

Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange-Interpolation

WOLFGANG BÖRSCH-SUPAN

Eingegangen am 6. November 1968

Summary. If, for each zero of a polynomial, an approximation is known, estimates for the errors of these approximations are given, based on the evaluation of the polynomial at these points. The procedure can be carried over to the case of multiple roots and root clusters using derivatives up to the order $k - 1$, where k is the multiplicity of the cluster.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1, 2] hat der Verfasser eine Methode zur simultanen Abschätzung der Güte von gegebenen Näherungen für sämtliche Nullstellen eines Polynoms angegeben. Die Abschätzung ging im Fall einfacher Nullstellen aus von den Werten des Polynoms und seiner Ableitung an den Näherungsstellen und benutzte den Brouwerschen Fixpunktsatz. Wie bereits dort angedeutet, kann man jedoch auf die Verwendung der Ableitungen verzichten. Schmidt und Dressel [7] haben gezeigt, wie sich auch dies mit Hilfe von Fixpunktsätzen verwirklichen läßt. Hier soll ein Verfahren¹ beschrieben werden, das ebenfalls ohne Ableitungen arbeitet, die Abschätzung jedoch mit elementaren, funktionentheoretischen Mitteln ermöglicht. Auch dieses Verfahren läßt sich in verschiedener Weise verfeinern und andererseits verallgemeinern auf mehrfache Nullstellen und Nullstellenanhäufungen.

2. Einfache Nullstellen

Gegeben sei das Polynom

$$F(x) = x^n + \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} x^{n-\nu},$$

beispielsweise durch die im allgemeinen komplexen Koeffizienten seiner Potenzreihenentwicklung bei $x=0$ oder in anderer geeigneter Form, etwa durch eine Matrix mit von x abhängigen Elementen, deren Determinante $F(x)$ ist. Bekannt sei zu jeder der Nullstellen x_i von $F(x)$ eine Näherung ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Wir setzen der Einfachheit halber zunächst voraus, daß die genannten Nullstellen einfach sind und für alle i der Abstand der Näherung ξ_i von der zugehörigen Nullstelle x_i hinreichend klein ist im Vergleich zu den Abständen von x_i zu den anderen Nullstellen.

¹ Das Verfahren wurde 1964 auf der Tagung über „Numerische Behandlung von Problemen der linearen Algebra“ im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vorgetragen und ist in [7] als Manuskript zitiert.

Zur Abschätzung der Fehler $\xi_i - x_i$ der gegebenen Näherungen berechnen wir zunächst die Defektgrößen $F(\xi_i)$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Dann läßt sich das Polynom $F(x)$ mit Hilfe der Lagrange-Interpolationsformel durch diese Größen ausdrücken. Definieren wir

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)$$

und

$$c^{(i)} = \frac{F(\xi_i)}{\omega'(\xi_i)} = \frac{F(\xi_i)}{\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq i}}^n (\xi_i - \xi_v)},$$

so wird

$$F(x) = \omega(x) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{c^{(i)}}{x - \xi_i} + 1 \right\}.$$

Wir betrachten nun die spezielle Wurzel x_j mit der Näherung ξ_j . Durch Multiplikation des Faktors $x - \xi_j$ in die Klammer entsteht

$$F(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - \xi_i) \left\{ c^{(j)} + (x - \xi_j) \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{c^{(i)}}{x - \xi_i} \right) \right\}.$$

Da der erste Faktor nahe $x = \xi_j$ nicht verschwindet, muß x_j Nullstelle des Ausdrucks in geschweiften Klammern sein. Unter den über die Abstände der Näherungen von den Nullstellen gemachten Voraussetzungen ist die Summe über i klein gegen 1. Wir haben es daher mit einer für x nahe ξ_j nur schwach nichtlinearen Gleichung zu tun, so daß sich x_j leicht eingrenzen läßt.

Wir benutzen zur Eingrenzung den folgenden Satz, der eine Anwendung des wohlbekannten Satzes von Rouché über die Nullstellen einer analytischen Funktion ist, die von einer Funktion mit bekannten Nullstellen nur wenig abweicht (s. etwa [8], S. 116).

Hilfssatz. Es sei $\eta(x)$ eine in dem Kreis $\mathfrak{R}_r = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - \xi| \leq r\}$ reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen x und für alle $x \in \mathfrak{R}_r$

$$(1) \quad |\eta(x)| \leq \bar{\eta}(r) < 1.$$

Ferner seien c_1, c_2, \dots, c_k ($k \geq 1$) komplexe Konstanten und $\varrho = \varrho(r)$ die positive Wurzel der Gleichung

$$(2) \quad 1 - \bar{\eta}(r) = \sum_{x=1}^k |c_x| \varrho^{-x},$$

sofern $\sum_{x=1}^k |c_x| > 0$, sonst $\varrho = 0$. Ist dann für ein gewisses r

$$(3) \quad \varrho(r) < r,$$

so hat die Gleichung

$$(4) \quad c_k + c_{k-1}(x - \xi) + \dots + c_1(x - \xi)^{k-1} + (x - \xi)^k (1 + \eta(x)) = 0$$

unter Berücksichtigung der Vielfachheit genau k Wurzeln in \mathfrak{R}_ϱ , und diese sind die einzigen in \mathfrak{R}_r . Dies gilt auch noch für $\varrho(r) = r$, sofern es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle r' mit $r < r' < r + \varepsilon$ gilt:

$$(5) \quad 1 - \bar{\eta}(r') > \sum_{\kappa=1}^k |c_\kappa| r'^{-\kappa}.$$

Beweis. Der triviale Fall, daß sämtliche c_κ verschwinden, kann ausgeschlossen werden. Dann ist die rechte Seite von (2) eine für $0 < \varrho < \infty$ monoton von $+\infty$ nach 0 fallende Funktion, woraus Existenz und Eindeutigkeit von $\varrho(r)$ folgt.

Ferner zeigt man, daß die im Parameter γ , $0 \leq \gamma \leq 1$, stetige Schar

$$f_\gamma(x) = \sum_{\kappa=1}^k c_\kappa (x - \xi)^{k-\kappa} + (x - \xi)^k (1 + \gamma \eta(x))$$

analytischer Funktionen im Kreisring $\varrho < |x - \xi| \leq r$ regulär und nullstellenfrei ist:

$$(6) \quad \begin{aligned} |f_\gamma(x) (x - \xi)^{-k}| &\geq 1 - \gamma \bar{\eta}(r) - \sum_{\kappa=1}^k |c_\kappa| |x - \xi|^{-\kappa} \\ &> 1 - \bar{\eta}(r) - \sum_{\kappa=1}^k |c_\kappa| \varrho^{-\kappa} = 0. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Nullstellen in \mathfrak{R}_ϱ ist also von γ unabhängig, insbesondere haben $f_1(x)$ und $f_0(x)$ gleichviele Nullstellen in \mathfrak{R}_ϱ . Das letztgenannte Polynom hat aber seine sämtlichen k Nullstellen in \mathfrak{R}_ϱ , weil für $\gamma = 0$ (6) sogar für alle x mit $|x - \xi| > \varrho$ gilt. Wendet man das bisher Bewiesene auf r' anstatt r an, so folgt aus (5) $\varrho(r') < r'$. Demnach liegen in $\mathfrak{R}_{r'}$ genau k Nullstellen von $f_1(x)$ und mit $r' \rightarrow r$ folgt auch der letzte Teil des Hilfssatzes.

Für den hier zunächst betrachteten Fall einfacher Nullstellen setzen wir

$$k = 1, \quad c_1 = c^{(j)}, \quad \xi = \xi_j, \quad \eta(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{c^{(i)}}{x - \xi_i}.$$

Geeignete Zahlen r und ϱ , welche die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen, lassen sich wie in [1] unter gewissen Bedingungen iterativ bestimmen. Doch ist unter Verwendung des letzten Teils des Hilfssatzes eine direkte Bestimmung des Kreisradius möglich.

Wir definieren

$$(7) \quad \sigma := \sigma_j := \sum_i' \frac{|c^{(i)}|}{|\xi_i - \xi_j|}, \quad \delta := \delta_j := \frac{|c^{(j)}|}{\min_i |\xi_i - \xi_j|},$$

wobei der Strich ' andeutet, daß die Summe bzw. das Minimum über alle i von 1 bis n mit Ausnahme von j zu nehmen ist.

Dann gilt der

Satz 1. Sofern

$$(8) \quad \sigma_j + \delta_j < \min \left\{ 1, \frac{1}{2} (1 + (\sigma_j - \delta_j)^2) \right\}$$

erfüllt ist, ist

$$(9) \quad r^* := r_j^* := |c^{(j)}| \cdot \left[1 + \frac{2\sigma_j}{1 - \sigma_j - \delta_j + \sqrt{(1 - \sigma_j - \delta_j)^2 - 4\sigma_j\delta_j}} \right]$$

der Radius eines Kreises um $\sigma = \xi_j$, der genau eine Nullstelle von $F(x)$ enthält.

Beweis. Setzt man $\tau = r'/|c^{(j)}|$, so wird

$$(10) \quad \bar{\eta}(r') = \frac{\sigma}{1 - \tau\delta} < 1,$$

solange $1 - \tau\delta > \sigma > 0$ ist; die Ungleichung (5) nimmt die Form $1 - \bar{\eta}(r') > \tau^{-1}$ an und reduziert sich auf

$$\delta(\tau - 1)^2 - (1 - \sigma - \delta)(\tau - 1) + \sigma < 0.$$

Durch (8) ist gesichert, daß es reelle $\tau > 1$ gibt, die diese Ungleichung erfüllen, und zwar rechts von der durch die eckige Klammer in (9) gegebenen kleineren Wurzel $\tau = \tau^*$ der entsprechenden quadratischen Gleichung. Es gilt $\varrho(r^*) = r^*$, und wegen

$$1 - \tau^*\delta = \frac{\sigma\tau^*}{\tau^* - 1} > \sigma$$

ist in einer rechten Halbumgebung von τ^* die Bedingung $1 - \tau\delta > \sigma$ tatsächlich erfüllt.

Im Gegensatz zu der in [1] beschriebenen Methode kann man hier, sobald sämtliche $c^{(i)}$ bekannt sind, die Abschätzungen für die einzelnen Wurzeln x_j getrennt voneinander durchführen. Ein Versagen der Methode für einzelne Wurzeln infolge Verletzung von (8) bedeutet also noch nicht unbedingt ein Versagen für alle Wurzeln, wie man auch aus dem in Tabelle 1 gegebenen Beispiel ersieht.

Lassen sich bei der Defektberechnung Rundungsfehler nicht vermeiden, so muß man, wie in [1] im einzelnen erläutert wurde, diese Fehler abschätzen und im weiteren obere Schranken für $|F(\xi_j)|$ anstelle von $|F(\xi_j)|$ benutzen. Rundungsfehler im weiteren Verlauf der Rechnung sind im allgemeinen nicht bedeutsam, durch geeignete einseitige Rundung oder Intervallarithmetik lassen sich jedoch auch völlig strenge Fehlerschranken bestimmen.

Verfeinerungen der hier beschriebenen Abschätzungen lassen sich sowohl dadurch erzielen, daß die Phasen der auftretenden komplexen Größen mitberücksichtigt werden, als auch dadurch, daß man die bei der Defektberechnung gewonnene Information zur Verbesserung der Näherungswurzeln ausnutzt, also etwa die Fehler der neuen Näherungen

$$(11) \quad \xi_j^{(2)} = \xi_j - c^{(j)}$$

oder

$$\xi_j^{(3)} = \xi_j - \frac{c^{(j)}}{1 + \sum_i \frac{c^{(i)}}{\xi_j - \xi_i}}$$

berechnet. Da die Rechnungen völlig analog zu den entsprechenden in [1] verlaufen, wird auf Einzelheiten nicht weiter eingegangen. Wie der Hilfssatz zu modifizieren ist, liegt ebenfalls auf der Hand.

Die iterative Verbesserung der Nullstellennäherungen mittels (11) ist bereits von Weierstraß [9] zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra verwendet worden. Dočev [5] und Kerner [6] benutzen diese Iterationsvorschrift zur simultanen Berechnung sämtlicher Nullstellen. Sie läßt sich nach [6] auffassen als Newtonsches Iterationsverfahren für ein Gleichungssystem, das die symmetrischen Grundfunktionen der unbekanntenen Nullstellen vorschreibt. In ähnlicher Weise läßt sich auch die Iterationsvorschrift (2.5) in [1] für die einzelne Komponente als Newtonschritt für die skalare Funktion $F(x)/\prod_i'(x-u_i)$ an der Stelle $x=\lambda_j$ auffassen².

Das damit bewirkte näherungsweise Ausdividieren sämtlicher übrigen Polynom-Nullstellen führt zu einer nahe λ_j in sehr guter Näherung linearen Funktion, für die das Newton-Verfahren entsprechend gute Näherungen liefert. Die Simultaniteration mit dieser Vorschrift ist nach Ehrlich [4] und eigenen Erfahrungen des Verfassers erstaunlich unempfindlich gegen die Wahl der Ausgangsnäherungen. Nach [3] gilt das offenbar auch für die durch einen geeigneten Faktor bei den Korrekturen modifizierte Vorschrift (11).

3. Mehrfache Wurzeln und Wurzelhaufen

Die im Abschnitt 2 beschriebene Methode läßt sich auch auf mehrfache Wurzeln und Wurzelhaufen übertragen. Dabei wollen wir eine mehrfache Wurzel als Spezialfall eines Wurzelhaufens ansehen, zumal bei Anwesenheit von Störungen durch Rundungs- oder Datenfehler beide Fälle nicht unterscheidbar sind. Damit das Verfahren funktioniert, müssen sich die Nullstellen des Polynoms so in m Haufen gruppieren lassen, daß die Haufendurchmesser klein sind im Vergleich zu den Abständen zwischen den Haufen. Wir setzen voraus, daß zu jedem Haufen die Anzahl k_i der in ihm enthaltenen Nullstellen unter Berücksichtigung der Vielfachheit und eine gemeinsame Näherungswurzel ξ_i ($i=1, 2, \dots, m$) gegeben ist. Der Abstand der Näherungen von den zugehörigen Wurzeln soll klein sein gegenüber den Abständen zwischen den Haufen.

Als Defektgrößen dienen die Werte des Polynoms und seiner ersten k_i-1 -Ableitungen im Punkt $\xi_i: F^{(\mu)}(\xi_i)$, $\mu=0, 1, \dots, k_i-1$; $i=1, 2, \dots, m$. Durch diese Größen läßt sich $F(x)$ mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Lagrange-Hermite'schen Interpolationsformel darstellen:

$$(12) \quad F(x) = \omega(x) \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{g_i(x)}{(x-\xi_i)^{k_i}} + 1 \right\},$$

wo

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^m (x-\xi_i)^{k_i}$$

und $g_i(x)$ ein Polynom in x vom Grade $< k_i$ ist, das man zweckmäßig in der Form

$$g_i(x) = \sum_{\alpha=1}^{k_i} c_{\alpha}^{(i)} (x-\xi_i)^{k_i-\alpha}, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

² Diesen Hinweis verdanke ich Herrn F. L. Bauer, München (s. auch [4]).

darstellt. Die Koeffizienten $c_\nu^{(i)}$ lassen sich ermitteln mittels Division der Taylorentwicklung von $F(x)$ bei $x = \xi_i$ durch die Taylorentwicklung von

$$q_i(x) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^m (x - \xi_\mu)^{k_\mu}$$

an der gleichen Stelle³. Dabei werden nur die ersten k_i Koeffizienten der jeweiligen Entwicklung benötigt.

Wir konzentrieren uns nun auf die Eingrenzung der Wurzeln des j -ten Haufens. Dazu wird in (12) der Faktor $(x - \xi_j)^{k_j}$ von $\omega(x)$ in die Klammer hineinmultipliziert. Es entsteht

$$F(x) = q_j(x) \left\{ \sum_{\nu=1}^{k_j} c_\nu^{(j)} (x - \xi_j)^{k_j - \nu} + (x - \xi_j)^{k_j} \left[1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \frac{g_i(x)}{(x - \xi_i)^{k_i}} \right] \right\},$$

und wir schließen wie früher, daß die Nullstellen des j -ten Haufens Nullstellen der geschweiften Klammer sein müssen. Auf diese läßt sich dann wieder der Hilfssatz des vorigen Abschnitts anwenden.

Wir definieren

$$\sigma := \sigma_j := \sum_i' \sum_{\nu=1}^{k_i} \frac{|c_\nu^{(i)}|}{|\xi_i - \xi_j|^\nu}, \quad \delta := \delta_j := \max_i' \frac{k_i}{|\xi_i - \xi_j|} R_j,$$

wobei R_j die positive Wurzel von

$$(13) \quad 1 = \sum_{\nu=1}^{k_j} |c_\nu^{(j)}| R_j^{-\nu},$$

sofern nicht alle $c_\nu^{(j)}$, $\nu = 1, \dots, k_j$, verschwinden, sonst Null ist und der Eingrenzung

$$w_j := \max_{\nu=1, \dots, k_j} \sqrt[\nu]{|c_\nu^{(j)}|} \leq R_j \leq 2w_j$$

genügt, die sich wegen der Monotonie der rechten Seite von (13) leicht, etwa durch Bisektion, verschärfen läßt. Dann gilt der

Satz 2. Sofern

$$\sigma_j + \delta_j < \min \left\{ 1, \frac{1}{2} (1 + (\sigma_j - \delta_j)^2) \right\}$$

erfüllt ist, ist

$$r^* := r_j^* := R_j \left[1 + \frac{2\sigma_j}{1 - \sigma_j - \delta_j + \sqrt{(1 - \sigma_j - \delta_j)^2 - 4\sigma_j\delta_j}} \right]$$

der Radius eines Kreises um $\xi = \xi_j$, der genau k_j Nullstellen von $F(x)$ enthält.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis des Satzes 1. Mit $\tau = r'/R_j$ erhalten wir als obere Schranke für

$$|\eta(x)| = \left| \sum_i' \sum_{\nu=1}^{k_i} \frac{c_\nu^{(i)}}{(x - \xi_i)^\nu} \right| \leq \sigma \cdot \max_i' \left[1 - \left| \frac{x - \xi_j}{\xi_j - \xi_i} \right| \right]^{-k_i} \leq \sigma \cdot \left[1 - \max_i' \frac{k_i |x - \xi_j|}{|\xi_j - \xi_i|} \right]^{-1}$$

³ Auch irgendeine der anderen in [1], Appendix B beschriebenen Methoden ist hier verwendbar. Zugleich sieht man, daß jede der Methoden auch ein Verfahren zur praktischen Ausführung der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion mit mehrfachen Nennernullstellen darstellt.

den Ausdruck (10), solange $1 - \tau\delta > \sigma > 0$ ist und $|x - \xi_j| \geq r'$ gilt. Die Ungleichung (5) folgt aus $\alpha - \bar{\eta}(r') > \tau^{-1}$, wobei der Anschluß an den früheren Beweis hergestellt ist.

4. Numerische Beispiele

Numerische Experimente haben gezeigt, daß die in dieser Arbeit beschriebene Methode eine ähnliche Genauigkeit besitzt wie die in [1] angegebene Methode. Im Einzelfall sind die Abschätzungen teils besser, teils schlechter. An dem früher verwendeten Beispiel werden in den Tabellen 1 und 2 die mit beiden Methoden ermittelten Fehlerschranken einander gegenübergestellt.

In Tabelle 1 sind außer Werten, die mit dem in Abschnitt 2 ausführlich beschriebenen Verfahren berechnet sind, das hier als Variante A1 bezeichnet wird, auch mit verschiedenen anderen Varianten berechnete Werte angegeben. Diese Varianten A1, A2, B1, B2 und B3 sind ganz analog zu denen in [1] aufgebaut und bezeichnet und werden daher hier nicht mehr im einzelnen beschrieben:

Im wesentlichen bedeutet A die Verwendung von Beträgen der komplexen Größen in der Abschätzung, sobald es geht, B die Berücksichtigung von Phasen, solange es sich lohnt, während die Ziffern 1, 2, 3 auf die benutzten Kreismittelpunkte $\xi_j^{(1)} = \xi_j$, $\xi_j^{(2)}$, $\xi_j^{(3)}$ der Resultatbereiche hinweisen. Auch diese Varianten lassen sich so formulieren, daß sich der Radius des Kreises, in dem $\eta(x)$ abgeschätzt wird, aus einer quadratischen Gleichung ergibt, eine iterative Vorgehensweise also vermieden wird.

Bemerkenswert ist vor allem, daß das neue Verfahren nicht für alle Wurzeln zusammenbricht, wenn nur bei einzelnen Wurzeln der Fehler der Näherung nicht mehr hinreichend klein gegen den Abstand zu anderen Wurzeln ist, wie man aus dem zweiten Teil der Tabelle 1 ersieht. Ferner beachte man, daß die Resultate im Fall einer Wurzel größerer Vielfachheit besser sind als früher.

Für die in Tabelle 1 und 2 gegebenen Zahlen spielen die Rundungsfehler bei der Defektberechnung praktisch keine Rolle, da zur Defektberechnung die Produktdarstellung des Polynoms $F(x)$ benutzt wurde. Bei der praktischen Anwendung des Verfahrens ist eine solche Vorgehensweise natürlich nicht möglich, weil die wahren Wurzeln unbekannt sind. Geht man in unserem Beispiel von der Potenzreihendarstellung des Polynoms aus, berechnet den Defekt mit einer Gleitkomma-Arithmetik von 8 Stellen, schätzt den Effekt der dabei auftretenden Rundungsfehler ab und arbeitet dementsprechend mit oberen Schranken für die Defektgrößen, so ändern sich die meisten der in Tabelle 2 angegebenen Werte um höchstens 3 Einheiten der dritten Dezimale. Dagegen wachsen im Falle einer vierfachen Wurzel Nr. 4 die Fehlerschranken der sechs Wurzeln auf

$$0,184; 0,202; 0,137; 1,08; 0,164; 0,130.$$

Die Abschätzung der Vierfachwurzel ist also besonders empfindlich gegen Rundungsfehler, wie ja auch Mehrfachwurzeln besonders empfindlich gegen Änderungen der Polynomkoeffizienten sind. Auch im Falle der Vielfachheit 2 und 3 zeigt sich bei der Wurzel Nr. 4 bereits ein stärkerer Rundungsfehlereffekt: Die entsprechenden Fehlerschranken wachsen auf 0,280 bzw. 0,50 an.

Tabelle 1. Vergleich verschiedener Fehlerschranken

Wurzel Nr. j	Wahre Wurzel x_j	Näherung ξ_j	Fehler $ x_j - \xi_j $	Fehlerschranken		Bei verbesserten Näherungen			Fehler-schranken B_3	
				A1	B1	Fehler $ x_j - \xi_j^{(a)} $	A2	B2		Fehler $ x_j - \xi_j^{(b)} $
1	0,0 + 5,1i	0,0 + 5,0i	0,1	0,156	0,1020	0,0171	0,0488	0,0240	0,00194	0,00288
			0,1	0,167	0,1017	0,0217	0,0490	0,0254	0,00194	0,00260
2	0,2 + 4,3i	0,1 + 4,3i	0,1	0,172	0,1019	0,0190	0,0535	0,0245	0,00165	0,00193
			0,1	0,127	0,1022	0,0110	0,0324	0,0165	0,00165	0,00265
3	2,1 + 2,3i	2,0 + 2,3i	0,1	0,117	0,1003	0,0067	0,0165	0,0072	0,00016	0,00042
			0,1	0,114	0,1002	0,0083	0,0147	0,0088	0,00016	0,00038
4	4,7 + 3,8i	4,7 + 3,9i	0,1	0,115	0,1002	0,0005	0,0156	0,0008	0,00021	0,00036
			0,1	0,118	0,1002	0,0045	0,0154	0,0048	0,00021	0,00033
5	6,7 + 6,7i	6,7 + 6,6i	0,1	0,119	0,1003	0,0043	0,0152	0,0047	0,00013	0,00034
			0,1	0,120	0,1004	0,0047	0,0153	0,0052	0,00013	0,00036
6	9,1 + 6,6i	9,0 + 6,6i	0,1	0,111	0,1003	0,0031	0,0118	0,0035	0,00017	0,00032
			0,1	0,124	0,1003	0,0103	0,0137	0,0108	0,00017	0,00028
1	0,0 + 5,1i	0,0 + 4,9i	0,2	∞	∞	0,080	∞	∞	0,0203	∞
			0,2	∞	0,267	0,119	∞	∞	0,0203	0,077 ^a
2	0,2 + 4,3i	0,0 + 4,3i	0,2	∞	0,248	0,0902	∞	∞	0,0159	0,026
			0,2	∞	0,275	0,0438	∞	∞	0,0159	0,076
4 ^b	4,7 + 3,8i	4,7 + 4,0i	0,2	0,286	0,2023	0,0017	0,0873	0,0059	0,00164	0,0033
			0,2	∞	0,2023	0,0172	∞	∞	0,00165	0,0031

Von den paarweise übereinanderstehenden Werten sind der obere mit den hier beschriebenen, der untere mit den Methoden in [1] gewonnen.

^a Der Wert 0,075 in [1] ist falsch.

^b Übrige Wurzeln ähnlich.

Tabelle 2. *Fehlerschranken der Näherungswurzeln*

Wurzel Nr. j	Wahre Wurzel x_j	Näherung ξ_j	Vielfachheit der Wurzel Nr. 4			
			1	2	3	4
1	$0,0 + 5,1i$	$0,0 + 5,0i$	0,151 (0,167)	0,158 (0,174)	0,165 (0,184)	0,175 (0,204)
2	$0,2 + 4,3i$	$0,1 + 4,3i$	0,166 (0,127)	0,173 (0,128)	0,181 (0,130)	0,191 (0,137)
3	$2,1 + 2,3i$	$2,0 + 2,3i$	0,117 (0,114)	0,120 (0,115)	0,124 (0,118)	0,128 (0,133)
4	$4,7 + 3,8i$	$4,7 + 3,9i$	0,115 (0,118)	0,276 (0,346)	0,44 (0,71)	0,62 (1,44)
5	$6,7 + 6,7i$	$6,7 + 6,6i$	0,119 (0,120)	0,126 (0,129)	0,135 (0,142)	0,145 (0,173)
6	$9,1 + 6,6i$	$9,0 + 6,6i$	0,110 (0,124)	0,114 (0,130)	0,119 (0,138)	0,124 (0,150)

Eingeklammerte Werte: Version A1 der alten Methode.

Natürlich hängt die Auswirkung der Rundungsfehler entscheidend ab von der Kondition des Polynoms in bezug auf die Aufgabe der Nullstellenbestimmung. Da in unserem Beispiel sämtliche Wurzeln in einem Quadranten der komplexen Zahlenebene liegen, ist die Kondition des zugehörigen Polynoms entsprechend schlecht. Verschiebt man dagegen den Nullpunkt der unabhängigen Veränderlichen x in die Nähe des Schwerpunktes der Wurzelverteilung, so vermindert sich der Rundungsfehlereinfluß um einige Zehnerpotenzen.

Von Interesse ist noch ein Vergleich der für Einzelwurzeln und für Wurzelhaufen angegebenen Verfahren an ein und demselben Beispiel. Zu diesem Zweck wurde in dem oben behandelten Beispiel die Wurzel Nr. 4 durch ein Wurzelpaar ersetzt. Bei einem Abstand der Komponenten von weniger als 0,05 und einer Defektberechnung mit acht wesentlichen Stellen versagt die Methode für Einzelwurzeln: die Komponenten sind voneinander nicht mehr zu trennen, auch wenn als Näherungswurzeln die exakten Wurzeln selbst angegeben werden. Behandelt man dagegen die beiden Wurzeln als Wurzelhaufen, so lassen sich praktisch brauchbare Abschätzungen erzielen, wie Tabelle 3 zeigt. Bemerkenswert ist der vergleichsweise mäßige Einfluß einer Berücksichtigung der Rundungsfehler, während diese allein für das Versagen der Einzelwurzel-Methode verantwortlich sind.

Tabelle 3. *Eingrenzung eines Wurzelpaars. Wahre Wurzeln: $4,7 + 3,825i$; $4,7 + 3,775i$*

Gemeinsame Näherung	$4,7 + 3,8i$	$4,7 + 3,825i$	$4,675 + 3,8i$
Wahre Fehler	0,025	0,050	0,035
Fehlerschranken:			
ohne Rundungsfehler	0,027	0,060	0,075
mit Rundungsfehler	0,037	0,070	0,084

Literatur

1. Börsch-Supan, W.: A posteriori error bounds for the zeros of polynomials. Numer. Math. 5, 380—398 (1963).
2. — Defektabschätzungen für Polynom-Nullstellen. Z. angew. Math. Mech. 42, T 7—8 (1962).
3. Braess, D., Späth, H.: Maßnahmen zur globalen Konvergenz erzwingung beim Newtonschen Verfahren für spezielle nichtlineare Gleichungssysteme. Z. angew. Math. Mech. 47, 409—410 (1967).

4. Ehrlich, L. W.: A modified Newton method for polynomials. *Comm. Assoc. Comp. Mach.* **10**, 107–108 (1967).
5. Illief, L., Dočev, K.: Über Newtonsche Iterationen. *Wiss. Z. TH Dresden* **12**, 117–118 (1963).
6. Kerner, I. O.: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. *Numer. Math.* **8**, 290–294 (1966).
7. Schmidt, J. W., Dressel, H.: Fehlerabschätzungen bei Polynomgleichungen mit dem Fixpunktsatz von Brouwer. *Numer. Math.* **10**, 42–50 (1967).
8. Titchmarsh, E. C.: *The theory of functions*, 2nd ed. London: Oxford Univ. Press 1939.
9. Weierstraß, K.: Neuer Beweis des Satzes, ... *Mathematische Werke*, Bd. 3, S. 251–269. Berlin 1903.

Prof. Dr. W. Börsch-Supan
Institut für angewandte Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
6500 Mainz, Postfach 3980