad F(x) \in \mathsf{M};\ G(x) \in \mathsf{M}^*.$$

---

[5]) Vgl. die in [4]) angegebenen Arbeiten.

[6]) Für alle allgemeinen darstellungstheoretischen Dinge vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, 17. Kapitel, Berlin Jul. Springer 1931.

Daraus findet man für eine beliebige Form $L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$ die Darstellung

$$L(x) = \sum_P \gamma_P (F(x) + G(x))^P = \sum_P \gamma_P F^P(x) + \sum_P \gamma_P G^P(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

mit zwei Formen

$$L_1(x) \in \mathsf{M}(F(x)) < \mathsf{M}; \quad L_2(x) \in \mathsf{M}(G(x)) \leqslant \mathsf{M}^*.$$

Ist also $L(x)$ insbesondere eine Form aus M, so ist die Form $L(x) - L_1(x) = L_2(x)$ sowohl in M als auch in M^* enthalten. Daher ist

$$L_2(x) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad L(x) = \sum_P \gamma_P F^P(x).$$

Jede Form des Moduls M gehört demnach dem Modul $\mathsf{M}(F(x))$ an:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(F(x)).$$

Die Bedeutung dieser Tatsachen für die Untersuchung der Gesetze in einem Ringe $\mathfrak{R}$ erhellt nun sogleich aus der folgenden, leicht zu beweisenden Bemerkung:

Satz 4. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden n-fach linearen Gesetze bilden einen symmetrischen Modul.*

Gilt nämlich in $\mathfrak{R}$ das n-fach lineare Gesetz $\gamma L(x) = 0$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ und einer (n-fach linearen) Form $L(x)$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz $L(x) = 0$; gelten in $\mathfrak{R}$ die beiden n-fach linearen Gesetze $L_1(x) = 0$ und $L_2(x) = 0$, so gilt in $\mathfrak{R}$ mit beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2 auch das Gesetz $\alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) = 0$; gilt in $\mathfrak{R}$ schließlich das n-fach lineare Gesetz $L(x) = 0$, so gilt in $\mathfrak{R}$ bei beliebiger Permutation P der Unbestimmten auch das Gesetz $L^P(x) = 0$.

Daraus kann aber unter Beachtung der letzten Bemerkung über symmetrische Moduln sogleich das folgende Ergebnis entnommen werden:

Satz 5. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden n-fach linearen Gesetze lassen sich aus einem einzigen n-fach linearen Gesetz*

$$L_n(x) = 0$$

herleiten und in der Gestalt

$$g(x) = \sum_P \alpha_P L_n^P(x) = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_P darstellen.

Wie bereits früher angegeben wurde, lassen sich aus einem in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetz stets auch Gesetze höherer Dimension herleiten. Daher ist nun noch festzustellen, unter welchen Bedingungen die angegebenen Verfahren wiederum auf mehrfach lineare Gesetze führen. Man erkennt leicht, daß im wesentlichen, d. h. abgesehen von Permutation der Unbestimmten, Bildung linearer Verbindungen mit ganzzahligen Koeffizienten und Wiederholung der Verfahren, hierfür die folgenden Regeln zur Verfügung stehen:

Satz 6. *Ist $L_n(x) = L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges n-fach lineares Gesetz, so sind*

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1} = 0,$$
$$x_{n+1} \cdot L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}) = 0$$

gleichfalls in $\mathfrak{R}$ gültige $(n+1)$-fach lineare Gesetze.

Somit bestehen neben n-fach linearen Gesetzen in einem Ring stets auch mehrfach lineare Gesetze jeder höheren Dimension. Damit erhält man:

Satz 7. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe läßt sich eine Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x) = 0, \ldots, L_n(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch den Index angegebenen Dimension angeben, aus denen alle anderen, in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze herleitbar sind.

Die in diesem Satze angegebene Kette von Gesetzen für einen Ring k-ter Stufe ist zwar vollständig in dem früher angegebenen Sinne, da jedes im Ring gültige Gesetz aus den Gesetzen der Kette herleitbar ist, die Gesetze der Kette sind indes nicht notwendig unabhängig voneinander, da der Modul $\mathsf{M}(L_n(x))$ aller n-fach linearen Gesetze auch alle Gesetze enthält, die aus den vorangehenden Gliedern der Kette durch Anwendung des Satzes 6 gewonnen werden können. Eine weitere Reduktion der Kette läßt sich auf folgende Weise durchführen:

Alle aus den mehrfach linearen Gesetzen der Kette

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x) = 0,\ \ldots,\ L_{n-1}(x) = 0$$

durch den Satz 6 herleitbaren n-fach linearen Gesetze bilden einen symmetrischen Teilmodul M_n' des Moduls $\mathsf{M}(L_n(x))$; zu ihm kann ein ergänzender Teilmodul M_n'' angegeben werden, derart daß in direkter Zerlegung gilt:

$$\mathsf{M}(L_n(x)) = \mathsf{M}_n' + \mathsf{M}_n'' = \mathsf{M}(L_n'(x)) + \mathsf{M}(L_n''(x)),$$

wenn $L_n'(x)$ und $L_n''(x)$ erzeugende Formen der Moduln M_n' und M_n'' bezeichnen. Die Gesetze des Moduls M_n'', also die Gesetze der Gestalt

$$g(x) = \sum_P \gamma_P L_n''^P(x) = 0,$$

die in $\mathfrak{R}$ gelten, lassen sich dann auf keine Weise aus den in $\mathfrak{R}$ gültigen mehrfach linearen Gesetzen niedrigerer Dimension herleiten, da M_n' und M_n'' zueinander fremd sind, wobei unter Umständen der Modul M_n'' sogar leer sein kann, nämlich dann, wenn alle n-fach linearen Gesetze sich bereits aus den Gesetzen niedrigerer Dimension herleiten lassen. Somit gilt der

Satz 8. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe läßt sich eine reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k_1}(x) = 0,\ L_{k_2}(x) = 0,\ \ldots,\ L_{k_n}(x) = 0,\ \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch die Indizes

$$k < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

bezeichneten Dimensionen angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Kein Gesetz des Moduls* $\mathsf{M}(L_{k_n}(x))$ *ist aus den Gesetzen niedrigerer Dimension ableitbar.*

2. *Jedes Gesetz des Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Hierin ist stillschweigend der Fall miteingeschlossen worden, daß die reduzierte Kette mehrfach linearer Gesetze abbricht, also nur aus endlich vielen Gliedern besteht. Ob es Ringe k-ter Stufe mit unendlicher reduzierter Kette mehrfach linearer Gesetze gibt oder ob jede reduzierte Kette eines Ringes mit Notwendigkeit abbricht, habe ich bisher nicht entscheiden können. Die Beantwortung dieser Frage scheint sehr schwierig zu sein.

In diesem Zusammenhang will ich als Ergänzung zu Satz 2 noch zeigen, daß bereits der Ring $\mathfrak{U}_2$ aller Formen $f(u_1, u_2)$ des Formenrings $\mathfrak{U}$, also der Ring aller Formen aus $\mathfrak{U}$, in denen nur die ersten beiden Unbestimmten u_1, u_2 wirklich auftreten, ein gesetzloser Ring ist.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte in $\mathfrak{U}_2$ auch ein mehrfach lineares Gesetz, etwa

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P = 0 \quad \text{mit} \quad x = x_1 x_2 \ldots x_n$$

gelten. Dann müßte auch für $x_\nu = u_1^\nu u_2$ (mit $\nu = 1, 2, \ldots, n$) die Gleichung

$$L(u_1 u_2, u_1^2 u_2, \ldots, u_1^n u_2) = \sum_P \gamma_P (u_1 u_2 u_1^2 u_2 \ldots u_1^n u_2)^P = 0$$

oder

$$\sum_P \gamma_P u_1^{\alpha_1} u_2 u_1^{\alpha_2} u_2 \ldots u_1^{\alpha_n} u_2 = 0 \quad \text{bei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

bestehen, was offenbar nur möglich ist, wenn alle γ_P verschwinden.

IV.

Die bisherigen allgemeinen Ergebnisse lassen sich weitgehend vertiefen, wenn die Forderung gestellt wird, daß der Ring $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitze. Wesentliche Ursache dieser Verschärfung und Ergänzung der Ergebnisse ist die bereits früher angegebene Tatsache, daß sich durch das Verfahren der partiellen Ableitung unter Umständen aus mehrfach linearen Gesetzen auch Gesetze niedrigerer Dimension herleiten lassen. Nun gilt für eine n-fach lineare Form $L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wie man sich leicht überlegt, die Gleichung

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, e, x_{\nu+1}, \ldots, x_n).$$

Daher läßt sich im Falle des mehrfach linearen Gesetzes, den wir allein noch zu beachten haben, die fünfte Regel des Abschnittes I auf die folgende Regel zurückführen:

5. Ist $L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \doteq 0$ ein in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e gültiges Gesetz, so ist auch

$$L^*(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, e) \doteq 0$$

ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz.

Ich werde indes trotz diesem recht einfachen Sachverhalt in der Folge die Bezeichnung durch partielle Ableitungen als bequeme Schreibweise beibehalten.

Nach dem Verhalten der partiellen Ableitungen werden die mehrfach linearen Formen in zwei Arten unterschieden: Eine n-fach lineare Form $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heiße *eigentlich* n-fach linear, wenn alle ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu}$ Nullformen sind, im anderen Falle *uneigentlich* n-fach linear. Die gleiche Unterscheidung werde auch für mehrfach lineare Gesetze getroffen. Eine eigentlich n-fach lineare Form $L(x)$ ist demgemäß durch die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gekennzeichnet.

Gilt in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e das eigentlich n-fach lineare Gesetz $L(x) \doteq 0$, so ist auch das (gleichfalls in $\mathfrak{R}$ gültige) Gesetz $L^P(x) \doteq 0$ bei beliebiger Permutation P eigentlich n-fach linear. Weiter ist die Form $L(x)$ gewiß eigentlich n-fach linear, wenn irgendein Vielfaches $\gamma L(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ eigentlich n-fach linear ist. Das Entsprechende gilt schließlich für jede lineare Verbindung $L(x) \equiv \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) \doteq 0$ zweier in $\mathfrak{R}$ gültiger eigentlich n-fach linearer Gesetze $L_1(x) \doteq 0$, $L_2(x) \doteq 0$ bei beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2. Daher bilden die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden eigentlich n-fach linearen Gesetze für sich einen symmetrischen Modul.

Die Bedeutung der hier gemachten Unterscheidung erhellt aus dem nachstehenden

S a t z 9. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden uneigentlich n-fach linearen Gesetze lassen sich aus den in $\mathfrak{R}$ geltenden eigentlich ν-fach linearen Gesetzen (mit $2 \leqq \nu \leqq n$) herleiten.*

Zum Beweise wird ein doppeltes Induktionsverfahren benötigt: Ist der vorgegebene Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e etwa k-ter Stufe, so ist jedes in $\mathfrak{R}$ gültige k-fach lineare Gesetz gewiß eigentlich k-fach linear, da andernfalls ein $(k-1)$-fach lineares Gesetz für $\mathfrak{R}$ daraus hergeleitet werden könnte. Mithin kann die Behauptung des Satzes für Gesetze niedrigerer Dimension als n bereits für bewiesen angenommen werden, weshalb es zum Beweise völlig ausreicht zu zeigen, daß ein uneigentlich n-fach lineares Gesetz in $\mathfrak{R}$ aus den eigentlich n-fach linearen und den Gesetzen niedrigerer Dimension hergeleitet werden kann.

Liegt in $\mathfrak{R}$ das uneigentlich n-fach lineare Gesetz $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ vor, so kann weiter, nach etwaiger Permutation der Unbestimmten, ohne Beschränkung der Gültigkeit des Verfahrens, vorausgesetzt werden, daß für die partiellen Ableitungen von $L(x)$ die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0; \; \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \not\equiv 0; \; \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+2}} \not\equiv 0; \cdots; \frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \not\equiv 0.$$

Dann gelten neben $L(x) = 0$ in $\mathfrak{R}$ auch die beiden Gesetze

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0,$$

also auch das Gesetz

$$G(x) \equiv G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv L(x) - \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0.$$

Ist dabei $G(x)$ die Nullform, so ist

$$L(x) \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1},$$

also das Gesetz $L(x) = 0$ aus dem $(n-1)$-fach linearen, in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetz $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0$ herleitbar. Ist aber $G(x)$ nicht die Nullform, so gelten in $\mathfrak{R}$ die Gesetze

$$G(x) = 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0,$$

aus denen wiederum das Gesetz $L(x) \equiv G(x) + \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0$ hergeleitet werden kann. Für die Ableitungen $\frac{\partial G(x)}{\partial x_\lambda}$ mit $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$ findet man

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_\lambda} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}\, \partial x_\lambda} \cdot x_{\nu+1} \equiv 0,$$

ferner ist

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}^2} \cdot x_{\nu+1} - \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot e \equiv 0,$$

so daß die Form $G(x)$ gewiß die Bedingungen

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv 0$$

erfüllt. Durch Fortführung dieses Verfahrens erhält man demnach nach höchstens n Schritten ein eigentlich n-fach lineares Gesetz, aus dem mit Hilfe von Gesetzen niedrigerer Dimension das ursprüngliche Gesetz $L(x) = 0$ wieder hergeleitet werden kann.

Als Regeln für die Bildung eigentlich mehrfach linearer Gesetze höherer Dimension können hier aufgestellt werden:

1. Ist $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein im Ringe $\mathfrak{R}$ geltendes eigentlich n-fach lineares Gesetz, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die eigentlich $(n+1)$-fach linearen Gesetze

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,.\, x_{n+1} - x_{n+1} \,.\, L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$L_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1} - x_{n+1} x_n) = 0.$$

2. Ist $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein im Ringe $\mathfrak{R}$ gültiges eigentlich n-fach lineares Gesetz, ferner $L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ eine beliebige eigentlich n-fach lineare Form in den Unbestimmten $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die beiden eigentlich $(n+m)$-fach linearen Gesetze

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = 0,$$
$$L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})\, L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

sowie das eigentlich $(n+m-1)$-fach lineare Gesetz

$$L_1(L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}), x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Entsprechende, auf diese Verfahren sich stützende Überlegungen wie die, die zu den Sätzen 7 und 8 führten, ergeben hier die nachstehenden Sätze:

Satz 10. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe mit Einheit e läßt sich eine Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x), \ldots, L_n(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Glied $L_n(x) = 0$ der Kette ist eigentlich n-fach linear.*
2. *Jedes in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetz ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Satz 11. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe mit Einheit e läßt sich eine reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k_1}(x) = 0, \ldots, L_{k_n}(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch die Indizes

$$k < k_1 < \cdots < k_n < \cdots$$

bezeichneten Dimensionen angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Glied $L_{k_n}(x) = 0$ der Kette ist eigentlich n-fach linear.*
2. *Kein Gesetz des Moduls $\mathsf{M}(L_{k_n}(x))$ ist aus den Gesetzen niedrigerer Dimension herleitbar.*
3. *Jedes in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetz ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Auch in diesem Falle habe ich nicht entscheiden können, ob es Ringe k-ter Stufe mit unendlich langer, reduzierter Kette aus eigentlich mehrfach linearen Gesetzen gibt oder ob jede reduzierte Kette eines Ringes im Endlichen abbricht.

Sehr leicht zu beweisen ist dagegen die folgende interessante Bemerkung:

Satz 12. *Besitzt ein Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e eine im Endlichen abbrechende reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0, \quad L_{k_1}(x) = 0, \ldots, \quad L_{k_n}(x) = 0$$

mehrfach linearer Gesetze, so gibt es ein Fundamentalgesetz $G(x) = 0$ (der Dimension k_n), aus dem sämtliche in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze hergeleitet werden können.

Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß für Ringe mit Einheit e die Gesetze

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{und} \quad L(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x_{n+1} = 0$$

völlig gleichwertig sind, so daß alle Gesetze der reduzierten Kette auch durch höherdimensionale Gesetze ersetzt werden können. Ersetzt man sie demgemäß durch k_n-fach lineare Gesetze, so lassen sich diese Gesetze gleicher Dimension nach früherem durch ein einziges ersetzen.

V.

Für die Aufstellung der in einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden Gesetze ist nach Satz 9 die Kenntnis der eigentlich n-fach linearen Gesetze von besonderer Bedeutung, andererseits aber auch völlig ausreichend.

Wie bereits gezeigt wurde, bildet die Menge der eigentlich n-fach linearen Formen einen symmetrischen Modul Γ_n^*, also einen Teilmodul des symmetrischen Moduls Γ_n aller n-fach linearen Formen. Eine eingehende Untersuchung des Moduls Γ_n^* soll den Inhalt der letzten beiden Abschnitte ausmachen.

Ich beginne mit der Angabe der linearen Bedingungen für die Koeffizienten einer eigentlich n-fach linearen Form, die sich bei Einführung der (als Zykeln dargestellten) speziellen Permutationen

$$V_1 = (1), \quad V_2 = (1\,2), \quad V_3 = (1\,2\,3), \ldots, \quad V_n = (1\,2\,3 \ldots n)$$

in einfacher Gestalt zusammenfassen lassen:

Satz 13. *Eine n-fach lineare Form*

$$L(x) = \sum_P \gamma_P\, x^P$$

ist dann und nur dann eigentlich n-fach linear, wenn für alle Permutationen P die linearen Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{V_\nu P} = 0 \tag{6}$$

erfüllt sind.

Für den Gang des Beweises bezeichne ich die Inverse V_ν^{-1} auch mit U_ν (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Ferner setze ich aus Zweckgründen $\gamma_P = \gamma(P)$.

Die vorgegebene Form $L(x)$ kann auch in der Gestalt

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R)\, x^{U_n^\nu R}$$

dargestellt werden, wenn R alle Permutationen durchläuft, die die Ziffer n festlassen. Die Ableitung $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda}$ der Form $L(x)$ wird dann

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R) \frac{\partial x^{U_n^\nu R}}{\partial x_\lambda}.$$

Um ihre Gestalt genauer angeben zu können, kommt es daher darauf an festzustellen, in welche Potenzprodukte die Produkte $x^{U_n^\nu R}$ bei partieller Ableitung nach der Unbestimmten x_λ, also bei der Substitution $x_\lambda \to e$ übergehen, wobei es ausreichen wird, den Fall $\lambda = n$ allein zu betrachten.

Nun gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$U_n^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu & \nu+1 & \dots & n-1 & n \\ n-\nu+1 & n-\nu+2 & \dots & n & 1 & \dots & n-\nu-1 & n-\nu \end{pmatrix},$$

also bei

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & n \end{pmatrix}$$

offenbar

$$U_n^\nu R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_{n-\nu+1} & \alpha_{n-\nu+2} & \dots & \alpha_{n-1} & n & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-\nu-1} & \alpha_{n-\nu} \end{pmatrix}$$

Mithin ist

$$x^{U_n^\nu R} = x_{\alpha_{n-\nu+1}} x_{\alpha_{n-\nu+2}} \cdots x_{\alpha_{n-1}} x_n x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_{n-\nu-1}} x_{\alpha_{n-\nu}},$$

$$\frac{\partial x^{U_n^\nu R}}{\partial x_n} = x_{\alpha_{n-\nu+1}} x_{\alpha_{n-\nu+2}} \cdots x_{\alpha_{n-1}} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_{n-\nu-1}} x_{\alpha_{n-\nu}}.$$

Dieses Potenzprodukt aber entsteht aus dem Potenzprodukt $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ durch Anwendung der Permutation

$$U_{n-1}^{\nu-1} R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_{n-\nu+1} & \alpha_{n-\nu+2} & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-\nu} & n \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \cdot x_n = \sum_{\nu} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R)\, x^{U_{n-1}^{\nu-1} R} = \sum_{R} \sum_{\nu} \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R)\, x^R.$$

Ist also, wie nun vorausgesetzt werden soll,

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \equiv 0,$$

so gilt die lineare Beziehung

$$\sum_{\nu} \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R) = 0$$

für alle Permutationen R, die die Ziffer n festlassen. Umgekehrt folgt aus diesen Bedingungen für die Koeffizienten der Form $L(x)$ sogleich

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \equiv 0$$

für die partielle Ableitung nach der Unbestimmten x_n.

Die weiteren Bedingungen für eine eigentlich n-fach lineare Form $L(x)$ erhält man aus der Tatsache, daß mit $L(x)$ auch jede Form $L^Q(x)$ eigentlich n-fach linear ist. Insbesondere gilt also $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} \equiv 0$ für die partielle Ableitung von $L(x)$ nach der Unbestimmten x_λ dann und nur dann, wenn $\frac{\partial L^Q(x)}{\partial x_n} \equiv 0$ bei $Q = U_n^\lambda$ für die partielle Ableitung der Form $L^{U_n^\lambda}(x)$ nach der Unbestimmten x_n erfüllt ist. Nun gilt aber

$$L^{U_n^\lambda}(x) = \sum_P \gamma(P)\, x^{P U_n^\lambda} = \sum_S \gamma(S U_n^{-\lambda})\, x^S = \sum_S \gamma_\lambda(S)\, x^S.$$

Soll für diese Form die partielle Ableitung nach x_n die Nullform sein, müssen nach dem eben Gezeigten die linearen Beziehungen

$$\sum_\nu \gamma_\lambda(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R) = \sum_\nu \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R\, U_n^{-\lambda}) = 0$$

für alle Permutationen R bestehen, die die Ziffer n festlassen. Da indes $R\, U_n^{-\lambda}$ alle Permutationen durchläuft, wenn $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird, findet man die Bedingungen

$$\sum_\nu \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} P) = 0$$

für alle Permutationen P. Durch die Gleichung

$$U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} = V_\nu U_n \tag{7}$$

gehen diese Gleichungen über in

$$\sum_\nu \gamma(V_\nu U_n P) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_\nu \gamma(V_\nu P) = 0$$

für alle Permutationen P in Übereinstimmung mit der Aussage des Satzes 13.

Die Gleichung (7) ist für $\nu = 1$ offenbar erfüllt. Durch vollständige Induktion findet man weiter

$$U_n^{\nu+1} U_{n-1}^{-\nu} = U_n (U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1})\, U_{n-1}^{-1} = U_n V_\nu U_n U_{n-1}^{-1} = V_{\nu+1} U_n,$$

wie man unmittelbar nachrechnet.

Der Rang des Moduls Γ_n^* aller eigentlich n-fach linearen Formen wird durch den folgenden Satz angegeben:

Satz 14. *Der Rang R_n des Moduls Γ_n^* ist*

$$R_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right). \tag{8}$$

Für den Beweis benötige ich vorübergehend den Begriff des *linearen Moduls*: Darunter verstehe ich eine Menge n-fach linearer Formen, der mit zwei Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$ bei beliebigen ganzzahligen Koeffizienten α_1, α_2 stets auch die Form $\alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$, mit einem Vielfachen $\alpha L(x)$ einer n-fach linearen Form $L(x)$ bei von 0 verschiedenem α stets auch die Form $L(x)$ selbst angehört.

Für jedes ν der Reihe $\nu = 1, 2, \ldots, n$ bezeichne Λ_ν die Menge aller n-fach linearen Formen $L(x)$, deren partiellen Ableitungen nach den ersten ν Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ Null sind:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 .$$

Insbesondere ist Λ_n die Menge aller eigentlich n-fach linearen Formen. Weiter sei Λ_0 die Menge aller n-fach linearen Formen.

Alle Mengen Λ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sind lineare Moduln, besitzen daher einen linearen Rang $R_\nu(n)$. Die Zahl $R_n = R_n(n)$ soll bestimmt werden, der Rang $R_0(n)$ des Moduls Λ_0 ist $R_0(n) = n!$.

Nun sei $L(x)$ eine Form aus Λ_ν für irgend ein festes ν, es sei also

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 .$$

Bildet man noch die partielle Ableitung $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$ und setzt

$$L(x) = x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} + F(x) ,$$

so gelten für die Formen $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$ und $F(x)$, da $L(x)$ zu Λ_ν gehört:

$$\frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}\, \partial x_1} \equiv \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}\, \partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}\, \partial x_\nu} \equiv 0 , \tag{9}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv 0 . \tag{10}$$

Mithin ist $F(x)$ eine Form aus $\Lambda_{\nu+1}$.

Die Darstellung der Form $L(x)$ aus Λ_ν in der Gestalt

$$L(x) = x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} + F(x)$$

mit einer Form $F(x)$ aus $\Lambda_{\nu+1}$ ist dabei eindeutig. Denn wäre etwa auch

$$L(x) = x_{\nu+1}\, G^*(x) + F^*(x)$$

mit einer Form $F^*(x)$ aus $\Lambda_{\nu+1}$, so würde folgen

$$x_{\nu+1}\left(\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - G^*(x)\right) + F(x) - F^*(x) \equiv 0$$

und daher durch die Substitution $x_{\nu+1} \to e$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - G^*(x) \equiv 0,$$

also auch

$$F(x) - F^*(x) \equiv 0.$$

Der lineare Modul Λ_ν läßt sich demnach aufspannen durch den linearen Modul $\Lambda_{\nu+1}$ und den linearen Modul Λ_ν^* aller Formen der Gestalt $x_{\nu+1}\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$, die (9) erfüllen. Der Rang dieses Moduls Λ_ν^* ist offenbar $R_\nu(n-1)$.

Mithin erhält man die Beziehung

$$R_\nu(n) = R_\nu(n-1) + R_{\nu+1}(n) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

weshalb die Rangzahlen $R_\nu(n)$ sich aus den Werten $R_0(n)$ durch Differenzenbildung gewinnen lassen. Insbesondere findet man für $R_n = R_n(n)$ den Ausdruck

$$R_n = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}(n-\nu)! = n!\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{1}{\nu!},$$

wie in (8) angegeben worden war.

Beispielsweise ist

$$R_2 = 1, \quad R_3 = 2, \quad R_4 = 9, \quad R_5 = 44, \quad R_6 = 265, \quad R_7 = 1854.$$

Der Rang R_n des Moduls Γ_n^* stimmt übrigens überein mit der Anzahl der *echten* Permutationen in n Ziffern, d.h. der Permutationen, die keine Ziffer ungeändert lassen. Die Ursache dieser Übereinstimmung werden die weiteren Betrachtungen erkennen lassen.

VI.

Über die Gestalt der eigentlich n-fach linearen Formen können nähere Angaben gemacht werden, vor allem aber läßt sich eine linear unabhängige Basis für den Modul Γ_n^* aufstellen, die aus Formen sehr einfachen Aufbaus besteht. Zur bequemeren Darstellung dieser Formen empfiehlt es sich, die *höheren Kommutatoren* einzuführen: Ist

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$$

eine beliebige Anordnung der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so werde

$$[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} - x_{\alpha_2}x_{\alpha_1}$$

und weiter für $2 \leqq r \leqq n$

$$(11) \quad [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_r}] = [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}]\,x_{\alpha_r} - x_{\alpha_r}[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}]$$

gesetzt. Offenbar verschwindet jeder dieser Ausdrücke, wenn irgendeine in ihnen vorkommende Unbestimmte durch die Einheit des Ringes ersetzt wird. Daher ist auch jedes für irgendeine Zerlegung

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s \qquad (n_\sigma \geqq 2;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

gebildete *Kommutatorprodukt*

$$(12)\qquad K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$$
$$= [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n_1}}][x_{\alpha_{n_1+1}}, x_{\alpha_{n_1+2}}, \dots, x_{\alpha_{n_1+n_2}}] \dots [x_{\alpha_{n-n_s+1}}, x_{\alpha_{n-n_s+2}}, \dots, x_{\alpha_n}]$$

eine eigentlich n-fach lineare Form.

Unter den möglichen Kommutatorprodukten werde nun eine Anzahl ausgezeichnet, die als *normierte Kommutatorprodukte* bezeichnet werden sollen:

Ein Kommutatorprodukt der Gestalt (12) heißt normiert, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Kommutatorlängen $n_1, n_2, \dots, n_s$ sind der Größe nach geordnet:

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_s \geqq 2.$$

2. Die erste Unbestimmte jedes Kommutators besitzt den kleinsten Index unter allen in ihm vorkommenden Unbestimmten.

3. Kommutatoren gleicher Länge stehen in der Reihenfolge, daß die Indizes der jeweils ersten Unbestimmten der Größe nach zunehmen.

Als Beispiel gebe ich die normierten Kommutatorprodukte in 4 Unbestimmten an. Für die Zerlegung $4 = 4$ findet man 6 normierte Kommutatorprodukte

$$[x_1, x_2, x_3, x_4],\quad [x_1, x_3, x_4, x_2],\quad [x_1, x_4, x_2, x_3],$$
$$[x_1, x_3, x_2, x_4],\quad [x_1, x_2, x_4, x_3],\quad [x_1, x_4, x_3, x_2],$$

da die Unbestimmte x_1 stets an erster Stelle stehen muß, während die weiteren Unbestimmten keinen Bedingungen unterliegen. Für die Zerlegung $4 = 2 + 2$ findet man 3 normierte Kommutatorprodukte

$$[x_1, x_2][x_3, x_4],\quad [x_1, x_3][x_2, x_4],\quad [x_1, x_4][x_2, x_3],$$

da auch hier die Unbestimmte x_1 im ersten Kommutator stets an erster Stelle stehen muß, während der Index der im zweiten Kommutator an erster Stelle stehenden Unbestimmten stets kleiner als der Index der an zweiter Stelle stehenden Unbestimmten sein muß.

Unter diesen Festsetzungen und Bezeichnungen gilt der

Satz 15. *Die normierten Kommutatorprodukte in n Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilden eine linear unabhängige Basis des symmetrischen Moduls Γ_n^* aller eigentlich n-fach linearen Formen.*

Um den Beweis dieses Satzes durchsichtiger zu gestalten, will ich ihn in folgenden drei Schritten durchführen:

1. Die Anzahl der normierten Kommutatorprodukte ist gleich dem Rang des Moduls Γ_n^*, also gleich der Anzahl der echten Permutationen.

2. Jede eigentlich n-fach lineare Form läßt sich als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

3. Jedes Kommutatorprodukt läßt sich als lineare Verbindung von normierten Kommutatorprodukten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

Erster Schritt: Jede Permutation P läßt sich bekanntlich in ziffernfremde Zykeln zerlegen:

$$(13)\quad P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1})(\alpha_{n_1+1}, \alpha_{n_1+2}, \ldots, \alpha_{n_1+n_2}) \ldots (\alpha_{n-n_s+1}, \alpha_{n-n_s+2}, \ldots, \alpha_n).$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, läßt sich indes durch die folgenden Bedingungen normieren:

a) Die Zykellängen $n_1, n_2, \ldots, n_s$ seien der Größe nach geordnet:

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$$

b) Die Anfangsziffer jedes Zyklus sei die kleinste im Zyklus vorkommende Ziffer.

c) Die Zykeln gleicher Länge seien derart angeordnet, daß ihre Anfangsziffern der Größe nach zunehmen.

Eine nach diesen Bedingungen geordnete Zykelndarstellung einer Permutation ist vollständig eindeutig. Dabei gilt für eine echte Permutation insbesondere

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s \geqq 2.$$

Damit erkennt man aber, daß diese Normierungsbedingungen für die Zykelndarstellung einer echten Permutation völlig den oben angegebenen Normierungsbedingungen der normierten Kommutatorprodukte entsprechen. Mithin ist jeder echten Permutation P in der Darstellung (13) umkehrbar eindeutig ein normiertes Kommutatorprodukt (12) zugeordnet. Also stimmt auch die Anzahl der normierten Kommutatorprodukte mit der Anzahl der echten Permutationen, also auch mit dem Rang R_n des Moduls Γ_n^* überein.

Zweiter Schritt: Der Beweis für die Behauptung, daß jede eigentlich n-fach lineare Form als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten dargestellt werden kann, gründet sich auf die Gleichung

$$x_1 x_2 \ldots x_n =$$
$$[x_1, x_2]\, x_3 \ldots x_n + x_2 [x_1, x_3]\, x_4 \ldots x_n + \cdots + x_2 x_3 \ldots x_{n-1} [x_1, x_n] + x_2 x_3 \ldots x_n x_1,$$

die zeigt, auf welche Weise jeder Faktor eines Potenzproduktes unter Bildung von Kommutatoren auf die rechte Seite des Potenzproduktes gezogen werden kann. Mit ihrer Hilfe kann jede Form $L(x)$ als Summe

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot x_1$$

dargestellt werden, wobei $F_1(x)$ die Unbestimmte x_1 nur noch in Kommutatoren $[x_1, x_\nu]$ enthält. Daher ist

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \equiv 0,$$

so daß

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

folgt. Ist demnach $L(x)$ eigentlich n-fach linear, so ist $\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv 0$ und weiter

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wendet man das gleiche Verfahren auf die Unbestimmte x_2 an, so erhält man wiederum unter Beachtung der Gleichung

$$[x_1, x_\nu, x_2] \equiv [x_1, x_\nu]\, x_2 - x_2 [x_1, x_\nu]$$

eine Darstellung der Form $L(x)$ in der Gestalt

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G_2(x_1, x_3, \ldots, x_n)\, x_2,$$

wobei aber in $G_1(x)$ die beiden Unbestimmten x_1, x_2 nur noch in Kommutatoren auftreten. Mithin ist auch hier, falls $L(x)$ eigentlich n-fach linear ist,

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv G_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

also

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Damit ist das Verfahren wohl hinreichend genau geschildert. Nach höchstens n Schritten erhält man eine Darstellung von $L(x)$ als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten, falls $L(x)$ eigentlich n-fach linear ist.

Dritter Schritt: Der Schluß des Beweisganges stützt sich auf eine Kommutatorbeziehung, die den Kommutator von Kommutatoren als lineare Verbindung von Kommutatoren darstellt. Sind

$$y_1, y_2, \ldots, y_r; \quad z_1, z_2, \ldots, z_s$$

zwei Reihen von Unbestimmten, so schreibe man bei beliebigen Permutationen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_s \end{pmatrix}$$

für die Kommutatoren zur Abkürzung

$$[y^R] = [y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_r}]; \quad [y^R, z^S] = [y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_r}, z_{\beta_1}, z_{\beta_2}, \ldots, z_{\beta_s}].$$

Dann gilt der

Satz 16. *Ist der Kommutator* $[z] = [z_1, z_2, \ldots, z_s]$ *nach Potenzprodukten entwickelt*

$$[z] = \sum_S \gamma_S z^S,$$

worin über alle Permutationen S in s Ziffern $1, 2, \ldots, s$ *zu summieren ist, so gilt die Kommutatorbeziehung*

$$[[y], [z]] = [y]\,[z] - [z]\,[y] = \sum_S \gamma_S [y, z^S]. \tag{14}$$

Der Beweis dieses Satzes benötigt ein doppeltes Induktionsverfahren: Zunächst gilt für $r = s = 2$

$$\begin{aligned}
&[y_1, y_2]\,[z_1, z_2] - [z_1, z_2]\,[y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2]\, z_1 z_2 - [y_1, y_2]\, z_2 z_1 - z_1 z_2 [y_1, y_2] + z_2 z_1 [y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2]\, z_1 z_2 - z_1 [y_1, y_2]\, z_2 - z_2 [y_1, y_2]\, z_1 + z_2 z_1 [y_1, y_2] \\
&\qquad - [y_1, y_2]\, z_2 z_1 + z_2 [y_1, y_2]\, z_1 + z_1 [y_1, y_2]\, z_2 - z_1 z_2 [y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2, z_1, z_2] - [y_1, y_2, z_2, z_1]\,.
\end{aligned}$$

Daher kann die Formel (14) für festes r und $s = 2$ als bewiesen angenommen werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
&[x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}]\,[z_1, z_2] - [z_1, z_2]\,[x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}] \\
&= [x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_1, z_2] - [x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_2, z_1]
\end{aligned}$$

eine formale Identität in den Unbestimmten $x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_1, z_2$, weshalb sie auch gilt für die Substitution

$$x_2 = [y_1, y_2],\ x_3 = y_3, \ldots, x_{r+1} = y_{r+1}\,,$$

woraus sogleich wegen

$$[[y_1, y_2], y_3, \ldots, y_{r+1}] = [y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}]$$

die Formel (14) für $r+1$ und $s = 2$ folgt. Damit ist (14) bewiesen für beliebiges r bei $s = 2$.

Demnach kann im Weiteren die Gültigkeit von (14) bei beliebigem r und festem s als bekannt vorausgesetzt werden, so daß hieraus nur noch ihre Gültigkeit für r und $s+1$ bewiesen werden muß. Nun gilt für den Kommutator $[z]$ die Gleichung

$$[z_1, z_2, \ldots, z_s, z_{s+1}] = [z]\, z_{s+1} - z_{s+1} [z]\,,$$

weshalb die zu beweisende Identität auch in der Gestalt

$$[y]\,[z, z_{s+1}] - [z, z_{s+1}]\,[y] = \sum_S \gamma_S ([y, z^S, z_{s+1}] - [y, z_{s+1}, z^S])$$

mit den früheren Bezeichnungen geschrieben werden kann. Für den linksstehenden Ausdruck erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
&[y]\,[z, z_{s+1}] - [z, z_{s+1}]\,[y] \\
&= [y]\,[z]\, z_{s+1} - [y]\, z_{s+1} [z] - [z]\, z_{s+1} [y] + z_{s+1} [z]\,[y] \\
&= ([y]\,[z] - [z]\,[y])\, z_{s+1} - z_{s+1} ([y]\,[z] - [z]\,[y]) - ([y, z_{s+1}]\,[z] - [z]\,[y, z_{s+1}]),
\end{aligned}$$

also nach (14)

$$\begin{aligned}
[[y], [z, z_{s+1}]] &= \sum_S \gamma_S [y, z^S]\, z_{s+1} - \sum_S \gamma_S z_{s+1} [y, z^S] - \sum_S \gamma_S [y, z_{s+1}, z^S] \\
&= \sum_S \gamma_S ([y, z^S, z_{s+1}] - [y, z_{s+1}, z^S])\,,
\end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Aus dem Satz 16 ergibt sich nun sehr rasch der Beweis der Behauptung, daß jedes Kommutatorprodukt als lineare Verbindung der normierten Kommutatorprodukte dargestellt werden kann.

Zunächst weise ich nach, daß die $(n-1)!$ Kommutatoren der Gestalt

$$[x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_n}]$$

linear unabhängig sind, und jeder andere Kommutator der Länge n sich durch diese linear darstellen läßt. Die lineare Unabhängigkeit folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß

$$[x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_n}] = x_1 x_{\alpha_2} x_{\alpha_3} \ldots x_{\alpha_n} + F(x)$$

gilt mit einer Form $F(x)$, in der nur solche Potenzprodukte auftreten, bei denen die Unbestimmte x_1 nicht an erster Stelle steht, die $(n-1)!$ Potenzprodukte $x_1 x_{\alpha_2} x_{\alpha_3} \ldots x_{\alpha_n}$ aber linear unabhängig sind.

Für $n = 2$ gilt

$$[x_2, x_1] = -[x_1, x_2].$$

Ist daher $K_n = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n}]$ ein beliebiger Kommutator, in dem x_{β_n} von x_1 verschieden ist, so folgt durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} K_n &= [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}]\, x_{\beta_n} - x_{\beta_n} [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}] \\ &= \sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha \left([x_1, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}]\, x_{\beta_n} - x_{\beta_n} [x_1, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}]\right) \\ &= \sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha [x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}, x_{\beta_n}]. \end{aligned}$$

Mithin brauchen nur noch Kommutatoren der Gestalt

$$K_n = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1]$$

behandelt zu werden. Für diese folgt aus (14) im Falle $n > 3$:

$$\begin{aligned} &[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}]\, [x_{\beta_{n-1}}, x_1] - [x_{\beta_{n-1}}, x_1]\, [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}] \\ &\quad = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1] - [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}, x_1, x_{\beta_{n-1}}], \end{aligned}$$

andererseits nach der gleichen Formel

$$[[x_{\beta_{n-1}}, x_1], [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}]] = \sum_S \gamma_S [x_{\beta_{n-1}}, x_1, x^S],$$

worin S alle Permutationen der Ziffern $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ durchläuft. Somit ist

$$[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1] = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}, x_1, x_{\beta_{n-1}}] - \sum_S \gamma_S [x_{\beta_{n-1}}, x_1, x^S].$$

Für die auf der rechten Seite stehenden Kommutatoren, die sämtlich die Unbestimmte x_1 nicht mehr an letzter Stelle enthalten, ist die Behauptung bereits bewiesen.

Der noch verbleibende Fall $n = 3$ erledigt sich leicht mittels der bekannten Identität

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$$

Nunmehr kann als bewiesen angenommen werden, daß jedes Kommutatorprodukt aus weniger als s Kommutatoren sich als lineare Verbindung normierter Kommutatorprodukte darstellen läßt. Zur Vereinfachung der Schreibweise nenne ich Λ den durch die normierten Kommutatorprodukte aufgespannten linearen Modul. Ferner werde ein beliebiges Kommutatorprodukt

$$K_{n_1 n_2 \ldots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n}) = C_1 C_2 \ldots C_s$$

gesetzt, worin C_σ einen Kommutator der Länge n_σ bezeichnet (für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$). Auf Grund der Formel (14) und der Induktionsannahme gilt dann

$$C_1 C_2 \ldots C_s \equiv C_{\sigma_1} C_{\sigma_2} \ldots C_{\sigma_s} (\Lambda)$$

für jede Permutation der Kommutatoren, da die Differenz

$$C_1 C_2 \ldots C_s - C_{\sigma_1} C_{\sigma_2} \ldots C_{\sigma_s}$$

nach (14) als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten aus weniger als s Kommutatoren dargestellt werden kann. Daher darf für das Kommutatorprodukt

$$K_{n_1 n_2 \ldots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n})$$

angenommen werden, daß

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s$$

gilt und daß die etwa auftretenden Kommutatoren gleicher Länge bereits in der Reihenfolge stehen, die notwendig ist, damit die in ihnen vorkommenden Unbestimmten mit kleinstem Index bereits nach zunehmender Größe angeordnet sind. Nunmehr läßt sich jeder einzelne Kommutator C_σ als lineare Verbindung solcher Kommutatoren gleicher Länge in den gleichen Unbestimmten darstellen, die sämtlich die Unbestimmte mit dem kleinsten vorkommenden Index an erster Stelle enthalten. Damit wird aber

$$K_{n_1 n_2 \ldots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n}) = C_1 C_2 \ldots C_s$$

als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten erhalten, die die drei Bedingungen für die normierten Kommutatorprodukte erfüllen.

Mithin ist Satz 15 in allen seinen Teilen bewiesen.

(Eingegangen am 29. Juni 1949.)