EXPERIENTIA MAIORUM

Per il centenario della dissertazione di Bernhard Riemann

Da FABIO CONFORTO[1]

Verso la fine del 1851 appariva a Göttingen la «Inauguraldissertation» di un giovane venticinquenne: quel giovane era BERNHARD RIEMANN, il matematico che è oggi riconosciuto universalmente come uno dei più grandi genî di tutti i tempi. La sua grandezza è tutta nella originalità e profondità delle sue concezioni matematiche, frutto di un continuo ed intenso travaglio interiore; in singolare contrasto con la semplicità della sua vita materiale, che d'altronde troppo presto s'interruppe con le morte, avvenuta nel 1866 in Italia, a Selasca sul lago Maggiore. Ma dall'alba del 1851 al tramonto del 1866, in soli 15 anni, quanta luce di pensiero, gravida di conseguenze per lo sviluppo delle matematiche!

Ancorchè la dissertazione di RIEMANN, intitolata: «*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Größe*», non abbia immediatamente attirato l'attenzione dei matematici, la sua pubblicazione costituisce tuttavia un nodo essenziale per l'evoluzione ulteriore delle scienze matematiche, perchè in essa appaiono già, talvolta soltanto in germe, tal'altra delineate con ogni precisione, quelle idee sulle quali si sono poi basati quasi tutti gli altri lavori di RIEMANN; idee che, al di là della persona fisica di RIEMANN, hanno successivamente fecondato per molti decenni tutto il campo matematico. Non sarà dunque inutile, a cent'anni di distanza, riandare con la mente al primo lavoro di RIEMANN, non solo per un doveroso omaggio al suo genio, ma altresì per riconoscere l'origine ed i titoli di nobilità di tanta parte della matematica moderna.

Giova anzitutto ricordare la posizione di RIEMANN rispetto alle funzioni di variabile complessa. Mentre queste erano già state variamente considerate da CAUCHY e da GAUSS (del quale RIEMANN deve considerarsi scolaro anche se il giovane e timido RIEMANN mai potè accostarsi all'autorevole ed anziano GAUSS), è soltanto RIEMANN che considera tali funzioni come manifestazioni nel campo della matematica di una veduta generale, che abbraccia l'intera filosofia naturale. Si tratta della veduta, che si riattacca alla critica delle azioni a distanza al modo newtoniano, tendendo per contrapposto a vedere lo spazio come ritempito da un fluido continuo, attraverso il quale per azioni contigue si trasmettono i fenomeni fisici della luce, dell'elettricità, della gravità, ecc. Tali idee, che dovevano poi trionfare con l'opera di FARADAY e di MAXWELL, erano senza dubbio nell'aria nell'ambiante di Gottinga, dominato dalle figure di GAUSS e di W. WEBER, quando RIEMANN era studente. Con la sua acuta sensibilità e la sua potente capacità di penetrazione, prescindendo completamente dagli insegnamenti ricavati dai corsi effettivamente seguiti, nei quali tali argomenti allora eterodossi ancora non potevano penetrare, RIEMANN seppe nettamente isolare l'idea della trasmissione per azioni contigue nel campo fisico, facendo di essa la bussola d'orientamento per le sue ricerche anche – e ciò è il lato più significativo della posizione riemanniana – nel campo della matematica pura stessa. Per RIEMANN l'idea della trasmissione per azioni contigue nel campo fisico conduce nel campo matematico alla definizione della funzione non già come arbitraria corrispondenza tra i valori della variabile indipendente ed i valori della variabile dipendente, sibbene alla definizione, che della funzione risulta in base alle proprietà che essa possiede nell'infinitamento piccolo; proprietà che possono ad es. tradursi nel fatto che la funzione soddisfà ad una certa equazione differenziale. Nel caso delle funzioni di variabile complessa, la concezione di RIEMANN conduce ad identificare le funzioni di variabile complessa con le coppie di funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ (parte reale e coefficiente dell'immaginario di una $f(x + i y)$) che, da un punto di vista analitico, soddisfano a quel sistema di equazioni alle derivate parziali, che oggi si dice di CAUCHY-RIEMANN, mentre, da un punto di vista geometrico le $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ pongono una corrispondenza tra il piano (x, y) ed il piano (u, v), che è una similitudine nell'infinitesimo, cioè una trasformazione conforme. Ecco così le funzioni di variabile complessa presentarsi allo spirito di RIEMANN come funzioni *naturali* riproducenti per così dire nel campo della matematica pura il meccanismo, che regola i fenomeni fisici.

Contemporaneamente però, è così fondato quel punto di vista che si suol dire dell'*analisi qualitativa*, del quale è appunto parte essenziale lo studio delle funzioni come integrali di certe equazioni differenziali nel campo complesso, che figurano come il dato primitivo. La poderosa memoria di RIEMANN del 1857 sulle funzioni ipergeometriche si riattacca direttamente a tale concezione. Questa memoria ha poi costitutio il classico modello per tutte le ricerche sulle equazioni differenziali lineari nel campo complesso a coefficienti funzioni razionali sopra il piano complesso o sopra una qualunque superficie di RIEMANN, teoria la quale, come è noto, s'intreccia profondamente con la teoria delle funzioni automorfe e con i problemi di uniformizzazione.

D'altra parte le speculazioni riemanniane sull'intimo meccanismo dei fenomeni naturali toccano il loro punto più alto nella famosa «Habilitationsschrift», letta a Gottinga nel 1854 ma pubblicata soltanto postuma nel 1867 da DEDEKIND, dal titolo: «*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*», dove, con sorprendente anticipazione rispetto ad idee che si sono affermate soltanto con la teoria generale della relatività, RIEMANN tende addirittura ad identificare i fenomeni naturali con variazioni nell'infinitesimo dello spazio stesso, nei quali essi sembrano manifestarsi. Ancora qui la veduta filosofica di RIEMANN è stata feconda di conseguenze nel campo puramente matematico, generando quell'imponente complesso di ricerche, che va sotto il nome di geometria delle varietà riemanniane.

Ma torniamo alle dissertazione di RIEMANN, per mettere in evidenza il suo contenuto più propriamente matematico. È in essa che RIEMANN dimostra il suo celebre teorema sulla rappresentazione conforme, secondo il quale, per mezzo di un'opportuna funzione di variabile complessa, ogni area semplicemente connessa del piano (x, y) può essere rappresentata conformemente sopra un'altra area qualunque semplicamente connessa di un piano (u, v); è in essa ancora che viene introdotta la superficie oggi detta *superficie di Riemann* per lo studio delle funzioni polidrome; è inessa infine che trovasi per la prima volta un ragionamento che applica il cosidetto *principio di Dirichlet*, per provare l'esistenza di una certa funzione attraverso la considerazione del minimo in un problema variazionale. Tutte tali concezioni si vedono portare i primi frutti grandiosi nella memoria dello stesso RIEMANN del 1857 sulle funzioni

[1] Università di Roma.

abeliane. Qui la nozione di superficie di RIEMANN sviluppata estesamente per le curve algebriche piane si combina con quella di trasformazione conforme, per dar luogo al concetto di trasformazione birazionale tra due curve, ponendo la base di quello che sarà la geometria algebrica; le superficie di RIEMANN si considerano nel loro aspetto topologico aprendo così un ramo nuovo di ricerche, che ha cambiato il volto di tutta la matematica; il genere di una curva introdotto come invariante topologico della relativa superficie di RIEMANN, viene anche interpretato funzionalmente come numero degli integrali abeliani di prima specie linearmente indipendenti, i quali a loro volta, ancora attraverso un'ardita e feconda analogia fisico matematica, si costruiscono per mezzo del principio di Dirichlet. Chi consideri quali sviluppi e quale potente impulso a tutta la matematica abbiano portato tali risultati e concetti, anche là, come nel caso del principio di DIRICHLET, dove si annidava un errore, che pur esso è stato così fecondo, non potrà a meno di ammirare in BERNHARD RIEMANN l'orma inconfondibile del genio.

Certo, chi ami – come è oggi costume di più d'uno – identificare la matematica con i ben costrutti edifizi assiomatici, splendidi nella loro perfezione logica ed in sè chiusi sul fondamento di pochi assiomi, che solo da se stessi traggono la loro legittimità, potrà non riconoscere in RIEMANN il suo ideale di matematico e ripudiare come metafisica tutta la sua concezione fisico matematica. Ma il gigante del pensiero, che in RIEMANN s'incarnò, di ciò non si cura certamente; e dal suo posto nella storia delle matematiche, da cui nessuno lo può sbalzare, egli ci ammonisce tutti che la posizione di nuovi problemi e l'apertura di vie nuove alle ricerche non potrà mai essere una questione soltanto di assiomi ma di idee, non potrà mai essere compito della sola logica ma frutto di un atto creativo o d'intuizione o di pensiero, come più piaccia, quale, nelle sue forme più elevate è consentito soltanto al genio.

IN MEMORIAM

Arnold Sommerfeld

5. Dezember 1868 bis 26. April 1951

Die Deutsche Physikalische Gesellschaft feierte in diesem Herbst das Andenken an einen der bedeutendsten Theoretiker ihrer Wissenschaft, ARNOLD SOMMERFELD. Unter den deutschen Physikern gibt es keinen, der eine so große Zahl erfolgreicher Schüler gehabt hätte. In den Vereinigten Staaten, in England, in der Schweiz und in Deutschland sind bedeutende, oft die bedeutendsten der Hochschullehrer der theoretischen Physik und hervorragende Wissenschaftler der Industrie seine Schüler gewesen. Das Geheimnis dieses Erfolges lag in seiner Art, zu lehren, Aufgaben zu stellen, und in seiner Bereitschaft, die in seiner Nähe Arbeitenden in ihrer Eigenart zu fördern. Er hatte eine naturwissenschaftliche Art, andere Begabungen mit einer wohlwollenden Neugier zu betrachten, zu achten und dadurch zu entwickeln, daß er ihnen Aufgaben stellte, die ihre Leistungsfähigkeit oft bis zum äußersten anspannten: «Man muß immer mit der Peitsche hinterher sein.» Über seine Vorlesungen sagte er: «Die Vorlesungen sollen nicht so ausgefeilt sein und so glatt vorgetragen werden, daß der Hörer glaubt, alles verstanden zu haben. Es muß immer etwas bleiben, woran er weiterzudenken hat.» Es kam nicht selten vor, daß er in der Hauptvorlesung über eine Frage so nachdenklich wurde, daß er kurze Zeit schwieg. Dann sagte er etwas weniger laut einige Sätze, die den Begabteren unter seinen Hörern die Schwierigkeit zeigten, an der er war, und die Zusammenhänge, die ihn gerade beschäftigten. Er liebte es, auf mathematische Zusammenhänge, physikalische Analogien hinzuweisen, auch wenn solche Bemerkungen weit über den Stoff der Vorlesung hinausgingen. Immer waren seine Bemerkungen so verständlich gesagt, daß sie Anregung zum Weiterdenken, auch zu selbständiger Arbeit boten. Die größte Wirkung an wissenschaftlicher Anregung hatten seine kleinen Vorlesungen über Forschungsfragen der theoretischen Physik und das Seminar. Häufig hielt er die kleinen Vorlesungen über ein Gebiet, das er selbst kennenlernen wollte, und nicht wenige seiner eigenen Arbeiten sind aus solchen Vorlesungen entstanden. Im Seminar hielten die Teilnehmer, ältere von ihm zugelassene Studierende und die Assistenten, Vorträge über neue Arbeiten. Das Seminarthema war meist für das ganze Semester vorbestimmt, ein Forschungsgebiet, das ihn gerade interessierte. Die Vortragenden unterbrach er oft und fragte unbefangen nach allem, was ihm nicht recht begründet oder unverständlich schien. Er war von einer vorbildlichen Großzügigkeit im Diskutieren, ließ jeden Widerspruch gegen seine Äußerungen zu, ihn interessierte bei wissenschaftlichen Fragen nur die sachliche Richtigkeit. Ob er recht gehabt hatte oder nicht, war für ihn beim Diskutieren keines Gedankens wert. Auffallende Begabungen förderte er in der großzügigsten Weise. Berühmt geworden ist, daß er dem 20jährigen W. PAULI übertrug, den Artikel über Relativitätstheorie in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften zu schreiben.

ARNOLD SOMMERFELD ist am 5. Dezember 1868 in Königsberg in Preußen geboren. Sein Vater, der praktische Arzt Dr. FRANZ SOMMERFELD, war ein «großer Freund der Naturwissenschaften», wie der Sohn in einer biographischen Skizze schreibt. An seiner geistvollen und energischen Mutter hing ARNOLD SOMMERFELD mit großer Liebe. Mit 17 ½ Jahren, 1886, erhielt er das Reifezeugnis am Altstädtischen Gymnasium in Königsberg. An der Universität Königsberg ließ er sich für Mathematik einschreiben, hörte daneben auch Vorlesungen über Volkswirtschaft und Philosophie. Als Mathematiker lehrten damals in Königsberg LINDEMANN und HURWITZ; HILBERT war Privatdozent. Nach den Angaben von SOMMERFELD und WIECHERT wurde 1890 am Königsberger Institut für theoretische Physik ein harmonischer Analysator gebaut, der die Erdthermometerbeobachtungen einer Station auswerten helfen sollte, die in der Nähe eines Abhangs lag. So geriet SOMMERFELD an das Problem, die Wärmeleitungsgleichung zu lösen für einen Raum, der von zwei gegeneinander geneigten Ebenen begrenzt ist. Er versuchte es nach einem Gedanken zu bewältigen, der auch seiner späteren berühmten Beugungsarbeit zugrunde lag: Erfüllung der Randbedingungen durch Spiegelung, Aufstellung der Lösung auf einer mehrblättrigen Riemannschen Fläche. Die Doktorarbeit, 1891, hatte zum Thema: «Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik»; sie ist in wenigen Wochen entstanden. 1892 macht er die Lehramtsprüfung, 1893 wird er Assistent am mineralogischen Institut in Göttingen. FELIX KLEIN sucht ihn für die mathematische Physik zu gewinnen: «Ich habe KLEIN stets als meinen eigentlichen Lehrer angesehen», schreibt SOMMERFELD 1919. 1894 wird er Assistent von