Die Äquivalenz konstanter und verschwindender Christoffelklammern zweiter Art

Von

M. Pinl, Köln

Erwin Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 15. Juni 1960)

Im Riemannschen Raum gilt der Satz: der metrische Zusammenhang $g_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$ bestimmt eindeutig den affinen Zusammenhang $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$. Dabei wird der metrische Zusammenhang regulär vorausgesetzt: $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$. Dann gilt für die Christoffelklammern erster Art $[\varrho, \alpha\beta] = [\varrho, \beta\alpha]$:

$$[\varrho, \alpha\beta] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\varrho}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\varrho}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho}\right), \quad \alpha, \beta, \varrho = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

und umgekehrt

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} = [\alpha, \beta\varrho] + [\beta, \alpha\varrho], \qquad \alpha, \beta, \varrho = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Aus (1) entstehen durch Überschieben mit den kontravarianten Komponenten $g^{\lambda\varrho}$ der Riemannschen Maßbestimmung $g_{\alpha\beta}$ die Definitionsgleichungen für die Christoffelklammern zweiter Art $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {\lambda \atop \beta\alpha} \right\}$:

$$\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = g^{\lambda\varrho}[\varrho, \alpha\beta] = \left\{ {\lambda \atop \beta\alpha} \right\}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n.^{1} \tag{3}$$

Umgekehrt sind wiederum die Christoffelklammern erster Art Linearkombinationen der Christoffelklammern zweiter Art:

$$[\varrho, \alpha\beta] = \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} g_{\lambda\varrho}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

---

[1] Es gilt $g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta = \left\{ {1,\ \alpha = \beta \atop 0,\ \alpha \neq \beta} \right.$. Über doppelt vorkommende Indizes eines und desselben Terms ist nach den Regeln des Tensorkalküls zu summieren.

Mit konstanten $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} = 0$ erhält man für die Komponenten $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ des gemischten Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors die Werte

$$R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \varrho\beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \varrho\gamma \end{Bmatrix} = 0,$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n.$$

Mit konstanten nicht insgesamt verschwindenden $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} = c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ erhält man für die Komponenten $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ zunächst die Werte

$$R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = c^{\varrho}_{\alpha\gamma}\, c^{\lambda}_{\varrho\beta} - c^{\varrho}_{\alpha\beta}\, c^{\lambda}_{\varrho\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Ebenso gilt, wenn $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ die Komponenten einer beliebigen linearen Übertragung bezeichnen, für den zugehörigen Krümmungstensor $K^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$:

$$K^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = C^{\varrho}_{\alpha\gamma}\, C^{\lambda}_{\varrho\beta} - C^{\varrho}_{\alpha\beta}\, C^{\lambda}_{\varrho\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n,$$

wofern man von konstanten Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = C^{\lambda}_{\alpha\beta}$ ausgeht. Da die Wahl der Konstanten $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = C^{\lambda}_{\alpha\beta}$ freisteht, kann man offensichtlich erreichen, daß nicht alle Krümmungskomponenten $K^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden. Lineare Übertragungen mit konstanten verschwindenden Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0$ und solche mit konstanten nicht insgesamt verschwindenden Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = C^{\lambda}_{\alpha\beta}$ führen also im allgemeinen auf geometrisch verschiedene Raumklassen.

Anders im Falle einer durch die Christoffelklammern (1), (3) gegebenen Riemannschen Übertragung, deren Komponenten durch Differentiation aus dem metrischen Feld der $g_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$ entspringen und somit nicht völlig frei gewählt werden können. Aus (4) und (2) folgt zunächst:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} = g_{\lambda\alpha}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\varrho \end{Bmatrix} + g_{\lambda\beta}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\varrho \end{Bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n$$

und daher für konstante $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\varrho \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\varrho \end{Bmatrix}$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} = c^{\lambda}_{\beta\varrho}\, g_{\lambda\alpha} + c^{\lambda}_{\alpha\varrho}\, g_{\lambda\beta}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Für das partielle Differentialsystem erster Ordnung (6) bestehen die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho\, \partial x_\sigma} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma\, \partial x_\varrho}, \quad \alpha, \beta, \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

und die beliebig vorgeschriebenen Anfangsbedingungen

$$g_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)\,|_{x_1=x_1^0, \ldots, x_n=x_n^0} = g_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Aus den Integrabilitätsbedingungen (7) folgt mit Rücksicht auf (6)

$$\begin{gathered} g_{\mu\alpha}(c_{\beta\varrho}^{\lambda}\, c_{\lambda\sigma}^{\mu} - c_{\beta\sigma}^{\lambda}\, c_{\lambda\varrho}^{\mu}) + g_{\lambda\mu}(c_{\beta\varrho}^{\lambda}\, c_{\alpha\sigma}^{\mu} + c_{\alpha\varrho}^{\lambda}\, c_{\beta\sigma}^{\mu}) + \\ g_{\mu\beta}(c_{\alpha\varrho}^{\lambda}\, c_{\lambda\sigma}^{\mu} - c_{\alpha\sigma}^{\lambda}\, c_{\lambda\varrho}^{\mu}) - g_{\lambda\mu}(c_{\beta\sigma}^{\lambda}\, c_{\alpha\varrho}^{\mu} + c_{\alpha\sigma}^{\lambda}\, c_{\beta\varrho}^{\mu}) = 0, \\ \alpha, \beta, \lambda, \mu, \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{9}$$

Da $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$, reduzieren sich die linken Seiten der Gleichungen (9) auf den ersten und dritten Term. Sodann gilt (5) und (8), also

$$g_{\mu\alpha}^{(0)}\, R_{\beta\sigma\varrho}^{\mu} + g_{\mu\beta}^{(0)}\, R_{\alpha\sigma\varrho}^{\mu} = 0, \quad \alpha, \beta, \mu, \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$$

und daher notwendig

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

da die $g_{\mu\alpha}^{(0)}$ und $g_{\mu\beta}^{(0)}$ beliebig vorgeschrieben werden können. Die Annahme nicht insgesamt verschwindender konstanter Christoffelklammern $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = c_{\alpha\beta}^{\lambda}$ führt also auf denselben Krümmungstensor wie die Annahme verschwindender Christoffelklammern $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = 0$.

(I) *Ein Riemannscher Raum mit konstanten Christoffelklammern zweiter Art ist stets ein euklidischer Raum.*

Liegt umgekehrt ein euklidischer Raum vor, so gilt in diesem in geeigneten Koordinaten $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = 0$. Geht man von solchen verschwindenden Christoffelklammern aus, so reduzieren sich die für die Christoffelklammern zweiter Art geltenden Transformationsgleichungen auf das System

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha\, \partial \bar{x}_\beta} = \overline{\left\{ {s \atop \alpha\beta} \right\}}\, \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}, \quad \alpha, \beta, i, s = 1, 2, \ldots, n$$

oder

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha\, \partial \bar{x}_\beta} = \overline{c_{\alpha\beta}^{s}}\, \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}, \quad \alpha, \beta, i, s = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

wenn wir in den neuen Koordinaten $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ konstante nicht insgesamt verschwindende Christoffelklammern $\overline{\left\{ {s \atop \alpha\beta} \right\}} = \overline{c_{\alpha\beta}^{s}}$ verlangen. Die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^3 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha\, \partial \bar{x}_\beta\, \partial \bar{x}_\gamma} = \frac{\partial^3 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha\, \partial \bar{x}_\gamma\, \partial \bar{x}_\beta}, \quad i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n$$

des Systems (10) sind erfüllt, da der bei ihrer Berechnung entstehende Krümmungstensor (des euklidischen Raumes) sowohl füı $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = 0$ wie auch für $\overline{\left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\}} = \overline{c^s_{ik}}$ identisch verschwindet. Daher gilt auch umgekehrt:

(II) *In jedem euklidischen Raum kann man konstante Christoffelklammern zweiter Art einführen.*

Als Beispiel betrachten wir einen Riemannschen Raum mit der nichtkonstanten Maßbestimmung

$$g_{\alpha\alpha} = e^{2x_\alpha}, g_{\alpha\beta} = 0, g = e^{2(x_1 + \cdots + x_n)}, g^{\alpha\alpha} = e^{-2x_\alpha}, g^{\alpha\beta} = 0;$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n, \ \alpha \neq \beta. \tag{11}$$

Zur Maßbestimmung (11) gehören die konstanten nicht insgesamt verschwindenden Christoffelklammern zweiter Art

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha\alpha \end{matrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} = 0, \ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha \neq \beta, \ \alpha \neq \gamma.$$

Transformieren wir gemäß

$$x_\alpha = \lg(\bar{x}_\alpha + 1), \ \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} = \frac{1}{(\bar{x}_1 + 1) \ldots (\bar{x}_n + 1)} \neq 0,$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

so entsteht aus (11) die konstante Metrik

$$\bar{g}_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Der Riemannsche Raum mit der Metrik (11) ist also ein euklidischer Raum.

Als Gegenbeispiel betrachten wir einen drei- oder mehrdimensionalen Riemannschen Raum mit der konstanten jedoch nicht verschwindenden Riemannschen Krümmung K_0. Nach einem Satz von *F. Schur*[2] gilt in diesem Fall

$$R^\lambda_{\alpha\beta\gamma} = (\delta^\lambda_\beta g_{\alpha\gamma} - \delta^\lambda_\gamma g_{\alpha\beta}) K_0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, \ldots, n$$

und nach Verjüngung über $\lambda = \gamma$

$$R_{\alpha\beta} = (1 - n) g_{\alpha\beta} K, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

Mit $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = c^\lambda_{\alpha\beta}$ sind $R^\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ und $R_{\alpha\beta}$ konstant. Da auch $K_0 \neq 0$ nach

[2] Vgl. z. B. *L. Pf. Eisenhart*, Riemannian Geometry, Chapter II, § 26; Princeton University Press 1949.

Voraussetzung eine Konstante ist, müßten die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ ebenfalls konstant ausfallen ($n \geqslant 3$). Das ist ein Widerspruch.

Der im Vorhergehenden verwendete Tensorkalkül ist wie üblich über der Gruppe aller stetigen Punkttransformationen

$$x_\alpha = f_\alpha(x_1', \ldots, x_n'), \quad \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1', \ldots, x_n')} \neq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante aufgebaut. Beschränken wir uns auf die Transformationsgruppe

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1', \ldots, x_m'), \quad x_{m+1} = c_{m+1A}\, x'^A + c_{m+1}, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_1', \ldots, x_n')} \neq 0, \quad A = m+1, \ldots, n, \qquad (12) \\ x_m &= f_m(x_1', \ldots, x_m'), \quad x_n = c_{nA}\, x'^A + c_n, \end{aligned}$$

so lassen sich Christoffelklammern $\left\{ {i \atop rs} \right\}$ und Krümmungstensoren R^i_{jkl} im m-ären Gebiet der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ definieren, indem man $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = 0$, setzt, wenn einer der Indizes $\lambda, \alpha, \beta > m$. Auf diese Weise kann man die Untersuchung konstanter Christoffelklammern zweiter Art auch auf singuläre Riemannsche Räume ausdehnen, deren Komponenten $g_{\alpha\beta}$ in geeigneten „reduzierenden" Koordinaten die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} g_{11}, & \ldots, g_{1m}, & 0, \ldots, 0 \\ \vdots & & \\ g_{m1}, & \ldots, g_{mm}, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \end{matrix} \right\|, \left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_A} = 0, r, s = 1, 2, \ldots, m; A = m+1, \ldots, n \right) \qquad (13)$$

vom Rang m bilden. Man spricht in diesem Falle von reduzibel-singulären Riemannschen Räumen[3] vom Rang m. Die kanonische Gestalt (13) der Metrik reduzibel-singulärer Riemannscher Räume bleibt bei Koordinatentransformationen der Gruppe (12) erhalten. Daher gilt:

(III) *Ein reduzibel-singulärer Riemannscher Raum vom Rang m mit konstanten Christoffelklammern*

[3] Vgl. *M. Pinl*, Über lineare Übertragungen mit fallweise konstanter Torsion, Journal für reine und angewandte Mathematik **204/1/4**, (1960), S. 108–115.

$$\left\{ {i \atop rs} \right\} = c^i_{rs}, \quad i, r, s = 1, 2, \ldots, m$$

und verschwindenden Christoffelklammern

$$\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = 0, \text{ (mindestens einer der Indizes } \alpha, \beta, \lambda > m)$$

ist stets ein $(n - m)$*-fach singulärer euklidischer Raum*[4].

Fügen wir noch ein Ergebnis über Christoffelsche Klammern erster Art an! Nach (1) und (2) gilt:

(IV) *Die Christoffelklammern erster Art eines Riemannschen Raumes lassen sich genau dann auf konstante nicht insgesamt verschwindende Werte transformieren, wenn bei dieser Transformation die metrischen Komponenten* $g_{\alpha\beta}$ *in lineare und (nicht insgesamt) konstante Funktionen übergehen.*

Im Gegensatz zum Verhalten von Riemannschen Räumen mit konstanten Christoffelklammern zweiter Art sind Riemannsche Räume mit konstanten Christoffelklammern erster Art im allgemeinen keine euklidischen Räume. Dies zeigt etwa das Beispiel:

$$g_{11} = x_2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = x_1,\ g = x_1 x_2,\ g^{11} = x_2^{-1},\ g^{12} = 0,\ g^{22} = x_1^{-1},$$

$$[1, 11] = 0,\ [1, 12] = \frac{1}{2},\ [1, 22] = -\frac{1}{2},\ [2, 11] = -\frac{1}{2},\ [2, 12] = \frac{1}{2},\ [2, 22] = 0,$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = 0,\ \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \frac{1}{2 x^2},\ \left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\frac{1}{2 x_2},\ \left\{ {2 \atop 11} \right\} = -\frac{1}{2 x_1},\ \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{1}{2 x_1},$$

$$\left\{ {2 \atop 22} \right\} = 0,$$

$$R^2_{121} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ {2 \atop 12} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ {2 \atop 12} \right\} + \left\{ {1 \atop 11} \right\} \left\{ {2 \atop 12} \right\} + \left\{ {2 \atop 11} \right\} \left\{ {2 \atop 22} \right\} -$$

$$- \left\{ {1 \atop 12} \right\} \left\{ {2 \atop 11} \right\} - \left\{ {2 \atop 12} \right\} \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{4 x_1 x_2} \neq 0.$$

---

[4] Vgl. *M. Pinl*, Die Hauptgruppen singulärer konform-euklidischer Räume, Journal für reine und angewandte Mathematik **203**/1/2 (1960), 40—46.