

Die Behandlung von Randwertaufgaben im R_3 mit Hilfe von Einfach- und Doppelschichtpotentialen*

WOLFGANG WENDLAND

Eingegangen am 4. September 1967

Einleitung

In dieser Arbeit werden die ersten und zweiten Randwertaufgaben der Potentialgleichung im R_3 mit einer Integralgleichungsmethode gelöst, für die auch die numerische Auswertung untersucht wird. Bei Differenzenverfahren wächst die Gleichungszahl im R_3 mit h^{-3} (h Maschenweite) ([3], S. 344), die Auflösung der linearen Gleichungen ist im allgemeinen langwierig ([4], S. 283) und ihre numerische Stabilität nimmt für kleine h stark ab ([3], S. 332). Auch macht die Anpassung der Randvorgaben häufig Mühe ([3], S. 325, [4], S. 199 ff.). Dagegen wächst die Zahl der durch die Diskretisierung der Integralgleichung entstehenden Gleichungen nur wie h^{-2} , denn die dreidimensionalen Aufgaben werden hier auf die Lösung einer zweidimensionalen Integralgleichung auf der Randfläche zurückgeführt. Dadurch gehen die Randwerte auch leicht in die Rechnung ein. Für die Auflösung der Gleichungen werden Iterationsverfahren angegeben, deren Konvergenzfaktoren von h unabhängig sind. Allerdings muß mit einer vollbesetzten Koeffizientenmatrix gerechnet werden.

Wir werden die Randwertaufgaben für das Innere und Äußere eines einfach zusammenhängenden beschränkten Gebietes $G \subset R_3$ mit einer Randfläche $\dot{G} = \bigcup_{\nu=1}^N \dot{G}_\nu$ lösen, wobei \dot{G} sich aus $N < \infty$ jeweils abgeschlossenen stetig gekrümmten Stücken \dot{G}_ν mit stückweise stetig gekrümmten Trennkanten zusammensetzt. Die im folgenden beschriebenen Ergebnisse lassen sich mühelos auf Ljapunoffsche Flächenstücke \dot{G}_ν übertragen. Außerdem bleiben sie auch dann richtig, wenn auf \dot{G} noch endlich viele Ecken liegen, in deren Umgebung sich \dot{G} wie ein glattes Konoid verhält. Auf solchen Randflächen scheint die Integralgleichung für die Belegung noch nicht untersucht worden zu sein ([16], S. 211). Allerdings darf der Rand \dot{G} bei CARLEMAN [2] eine geschlossene stetig gekrümmte Kante besitzen, und in [10] verwendet LEIS zur Lösung der Schwingungsgleichung eine entsprechende Integralgleichung, wobei \dot{G} würfelartige Ecken besitzen darf.

NEUMANN [11] begründete die Integralgleichungsmethode und löste mit ihr die Randwertaufgaben für konvexe Gebiete, POINCARÉ [13] übertrug sie auf sternige aber stetig gekrümmte, PLEMELJ [12] auf beliebig stetig gekrümmte Berandungen.

§1 zählt die wichtigsten Begriffe und Voraussetzungen auf. In §2 werden wir die den Randwertaufgaben zugeordnete Integralgleichung angeben und in §3 ihre

* Herrn Professor Dr. WOLFGANG HAACK zum 65. Geburtstag gewidmet.

Eigenschaften sowie die von Einfach- und Doppelschichtpotentialen untersuchen (Satz 5 und 6). Dabei bedienen wir uns einiger Methoden von RADON ([14, 15]) und können die zweite Randwertaufgabe für eine sehr allgemeine Klasse von Randvorgaben lösen (§1, 2. und 4.). In §4 zeigen wir eine gewisse Äquivalenz von Integralgleichung und Randwertaufgaben (Satz 7). Die Lösungen der Integralgleichung werden in §5 konstruiert (Satz 8).

Nachdem die Integralgleichungsmethode bereitgestellt wurde, kann in §6 ein numerisches Auswertungsverfahren angegeben werden. Dabei werden Integrale mit Hilfe des Mittelwertsatzes durch endliche Summen ersetzt; diese Diskretisierung ist ein verallgemeinertes Galerkin-Verfahren. Nach [1] wird gezeigt, daß die so entstandenen linearen Gleichungssysteme mit dem gleichen Iterationsverfahren wie die Integralgleichung in §5 gelöst werden können und daß mit feiner werdender Diskretisierung die daraus berechneten Näherungspotentiale gleichmäßig gegen die exakten Potentiale konvergieren. Die iterative Auflösung der linearen Gleichungen ist numerisch stabil — ein Vorteil dieses Verfahrens. Außerdem nehmen die Kanten und Ecken bei der numerischen Behandlung keine Ausnahmestellung ein. Das Verfahren wurde für einige Beispiele mit Hilfe der Rechenanlage S 2002 durchgeführt.

Die geometrischen Hilfssätze sind als Anhang in §7 zusammengestellt.

Ich erlaube mir, an dieser Stelle Herrn Professor Dr. W. HAACK für seine Anregungen und wertvollen Hinweise zu danken.

§ 1. Die wichtigsten Begriffe und Voraussetzungen

Wir werden Potentiale von Einfachbelegungen Φ

$$(1.1) \quad V \Phi(x) = \int_{\eta \in \dot{G}} \frac{d\Phi}{|x-\eta|},$$

sowie von Doppelbelegungen μ :

$$(1.2) \quad \int_{\eta \in \dot{G}} \mu(\eta) d\Omega_x(\eta) = \int_{\eta \in \dot{G}} \mu(\eta) \frac{n(\eta) \cdot (\eta-x)}{|\eta-x|^3} d\sigma(\eta)$$

verwenden. ($n(\eta)$ = äußere Normale an \dot{G}_ν in η). Die Integrale (1.1, 2) sind Stieltjes-Lebesgue-Integrale, und die Belegungen werden folgenden Banachschen Funktionenräumen entnommen:

$$C = \{f(\eta) \text{ auf } \dot{G} \text{ stetig mit } \|f\|_0 = \max_{\dot{G}} |f(\eta)|\},$$

$$L^\infty = \{g(\eta) \text{ auf } \dot{G} \text{ Lebesgue-meßbar und f. ü. (fast überall) beschränkt mit } \|g\|_\infty = \text{vrai max}_{\dot{G}} |g(\eta)|\},$$

$$L^1 = \{\Psi(F) \text{ für } F \subseteq \dot{G} \text{ absolut stetige Mengenfunktion mit } \Psi(F) = \int_F \psi d\sigma \text{ und } \|\Psi\|_1 = \int_{\dot{G}} |\psi| d\sigma < \infty\},$$

$$C^* = \{\Phi(F) \text{ ist für } F \subseteq \dot{G} \text{ vollständig und absolut additive Mengenfunktion mit } \|\Phi\|_* = \int_{\dot{G}} |d\Phi| < \infty\}.$$

Offenbar sind $C \subset L^\infty$, $L^1 \subset C^*$ und C^* der zu C , sowie L^∞ der zu L^1 duale Raum. Die in numerischen Beispielen häufigsten Fälle sind $\mu \in C$, sowie $\Phi \in C_V^*$ mit dem Unterraum

$$C_V^* = \{ \Phi \in C^*, V\Phi(x) \text{ ist im } R_3 \text{ stetig} \}.$$

Wegen $L^p \subset C_V^*$ für $p > 2$ ist C_V^* nicht leer ([17], 2.3.2).

Zur Formulierung der zweiten Randwertaufgaben erweist sich eine Verallgemeinerung der Normalableitung von (1.1) als zweckmäßig, die mit Hilfe der im Anhang §7, Hilfssatz 6 definierten Flächenfolgen $\dot{\gamma}_n \subset G$ (bzw. $\dot{\Gamma}_n \subset R_3 - \bar{G}^1$) wie folgt erklärt wird:

Zu (1.1) existiert f. ü. auf $\dot{\gamma}_n$ die Normalableitung

$$\frac{\partial V\Phi}{\partial n|\dot{\gamma}_n} = \int_{\eta \in \dot{G}} \left(\frac{\partial}{\partial n|\dot{\gamma}_n} \frac{1}{|x-\eta|} \right) d\Phi, \quad x \in \dot{\gamma}_n,$$

mit deren Hilfe für $f \in C$ die Folge stetiger linearer Funktionale

$$(1.3) \quad A_n(f) = \int_{x \in \dot{\gamma}_n} f(b_n(x)) \int_{\eta \in \dot{G}} \left(\frac{\partial}{\partial n|\dot{\gamma}_n} \frac{1}{|x-\eta|} \right) d\Phi d\sigma_{\dot{\gamma}_n}(x)$$

erklärt werden kann. (1.3) konvergiert (in C^* schwach) gegen ein Grenzfunktional, das eine Mengenfunktion $N_{V\Phi}^i \in C^*$ durch

$$(1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f) = \int_{\dot{G}} f dN_{V\Phi}^i$$

definiert (Satz 3). $N_{V\Phi}^i$ heißt innere Normalableitung von (1.1). Ganz entsprechend erklären wir mit Hilfe von $\dot{\Gamma}_n$ die äußere Normalableitung $N_{V\Phi}^a \in C^*$.

Schon PLEMELJ wies in [12], §5 darauf hin, daß diese Verallgemeinerung der Normalableitung auch physikalisch sinnvoll ist.

Hier sollen die folgenden vier Randwertaufgaben gelöst werden: ($u(x)$ ist das jeweils gesuchte Potential)

1. $\Delta u = 0$ in G , $u|_{\dot{G}} = f \in C$, $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^0(\bar{G})$,²
2. $\Delta u = 0$ in G , $N_u^i = \Xi \in C_V^*$ mit $\int_{\dot{G}} d\Xi = 0$, $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^0(\bar{G})$,
3. $\Delta u = 0$ in $R_3 - \bar{G}$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = 0$, $u|_{\dot{G}} = f \in C$, $u \in \mathcal{C}^2(R_3 - \bar{G}) \cap \mathcal{C}^0(R_3 - G)$,
4. $\Delta u = 0$ in $R_3 - \bar{G}$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = 0$, $N_u^a = \Xi \in C_V^*$, $u \in \mathcal{C}^2(R_3 - \bar{G}) \cap \mathcal{C}^0(R_3 - G)$.

Bei unseren Untersuchungen spielen die geometrischen Eigenschaften des Randes eine wichtige Rolle. Deshalb sollen hier die später benötigten geometrischen Voraussetzungen genannt werden.

Um jeden Punkt $p \in \dot{G}_r$ kann \dot{G}_r in einem geeigneten Koordinatensystem durch $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ lokal beschrieben werden, wobei die ζ -Achse mit $n(p)$ zusammenfällt. Dann gibt es wegen der beschränkten Krümmung von \dot{G}_r zwei Konstanten C, d

¹ $\bar{G} = G \cup \dot{G}$.

² Mit $\mathcal{C}^r(H)$ wird die Klasse der im Gebiet H r mal stetig differenzierbaren und mit $\mathcal{C}^0(H)$ die Klasse der stetigen Funktionen bezeichnet.

für alle \dot{G}_r , so daß für $\xi^2 + \eta^2 = r^2 \leq d^2 \cdot \frac{1}{4C}$ die Ungleichungen

$$(1.5) \quad |\zeta(\xi, \eta)| \leq Cr^2, \quad |\zeta_\xi|, |\zeta_\eta| \leq Cr,$$

$$(1.6) \quad |n(\delta) - n(q)| \leq C|\delta - q| \quad \text{für } \delta, q \in \dot{G}_r,$$

gelten.

Den Kegel aller von $\eta \in \dot{G}$ nach G hineinragenden Richtungen bezeichnen wir mit

$$(1.7) \quad C(\eta) = \left\{ \delta = \frac{x-\eta}{|x-\eta|} \varrho \mid 0 \leq \varrho \leq 1, \eta + \lambda(x-\eta) \in \bar{G} \text{ für alle } \lambda \text{ mit } 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

seinen auf der Einheitskugel liegenden Randteil mit

$$(1.8) \quad O(\eta) = \left\{ \frac{\delta}{|\delta|} \mid \delta \in C(\eta), \delta \neq \eta \right\}$$

und den Flächeninhalt von $O(\eta)$ auf der Einheitskugel mit $\Omega(\eta)$.

Voraussetzung V1:

$$(1.9) \quad \sup_{\eta \in \dot{G}} \left| 1 - \frac{\Omega(\eta)}{2\pi} \right| = \omega < 1.$$

Die lokalen Eigenschaften des Integraloperators K (2.8) werden mit Hilfe des Oberflächenteiles

$$(1.10) \quad F_\delta(p) = \dot{G} \cap \{\eta \mid 0 < |\eta - p| \leq \delta\}$$

durch die Funktion

$$(1.11) \quad W_\delta(p) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\eta \in F_\delta(p)} |d\Omega_p(\eta)| + |2\pi - \Omega(p)| \right\}$$

beschrieben. Wir verlangen

Voraussetzung V2:

$$(1.12) \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\dot{G}} W_\delta(p) \right) = \omega' < 1.$$

(1.12) fällt mit (1.9) zusammen und ist dann eine geometrische Entsprechung der zweidimensionalen Ergebnisse [15], wenn an \dot{G} noch die folgenden zusätzlichen Forderungen V 3, 4 gestellt werden (Lemma 1):

Es sei Q_e die endliche Menge der Eckpunkte und Q die Menge aller Kanten- und Eckpunkte von \dot{G} .

Voraussetzung V3:

Alle Eckpunkte $e \in Q_e$ seien „konvex,, das soll heißen:

entweder $C(e)$
oder $(\text{Einheitskugel} - C(e))$ } sei eine konvexe Punktmenge.

Für $e \in \dot{G}_r$ enden zwei Randkanten $r_{r,1/2}(s) \in Q$ von \dot{G}_r in e

$$(r_{r,1/2}(0) = e) \text{ mit Tangenten } t_{r,1/2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (r_{r,1/2}(s) - e).$$

Voraussetzung V4:

Der Winkel zwischen den beiden Randtangente in e sei nicht Null:

$$(1.13) \quad \sphericalangle (t_{r,1}, t_{r,2}) \geq \gamma > 0.$$

§ 2. Eine den Randwertaufgaben zugeordnete Integralgleichung

Wir nehmen zunächst an, daß sich die Lösungen der Randwertaufgaben 1.—4. mit $u|_{\dot{G}}$, $\mu \in C$ folgendermaßen darstellen lassen (s. § 4):

$$1. \quad (2.1) \quad u(x) = \int_{\dot{G}} \mu d\Omega_x, \quad x \in G,$$

$$2. \quad (2.2) \quad u(x) = \frac{1}{4\pi} V N_u^i(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{G}} u d\Omega_x, \quad x \in G,$$

$$3. \quad (2.3) \quad u(x) = \frac{1}{E} \left(\int_{\dot{G}} f dH \right) V H(x) + \int_{\dot{G}} \mu d\Omega_x, \quad x \in R_3 - \bar{G},$$

dabei ist $H \in C_V^* \cap L^1$ die „natürliche Belegung“ von \dot{G} (vgl. Satz 5, zweite Bemerkung) mit $\int_{\dot{G}} dH = 1$;

$$4. \quad (2.4) \quad u(x) = -\frac{1}{4\pi} V N_u^a(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{G}} u d\Omega_x, \quad x \in R_3 - \bar{G}.$$

In den Darstellungsformeln sind die Doppelbelegungen unbekannt. Diese sucht man aus den Randvorgaben zu bestimmen und betrachtet deshalb $\lim_{x \rightarrow \dot{G}}$ von (2.1–4). Dabei erhält man auf Grund der Gaußschen Formel

$$(2.5) \quad \int_{\dot{G}-(x)} d\Omega_x = \begin{cases} 4\pi & \text{für } x \in G, \\ \Omega(x) & \text{für } x \in \dot{G}, \\ 0 & \text{für } x \in R_3 - \bar{G} \end{cases}$$

mit den Sprungrelationen ([17], 2.2.1)

$$(2.6) \quad \lim_{x \rightarrow p \in \dot{G}} \int_{\dot{G}} g d\Omega_x = 2\pi(Kg \pm g) \quad \text{für } x \text{ im } \begin{cases} \text{Innengebiet } G \\ \text{Außengebiet } R_3 - \bar{G} \end{cases}$$

für die gesuchte Doppelbelegung g in C die Integralgleichung

$$(2.7) \quad g = \lambda Kg + h$$

mit dem Operator

$$(2.8) \quad Kg(p) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\dot{G}-(p)} g d\Omega_p + g(p) \cdot (2\pi - \Omega(p)) \right\}.$$

Die gesuchte Funktion g , der Parameter λ und die gegebene rechte Seite $h \in C$ haben dabei die folgenden Bedeutungen:

$$(2.9) \quad \begin{array}{lll} 1. & g = \mu, & \lambda = -1, \quad h = \frac{1}{2\pi} f, \\ 2. & g = u|_{\dot{G}}, & \lambda = +1, \quad h = \frac{1}{2\pi} V N_u^i|_{\dot{G}}, \\ 3. & g = \mu, & \lambda = +1, \quad h = -\frac{1}{2\pi} \left(f - \int_{\dot{G}} f dH \right), \\ 4. & g = u|_{\dot{G}}, & \lambda = -1, \quad h = -\frac{1}{2\pi} V N_u^a|_{\dot{G}}. \end{array}$$

§ 3. Die Integralgleichung, ihre Transponierte und die Potentiale

(2.8) kann als Stieltjes-Lebesgue-Integral auch für $g \in L^\infty$ erklärt werden. Über die einfachsten Eigenschaften von K gibt Auskunft

Satz 1. 1. K in L^∞ ist linear und stetig, $KL^\infty \subseteq L^\infty$.

2. $KC \subseteq C$.

3. Für den zu K transponierten Operator K' in C^* gilt $K'L^1 \subseteq L^1$.

Beweis. 1. Die Linearität folgt aus (2.8), die Stetigkeit aus der Beschränktheit von $W_D(p)$ nach Hilfssatz 4 wegen

$$\|Kg\|_\infty \leq \text{vrai max } |g| \max_{p \in \dot{G}} W_D(p) \leq \|g\|_\infty \left(\frac{a}{2\pi} + 1 \right).$$

2. Daß für $g \in C$ die Funktion $Kg(p)$ auf \dot{G} stetig ist, folgt wegen $K1 = 1$ nach (2.5) aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} |Kg(p_1) - Kg(p_2)| &\leq \|K\|_0 \left(\max_{\eta \in F_\delta(p_1)} |g(\eta) - g(p_1)| + \max_{\eta \in F_\delta(p_2)} |g(p_2) - g(\eta)| \right) \\ &\quad + |g(p_1) - g(p_2)| + \|g\|_0 \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\dot{G} - F_\delta(p_i)} |d\Omega_{p_1} - d\Omega_{p_2}|, \end{aligned}$$

deren rechte Seite für $|p_1 - p_2| \leq \delta^4$ mit $\delta \rightarrow 0$ gegen Null strebt.

3. Weil $(2\pi - \Omega(\eta))$ auf \dot{G} f. ü. verschwindet, gilt für $\Psi \in L^1$

$$K'\Psi(F) = \int_{\dot{G}} \psi(\eta) \left(\int_F d\Omega_\eta \right) d\sigma(\eta).$$

Wegen $\|K'\Psi\|_\infty \leq \|\Psi\|_1 \|K\|_0$ existiert das rechte Integral auch mit dem Integranden $|\psi(\eta)| |d\Omega_\eta|$, und der Satz von FUBINI kann angewandt werden. Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge existiert f. ü. das innere Integral von

$$K'\Psi(F) = \int_F \left(\int_{\dot{G}} \frac{n(p) \cdot (p-\eta)}{|p-\eta|^3} \psi(\eta) d\sigma(\eta) \right) d\sigma(p),$$

woraus sich $K'\Psi \in L^1$ ergibt.

Unter Voraussetzung V2 können für (2.7) wegen $\omega' < 1$ die Fredholmschen Sätze verwendet werden, denn es gilt

Satz 2. Der Fredholmsche Radius ϱ von K erfüllt

$$(3.1) \quad \frac{1}{\omega'} \leq \varrho \leq \frac{1}{\omega}.$$

Bemerkung. Dieser Satz gilt auch für den bei den entsprechenden Randwertaufgaben der Schwingungsgleichung auftretenden Operator

$$\tilde{K}g = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\dot{G} - \{p\}} g(\eta) \frac{\partial}{\partial n_\eta} \left(\frac{1}{4i} \sqrt{\frac{k}{2\pi|\eta-p|}} H_{\frac{1}{2}}^1(k|\eta-p|) \right) d\sigma(\eta) + g(p) (2\pi - \Omega(p)) \right\},$$

($H_{\frac{1}{2}}^1$ Hankel-Funktion erster Art der Ordnung $\frac{1}{2}$), denn \tilde{K} unterscheidet sich von K nur um einen schwach singulären vollstetigen Integraloperator (JÄGER [6], Hilfssatz 4).

Beweis. Zur beliebig gewählten Zahl $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß

$$W_\delta(p) \leq \omega' + \varepsilon.$$

Zerlegt man mit dem durch

$$(3.2) \quad Fg = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\dot{G} - \bar{F}_\delta(p)} g \, d\Omega_p$$

definierten Operator F

$$(3.3) \quad K = H + F,$$

so gilt

$$\|H\|_\infty = \max_{\dot{G}} W_\delta(p) \leq \omega' + \varepsilon,$$

und F ist in L^∞ wegen des stückweise stetigen Integralkerns vollstetig. Daraus ergibt sich

$$\varrho \geq \frac{1}{\omega' + \varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, was $\varrho \geq 1/\omega'$ bedeutet.

Für $\omega > 0$ gibt es zur beliebig gewählten Zahl $\varepsilon > 0$ einen Kantenpunkt $q \in Q$ mit

$$|\lambda_0| < \frac{1}{\omega} + \varepsilon, \quad \lambda_0 = \left(1 - \frac{\Omega(q)}{2\pi}\right)^{-1}.$$

Die charakteristische Funktion $\chi_{(q)}$ ist unstetige Funktion der ersten Baireschen Klasse und Eigenlösung von

$$(3.4) \quad \chi_{(q)} = \lambda_0 K \chi_{(q)},$$

was nach RADON ([14], S. 1124) nur außerhalb des Fredholmschen Kreises möglich ist:

$$\varrho \leq |\lambda_0| < \frac{1}{\omega} + \varepsilon.$$

Daraus folgt wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ die Behauptung. Häufig fällt Bedingung (1.12) mit der geometrisch einfacheren Bedingung (1.9) zusammen.

Lemma 1. Sind auf \dot{G} zusätzlich die Voraussetzungen V3, V4 (1.13) erfüllt, so gilt $\omega = \omega'$.

Beweis. $\varepsilon > 0$ sei eine beliebig gewählte Zahl. Dann existiert nach Hilfssatz 3 eine Zahl $\delta_1(\varepsilon) > 0$, so daß

$$(3.5) \quad \frac{N}{2\pi} \int_{\eta \in F_{\delta_1}(q) \cap \dot{G}_v} |d\Omega_q(\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } q \in \dot{G},$$

erfüllt ist. Die mit δ_1 gebildete Funktion $W_{\delta_1}(p)$ ist auf \dot{G} nach Hilfssatz 5 stetig. Deshalb gibt es zu ε und δ_1 eine Zahl δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, so daß

$$(3.6) \quad |W_{\delta_1}(p) - W_{\delta_1}(q)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |p - q| \leq \delta_2$$

gilt. Schließlich existiert zu ε und δ_2 nach Hilfssatz 2 eine Konstante δ_3 , $0 < \delta_3 \leq \delta_2$, so daß

$$(3.7) \quad W_{\delta_1}(p) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } p \in \dot{G} \quad \text{mit } \min_{q \in Q} |p - q| \geq \delta_2$$

erfüllt ist.

Bei festem p wächst $W_\delta(p)$ in δ monoton. Deshalb gilt für alle $\delta \leq \delta_3$

$$W_\delta(p) \leq W_{\delta_3}(p) \leq W_{\delta_1}(p).$$

Berücksichtigt man sowohl (3.6) als auch (3.7), so ergibt sich für alle $p \in \dot{G}$

$$\begin{aligned} W_\delta(p) &\leq W_{\delta_3}(p) \leq \max_{q \in \dot{Q}} W_{\delta_1}(q) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \max_{q \in \dot{Q}} \left\{ \left| 1 - \frac{\Omega(q)}{2\pi} \right| + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^N \int_{F_{\delta_1}(q) \cap \dot{G}_\nu} |d\Omega_q| \right\} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (3.5) und (1.9) wird daraus

$$\omega' \leq \omega + \varepsilon$$

was wegen der beliebigen Wahl von $\varepsilon > 0$ $\omega' \leq \omega$ bedingt. Andererseits ist wegen (1.9–12) $\omega \leq \omega'$, so daß die behauptete Gleichheit bestehen muß.

Um etwas über die Eigenwerte von (2.7) für $|\lambda| < \rho$ zu erfahren, untersuchen wir neben Integralgleichung (2.7) die zu ihr transponierte Funktionalgleichung in C^* . Ihren Zusammenhang mit Einfachschichtpotentialen zeigt der nun folgende Satz. Er stellt außerdem sicher, daß unsere Definition (1.3, 4) der Normalableitung sinnvoll ist.

Satz 3³. Die Folge (1.3) von linearen Funktionalen A_n konvergiert gegen ein lineares Funktional $N_{V\Phi}^i \in C^*$ bzw. $N_{V\Phi}^a \in C^*$. Die Normalableitungen erfüllen die Funktionalgleichungen

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} N_{V\Phi}^i &= \Phi - K' \Phi, \\ \frac{1}{2\pi} N_{V\Phi}^a &= -\Phi - K' \Phi \end{aligned}$$

in C^* . Die rechten Seiten, also auch $N_{V\Phi}^i$ bzw. $N_{V\Phi}^a$, sind von den Flächenfolgen $\dot{\gamma}_n$ bzw. $\dot{\Gamma}_n$ unabhängig.

Beweis. Wir können uns auf die Betrachtung der inneren Normalableitung beschränken, denn für die äußere Normalableitung verläuft der Beweis ganz entsprechend mit $\dot{\Gamma}_n$ statt $\dot{\gamma}_n$.

Satz 3 ist richtig, wenn wir für jedes $f \in C$ die Gleichung

$$(3.9) \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f) = \int_{\dot{G}} f d\Phi - \int_{\dot{G}} f d(K' \Phi)$$

beweisen.

Bei festen n und $f \in C$ kann auf Grund der absoluten Konvergenz der Integrale nach dem Satz von FUBINI die Integrationsreihenfolge in (1.3) vertauscht werden, so daß wir

$$(3.10) \quad A_n(f) = - \int_{\eta \in \dot{G}} \left(\int_{p_n \in \dot{\gamma}_n} \frac{n(p_n) \cdot (p_n - \eta)}{|p_n - \eta|^3} f(\eta(p_n)) d\sigma(p_n) \right) d\Phi$$

erhalten.

³ Satz 3 und die Sätze 4 und 6 sind [17] unverändert entnommen.

Für jeden Punkt $\eta \in \dot{G}$ und irgendeine fest gewählte Zahl $\delta > 0$ erfüllt das innere Integral, das wir mit

$$\int_{\dot{\gamma}_n} f_n d\Omega_\eta^{(n)}$$

abkürzen wollen, auf Grund der beschränkten Drehung der $\dot{\gamma}_n$ (7.13) und wegen $\int_{\dot{\gamma}_n} d\Omega_\eta^{(n)} = 0$ die Ungleichung

$$(3.11) \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\dot{\gamma}_n} f_n d\Omega_\eta^{(n)} - (Kf(\eta) - f(\eta)) \right| \leq 2 \max_{\substack{\mathfrak{z} \in F_{\delta + \frac{1}{n}}(\eta) \\ \mathfrak{z} \in \dot{G} - \bar{F}_\delta(\eta)}} |f(\eta) - f(\mathfrak{z})| \left(\frac{a}{2\pi} + 1 \right) + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathfrak{z} \in \dot{G} - \bar{F}_\delta(\eta)} (f(\mathfrak{z}) - f(\eta)) (d\Omega_\eta^{(n)} - d\Omega_\eta) \right|,$$

wobei in $d\Omega_\eta^{(n)}$ $\eta_n = a_n(\mathfrak{z})$ einzusetzen ist (Hilfssatz 6). Für $n \rightarrow \infty$ verschwindet der letzte Ausdruck bei festen f, δ für $\eta \in \dot{G}$ gleichmäßig.

Um das zu zeigen, zerlege man zu einer beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ \dot{G} in endlich viele von stückweise glatten Kurven $\mathfrak{s}_\nu(s)$ berandete Teilflächen $F_\nu, \nu = 1, \dots, M$ mit M Punkten $\mathfrak{z}_\nu \in F_\nu$ derart, daß

$$\max_{\mathfrak{z} \in F_\nu} |f(\mathfrak{z}_\nu) - f(\mathfrak{z})| \leq \frac{\varepsilon}{4 \left(\frac{a}{2\pi} + 1 \right)}$$

erfüllt ist. Dann gilt unabhängig von η die Ungleichung

$$(3.12) \quad \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathfrak{z} \in \dot{G} - \bar{F}_\delta(\eta)} (f(\mathfrak{z}) - f(\eta)) (d\Omega_\eta^{(n)} - d\Omega_\eta) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^M |f(\mathfrak{z}_\nu) - f(\eta)| \left| \int_{\mathfrak{z} \in F_\nu - \bar{F}_\delta(\eta)} (d\Omega_\eta^{(n)} - d\Omega_\eta) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jedes der in der Summe auftretenden Integrale ist dabei die Differenz der Flächeninhalte von auf der Einheitskugel durch $\frac{\mathfrak{s}_\nu(s) - \eta}{|\mathfrak{s}_\nu(s) - \eta|}$ und $\frac{a_n(\mathfrak{s}_\nu(s)) - \eta}{|a_n(\mathfrak{s}_\nu(s)) - \eta|}$ begrenzten Bildern von $F_\nu - \bar{F}_\delta(\eta)$. Wegen $|\mathfrak{z} - \eta| \geq \delta > 0$ sowie der gleichmäßigen Konvergenz $|a_n(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Bildkurven auf der Einheitskugel gleichmäßig bezüglich \mathfrak{s}_ν und η gegeneinander. Folglich gibt es einen von η unabhängigen Index $N(\varepsilon, M)$, so daß für $n \geq N$ die rechte Seite in (3.12) kleiner als ε wird.

Da also der letzte Ausdruck in (3.11) bei festen f, δ in η gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$ verschwindet, gilt mit (3.10) die Beziehung

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \Lambda_n(f) - \int_{\dot{G}} (f - Kf) d\Phi \right| \leq 2 \|\Phi\|_* \max_{\substack{\mathfrak{z} \in F_\delta(\eta) \\ \eta \in \dot{G}}} |f(\mathfrak{z}) - f(\eta)| \left(\frac{a}{2\pi} + 1 \right).$$

Die linke Seite hängt von δ nicht ab, während die rechte Seite wegen $f \in C$ für $\delta \rightarrow 0$ verschwindet. Daraus folgt (3.9) sowie Satz 3.

Nun wollen wir uns den stetigen Einfachschichtpotentialen (1.1) zuwenden.

Satz 4. Für Potentiale $V\Phi, V\Psi$ zu Belegungen $\Phi, \Psi \in C_V^*$ existieren die Integrale

$$\int_G (\text{grad } V\Phi \cdot \text{grad } V\Psi) d\tau, \quad \int_{R_3 - \bar{G}} (\text{grad } V\Phi \cdot \text{grad } V\Psi) d\tau,$$

und für sie gelten die Greenschen Integralsätze ($d\tau = \text{Volumenelement}$).

Beweis. Da $V\Psi$ stetig ist, können wir in (1.3) $V\Psi|_{\dot{G}} = f$ verwenden und erhalten mit (3.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{z} \in \dot{\gamma}_n} V\Psi(b_n(\mathfrak{z})) \frac{\partial}{\partial n|_{\dot{\gamma}_n}} V\Phi d\sigma(\mathfrak{z}) = \int_{\dot{G}} V\Psi dN_{V\Phi}^i.$$

Bezeichnen wir mit γ_n die von $\dot{\gamma}_n$ begrenzten inneren Gebiete, dann folgt daraus wegen der Stetigkeit von $V\Psi$ in \bar{G} und der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}| = 0$$

nach Verwendung des Gaußschen Integralsatzes die Beziehung

$$(3.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} (\text{grad } V\Phi \cdot \text{grad } V\Psi) d\tau = \int_{\dot{G}} V\Psi dN_{V\Phi}^i.$$

Die rechte Seite existiert nach Satz 3 und deshalb auch die linke.

Wenn man das Verhalten von $V\Phi(\mathfrak{z}), V\Psi(\mathfrak{z})$ für $|\mathfrak{z}| \rightarrow \infty$ berücksichtigt, kann man im Außenraum $R_3 - \bar{G}$ ganz entsprechend verfahren.

Lemma 2. Für $\Phi \in C_V^*$ gilt

$$(3.14) \quad V(K'\Phi)|_{\dot{G}} = K(V\Phi|_{\dot{G}}).$$

Beweis. Trägt man die Identität

$$(3.15) \quad K_\eta \left(\frac{1}{|\eta - \mathfrak{z}|} \right) + \frac{1}{|\eta - \mathfrak{z}|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{p} \in \dot{G}} \frac{1}{|\eta - \mathfrak{p}|} d\Omega_\mathfrak{z}(\mathfrak{p}) \quad \text{für } \mathfrak{z} \in G, \quad \eta \in \dot{G}$$

in $V(K'\Phi)(\mathfrak{z})$ ein, so erhält man

$$V(K'\Phi)(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \in \dot{G}} \left(\int_{\mathfrak{p} \in \dot{G}} \frac{1}{|\eta - \mathfrak{p}|} d\Omega_\mathfrak{z}(\mathfrak{p}) \right) d\Phi - V\Phi(\mathfrak{z}).$$

Im zweifachen Integral dürfen wir wegen der absoluten Konvergenz die Integrationsreihenfolge vertauschen, so daß

$$V(K'\Phi)(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\dot{G}} V\Phi d\Omega_\mathfrak{z} - V\Phi(\mathfrak{z})$$

für $\mathfrak{z} \in G$ gilt. Da $V\Phi$ stetig ist, liefert daraus $\mathfrak{z} \rightarrow \dot{G}$ mit Hilfe der Sprungrelation Behauptung (3.14).

Satz 5. Die Lösung der zu (2.7) transponierten Funktionalgleichung

$$(3.16) \quad \Psi = \lambda K'\Psi + \Phi$$

in C^* besitzt für $|\lambda| < \rho$ folgende Eigenschaften:

1. Für $\Phi \in L^1$ ist $\Psi \in L^1$.
2. Für $\Phi \in C_V^*$ ist $\Psi \in C_V^*$.

Die Eigenlösungen H_ν von (3.16) sind absolut stetig und erzeugen im R_3 stetige Potentiale: $H_\nu \in L^1 \cap C^*$.

1. Bemerkung. Mit Lemma 2 gilt:

$$(3.17) \quad \lambda K(VH_\nu)|_{\dot{G}} = VH_\nu|_{\dot{G}},$$

so daß die Eigenräume von (2.7) in C und (3.16) in C^* durch

$$(3.18) \quad e_\nu = VH_\nu|_{\dot{G}}$$

eindeutig aufeinander abgebildet werden. (3.18) ist deshalb eindeutig, weil für $\Theta \in C^*$ aus $V\Theta|_{\dot{G}} = 0$ zunächst mit dem Maximum-Prinzip $V\Theta \equiv 0$ im R_3 und daraus das Verschwinden von Θ folgt ([17], S. 36).

2. Bemerkung. Da für eine reelle Konstante $E \neq 0$

$$KE = E$$

erfüllt ist, existiert die reelle „natürliche Belegung“, $H \in L^1 \cap C^*$ von \dot{G}

$$E = VH|_{\dot{G}},$$

die man wegen

$$E \cdot \int_{\dot{G}} dN_{\nu H}^a = - \int_{R_3 - \dot{G}} (\text{grad } VH)^2 d\tau = -\hat{D}_a \neq 0$$

durch $E = -\hat{D}_a$ normieren kann.

Beweis. 1. Wegen Satz 1, 3 gelten für $|\lambda| < \rho$ die Fredholmschen Sätze für die Funktionalgleichung (3.16) in L^1 , so daß $\Psi \in L^1$ für $\Phi \in L^1$ gilt.

2. In der Umgebung von λ_0 kann die Resolvente von (2.7) bekanntlich durch

$$(3.19) \quad (I - \lambda K)^{-1} = R_\lambda = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j D_j}{(\lambda - \lambda_0)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \delta_j}$$

dargestellt werden (I Einheitsoperator). Der Nenner mit $\delta_0 \neq 0$ ist in einer Umgebung von λ_0 regulär. Bei der Entwicklung um einen regulären Wert λ_0 ist $\nu = 0$, während $\nu \neq 0$ ist, wenn um einen Eigenwert λ_0 entwickelt wird. Der Zähler ist normkonvergent, wobei sich die Operatoren D_j als normkonvergente Potenzreihen

$$(3.20) \quad D_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} K^k$$

berechnen ([14], S. 1112–1114). Wie RADON in [15], S. 1164 schließen wir nach Anwendung von Lemma 2 aus der gleichmäßigen Konvergenz der Randwerte

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} (VK'^k \Phi)|_{\dot{G}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} K^k (V\Phi)|_{\dot{G}}$$

auf

$$(3.21) \quad D_j(V\Phi)|_{\dot{G}} = (VD'_j \Phi)|_{\dot{G}}.^4$$

⁴ Durch ' wird der transponierte Operator in C^* gekennzeichnet.

Genauso folgt für $\Phi \in C_V^*$ aus der gleichmäßigen Konvergenz von Zähler und Nenner in (3.19)

$$(3.22) \quad R_\lambda(V\Phi|_{\dot{G}}) = (VR'_\lambda\Phi)|_{\dot{G}},$$

wenn $R_\lambda(V\Phi|_{\dot{G}})$ existiert.

Für die Eigenfunktionen \mathcal{E}_k , $k=1, \dots, n$ zum Eigenwert λ_0 von (3.16) gilt mit n linear unabhängigen stetigen Funktionen Π_k

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{\dot{G}} \Pi_k d\Phi \right) \mathcal{E}_k = \sum_{j=1}^v c_j D'_j \Phi$$

für alle $\Phi \in C^*$ ([14], S. 1120, [15], S. 1166). Zu Π_k gibt es n linear unabhängige stetige Funktionen φ_i mit $\int_{\dot{G}} \Pi_k \varphi_i d\sigma = \delta_{ik}$, mit denen wegen $\Phi_i(F) = \int_F \varphi_i d\sigma \in C_V^*$ aus (3.21)

$$\mathcal{E}_k = \sum_{j=1}^v c_j D'_j \Phi_k \in C_V^*$$

folgt. Zusammen mit (3.22) bedeutet das $\Psi \in C_V^*$, falls $\Phi \in C_V^*$ vorgegeben wird.

Die Dimensionen der Eigenräume zu λ_0 von (2.7) seien n_0 in C , n_∞ in L^∞ und von (3.16) n_1 in L^1 sowie n_* in C^* . Wegen der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für (2.7) in C sowie (3.16) in L^1 gelten $n_0 = n_*$ und $n_1 = n_\infty$ ([7], S. 404 und 427). Außerdem gilt

$$C \subset L^\infty, \quad L^1 \subset C^*,$$

so daß wegen $n_0 \leq n_\infty = n_1 \leq n_* = n_0$ die Dimensionen alle gleich sind und $\mathcal{E}_k \in L^1$ sein muß.

Satz 6. Die Eigenwerte λ_ν im Fredholmschen Kreis $|\lambda_\nu| < \varrho$ von (2.7) sind alle reell und erfüllen $|\lambda_\nu| > 1$ für $\lambda_\nu \neq 1$. $\lambda_0 = 1$ ist einfacher Eigenwert.

Beweis. Wegen Satz 4 dürfen für Potentiale $V\mathcal{E}$ von Eigenlösungen \mathcal{E} die Greenschen Umformungen durchgeführt werden, so daß der von PLEMELJ ([12], S. 52) für glatte Berandungen durchgeführte Beweis gültig bleibt.

§ 4. Die Äquivalenz von Integralgleichung und Randwertaufgaben

Satz 7. 1. Jede Lösung einer der Randwertaufgaben 1.—4. läßt sich durch ein entsprechendes Potential (2, 1—4.) darstellen, so daß die zugeordneten Funktionen g und h der Integralgleichung (2.7) genügen.

2. Jedes mit der (2.9) entsprechenden Lösung von Integralgleichung (2.7) gebildete Potential (2.1—4) löst die gewünschte Randwertaufgabe 1.—4.

Beweis für die ersten Randwertaufgaben:

Behauptung 2. Wegen Voraussetzung V2, $1 < \frac{1}{\omega'} \leq \varrho$ und $H \in C_V^*$ stellen die Fredholmschen Sätze zu gegebenem $f \in C$ die Existenz einer Lösung $g \in C$ von Integralgleichung (2.7) sicher. Die mit $\mu = g$ gebildeten Potentiale (2.1 bzw. 3) besitzen auf Grund der Sprungrelationen (2.6) die Randwerte f und nehmen dieselben auch stetig an ([17], 2.2.1.).

Behauptung 1. Die soeben bewiesene Behauptung 2 liefert zu den Randwerten $u|_{\dot{G}} = f \in C$ des gegebenen Potentials u ein weiteres Potential v , das wegen der

eindeutigen Lösbarkeit der ersten Randwertaufgaben [9] mit u übereinstimmt. Da v durch (2.1. bzw. 3.) dargestellt wird, gilt das gleiche für u .

Beweis für die zweiten Randwertaufgaben:

Behauptung 1. Wird u mit $N_u^i \in C_V^*$ bzw. $N_u^a \in C_V^*$ vorgegeben, so können wir wegen Satz 4 die Greensche Integralformel für u verwenden. Man erhält auf bekannte Weise die Darstellungsformeln (2.2) bzw. (2.4) ([5], S. 31), aus denen die Sprungrelationen (2.6) Integralgleichung (2.7) liefern.

Behauptung 2. Wenn $N_u^i \in C_V^*$ bzw. $N_u^a \in C_V^*$ vorgegeben wird, so können wir einmal auf Grund der Fredholmschen Sätze Integralgleichung (2.7) lösen und mit $u|_{\hat{G}}$ die Potentiale u nach (2.2) bzw. (2.4) berechnen, andererseits aber auch

$$(4.1) \quad \Phi^i = K' \Phi^i + N_u^i \quad \text{bzw.} \quad \Phi^a = K' \Phi^a - N_u^a$$

lösen, wobei nach Satz 5 die Potentiale $V \Phi^i$ bzw. $V \Phi^a$ im R_3 stetig sind und wegen (3.8) die innere bzw. äußere Randwertaufgabe lösen. Mit Hilfe der Sprungrelationen, (4.1) und Lemma 2 folgt dann für die stetigen Randwerte

$$(u|_{\hat{G}} - V \Phi^i|_{\hat{G}}) = K(u|_{\hat{G}} - V \Phi^i|_{\hat{G}}) \quad \text{bzw.} \quad (u|_{\hat{G}} - V \Phi^a|_{\hat{G}}) = -K(u|_{\hat{G}} - V \Phi^a|_{\hat{G}}).$$

Satz 6 und das Maximum-Prinzip liefern daraus

$$u = V \Phi^i + \text{const. in } \bar{G} \quad \text{bzw.} \quad u = V \Phi^a \quad \text{in } R_3 - G.$$

Demnach lösen (2.2) bzw. (2.4) die gewünschten Randwertaufgaben.

§ 5. Lösungsverfahren für die Integralgleichung

Da wir die Randwertaufgaben numerisch lösen wollen, benötigen wir ein konstruktives Lösungsverfahren für (2.7). Der folgende Satz liefert iterative Verfahren:

Satz 8. Die Funktionenfolgen in C : $g^{(0)} = 0$

$$(5.1) \quad g^{(m+1)} = \frac{1}{2}(g^{(m)} - K g^{(m)} + h) \quad \text{für} \quad \lambda = -1,$$

$$(5.2) \quad g^{(m+1)} = K g^{(m)} - \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} g^{(m)} d\sigma + h \quad \text{für} \quad \lambda = +1, \quad m = 0, 1, \dots$$

konvergieren auf \hat{G} gleichmäßig gegen eine Lösung g von (2.7).

Die Konvergenz von (5.1) wurde für konvexe Gebiete schon von NEUMANN [11] gezeigt.

Beweis. λ_1 sei einer der dem Betrage nächst größeren Eigenwerte als der Eigenwert 1. Setzen wir $r = \min\{|\lambda_1|, \varrho\}$, so hängt die Resolvente (3.19) im Kreis

$$\left| \lambda + \frac{1}{2} \frac{r+1}{2r+1} \right| < \frac{1}{2} \frac{3r+1}{2r+1}$$

von λ analytisch ab. Transformiert man $\lambda(\eta) = \frac{\eta}{1+\eta}$, so ist sie von η in $|\eta| < \frac{r}{1+r}$ analytisch abhängig. Ihre Entwicklung nach Potenzen von η liefert die normkonvergente Reihe

$$R_{\lambda(\eta)} = I + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta^{\nu} (K - I)^{\nu-1},$$

deren Teilsummen für $\eta(\lambda = -1) = -\frac{1}{2}$ (5.1) ergeben ([8], S. 112, [1], §7).

Für $\lambda = +1$ ist $e_0 \equiv 1$ die Eigenfunktion von (2.7), so daß man nach WIELANDT [19] diesen Eigenwert von (2.7) abspalten kann. Man überzeugt sich leicht, daß die Integralgleichung

$$(5.3) \quad g = \lambda(K - L)g + h, \quad Lg = \frac{1}{\int_{\hat{G}} d\omega} \int_{\hat{G}} g d\omega$$

für die spezielle Lösung von (2.7) mit $Lg = 0$ außer $\lambda = 1$ die gleichen Eigenwerte wie (2.7) besitzt, während $\lambda = 1$ regulärer Wert von (5.3) ist. Folglich konvergiert die Neumannsche Reihe zu (5.3) für $|\lambda| < r$, deren Teilsummen durch (5.2) für $\lambda = 1 < r$ dargestellt werden.

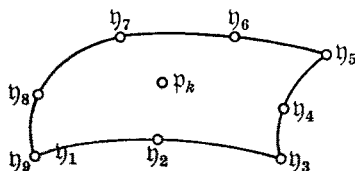
§ 6. Zur numerischen Behandlung der Randwertaufgaben

Bei der numerischen Durchführung des hier beschriebenen Verfahrens muß die infinite Integralgleichung (2.7) durch eine mit endlich vielen arithmetischen Operationen lösbare Aufgabe ersetzt werden. Solche Diskretisierungen sind auf vielerlei Art möglich ([7], Kap. XIV). Wir wählen wie in [18] eine möglichst einfache, indem wir \hat{G} in n Flächenstücke F_1, \dots, F_n mit $p_i \in F_i$ zerlegen und (2.7) durch das lineare Gleichungssystem

$$(6.1) \quad g_n(p_i) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \left(\int_{F_k - \{p_i\}} d\Omega_{p_i} + (2\pi - \Omega(p_i)) \delta_{ik} \right) g_n(p_k) + h(p_i), \quad i = 1, \dots, n$$

ersetzen⁵. Die Koeffizienten können dabei näherungsweise aus dem Flächeninhalt des sphärischen Vierecks auf der Einheitskugel ermittelt werden, das durch die vier Kreise durch

$$\frac{\eta_{j-1} - p_i}{|\eta_{j-1} - p_i|}; \quad \frac{\eta_j - p_i}{|\eta_j - p_i|}; \quad \frac{\eta_{j+1} - p_i}{|\eta_{j+1} - p_i|}; \quad j = 2, 4, 6, 8$$



entsteht (vgl. Bild), wobei η_i die skizzierten zu F_k gehörenden Ortsvektoren sind. Wählt man die Einteilung in die F_k so, daß Kanten und Ecken von \hat{G} nur auf Trennlinien der F_k liegen, so braucht die Rechnung keine Rücksicht auf die Kanten und Ecken zu nehmen [17].

Indem wir den Projektionsoperator

$$(6.2) \quad P_n f(\eta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{F_\delta(p_k)} f d\omega \left(\int_{F_\delta(p_k)} d\omega \right)^{-1} \quad \text{für alle } \eta \in F_k$$

in L^∞ definieren (für $f \in C$, folgt die einfache Beziehung $P_n f(\eta) = f(p_k)$ für alle $\eta \in F_k$), können wir die Näherungsgleichungen (6.1) auch als Funktionalgleichung

$$(6.3) \quad g_n = P_n K g_n + P_n h$$

⁵ Die F_i sollen dabei paarweise punktfremd sein: $F_i \cap F_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

in L^∞ schreiben. Löst man das lineare Gleichungssystem (6.1) bzw. (6.3) und setzt die daraus errechnete Treppenfunktion in die jeweilige Formel (2.1—4) ein, so erhält man eine *Potentialfunktion* u_n , von der man hofft, daß sie das gewünschte Potential u angenähert wiedergibt. Somit entstehen für das numerische Verfahren die folgenden Fragen:

1. *Wieviele Lösungen besitzt das Näherungsproblem (6.1) bzw. (6.3)?*

2. *Konvergieren die Näherungslösungen g_n und u_n für $n \rightarrow \infty$ gegen die exakten Lösungen g und u , falls*

$$(6.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\max_{i=1, \dots, n} \text{Durchmesser}(F_i)) = 0?$$

3. *Können Fehlerschranken angegeben werden?*

4. *Gibt es ein einfaches und numerisch stabiles Verfahren zur Auflösung der Näherungsgleichungen (6.1) bzw. (6.3)?*

Da (6.3) offensichtlich für $\lambda=1$ die Eigenlösung $g_n \equiv 1$ besitzt, ersetzen wir (6.1) nur für $\lambda=-1$ durch (6.3):

$$(6.5) \quad g_n = -P_n K g_n + P_n h,$$

dagegen für $\lambda=+1$ gemäß (5.3) durch

$$(6.6) \quad g_n = P_n K g_n - L g_n + P_n h.$$

Die spezielle Lösung von (6.1) mit $L g_n = 0$ erfüllt auch (6.6).

Um auf die vier Fragen antworten zu können, müssen wir zunächst die Konvergenz der Näherungsoperatoren $P_n K$ untersuchen. $P_n K$ bildet in den endlich-dimensionalen Raum der Treppenfunktionen ab und ist deshalb vollstetig. Für $\omega > 0$ ist K nicht vollstetig (Satz 2), im allgemeinen ist deshalb keine Normkonvergenz von $P_n K$ gegen K zu erwarten ([7], S. 246).

Wir zerlegen K mit $\delta > 0$ gemäß (3.3) so, daß mit

$$K = F + H$$

nach Voraussetzung V2 (1.12) gilt

$$(6.7) \quad \|H\|_\infty \leq q < 1.$$

Setzen wir

$$B = I \pm H, \quad B_n = I \pm P_n H$$

mit $+$ für (6.5), $-$ für (6.6), so existieren wegen (6.7) die Inversen dieser Operatoren und erfüllen

$$(6.8) \quad \|B^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1-q}, \quad \|B_n^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1-q}.$$

Bezeichnen wir außerdem mit A bzw. A_n die Operatoren

$$A = \begin{cases} I + K \\ I - K + L \end{cases} \quad A_n = \begin{cases} I + P_n K & \text{für (6.5)} \\ I - P_n K + L & \text{für (6.6)} \end{cases},$$

so gelten in unserem Fall die Konvergenzaussagen von

Lemma 3. *Für jedes $g \in C$ konvergieren*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n g - g\|_\infty = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n^{-1} g - B^{-1} g\|_\infty = 0.$$

Für alle $f \in L^\infty$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ konvergieren gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n F f - F f\|_\infty = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n^{-1} A_n f - B^{-1} A f\|_\infty = 0,$$

(diese Operatorenfolgen sind normkonvergent).

Beweis. Wenn g stetig ist, folgt $P_n g \rightarrow g$ aus (6.2) und (6.4). Die zweite Behauptung folgt dann aus

$$\|B_n^{-1} g - B^{-1} g\|_\infty \leq \|B_n^{-1}\|_\infty \|(P_n - I) H B^{-1} g\|_\infty$$

wegen (6.8). Die beiden letzten Behauptungen ergeben sich aus der Kompaktheit von Ff für $\|f\|_\infty \leq 1$ in C .

Lemma 3 reicht zum Beweis der Sätze in [1] bereits aus, die einige Antworten auf unsere vier Fragen liefern:

1. Nach [1] Hilfssatz 5 a gibt es einen Index n_0 (eine genügend feine Unterteilung von \dot{G}), so daß die Inversen von (6.5) bzw. (6.6) in L^∞ existieren und

$$(6.9) \quad \|A_n^{-1}\|_\infty \leq C_1 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

mit von n unabhängiger Konstante C_1 erfüllen. Für $n \geq n_0$ sind (6.5), (6.6) nach g_n also eindeutig auflösbar.

2. Nach [1] Satz 2 konvergieren wegen (6.9) die Treppenfunktionen g_n zu (6.5) bzw. (6.6) auf \dot{G} gleichmäßig gegen g :

$$(6.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\dot{G}} |g - g_n| \right) = 0.$$

Für die gemäß (2.1–4) zu g und g_n gebildeten Potentiale u und u_n erhält man mit Hilfe des Maximumprinzips und (7.13) die Abschätzung

$$(6.11) \quad |u_n(x) - u(x)| \leq c_1 \|g - g_n\|_\infty + c_2 \|h - P_n h\|_\infty$$

mit

$$c_1 = \begin{cases} a & \text{für (2.1, 3)} \\ \frac{a}{4\pi} & \text{für (2.2, 4)} \end{cases} \quad \text{und} \quad c_2 = \begin{cases} 0 & \text{für (2.1)} \\ \frac{1}{2} & \text{für (2.2–4)}. \end{cases}$$

Also konvergieren wegen (6.10) die Näherungspotentiale u_n überall gleichmäßig gegen u mit $n \rightarrow \infty$.

3. Fehlerabschätzungen liefert (6.11), wenn man $\|g - g_n\|_\infty$ z.B. gemäß [1] Satz 3 abschätzt.

4. Satz 5 in [1] garantiert die Existenz einer Konstante C_2 , so daß für alle Diskretisierungen $n \geq n_0$ die gemäß (5.1) bzw. (5.2) zu $P_n K$ gebildeten Folgen $g_n^{(m)}$ gleichgradig wie eine geometrische Reihe gegen g_n konvergieren:

$$(6.12) \quad \|g_n^{(m)} - g_n\|_\infty \leq C_2 \frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} \|h\|_0 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

mit

$$\delta = \begin{cases} \frac{1+3r}{4r} & \text{für (6.5)} \\ \frac{1+r}{2r} & \text{für (6.6)} \end{cases}, \quad r \text{ gemäß §5.}$$

Als iteratives Verfahren ist dieses Lösungsverfahren von (6.5, 6) numerisch stabil. Außerdem ist die Anzahl von Iterationen, die man zum Erreichen einer

Genauigkeit $\|g_n^{(m)} - g_n\|_\infty$ benötigt, wegen (6.12) von der Feinheit (n) der Diskretisierung *unabhängig* für $n \geq n_0$.

Das beschriebene numerische Verfahren wurde an einigen Beispielen auf einer Rechenanlage S 2002 erprobt und lieferte bei einer recht groben Diskretisierung

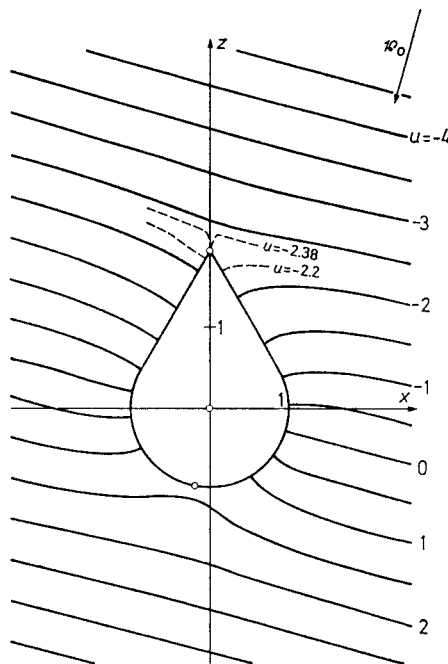


Fig. 1. Schnittlinien der Äquipotentialflächen $u = \text{const}$ mit einer Ebene durch die Achse der Rotationsfläche \dot{G} bei dreidimensionaler schräger Anströmung

von \dot{G} , z.B. mit $n = 300$ und einer Kugelkalotte mit glatt aufgesetztem Kegel als \dot{G} (s. auch [17]) Fig. 1:

$$\begin{aligned} |u - u_n| &\leq 3 \cdot 10^{-2} \|u\|_0, \\ \|g_n^{(25)} - g_n\|_\infty &\leq 10^{-5} \|h\|_0 \quad (25 \text{ Iterationsschritte}) \end{aligned}$$

in folgenden Rechenzeiten:

- 6 h Berechnung der 300×300 -Koeffizientenmatrix zu $P_n K$, ($P_n K$ ist ja für alle Aufgaben zu einer Fläche \dot{G} gleich),
- 2 h zur iterativen Lösung (ca. 25 Schritte) eines Gleichungssystems (6.5) bzw. (6.6),
- 2 min zur Auswertung eines der Integrale (2.1–4), um $u(x)$ zu ermitteln.

§ 7. Anhang: Geometrische Hilfssätze

Das lokale Verhalten des Operators K wird durch die Funktion $W_\delta(p)$ beschrieben. In den Hilfssätzen 1–5 werden deshalb einige Eigenschaften von $W_\delta(p)$ untersucht. In Hilfssatz 6 wird die Existenz der Flächenscharen $\dot{\gamma}_n$ und \dot{I}_n sichergestellt, denn mit $\dot{\gamma}_n$ und \dot{I}_n wurde die verallgemeinerte Normalableitung definiert.

Hilfssatz 1. Bei fest gewähltem $\delta > 0$ sei $p \in \dot{G}$ ein Punkt, der nicht zu nahe an den Ecken liegt:

$$(7.1) \quad \min_{e \in Q_e} |p - e| \geq \delta, \quad \min_{q \in Q} |p - q| = |p - \hat{q}|, \quad \hat{q} \in \dot{G}_i \cap \dot{G}_j.$$

Dann existiert ein nur von δ abhängiger Radius $\hat{\delta} > 0$, so daß für jeden Punkt $p \in \dot{G}$ mit (7.1) das Flächenstück $F_{\hat{\delta}}(p)$ nur auf $\dot{G}_i \cup \dot{G}_j$ liegt:

$$F_{\hat{\delta}}(p) \cap \dot{G}_v = \emptyset \quad \text{für } v \neq i, \quad v \neq j.$$

Auf die Darstellung des einfachen Beweises soll hier verzichtet werden. Er beruht darauf, daß $|q - v|$ in $\dot{G} \times \dot{G}$ stetig ist, verschiedene Flächenstücke \dot{G}_i, \dot{G}_j sich nur in Kanten und Ecken und verschiedene Kanten sich nur in Eckpunkten treffen.

Hilfssatz 2. Bei fest vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gilt gleichmäßig für alle Punkte $p \in \dot{G}$ mit $\min_{q \in Q} |p - q| \geq \varepsilon$

$$(7.2) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} W_{\delta}(p) = 0.$$

Beweis. Wegen $|p - q| \geq \varepsilon$ liegt p auf genau einem Flächenstück $\dot{G}_v(p)$. Außerdem gibt es nach Hilfssatz 1 eine nur von ε abhängende Konstante $\hat{\delta} > 0$, so daß $F_{\hat{\delta}}(p) \subset \dot{G}_v$ für alle $\delta \leq \hat{\delta}$ erfüllt ist. Die Behauptung folgt dann aus der schwachen Singularität des Integranden von $W_{\delta}(p)$ in $F_{\delta}(p)$, welche durch die Ljapunoffschen Abschätzungen ([5] S. 6 (17)) sichergestellt wird.

Hilfssatz 3. Sei $p \in \dot{G}_v$. Dann gilt bezüglich p gleichmäßig

$$(7.3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\eta \in F_{\delta}(p) \cap \dot{G}_v} |d\Omega_p(\eta)| = 0.$$

Auch (7.3) folgt aus der schwachen Singularität des Integranden in $\dot{G}_v \cap F_{\delta}(p)$ mit Hilfe der Ljapunoffschen Abschätzungen ([5] S. 6 (17)).

Hilfssatz 4. Bei festem $\delta > 0$ ist die Funktion $W_{\delta}(p)$ in $\dot{G} - Q_{\varepsilon}$ stetig. $W_{\delta}(p)$ ist in $\dot{G} - Q_{\varepsilon}$ bezüglich p und δ gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Beschränktheit. $W_{\delta}(p)$ ist in δ monoton wachsend bei festgehaltenem Punkt p . Aus Hilfssatz 6, den wir unabhängig von den Hilfssätzen 1–5 beweisen werden, folgt für $n \rightarrow \infty$ die Ungleichung

$$\int_{\dot{G}} |d\Omega_x(\eta)| \leq a \quad \text{für alle } x \in R_3,$$

so daß sich aus

$$W_{\delta}(p) \leq W_D(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\dot{G}} |d\Omega_p| + 1 \leq \frac{a}{2\pi} + 1$$

(D = Durchmesser von G) die gleichmäßige Beschränktheit ergibt.

Die Stetigkeit von $W_{\delta}(p)$ zeigen wir bei beliebig gewähltem festen $\varepsilon > 0$ im abgeschlossenen Teilgebiet $\dot{G}_{\varepsilon} = \overline{\dot{G} - \bigcup_{Q_e} \overline{F_{\varepsilon}(e)}}$, indem wir eine in \dot{G}_{ε} gegen $W_{\delta}(p)$ gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $W^{(n)}(p)$ konstruieren. Dazu definieren wir für $p \in \dot{G}_{\varepsilon}$ und $q \in Q$ mit

$$|p - q| = \min_{q \in Q} |p - q|$$

die Funktionenfolge

$$(7.4) \quad \varrho^{(n)}(|p - q|) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{1}{n^4} \leq |p - q| \\ 2 - 2n^4 |p - q| & \text{für } \frac{1}{2n^4} \leq |p - q| \leq \frac{1}{n^4} \\ 1 & \text{für } |p - q| \leq \frac{1}{2n^4}. \end{cases}$$

Für genügend großes n und $|p - q| \leq 1/n^4$ ist q auf Grund der stetigen Krümmung der Kanten von p stetig abhängig, so daß für diese $n \varrho^{(n)}$ stetige Funktion von p ist. Für genügend großes n liegt außerdem nach Hilfssatz 1 $F_{1/n}(p)$ auf $\dot{G}_1 \cap \dot{G}_2$ und falls $|q - p| \leq 1/n$, gilt $q \in \dot{G}_1 \cap \dot{G}_2$. Für $q \in F_{1/n}(p)$ führen wir um q auf \dot{G}_2 bezüglich der Tangentialebene lokale Koordinaten $\xi, \eta, \zeta(\xi, \eta)$ mit den Achsen $\mathfrak{k} = n(q)|_{\dot{G}_2}$ und j parallel zur Tangente an $\dot{G}_1 \cap \dot{G}_2$ in q so ein, daß i in das Innere der Fläche \dot{G}_2 zeigt. Ferner bezeichnen wir mit $H = \{\xi, \eta | \xi \geq 0\}$ und mit

$$F'_{1/n} = \{\xi, \eta | q + \xi i + \eta j + \zeta(\xi, \eta) \mathfrak{k} \in F_{1/n}(p)\}$$

die Menge von ξ, η -Werten, über die in $F_{1/n}(p)$ integriert wird. Mit Hilfe des räumlichen Winkels, unter dem die Halbebene $\{q + \xi i + \eta j | (\xi, \eta) \in H\}$ von p aus erscheint, definieren wir

$$W^{(n)}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{p \in F_\delta(p) - F_{1/n}(p)} |d\Omega_p(b)|$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{2\pi} |2\pi - \Omega(p)| & \text{für } p \in \dot{G}_e \cap Q, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{F'_{1/n}} \frac{|\mathfrak{k} \cdot (q-p)| d\xi d\eta}{|\xi i + \eta j + (q-p)|^3} + \frac{1}{2\pi} \varrho^{(n)}(p) \int_{H - F'_{1/n}} \frac{|\mathfrak{k} \cdot (q-p)| d\xi d\eta}{|\xi i + \eta j + (q-p)|^3} & \text{für } p \in \dot{G}_e - Q. \end{cases}$$

Für $|q - p| \leq \frac{1}{2n^4}$ haben die beiden letzten Summanden zusammen den Wert des räumlichen Winkels, unter dem H von p aus erscheint, nämlich

$$\left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(i \cdot \frac{p-q}{|p-q|}\right)\right) \quad \text{mit } 0 \leq \arccos \alpha \leq \pi.$$

Auf Grund der stetigen Krümmung von \dot{G}_1 und Voraussetzung (1.9) gilt

$$(7.5) \quad \left|1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(i \cdot \frac{p-q}{|p-q|}\right) - \left|1 - \frac{\Omega(q)}{2\pi}\right|\right| \leq 2C |p - q|,$$

woraus die Stetigkeit von $W^{(n)}(p)$ in \dot{G}_e für genügend große n ersichtlich wird.

Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz von $W^{(n)}$ gegen W_δ ersetzen wir das letzte Integral der rechten Seite von

$$|W^{(n)}(p) - W_\delta(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{F_{1/n}(p) \cap \dot{G}_1} |d\Omega_p| + \frac{1}{2\pi} \int_{F_{1/n}(q)} |d\Omega_q|$$

$$+ \varrho^{(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{H - F'_{1/n}} \frac{|\mathfrak{k} \cdot (q-p)| d\xi d\eta}{|\xi i + \eta j + (q-p)|^3} + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{F'_{1/n}} \frac{|\mathfrak{k} \cdot (q-p)| d\xi d\eta}{|\xi i + \eta j + (q-p)|^3} - \int_{F_{1/n}(p) \cap \dot{G}_2} |d\Omega_p| \right|$$

durch den davor stehenden räumlichen Winkel, unter dem der Teil $F'_{1/n}$ der Tangentialebene in q von p aus erscheint. Dazu benötigen wir Abschätzungen des Nenners nach unten. Diese ergeben sich aus der Ungleichung

$$-1 < \beta \leq \frac{q-p}{|q-p|} \cdot i,$$

für die sich die Existenz einer Konstanten $\beta > -1$ mit (7.5) aus der Voraussetzung (1.9) zeigen läßt. Mit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}$ liefert sie in $F_{1/n}(p) \cap \dot{G}_2$ für $n > 6C^3 + 1$ mit $r^2 = \xi^2 + \eta^2$ die Ungleichungen

$$(7.6) \quad \begin{cases} |\eta - p|^2 \geq (1 - 2C\alpha^2 r) |\xi i + \eta j + (q - p)|^2, \\ |n(\eta) \cdot (\eta - p)| \leq |f \cdot (q - p)| + Cr\{|\eta - p| + r\}, \\ r^2 + |q - p|^2 \leq \alpha^2 |\xi i + \eta j + (q - p)|^2 \leq \frac{4\alpha^2}{n^2}. \end{cases}$$

Unter Benutzung von $(H - F'_{1/n}) < \left\{ \xi, \eta \mid r \geq \frac{1}{4n} \right\}$ für $|p - q| \leq \frac{1}{n^4}$ errechnet man aus (7.4) und (7.6) die Abschätzung

$$|W^{(n)}(p) - W_\delta(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{F_{1/n}(p) \cap \dot{G}_1} |d\Omega_p| + \frac{1}{2\pi} \int_{F_{1/n}(q)} |d\Omega_q| + \frac{64}{n} + \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n^2} 4C^2 \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{n} 4C\alpha^3\right)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) + \frac{36}{n} \alpha^4 C.$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt wegen Hilfssatz 3 die rechte Seite in $p \in \dot{G}_e$ gleichmäßig gegen Null.

Hilfssatz 5. Die Ecken von \dot{G} seien „konvex“ und sollen Voraussetzung (1.13) erfüllen. Dann ist bei festem $\delta > 0$ die Funktion $W_\delta(p)$ auf \dot{G} stetig⁶.

Beweis. Wegen Hilfssatz 4 muß die Stetigkeit von $W_\delta(p)$ nur noch in einem der endlich vielen Eckpunkte $e \in Q_e$ gezeigt werden. e liegt als Eckpunkt auf endlich vielen Flächenstücken \dot{G}_v , von denen jedes zwei in e endende Randkanten $r_{1/2}(s)$ ($r_{1/2}(0) = e$) mit Randtangentevektoren $t_{v,1/2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (r_{1/2}(s) - e)$ besitzt. Wir werden wieder die Integrale durch Raumwinkel geeigneter Teile von Tangentialebenen an \dot{G}_v ersetzen.

Dazu zerlegen wir \dot{G}_v zunächst mit Hilfe neuer „Kanten“, in endlich viele Teilstücke, so daß e schließlich auf \hat{N} Flächenstücken \dot{G}_μ liegt, deren Randtangente $t_{\mu,1/2}$ jeweils Winkel

$$(7.7) \quad 0 < \gamma_0 \leq \sphericalangle(t_{\mu 1}, t_{\mu 2}) \leq \frac{\pi}{8}$$

miteinander einschließen, wobei die Existenz von $\gamma_0 > 0$ durch (1.13) sichergestellt wird. Die beiden zu \dot{G}_μ benachbarten Flächenstücke werden wir mit \dot{G}_v und die zu \dot{G}_μ nicht benachbarten Flächenstücke mit \dot{G}_χ bezeichnen. (\dot{G}_μ und \dot{G}_v besitzen gemeinsame Randkanten durch e .)

Für $p \in \dot{G}_\mu - Q$ und jedes positive $d < \delta$ ist die Ungleichung

$$(7.8) \quad |W_\delta(e) - W_\delta(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \int_{F_\delta(p) - F_d(p)} |d\Omega_p| - \int_{F_\delta(e) - F_d(e)} |d\Omega_e| \right| + \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_\mu} |d\Omega_p| + \int_{F_d(e)} |d\Omega_e| + \left| \sum_v \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_v} |d\Omega_p| + \sum_\chi \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_\chi} |d\Omega_p| - |2\pi - \Omega(e)| \right| \right\}$$

⁶ Dieser Hilfssatz gilt ebenfalls für isolierte konvexe Ecken, in deren Umgebung sich die Fläche wie ein glattes Konoid verhält.

gültig. Um q_ν werden wie in Hilfssatz 4 lokale Koordinaten für \dot{G}_ν eingeführt. Für die nicht benachbarten Flächenstücke \dot{G}_x werden die lokalen Koordinaten mit $\xi_x = n_x$ ($n_x = \text{Grenzwert von } n|_{\dot{G}_x} \text{ in } e$) um e eingeführt. Zur Abschätzung der Nenner nach unten beachten wir zunächst, daß man aus Voraussetzung (1.9) und der „Konvexität“, der Ecke e die Existenz einer Konstanten $\beta_1 > -1$ folgern kann, so daß für die Grenzwerte der Normalen *benachbarter* Gebiete \dot{G}_ν und \dot{G}_μ in e die Ungleichungen

$$n_\nu \cdot n_\mu \geq \beta_1 > -1$$

gültig sind. Zu den *nicht benachbarten* Flächenstücken \dot{G}_x existiert ein positiver Winkel $\gamma_1 > 0$, so daß irgendzwei Halbtangenten

$$t_\mu = \lim_{\dot{G}_\mu \ni p \rightarrow e} \frac{p-e}{|p-e|}, \quad t_x = \lim_{\dot{G}_x \ni \eta \rightarrow e} \frac{\eta-e}{|\eta-e|}$$

einen Winkel

$$(7.9) \quad \sphericalangle(t_\mu, t_x) \geq \gamma_1 > 0, \quad \gamma_0 \geq \gamma_1,$$

miteinander einschließen. Wir setzen $\beta = \frac{1}{2}(\min\{\beta_1, -\cos\gamma_1\} - 1)$ und finden wegen der stetigen Krümmung von \dot{G}_j eine Zahl $d_1 > 0$, so daß die lokalen Koordinaten der zu \dot{G}_μ benachbarten Flächenstücke \dot{G}_ν die Ungleichung

$$i_\nu \cdot \frac{q_\nu - p}{|q_\nu - p|} \geq \beta > -1$$

für $|p - e| \leq d_1$ erfüllen. Diese Ungleichung für die benachbarten und (7.9) für die nicht benachbarten Flächenstücke haben die Ungleichung (7.6) für alle lokalen Koordinatensysteme der \dot{G}_j , $j \neq \mu$, $j = 1, \dots, \hat{N}$ mit neuen Konstanten α, β und $4d^2\alpha^2$ statt $4\alpha^2/n^2$ in $F_d(p)$ für $|p - e| \leq d$ zur Folge, wobei in (7.6) q durch q_ν bzw. e zu ersetzen ist.

Nun können wir vermöge (7.6) die letzten Summen in (7.8) durch räumliche Winkel über Tangentialebenenstücke ersetzen, benötigen dazu aber noch die Berandungen dieser Tangentialebenenstücke. Die Integrationsgebiete in (7.8) für die lokalen Koordinaten werden mit

$$Z_\nu = \{\xi, \eta | q_\nu + \xi i_\nu + \eta j_\nu + \xi_\nu \zeta_\nu(\xi, \eta) \in F_d(p) \cap \dot{G}_\nu\}$$

und

$$Z_x = \{\xi, \eta | e + \xi i_x + \eta j_x + \xi_x \zeta_x(\xi, \eta) \in F_d(p) \cap \dot{G}_x\}$$

bezeichnet. Als Ersatzgebiet für ein *nicht* benachbartes Stück \dot{G}_x legen wir

$$Z'_x = \{\xi, \eta | e + \xi i_x + \eta j_x = e + \lambda_1 t_{x1} + \lambda_2 t_{x2}, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0\}$$

fest, während wir für *benachbarte* Stücke \dot{G}_ν das Ersatzgebiet mit Hilfe der weiter unten erklärten Hilfspunkte e'_ν und q'_ν als

$$Z'_\nu = \{\xi, \eta | q_\nu + \xi i_\nu + \eta j_\nu = e'_\nu + \lambda_1(q_\nu - e'_\nu) + \lambda_2(q'_\nu - e'_\nu), \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0\}$$

wählen. Dabei wird e'_ν mit einer Minimalstelle η_0 von

$$\min_{-\infty < \eta < \infty} |q_\nu + \eta j_\nu - e| = |q_\nu + \eta_0 j_\nu - e| \quad \text{als} \quad e'_\nu = q_\nu + \eta_0 j_\nu$$

und q'_ν mit einer Minimalstelle η_1 von

$$\min_{\eta \in I} |q_\nu + \xi(\eta) i_\nu + \eta j_\nu - p| = |q_\nu + \xi(\eta_1) i_\nu + \eta_1 j_\nu - p| \quad \text{als} \quad q'_\nu = q_\nu + \xi(\eta_1) i_\nu + \eta_1 j_\nu$$

erklärt, wobei $\xi(\eta)$ (und $\zeta = \zeta(\xi(\eta), \eta)$) im abgeschlossenen Intervall $I \ni \eta$ die q_v nicht enthaltende Randkante von \dot{G}_v in $F_d(p)$ beschreiben soll.

Zwischen dem räumlichen Winkel, unter dem Z'_v von p aus erscheint und dem entsprechenden Summanden in (7.8) erhalten wir für $d \leq 1/8 C \alpha^3$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left| \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_v} |d\Omega_q| - \int_{Z'_v} \frac{|\mathfrak{k}_v \cdot (q_v - p)| d\xi d\eta}{|\xi i_v + \eta j_v + (q_v - p)|^3} \right| \leq \left(\frac{(1 + 4 C^2 \alpha^2 d^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - 4 C \alpha^3 d)^{\frac{2}{3}}} - 1 \right) \\ & + \alpha^3 \int_{r=d/4}^{\infty} \frac{|q_v - p| r dr}{(r^2 + |q_v - p|^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha^3}{\pi} |q_v - p| \int_{\varphi=0}^{2\alpha} \int_{r=0}^{2Cd} \frac{d\varphi r dr}{(r^2 + |q_v - p|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{\alpha^3}{\pi} |q'_v - p| \int_{\tilde{\varphi}=0}^{4\alpha Cd} \int_{\tilde{r}=0}^{2d\alpha} \frac{d\varphi \tilde{r} d\tilde{r}}{(\tilde{r}^2 + |q'_v - p|^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

wobei die drei rechten Integrale wegen $\{\xi, \eta \mid r^2 \geq d/4\} \supset (Z'_v - Z_v)$ die Integrationsgebiete $(Z'_v - Z_v)$ und $(Z'_v \cup Z_v) - (Z'_v \cap Z_v)$ berücksichtigen. Verlangen wir $|e - p| \leq d^2$, so ist wegen $|q_v - p| \leq |e - p| \leq d^2$ die rechte Seite dieser Ungleichung kleiner als

$$R(d) = \left(\frac{(1 + 4 C^2 \alpha^2 d^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - 4 C \alpha^3 d)^{\frac{2}{3}}} - 1 \right) + d \left(4\alpha^3 + \frac{32}{\pi} C \alpha^4 \right).$$

Ganz entsprechend zeigt man für die nicht benachbarten \dot{G}_x die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_x} |d\Omega_p| - \int_{Z'_x} \frac{|\mathfrak{k}_x \cdot (e - p)| d\xi d\eta}{|\xi i_x + \eta j_x + (e - p)|^3} \right| \leq R(d),$$

so daß (7.8) in

$$\begin{aligned} (7.10) \quad & |W_\delta(e) - W_\delta(p)| \leq R(d)\hat{N} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \int_{F_\delta(p) - F_d(p)} |d\Omega_p| - \int_{F_\delta(e) - F_d(e)} |d\Omega_e| \right| \right. \\ & + \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_\mu} |d\Omega_p| + \int_{F_d(e)} |d\Omega_e| + \left| \sum_v \int_{Z'_v} \frac{|\mathfrak{k}_v \cdot (q_v - p)| d\xi d\eta}{|\xi i_v + \eta j_v + (q_v - p)|^3} \right. \\ & \left. \left. + \sum_x \int_{Z'_x} \frac{|\mathfrak{k}_x \cdot (e - p)| d\xi d\eta}{|\xi i_x + \eta j_x + (e - p)|^3} - |2\pi - \Omega(e)| \right| \right\} \end{aligned}$$

übergeht.

Die Integrale über Z'_j sind räumliche Winkel der ebenen von Geraden begrenzten halbinendlichen Winkelbereiche Z'_j und deshalb Flächeninhalte sphärischer Dreiecke. Diese können für Z'_v durch lineare Funktionen von Winkeln zwischen den Einheitsvektoren

$$v_1 = \frac{p - e}{|p - e|}, \quad v_{2v} = \left[\frac{q_v - p}{|q_v - p|} \times j_v \right], \quad v_{3v} = \frac{[(q'_v - e_v) \times (q'_v - p)]}{|[(q'_v - e_v) \times (q'_v - p)]|}, \quad 7$$

$n_x, t_{x1/2}$ dargestellt werden. Um den Grenzübergang für $p \rightarrow e$ zu charakterisieren, führen wir zum Vektor $\frac{p - e}{|p - e|}$ den ihm auf dem Tangentialebenenzwickel von \dot{G}_μ zunächst gelegenen Einheitsvektor

$$t = \frac{\cos \lambda_0 t_{\mu 1} + \sin \lambda_0 t_{\mu 2}}{|\cos \lambda_0 t_{\mu 1} + \sin \lambda_0 t_{\mu 2}|}$$

⁷ [$\cdot \times \cdot$] bezeichnet das vektorielle Produkt.

mit einer Minimalstelle λ_0 von

$$\min_{0 \leq \lambda \leq \pi/2} \left| \frac{p-e}{|p-e|} - \frac{\cos \lambda t_{\mu 1} + \sin \lambda t_{\mu 2}}{|\cos \lambda t_{\mu 1} + \sin \lambda t_{\mu 2}|} \right| = \left| \frac{p-e}{|p-e|} - \frac{\cos \lambda_0 t_{\mu 1} + \sin \lambda_0 t_{\mu 2}}{\cos \lambda_0 t_{\mu 1} + \sin \lambda_0 t_{\mu 2}} \right|$$

ein. Auf Grund der stetigen Krümmung der Flächenstücke, $\beta > -1$, (7.7) und (7.9) kann man die Existenz zweier Zahlen C' und $d_2 > 0$ zeigen, mit denen die Ungleichungen

$$|v_1 - t|, \quad |v_{2\nu} - n_\mu|, \quad \left| v_{3\nu} - \frac{t \times t_{\nu 2}}{|t \times t_{\nu 2}|} \right| \leq C' |e - p|^8$$

gelten, sobald $|e - p| \leq d_2$ erfüllt ist. Damit und mit (1.13) ergibt sich dann die Existenz einer weiteren Konstanten C'' , so daß für den Inhalt des Z'_ν entsprechenden sphärischen Dreiecks

$$F_{\nu\mu}(v_\nu, v_{2\nu}, v_{3\nu}) = \int_{Z'_\nu} \frac{|\xi_\nu \cdot (q_\nu - p)| d\xi d\eta}{|\xi i_\nu + \eta j_\nu + (q_\nu - p)|^3}$$

die Ungleichung

$$\left| F_{\nu\mu}(v_\nu, v_{2\nu}, v_{3\nu}) - F_{\nu\mu}(n_\nu, n_\mu, \frac{[t \times t_{\nu 2}]}{|[t \times t_{\nu 2}]|}) \right| \leq C'' |e - p|$$

und entsprechend für die anderen sphärischen Dreiecke

$$F_{\chi\mu}^*(v_1, t_{\chi 1}, t_{\chi 2}) = \int_{Z'_\chi} \frac{n_\chi \cdot (e - p) d\xi d\eta}{|\xi i_\chi + \eta j_\chi + (e - p)|^3}$$

die Ungleichung

$$|F_{\chi\mu}^*(v_1, t_{\chi 1}, t_{\chi 2}) - F_{\chi\mu}^*(t, t_{\chi 1}, t_{\chi 2})| \leq C'' |e - p|$$

erfüllt wird. Andererseits ist wegen der „Konvexität“, der Ecke $|2\pi - \Omega(e)|$ die Summe der Beträge der räumlichen Winkel, unter denen die Gebiete $\lim_{p \rightarrow e} Z'_\nu$ und Z'_χ von $e + t$ aus erscheinen, falls $t \neq t_{\nu 1/2}$ ist. Für $t \neq t_{\nu 1}$ gilt also

$$(7.11) \quad |2\pi - \Omega(e)| = \sum_\nu F_{\nu\mu}(n_\nu, n_\mu, \frac{[t \times t_{\nu 2}]}{|[t \times t_{\nu 2}]|}) + \sum_\chi F_{\chi\mu}^*(t, t_{\chi 1}, t_{\chi 2}).$$

Für $t = t_{\nu 1}$ gilt mit dem entsprechenden Index ν die Beziehung

$$F_{\nu\mu}(n_\nu, n_\mu, n_\nu) = \lim_{q_\nu \rightarrow e} |2\pi - \Omega(q_\nu)|,$$

so daß (7.11) auch für $t = t_{\nu 1/2}$ gültig bleibt. Die Ungleichung (7.10) geht also unter Verwendung von (7.11) in die Ungleichung

$$(7.12) \quad |W_\delta(e) - W_\delta(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{F_\delta(p) - F_d(p)} |d\Omega_p| - \int_{F_\delta(e) - F_d(e)} |d\Omega_e| \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{F_d(p) \cap \dot{G}_p} |d\Omega_p| + \frac{1}{2\pi} \int_{F_d(e)} |d\Omega_e| + \hat{N} R(d) + \frac{1}{2\pi} \hat{N} C'' d^2$$

über, wobei für \dot{G}_q alle Flächenstücke mit $p \in \dot{G}_q$ zu nehmen sind, und behält auch für Kantenpunkte $p \in Q$ ihre Gültigkeit.

⁸ ObdA nehmen wir an, daß $t_{\nu 1} = t_{\mu 2}$ Tangente der Randkante $\dot{G}_\nu \cap \dot{G}_\mu$ ist.

Wird $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man mit Hilfe von Hilfssatz 3 eine Zahl $0 < d \leq \min \left\{ \delta, \frac{1}{8C\alpha^3} \right\}$ derart finden, daß die letzten vier Glieder in (7.12) kleiner als $\varepsilon/2$ werden und sodann zu diesem festen $d > 0$ eine weitere Zahl $d_3 > 0$ so bestimmen, daß auch der erste Ausdruck der rechten Seite kleiner als $\varepsilon/2$ wird für alle $p \in \dot{G}$ mit $|p - e| \leq \min \{d^2, d_1, d_2, d_3\}$.

Hilfssatz 6. *Zu \dot{G} existieren zwei Flächenfolgen $\dot{I}_n \subset R_3 - \bar{G}$ bzw. $\dot{\gamma}_n \subset G$, die mit beschränkter Drehung von außen bzw. innen gleichmäßig gegen \dot{G} konvergieren; das heißt:*

1.

$$(7.13) \quad \int_{\eta \in \dot{I}_n - \{\xi\}} |d\Omega_\xi(\eta)| \leq a < \infty, \quad \int_{\eta \in \dot{\gamma}_n - \{\xi\}} |d\Omega_\xi(\eta)| \leq a \quad \text{für alle } \xi \in R_3 \text{ und alle } n.$$

2. Die Punkte $p \in \dot{G}$ und $p_n \in \dot{I}_n$ (bzw. $\dot{\gamma}_n$) können eineindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden derart, daß mit dieser Abbildung $p_n = a_n(p)$, $a_n^{-1}(p_n) = b_n(p_n) = p$ zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ existiert, so daß $0 < |p - a_n(p)| \leq \varepsilon$ für alle $p \in \dot{G}$ und $n \geq N(\varepsilon)$ erfüllt wird.

Beweis. Man kann zunächst jedes Flächenstück \dot{G}_ν zu einer stetig gekrümmten geschlossenen Fläche \dot{F}_ν ergänzen (A. KORN [9] Abh. 1, Abschn. V). Das Vektorfeld $n_\nu(p)$ ist auf \dot{F}_ν stetig. Auf Grund des Weierstraßschen Approximationssatzes gibt es dann ein auf \dot{F}_ν zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\tilde{m}_\nu(p) \quad \text{mit} \quad \tilde{m}_\nu(p)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{m}_\nu(p) \cdot n_\nu(p) \geq c > 0,$$

wobei c weder von ν noch p abhängt. Dieses Vektorfeld kann man dann auf einfache Weise in der Umgebung der Kanten und Ecken zweimal stetig differenzierbar in ein Vektorfeld $m_\nu(p)$ derart abändern, daß die Vektorfelder m_ν und m_μ auf Trennkanten $\dot{G}_\nu \cap \dot{G}_\mu$ und in Q_e übereinstimmen, also das auf \dot{G} durch $m(p) = m_\nu(p)$ für $p \in \dot{G}$, erklärte Vektorfeld mit $m^2(p) = 1$,

$$m(p) \cdot n_\nu(p) \geq c > 0 \quad \text{für} \quad p \in \dot{G}_\nu$$

auf \dot{G} stetig ist. Dann ist $m(p)$ auf jedem Flächenstück \dot{G}_ν zweimal stetig differenzierbar.

Nun definieren wir \dot{I}_n (bzw. $\dot{\gamma}_n$) durch

$$(7.14) \quad p_n = a_n(p) := p \binom{+}{-} \frac{1}{n} m(p) \quad (- \text{ für } \dot{\gamma}_n)$$

für genügend große n . Auf Grund der stetigen Krümmung von \dot{F}_ν und der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $m_\nu(p)$ sind die Flächen

$$\dot{F}_{\nu,n} = \left\{ \eta = p \binom{+}{-} \frac{1}{n} m_\nu(p) \mid p \in \dot{F}_\nu \right\}$$

für genügend große n gleichmäßig stetig gekrümmt, so daß mit Hilfe der Ljapunoffschen Abschätzungen (z. B. [5], S. 6–22) die Ungleichungen

$$\int_{\dot{F}_{\nu,n} - \{\xi\}} |d\Omega_\xi| \leq C_\nu$$

unabhängig von n und $x \in R_3$ gefolgert werden können. Sie ermöglichen wegen $\dot{I}_n \subset \bigcup_{\nu=1}^N \dot{F}_{\nu n}$ die behauptete Abschätzung

$$\int_{\eta \in \dot{I}_n - \{x\}} |d\Omega_x(\eta)| \leq \sum_{\nu=1}^N \int_{\dot{F}_{\nu n} - \{x\}} |d\Omega_x| \leq \sum_{\nu=1}^N C_\nu = a < \infty.$$

Die eindeutige Abbildung wird für genügend große n durch (7.14) beschrieben. Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus $|p - p_n| = 1/n$.

Literatur

1. BRUHN, G., u. W. WENDLAND: Über die näherungsweise Lösung von linearen Funktionalgleichungen, COLLATZ, MEINARDUS, UNGER, ISNM Vol. 7 Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik. Basel: Birkhäuser 1967.
2. CARLEMAN, T.: Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken. Dissertation Uppsala 1916.
3. COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
4. FORSYTHE, G. E., and W. R. WASOW: Finite-difference methods for partial differential equations. New York-London: John Wiley 1960.
5. GÜNTHER, N. M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Leipzig: B. G. Teubner 1957.
6. JÄGER, W.: Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Schwingungsgleichung. Math. Zeitschr. **95**, 299—323 (1967).
7. KANTOROWITSCH, L. W., u. G. P. AKILOW: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964.
8. —, u. W. I. KRYLOW: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin: Deutscher Verl. d. Wiss. 1956.
9. KORN, A.: Fünf Abhandlungen zur Potentialtheorie. Berlin: Dümmlers Verlagsbuchhandlung 1902.
10. LEIS, R.: Über die Dirichletsche Außenraumaufgabe zur Schwingungsgleichung. ZAMM **44**, T 45—47 (1964).
11. NEUMANN, C.: Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. Leipzig: B. G. Teubner 1877.
12. PLEMELJ, J.: Potentialtheoretische Untersuchungen. Leipzig: B. G. Teubner 1911.
13. POINCARÉ, H.: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica **20**, 59—142 (1895).
14. RADON, J.: Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen. Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl. IIa **128**, 1083—1121 (1919).
15. — Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential. Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl. IIa **128**, 1123—1167 (1919).
16. RIESZ, F., u. B. SZ.-NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin: Deutscher Verl. d. Wiss. 1956.
17. WENDLAND, W.: Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgaben des Innen- und Außengebietes für die Potentialgleichung im R_3 durch Randbelegungen. Dissertation, TU Berlin 1965, D 83.
18. — Die Methode der Randbelegungen bei der Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Potentialgleichung für Ränder mit Kanten und Ecken. ZAMM **45**, T 84 (1965).
19. WIELANDT, H.: Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten Eigenwertaufgaben. Math. Zeitschr. **50**, 93—143 (1944).

Dr. WOLFGANG WENDLAND
1000 Berlin 38
Kaiserstuhlstr. 29c