RAMSPOTT, K. J.
Math. Zeitschr. 89, 234–246 (1965)

Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homogener Faser

Von

KARL JOSEF RAMSPOTT

Einleitung

In zahlreichen Untersuchungen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen spielt der Begriff des holomorphen Faserbündels eine wichtige Rolle. Insbesondere interessiert man sich für die Existenz von holomorphen Schnitten in solchen Bündeln. Das Okasche Prinzip legt in diesem Zusammenhang zwei Fragen nahe: Läßt sich jeder stetige Schnitt in einen holomorphen Schnitt deformieren? Sind zwei holomorphe Schnitte, die man stetig ineinander deformieren kann, auch über lauter holomorphe Schnitte ineinander deformierbar?

Beide Fragen sind in wichtigen Spezialfällen zu bejahen. GRAUERT [*12*] hat Bündel untersucht, deren Basis ein holomorph-vollständiger komplexer Raum ist und deren Faser eine komplexe Liesche Gruppe ist, auf der die Strukturgruppe des Bündels automorph wirkt. Ein Sonderfall für die Dimension eins ist mit völlig anderen Methoden von HEILBRONN [*16*] bewiesen worden (vgl. auch [*19*]). Die Resultate von FRENKEL [*10*] beziehen sich auf Bündel, deren Faser und Strukturgruppe auflösbare komplexe Liesche Gruppen sind; dafür sind als Basis gewisse komplexe Mannigfaltigkeiten zugelassen, die nicht mehr holomorph-vollständig zu sein brauchen. In beiden Fällen ist die kanonische Abbildung der Menge der Homotopieklassen holomorpher Schnitte in die Menge der Homotopieklassen stetiger Schnitte bijektiv.

In der vorliegenden Note wird bewiesen, daß diese Aussage richtig bleibt für Schnitte in holomorphen Bündeln, auf deren Faser die Strukturgruppe holomorph und transitiv wirkt. Die Bündelbasis ist dabei ein holomorph-vollständiger komplexer Raum. Der Beweis des Hauptsatzes stützt sich u.a. auf die entsprechenden Aussagen von GRAUERT bzw. auf die verschärfte Form dieser Aussagen, wie sie CARTAN [*7*] angegeben hat. Spezialfälle wurden bereits in [*20*] mitgeteilt. Eine Approximationsaussage, die ebenfalls zu diesem Problemkreis gehört, wurde in [*14*] mit ähnlichen Mitteln bewiesen.

Das Hauptergebnis gestattet zahlreiche Anwendungen. Einige davon werden in den folgenden Abschnitten angegeben. So wird ein Fortsetzungssatz für r-tupel von holomorphen Funktionen, die keine gemeinsamen Nullstellen haben, bewiesen (Satz 3). Ferner werden einige Aussagen über holomorphe nirgends singuläre Matrizen hergeleitet. Ein spezielles Problem in diesem Zusammenhang, das bereits von CARTAN in [*4*] untersucht wurde (die entsprechende Fragestellung ist auch im algebraischen Fall von Interesse, vgl. [*22*]), läßt sich wie folgt beschreiben: Kann man ein r-tupel von holomorphen Funktionen, die auf einem komplexen Raum X erklärt sind und nirgends gleichzeitig verschwinden, mit einer auf X holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix in ein vorgegebenes r-tupel der gleichen Art transformieren? Ist X eine n-dimensionale holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit, so ist die Frage zu bejahen, wenn $r \leqq 2$ oder $2(r-1) \geqq n$ ist (Satz 7 und Folgerung). Beispiele zeigen, daß dieser Satz scharf ist.

1. Homotopiesätze

1. Ein komplexer Raum X (im Sinne von SERRE [*21*, *15*]) heißt holomorph-vollständig, wenn er holomorph-separabel, holomorph-konvex und Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist. Er heißt holomorph-separabel, wenn es zu jedem Punktepaar $x_1 \neq x_2$ aus X eine auf X holomorphe Funktion f gibt mit $f(x_1) \neq f(x_2)$; er heißt holomorph-konvex, wenn es zu jeder Punktfolge $x_1, x_2, \ldots$ ohne Häufungspunkt auf X eine auf X holomorphe Funktion f gibt mit $\limsup_{\nu \to \infty} |f(x_\nu)| = \infty$.

Eine abgeschlossene Teilmenge Y eines komplexen Raumes X heißt analytische Menge in X, wenn jeder Punkt aus Y eine offene Umgebung U in X besitzt, so daß $Y \cap U$ die genaue gemeinsame Nullstellenmenge von endlich vielen in U holomorphen Funktionen ist. Y kann in natürlicher Weise als komplexer Raum aufgefaßt werden. Ist X holomorph-vollständig, so auch Y.

Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit, G eine komplexe Liesche Gruppe und $(g, y) \to g \cdot y$ eine holomorphe Abbildung von $G \times M$ in M. G wirkt (vermöge dieser Abbildung) auf M, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$, $y \in M$ gilt: $(g_1 g_2) \cdot y = g_1 \cdot (g_2 \cdot y)$, $e \cdot y = y$; dabei ist e das Einselement in G. G wirkt transitiv auf M, wenn es zu je zwei Punkten $y_1, y_2 \in M$ ein $g \in G$ gibt mit $g \cdot y_1 = y_2$. Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß G abzählbare Topologie hat.

Der komplexe Raum E sei zusammen mit der surjektiven holomorphen Abbildung p: $E \to X$ ein holomorphes Faserbündel über X mit M als Faser und G als Strukturgruppe [*13*, *17*, *23*]. f_0 sei ein stetiger Schnitt von E über X und Y eine analytische Menge in X. Das Einheitsintervall [0, 1] der reellen Achse wird mit I bezeichnet. Eine stetige Abbildung F: $X \times I \to E$ mit den Eigenschaften

(a) $p(F(x,t)) = x$ für alle $x \in X$, $t \in I$,

(b) $F(x,t) = f_0(x)$ für alle $x \in Y$, $t \in I$,

(c) $F(x,0) = f_0(x)$ für alle $x \in X$

heißt eine Homotopie von f_0 relativ Y. Durch $f_t(x) := F(x,t)$ wird für jedes $t \in I$ ein Schnitt f_t von E über X definiert. f_0 und f_1 heißen homotop relativ Y.

Man sagt auch, f_0 läßt sich relativ Y in f_1 deformieren. Ist f_t für jedes $t \in I$ ein holomorpher Schnitt von E, so heißen f_0 und f_1 holomorph homotop relativ Y. Homotope Schnitte werden gelegentlich auch stetig homotop genannt, um den Unterschied zur holomorphen Homotopie zu betonen. Ist Y die leere Menge, so fällt der Zusatz „relativ Y" weg.

2. Es sei f: $Y \to E$ ein holomorpher Schnitt von E über Y. Die Menge der stetigen bzw. holomorphen Schnitte von E über X, die auf Y mit f übereinstimmen, wird durch die stetige bzw. holomorphe Homotopiebeziehung in Äquivalenzklassen eingeteilt. Die Menge der „stetigen Homotopieklassen" sei mit $\pi(f)$, die der „holomorphen Homotopieklassen" mit $\pi_\omega(f)$ bezeichnet. Im nachfolgenden Hauptsatz dieser Arbeit wird gezeigt, daß die kanonische Abbildung $\pi_\omega(f) \to \pi(f)$ bijektiv ist, falls X holomorph-vollständig ist und die Strukturgruppe G transitiv auf der Faser M wirkt.

Satz. *Es sei X ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, Y eine analytische Menge in X und E ein holomorphes Faserbündel über X, dessen Strukturgruppe G transitiv auf der Faser M wirkt. Dann gilt:*

(I) *Ist s ein stetiger Schnitt von E über X, dessen Beschränkung auf Y holomorph ist, so gibt es einen holomorphen Schnitt f von E über X, der zu s homotop relativ Y ist.*

(II) *Zwei holomorphe Schnitte f_0 und f_1 von E über X, die stetig homotop relativ Y sind, sind auch holomorph homotop relativ Y.*

X und X' seien komplexe Räume. Eine Abbildung F: $X \times I \to X'$ heißt holomorph, wenn es eine offene Umgebung U von I in der komplexen Ebene und eine holomorphe Abbildung $X \times U \to X'$ gibt, deren Beschränkung auf $X \times I$ mit der Abbildung F übereinstimmt. Es gilt der

Zusatz zu (II). *Es läßt sich eine f_0 und f_1 verbindende Homotopie F finden, die eine holomorphe Abbildung von $X \times I$ in E darstellt.*

Es ist klar, daß die Aussagen (I) und (II) richtig bleiben, wenn die Strukturgruppe G selbst nicht transitiv auf der Faser M wirkt, sondern nur Untergruppe einer auf M transitiv wirkenden komplexen Lieschen Gruppe L ist; dabei ist vorausgesetzt, daß G durch Einschränkung der Operation von L wirkt. Insbesondere gilt der Satz für Schnitte im Produktbündel $X \times M$, d.h. für Abbildungen eines holomorph-vollständigen komplexen Raumes X in eine komplexe Mannigfaltigkeit M, auf der eine komplexe Liesche Gruppe L transitiv wirkt.

3. Zum Beweis des Satzes wird ausgenutzt, daß die komplexe Mannigfaltigkeit M Quotient der komplexen Lieschen Gruppe G nach einer geeigneten Untergruppe ist. Es sei $y_0 \in M$ fest gewählt. Durch $\pi(g) := g \cdot y_0$ wird eine surjektive holomorphe Abbildung π: $G \to M$ definiert. $G_0 := \{g \in G: g \cdot y_0 = y_0\}$ ist eine abgeschlossene komplexe Untergruppe von G. Der Raum G/G_0 der Linksnebenklassen (Quotiententopologie) läßt sich mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen, so daß die kanonische Abbildung π': $G\to G/G_0$ holomorph und die durch π induzierte Abbildung $\tilde{\pi}$: $G/G_0\to M$ biholomorph ist. Es ist $\pi(g)=\tilde{\pi}(\pi'(g))$ für alle $g\in G$. Zu jedem Punkt $y\in M$ gibt es eine offene Umgebung V_y und eine holomorphe Abbildung ρ_y: $V_y\to G$ mit $\pi(\rho_y(y'))=y'$ für alle $y'\in V_y$ ([*17*], Satz 3.4.3).

Zum Bündel E gehören die folgenden Bestimmungsstücke: Eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von X, die holomorphen Koordinatenfunktionen Φ_j: $U_j\times M\to p^{-1}(U_j)$, die holomorphen Koordinatentransformationen g_{ij}: $U_i\cap U_j\to G$. Es sei $\Phi_{j,x}$: $M\to p^{-1}(x)$ definiert durch $\Phi_{j,x}(y):=\Phi_j(x,y)$, $x\in U_j$, $y\in M$. Ist $b\in E$ und $p(b)=x\in U_j$, so sei $p_j(b):=\Phi_{j,x}^{-1}(b)$. Dann ist p_j eine holomorphe Abbildung von $p^{-1}(U_j)$ in M und $\Phi_j(x,p_j(b))=b$.

4. *Beweis von Aussage* (I). Der stetige Schnitt s: $X\to E$ ist vorgegeben; $s|Y$ ist holomorph. Man kann die Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von X so fein wählen, daß $p_j(s(U_j))$ in einer offenen Menge V_j von M enthalten ist, in der eine holomorphe Abbildung ρ_j: $V_j\to G$ existiert mit $\pi(\rho_j(y))=y$ für alle $y\in V_j$. Die Abbildung $s_j:=\rho_j\circ p_j\circ s$ von U_j in G ist stetig, ihre Beschränkung auf $U_j\cap Y$ ist holomorph. Es ist $\pi\circ s_j=p_j\circ s$ und $\Phi_j(x,\pi(s_j(x)))=s(x)$ für $x\in U_j$. Wir dürfen außerdem annehmen, daß die U_j holomorph-konvex sind.

Es sei $s_{ij}(x):=(s_i(x))^{-1}g_{ij}(x)\,s_j(x)$ für $x\in U_i\cap U_j$. Es ist $\pi(s_i(x))=g_{ij}(x)\cdot\pi(s_j(x))=\pi(g_{ij}(x)\,s_j(x))$ für $x\in U_i\cap U_j$. Folglich ist s_{ij} eine stetige Abbildung von $U_i\cap U_j$ in G_0; die Beschränkung $s_{ij}|U_i\cap U_j\cap Y$ ist holomorph. Es gilt $s_{ij}(x)\,s_{jk}(x)=s_{ik}(x)$ für $x\in U_i\cap U_j\cap U_k$. Im nachfolgenden Hilfssatz wird bewiesen, daß es stetige Abbildungen r_j: $U_j\to G_0$ gibt, so daß r_j in $U_j\cap Y$ und $h_{ij}:=r_i\,s_{ij}\,r_j^{-1}$ in $U_i\cap U_j$ holomorph sind. Interpretiert man h_{ij} als holomorphe Abbildung $U_i\cap U_j\to G$, so gilt $h_{ij}=r_i\,s_i^{-1}g_{ij}(r_j\,s_j^{-1})^{-1}$. Nach [*12*], Satz 11a, gibt es holomorphe Abbildungen h_j: $U_j\to G$, so daß $h_{ij}=h_i\,g_{ij}\,h_j^{-1}$ ist.

Es ist $s_i\,r_i^{-1}h_i=g_{ij}\,s_j\,r_j^{-1}h_j\,g_{ji}$ in $U_i\cap U_j$. Es sei Q das holomorphe Faserbündel über X, das aus den cartesischen Produkten $U_j\times G$ entsteht, indem man für $x\in U_i\cap U_j$ die Paare $(x,g)\in U_j\times G$ und $(x,g_{ij}(x)\,g\,g_{ji}(x))\in U_i\times G$ identifiziert. q: $Q\to X$ sei die holomorphe Bündelabbildung. Die Familie $(s_j\,r_j^{-1}h_j)_{j\in J}$ definiert einen stetigen Schnitt r: $X\to Q$, dessen Beschränkung auf Y holomorph ist. Nach [7], Théorème 1 bis, gibt es einen holomorphen Schnitt h: $X\to Q$, der vermöge einer stetigen Abbildung H: $X\times I\to Q$ zu r homotop relativ Y ist: $q(H(x,t))=x$ für $x\in X$, $t\in I$, $H(x,0)=r(x)$, $H(x,1)=h(x)$ für $x\in X$, $H(x,t)=r(x)$ für $x\in Y$, $t\in I$. Die Homotopie H definiert für jedes $j\in J$ eine stetige Abbildung c_j: $U_j\times I\to G$, deren Beschränkung auf $(U_j\cap Y)\times I$ holomorph ist und für die gilt: $c_i(x,t)=g_{ij}(x)\,c_j(x,t)\,g_{ji}(x)$ für $x\in U_i\cap U_j$, $t\in I$, $c_j(x,0)=s_j(x)(r_j(x))^{-1}h_j(x)$ für $x\in U_j$, $c_j(x,t)=c_j(x,0)$ für $x\in U_j\cap Y$, $t\in I$.

Da $h_{ij}(x)$ in G_0 liegt für $x\in U_i\cap U_j$, ist

$$\pi\big((h_i(x))^{-1}\big)=\pi\big(g_{ij}(x)\,(h_j(x))^{-1}\big).$$

Folglich ist

$$c_i(x,t)\cdot\pi\big((h_i(x))^{-1}\big)=g_{ij}(x)\,c_j(x,t)\,g_{ji}(x)\cdot\pi\big(g_{ij}(x)(h_j(x))^{-1}\big),$$

also

$$\pi\big(c_i(x,t)(h_i(x))^{-1}\big)=g_{ij}(x)\cdot\pi\big(c_j(x,t)(h_j(x))^{-1}\big)$$

für $x\in U_i\cap U_j$, $t\in I$. Die $\pi\big(c_j(x,t)(h_j(x))^{-1}\big)$, $j\in J$, definieren daher eine stetige Abbildung $S\colon X\times I\to E$ mit $p(S(x,t))=x$ für $x\in X$, $t\in I$. Es ist $S(x,t)=S(x,0)$ für $x\in Y$, $t\in I$. Für $x\in U_j$ gilt:

$$\begin{aligned}S(x,0)&=\Phi_j\big(x,\pi(c_j(x,0)(h_j(x))^{-1})\big)=\Phi_j\big(x,\pi(s_j(x)(r_j(x))^{-1})\big)\\&=\Phi_j\big(x,\pi(s_j(x))\big)=s(x).\end{aligned}$$

Da $c_j(x,1)$ holomorph von x abhängt, wird durch $f(x):=S(x,1)$ ein holomorpher Schnitt $f\colon X\to E$ definiert; f und s sind homotop relativ Y.

5. Zum vollständigen Beweis von Aussage (I) fehlt noch der Nachweis der Existenz der Abbildungen $r_j\colon U_j\to G_0$ mit den benutzten Eigenschaften.

Hilfssatz. *Es sei X ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, Y eine analytische Menge in X und L eine komplexe Liesche Gruppe. $(U_j)_{j\in J}$ sei eine offene Überdeckung von X mit holomorph-konvexen U_j. In allen Durchschnitten $U_i\cap U_j$ seien stetige Abbildungen $s_{ij}\colon U_i\cap U_j\to L$ gegeben mit $s_{ij}(x)\,s_{jk}(x)=s_{ik}(x)$ für $x\in U_i\cap U_j\cap U_k$. Die Beschränkung von s_{ij} auf $U_i\cap U_j\cap Y$ sei holomorph. Dann gibt es stetige Abbildungen $r_j\colon U_j\to L$, $j\in J$, so daß r_j in $U_j\cap Y$ und $r_i\,s_{ij}\,r_j^{-1}$ in $U_i\cap U_j$ holomorph sind.*

Beweis. Jedenfalls gibt es nach [12], Satz 12, stetige Abbildungen $c_j\colon U_j\to L$, so daß $f_{ij}:=c_i\,s_{ij}\,c_j^{-1}$ in $U_i\cap U_j$ holomorph ist. Es ist $s_{ij}f_{ji}=c_i^{-1}f_{ij}\,c_j\,f_{ji}$. Es sei Q das holomorphe Faserbündel über X, das durch Verkleben der cartesischen Produkte $U_j\times L$ vermöge der Vorschrift $U_j\times L\ni(x,l)\to(x,f_{ij}(x)\,l\,f_{ji}(x))\in U_i\times L$, $x\in U_i\cap U_j$, $l\in L$, entsteht. $q\colon Q\to X$ sei die holomorphe Bündelabbildung, $\Psi_j\colon U_j\times L\to q^{-1}(U_j)$, $j\in J$, seien die Koordinatenfunktionen. Durch $\sigma_j(x):=\Psi_j(x,c_j(x))$ wird ein Schnitt σ_j von Q über U_j definiert. Ist $\tilde\sigma_j$ mit $\tilde\sigma_j(x)=\Psi_j(x,\tilde c_j(x))$ ein weiterer Schnitt von Q über U_j, so wird das Produkt $\sigma_j\,\tilde\sigma_j$ durch $\sigma_j(x)\,\tilde\sigma_j(x):=\Psi_j(x,c_j(x)\,\tilde c_j(x))$ erklärt. Ferner sei $(\sigma_j(x))^{-1}:=\Psi_j(x,(c_j(x))^{-1})$. Es gilt für $x\in U_i\cap U_j$:

$$\begin{aligned}(\sigma_i(x))^{-1}\,\sigma_j(x)&=\Psi_i\big(x,(c_i(x))^{-1}f_{ij}(x)\,c_j(x)\,f_{ji}(x)\big)\\&=\Psi_i\big(x,s_{ij}(x)\,f_{ji}(x)\big)=:\sigma_{ij}(x).\end{aligned}$$

σ_{ij} ist Schnitt von Q über $U_i\cap U_j$. Im Durchschnitt $U_i\cap U_j\cap U_k$ gilt $\sigma_{ij}\,\sigma_{jk}=\sigma_{ik}$.

Es liegt also folgende Situation vor: In allen Durchschnitten $U_i\cap U_j$ sind Schnitte σ_{ij} von Q gegeben mit folgenden Eigenschaften: (a) $\sigma_{ij}(x)\,\sigma_{jk}(x)=\sigma_{ik}(x)$ für $x\in U_i\cap U_j\cap U_k$, (b) $\sigma_{ij}\,|\,U_i\cap U_j\cap Y$ ist holomorph, (c) $\sigma_{ij}=\sigma_i^{-1}\sigma_j$

mit stetigen Schnitten σ_j von Q über U_j. Gesucht sind stetige Schnitte ρ_j von Q über U_j, so daß gilt: (d) $\rho_j | U_j \cap Y$ ist holomorph, (e) $\sigma_{ij} = \rho_i^{-1} \rho_j$. Ist diese Aufgabe gelöst, so ist der Hilfssatz sofort bewiesen. Denn die Schnitte ρ_j schreiben sich in der Form $\Psi_j(x, r_j(x))$ mit stetigen Abbildungen r_j: $U_j \to L$, deren Beschränkung auf $U_j \cap Y$ holomorph ist. Wegen (e) ist $r_i^{-1} f_{ij} r_j f_{ji} = s_{ij} f_{ji}$, d.h. $r_i s_{ij} r_j^{-1}$ und $r_j | U_j \cap Y$ sind holomorph.

Die Schnitte ρ_j mit den Eigenschaften (d) und (e) gewinnt man wie folgt: Nach [*12*], Satz 11, gibt es holomorphe Schnitte μ_j von Q über $U_j \cap Y$ mit der Eigenschaft $\sigma_{ij} = \mu_i^{-1} \mu_j$ in $U_i \cap U_j \cap Y$. Es ist $\sigma_i \mu_i^{-1} = \sigma_j \mu_j^{-1}$ in $U_i \cap U_j \cap Y$. Durch $\sigma(x) := \sigma_j(x)(\mu_j(x))^{-1}$ für $x \in U_j \cap Y$ ist ein stetiger Schnitt σ: $Y \to Q$ definiert. Nach [*12*], Satz 6, gibt es über Y einen holomorphen Schnitt φ von Q, der zu σ homotop ist. Es sei e das Einselement von L; es ist $\Psi_i(x, e) = \Psi_j(x, e)$ für $x \in U_i \cap U_j$. Der so definierte holomorphe Schnitt von Q sei mit η bezeichnet. $\varphi \, \sigma^{-1}$ ist zu $\eta | Y$ homotop. Es bleibt zu zeigen, daß ein Schnitt λ von Q über X existiert mit $\lambda | Y = \varphi \, \sigma^{-1}$. Dann genügen die Schnitte $\rho_j := \lambda \, \sigma_j$ den Forderungen (d) und (e): $\rho_j | U_j \cap Y = \varphi \, \sigma^{-1} \sigma_j = \varphi \, \mu_j \, \sigma_j^{-1} \sigma_j = \varphi \, \mu_j$ ist holomorph und $\rho_i^{-1} \rho_j = \sigma_i^{-1} \sigma_j = \sigma_{ij}$.

Die Existenz von λ ergibt sich so: Es sei Θ: $Y \times I \to Q$ eine Homotopie von $\eta | Y$ mit $\Theta(x, 0) = \eta(x)$, $\Theta(x, 1) = \varphi(x)(\sigma(x))^{-1}$ für $x \in Y$. Dann gilt: Θ kann zu einer Homotopie Λ: $X \times I \to Q$ von η erweitert werden, $\Lambda(x, 0) = \eta(x)$, $\lambda(x) := \Lambda(x, 1)$. Zum Nachweis dieser Behauptung wird X durch eine Folge analytischer Polyeder P_ν ausgeschöpft,

$$P_{\nu-1} \subset \mathring{P}_\nu, \qquad X = \bigcup_\nu \mathring{P}_\nu .$$

Jedes Polyeder P_ν gestattet eine endliche simpliziale Zerlegung, so daß $P_{\nu-1} \cup (P_\nu \cap Y)$ Träger eines Unterkomplexes ist. Dies läßt sich mit Hilfe eines Triangulationssatzes von Koopman-Brown [*18*] zeigen (vgl. hierzu [*11*] und [*24*], p. 359). Aus Theorem 34.9 (Extension of a homotopy) in [*23*] folgt dann die Behauptung. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 1. *Es sei X ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, Y eine analytische Menge in X und E ein holomorphes Faserbündel über X, dessen Strukturgruppe transitiv auf der Faser wirkt. f sei ein holomorpher Schnitt von E über Y. Ist ein s stetiger Schnitt von E über X, dessen Beschränkung auf Y zu f homotop ist, so läßt sich f zu einem holomorphen Schnitt von E über X fortsetzen.*

Beweis. Zunächst folgt nach dem gleichen Verfahren wie am Ende des Beweises des Hilfssatzes — Fortsetzung einer Homotopie — daß sich f zu einem stetigen Schnitt von E über X erweitern läßt. Aussage (I) garantiert dann, daß sich f auch zu einem holomorphen Schnitt von E über X fortsetzen läßt.

6. *Beweis von Aussage* (II). Es sei $D := \{z \in \boldsymbol{C}: |z - \frac{1}{2}| < 1\}$. Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung S': $X \times I \to E$ mit folgenden Eigenschaften: $p(S'(x, t)) = x$ für $x \in X$, $t \in I$, $S'(x, 0) = f_0(x)$, $S'(x, 1) = f_1(x)$ für $x \in X$,

$S'(x,t)=f_0(x)$ für $x\in Y$, $t\in I$. Das Intervall I ist Retrakt von D, r: $D\to I$ sei eine retrahierende Abbildung. Durch $S(x,z):=S'(x,r(z))$ wird eine stetige Abbildung S: $X\times D\to E$ erklärt. Es ist $p(S(x,z))=x$ für $x\in X$, $z\in D$ und $S(x,z)=f_0(x)$ für $x\in Y$, $z\in D$.

Die durch $q(b,z):=(p(b),z)$, $b\in E$, $z\in D$, definierte holomorphe Abbildung q: $E\times D\to X\times D$ macht $E\times D$ zu einem holomorphen Faserbündel über $X\times D$ mit M als Faser und G als Strukturgruppe. Der Basisraum $X\times D$ ist holomorph-vollständig. Z sei die in $X\times D$ analytische Menge $(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})\cup(Y\times D)$. Es sei $\tilde{S}(x,z):=(S(x,z),z)$, dann ist $q(\tilde{S}(x,z))=(p(S(x,z)),z)=(x,z)$ für $(x,z)\in X\times D$. Also ist $\tilde{S}$: $X\times D\to E\times D$ ein stetiger Schnitt von $E\times D$. Seine Beschränkung auf Z ist holomorph.

Nach Aussage (I) gibt es einen holomorphen Schnitt $\tilde{F}$: $X\times D\to E\times D$ der zu $\tilde{S}$ homotop relativ Z ist. Es sei α: $E\times D\to E$ die Projektion $\alpha(b,z)=b$ und $F:=\alpha\circ\tilde{F}$. Wegen $q(\tilde{F}(x,z))=(x,z)$ und $q(b,z)=(p(b),z)$ ist $\tilde{F}(x,z)=(F(x,z),z)$ und $p(F(x,z))=x$ für $x\in X$, $z\in D$. Also ist F: $X\times D\to E$ für jedes $z\in D$ ein holomorpher Schnitt von E über X. Es ist $F|Z=S|Z$, also $F(x,0)=S(x,0)=S'(x,r(0))=S'(x,0)=f_0(x)$, $F(x,1)=f_1(x)$ für $x\in X$ und $F(x,z)=S(x,z)=f_0(x)$ für $x\in Y$, $z\in D$. Aussage (II) und der Zusatz sind damit bewiesen.

7. Gelegentlich ist die Frage von Interesse, ob man eine Abbildung in den Basisraum eines Faserbündels zu einer Abbildung in den Bündelraum liften kann. Für holomorphe Faserbündel der hier betrachteten Art beweisen wir den folgenden

Satz 2. *Es sei X ein komplexer Raum und E ein holomorphes Faserbündel über X, dessen Strukturgruppe transitiv auf der Faser wirkt. p: $E\to X$ sei die holomorphe Bündelabbildung. Ferner sei X' ein holomorph-vollständiger komplexer Raum und f: $X'\to X$ eine holomorphe Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Zu jeder stetigen Abbildung s: $X'\to E$ mit $f=p\circ s$ gibt es eine homotope holomorphe Abbildung h: $X'\to E$ mit $f=p\circ h$.*

(b) *Ist F: $X'\times I\to X$ eine holomorphe Abbildung mit $f(x)=F(x,0)$ für $x\in X'$ und existiert eine holomorphe Abbildung h: $X'\to E$ mit $f=p\circ h$, so gibt es auch eine holomorphe Abbildung H: $X'\times I\to E$ mit $H(x,0)=h(x)$ und $F(x,t)=p(H(x,t))$ für $x\in X'$, $t\in I$.*

Beweis. (a) Die Abbildung f induziert ein holomorphes Faserbündel E' über X' mit derselben Faser und Strukturgruppe wie E. Man bekommt E' bekanntlich auf die folgende Weise: p': $X'\times E\to X'$ und g: $X'\times E\to E$ seien die kanonischen Projektionen des Produktraumes $X'\times E$. Dann ist $E':=\{(x,b)\in X'\times E: f(x)=p(b)\}$. E' ist das Urbild der Diagonalen in $X\times X$ vermöge der holomorphen Abbildung $f\times p$: $X'\times E\to X\times X$, folglich eine analytische Menge in $X'\times E$. Es ist $p(g(b'))=f(p'(b'))$ für $b'\in E'$. Es sei jetzt s: $X'\to E$ eine stetige Abbildung mit $f=p\circ s$. Durch $\sigma(x):=(x,s(x))$ wird ein stetiger Schnitt σ: $X'\to E'$ definiert. Nach Aussage (I) gibt es einen zu σ homotopen holomorphen Schnitt φ von E' über X'. $h := g \circ \varphi$ ist eine holomorphe Abbildung $X' \to E$. Es ist $p \circ h = p \circ g \circ \varphi = f \circ p' \circ \varphi = f$. Ferner sind h und s homotop.

(b) Es gibt in der komplexen Ebene ein Rechteck $R := \{z \in C : -\varepsilon < \mathrm{Re}(z) < 1+\varepsilon, -\delta < \mathrm{Im}(z) < \delta\}$, $\varepsilon, \delta > 0$, so daß die Abbildung F in $X' \times R$ erklärt und holomorph ist. $\tilde{E}$ sei das durch E und F induzierte Faserbündel über $X' \times R$. Die holomorphe Abbildung h definiert einen holomorphen Schnitt λ von $\tilde{E}$ über der analytischen Menge $X' \times \{0\}$. Nach bekannten Sätzen über Faserbündel (z.B. [23], § 11) gibt es ein offenes Rechteck R' mit $I \subset R' \subset R$ und einen stetigen Schnitt von $\tilde{E}$ über $X' \times R'$, der auf $X' \times \{0\}$ mit λ übereinstimmt. $X' \times R'$ ist holomorph-vollständig. Also gibt es nach Satz 1 einen holomorphen Schnitt Λ von $\tilde{E}$ über $X' \times R'$ mit $\Lambda(x, 0) = \lambda(x, 0)$ für $x \in X'$. Λ definiert eine holomorphe Abbildung H: $X' \times R' \to E$ mit $F(x, t) = p(H(x, t))$, $H(x, 0) = h(x)$ für $x \in X'$, $t \in I$.

2. Anwendungen und Beispiele

1. Gegeben seien eine n-dimensionale holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit X, eine m-dimensionale singularitätenfreie analytische Menge Y in X und r auf Y holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ ohne gemeinsame Nullstellen. Bekanntlich [6] läßt sich jede Funktion f_ρ zu einer in X holomorphen Funktion fortsetzen. Wann ist diese Erweiterung so möglich, daß die fortgesetzten Funktionen auch in X keine gemeinsamen Nullstellen haben?

Es sei C_r^* der komplexe Zahlenraum C^r ohne den Nullpunkt. Die r holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ vermitteln eine holomorphe Abbildung f: $Y \to C_r^*$. Die komplexe Liesche Gruppe $GL(r, C)$ wirkt transitiv auf C_r^*. Aus Satz 1 folgt, daß eine gewünschte holomorphe Fortsetzung h: $X \to C_r^*$ sicher dann existiert, wenn es eine stetige Fortsetzung s: $X \to C_r^*$ der Abbildung f gibt.

Wir dürfen annehmen, daß die analytische Menge Y Träger eines abgeschlossenen Unterkomplexes einer simplizialen Zerlegung von X ist ([11], Satz 4). Die Homotopiegruppen $\pi_i(C_r^*)$ bestehen für $0 \leqq i < 2r-1$ nur aus dem Nullelement. Nach bekannten Sätzen der Hindernistheorie (z.B. [5], Exp. 3, Théorème 1) ist die Abbildung f sicher dann stetig nach X fortsetzbar, wenn die relativen Cohomologiegruppen $H^{i+1}(X, Y; \pi_i(C_r^*)) = 0$ sind für $i \geqq 2r-1$.

Ist X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n und A eine beliebige abelsche Gruppe, so gilt für die Cohomologiegruppen $H^i(X, A)$ nach [2], Theorem 1, Corollary:

$$(*) \qquad H^i(X, A) = 0 \quad \text{für} \quad i > n.$$

Aus dieser Tatsache und aus der exakten Cohomologiesequenz des Paares (X, Y) folgt, daß $H^{i+1}(X, Y; \pi_i(C_r^*)) = 0$ ist für $i \geqq 2r-1$, falls nur $2r \geqq n+1$ ist. Damit ist die folgende Aussage bewiesen:

Satz 3. *Es sei X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n und Y eine m-dimensionale singularitätenfreie analytische Menge in X. Auf Y seien r holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ ohne gemeinsame Nullstellen* *gegeben. Ist dann* $r \geqq 1 + [n/2]$, *so gibt es* r *in* X *holomorphe Funktionen* $h_1, \ldots, h_r$ *ohne gemeinsame Nullstellen, so daß* f_ρ *mit der Beschränkung von* h_ρ *auf* Y *übereinstimmt,* $\rho = 1, \ldots, r$.

Dabei bezeichnet $[n/2]$ die größte ganze Zahl $\leqq n/2$. Ist etwa $X = C^n$, so genügt für Satz 3 die eventuell schwächere Voraussetzung

$$r \geqq 1 + \left[\frac{m+1}{2}\right].$$

2. Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, C)$ wird mit L_n bezeichnet. $L_{n,r}$ sei diejenige Untergruppe von L_n, die die ersten r Einheitsvektoren $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ des C^n festläßt, $L^*_{n,r} := \{l \in L_{n,r} \colon l_0^{-1}\, l l_0 \in L_{n,r}$ für alle $l_0 \in L_n\}$ ist der größte in $L_{n,r}$ enthaltene Normalteiler von L_n. Die komplexe Liesche Gruppe $L_n/L^*_{n,r}$ wirkt durch Linkstranslation effektiv und transitiv auf der komplexen Mannigfaltigkeit $L_n/L_{n,r}$ der Linksnebenklassen $l_0 L_{n,r}$, $l_0 \in L_n$.

Es sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Ein r-tupel von stetigen (holomorphen) Feldern von kontravarianten Tangentialvektoren auf X, die in jedem Punkt von X komplex linear unabhängig sind, wird stetiges (holomorphes) r-Feld genannt. Es läßt sich auffassen als stetiger (holomorpher) Schnitt in einem holomorphen Faserbündel E über X, das $L_n/L_{n,r}$ als Faser und $L_n/L^*_{n,r}$ als Strukturgruppe hat. GRAUERT hat in [*13*] bewiesen: Existiert auf einer holomorph-vollständigen Mannigfaltigkeit X ein stetiges r-Feld, so gibt es auf X auch ein holomorphes r-Feld. Diese Aussage läßt sich verschärfen, es gilt

Satz 4. *Es sei X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Dann läßt sich jedes stetige r-Feld auf X über lauter stetige r-Felder in ein holomorphes r-Feld deformieren. Ist*

$$r \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

so gibt es stetige r-Felder auf X.

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Aussage (I) des Hauptsatzes. Weiter ergibt sich aus der Hindernistheorie, daß E einen stetigen Schnitt hat, falls $H^i(X, \pi_{i-1}(L_n/L_{n,r})) = 0$ ist für $i = 1, \ldots, 2n$. Das ist richtig für $i < 2n - 2r + 2$, weil $\pi_i(L_n/L_{n,r}) = 0$ ist für $i < 2n - 2r + 1$. Es gilt wegen $(*)$ für alle $i \geqq 1$, falls noch $2n - 2r + 2 > n$, also

$$r \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

ist.

3. Es sei X ein komplexer Raum. a sei eine holomorphe Matrix auf X (d.h. die Elemente von a sind auf X holomorphe Funktionen) mit k Spalten und r Zeilen, $k \leqq r$. Hat a in jedem Punkt von X den Rang k, so heißt a eine holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix. Es sei $k < r$ und m eine natürliche Zahl mit $k < m \leqq r$. Gibt es dann auf X eine holomorphe nirgends singuläre

$(r \times m)$-Matrix, deren erste k Spalten von der Matrix a gebildet werden, so sagen wir, a ist zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times m)$-Matrix ergänzbar. Ist etwa $k=r-1$ und $m=r$, so ist die holomorphe Ergänzbarkeit stets möglich, falls X holomorph-vollständig ist. Das folgt z.B. daraus, daß es zu r auf X holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ ohne gemeinsame Nullstellen stets weitere auf X holomorphe Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ gibt mit $f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r = 1$.

Die analoge Frage für den Fall, daß X ein Quader im $\boldsymbol{R}^n$ und a eine stetige nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix ist (die Elemente von a sind stetige Funktionen auf X), wurde 1935 von WAZEWSKI [25] behandelt und in bejahendem Sinn beantwortet. ECKMANN [8] löste das Problem für den Fall, daß X ein zusammenziehbarer simplizialer Komplex ist. Die Lösung ist eine einfache Folgerung aus Sätzen über Faserbündel (vgl. auch [9]).

Die oben formulierte holomorphe Fragestellung wurde 1940 von CARTAN [4] für den Spezialfall $k=1$, $m=r$ behandelt. CARTAN bewies die Aussage, daß es zu r holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_r$, die auf einem Zylindergebiet mit lauter einfach zusammenhängenden Projektionen erklärt sind und dort keine gemeinsamen Nullstellen haben, stets eine holomorphe nirgends singuläre $(r \times r)$-Matrix gibt, die den Vektor $(f_1, \ldots, f_r)$ in den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ transformiert.

4. Wir werden dieses Resultat etwas verallgemeinern. Es sei W_{rk} die komplexe Stiefelsche Mannigfaltigkeit der komplexen Matrizen mit k Spalten, r Zeilen $(k \leqq r)$ und dem Rang k. Ferner sei wieder $L_r = GL(r, \boldsymbol{C})$ und $L_{r,k}$ diejenige Untergruppe von L_r, die die ersten k Einheitsvektoren des $\boldsymbol{C}^r$ einzeln festläßt. Es ist $W_{rr} = L_r$ und $W_{r1} = \boldsymbol{C}_r^*$. Läßt man in jeder $(r \times i)$-Matrix die letzten $i-j$ Spalten weg, $1 \leqq j < i \leqq r$, so bekommt man eine holomorphe Abbildung $p_{ij}\colon W_{ri} \to W_{rj}$. Bekanntlich ist W_{ri} zusammen mit p_{ij} ein holomorphes Faserbündel über W_{rj}, seine Faser ist $L_{r,j}/L_{r,i}$, die Strukturgruppe ist $L_{r,j}/L_{r,i}^*$ mit $L_{r,i}^* := \{l \in L_{r,i}\colon l_0^{-1} l l_0 \in L_{r,i}$ für alle $l_0 \in L_{r,j}\}$. Sie wirkt durch Linkstranslation effektiv und transitiv auf der Faser.

Eine holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix a auf X läßt sich als holomorphe Abbildung $a\colon X \to W_{rk}$ auffassen und umgekehrt. Die Matrix a läßt sich genau dann zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times m)$-Matrix b, $k < m$, ergänzen, wenn es eine holomorphe Abbildung $b\colon X \to W_{rm}$ gibt mit $a = p_{mk} \circ b$. Aus Satz 2a folgt

Satz 5. *Es sei X ein holomorph-vollständiger komplexer Raum. Die auf X holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix a sei zu einer stetigen nirgends singulären $(r \times m)$-Matrix b_1 ergänzbar. Dann ist a auch zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times m)$-Matrix b ergänzbar. Eine solche holomorphe Abbildung $b\colon X \to W_{rm}$ läßt sich in der Homotopieklasse der stetigen Abbildung $b_1\colon X \to W_{rm}$ finden.*

Beispiele. (1) Ist r gerade, so läßt sich jede holomorphe nirgends singuläre $(r \times 1)$-Matrix a zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times 2)$-Matrix b ergänzen.

Ist nämlich $r=2q$ und $a=(f_1, \ldots, f_{2q})$, so hat die stetige Matrix

$$b_1=\begin{pmatrix} f_1 f_2 & \cdots & f_{2q-1} f_{2q} \\ -\bar{f}_2 \bar{f}_1 & \cdots & -\bar{f}_{2q} \bar{f}_{2q-1} \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt $x \in X$ den Rang 2.

(2) Ist der holomorph-vollständige Raum X stetig auf einen Punkt zusammenziehbar, so läßt sich jede holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix auf X zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times r)$-Matrix ergänzen.

Eine weitere einfache Folgerung aus Aussage (II) und Satz 2b ist der

Satz 6. *Es sei X ein holomorph-vollständiger komplexer Raum. Die auf X holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix a sei zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times m)$-Matrix b ergänzbar. Dann ist auch jede auf X holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix a', die zu a homotop ist (d.h. die Abbildungen $a, a': X \to W_{rk}$ sind homotop), zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times m)$-Matrix b' ergänzbar. Man kann eine Matrix b' derart finden, daß die holomorphen Abbildungen $b, b': X \to W_{rm}$ holomorph homotop sind.*

Insbesondere läßt sich also jede holomorphe Matrix a: $X \to W_{rk}$, die zu einer konstanten $(r \times k)$-Matrix vom Rang k homotop ist, zu einer holomorphen Matrix b: $X \to W_{rr}$ ergänzen. Darauf stützt sich die folgende Aussage.

Satz 7. *Es sei X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Dann ist jede auf X holomorphe nirgends singuläre $(r \times k)$-Matrix a zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times r)$-Matrix b ergänzbar, falls entweder*

$$r-k=1 \quad \textit{oder} \quad r-k \geqq \left[\frac{n+1}{2}\right] \quad \textit{oder} \quad n \leqq 4$$

ist.

Beweis. Der Fall $k=r-1$ ist bereits früher erwähnt. Ist $n \leqq 4$, so ist stets eine der beiden anderen Bedingungen erfüllt. Ist

$$r-k \geqq \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

also $2r-2k \geqq n$, so ist wegen $(*)$ sicher $H^i(X, \pi_i(W_{rk}))=H^{i+1}(X, \pi_i(W_{rk}))=0$ für $i \geqq 2r-2k+1$. Ferner ist $\pi_i(W_{rk})=0$ für $i<2r-2k+1$. Nach bekannten Aussagen der Hindernistheorie (z.B. [5], Exp. 3, Théorème 2) ist daher jede stetige Abbildung $X \to W_{rk}$ zu einer konstanten Abbildung homotop.

Folgerung. *Es sei X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. $f=(f_1, \ldots, f_r)$ und $g=(g_1, \ldots, g_r)$ seien zwei holomorphe Abbildungen $X \to \mathbf{C}_r^*$. Ist dann*

$$r \geqq 1+\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

so gibt es eine holomorphe Matrix a: $X \to GL(r, \mathbf{C})$, die den Vektor f in den Vektor g transformiert. Die Aussage ist für $r=1$ oder 2 immer richtig. Daraus folgt, daß sie für $n \leqq 4$ und jedes $r \geqq 1$ richtig ist.

5. *Beispiele.* (1) Die Bedingung

$$r \geqq 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

in der Folgerung läßt sich im allgemeinen nicht verbessern, genauer: Zu jedem Paar (n, r) ganzer Zahlen mit

$$3 \leqq r \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

gibt es eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit X der komplexen Dimension n – für $n \geqq 2r$ sogar ein Holomorphiegebiet im $\boldsymbol{C}^n$ – und r auf X holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ ohne gemeinsame Nullstellen, so daß die holomorphe $(r \times 1)$-Matrix $f = (f_1, \ldots, f_r)$ nicht zu einer holomorphen nirgends singulären $(r \times r)$-Matrix b ergänzbar ist.

Es genügt, die Fälle $n = 2r - 1$ und $n = 2r$ zu betrachten (sonst multipliziere man mit einem geeigneten $\boldsymbol{C}^d$). Man wähle $X := \{(z_1, \ldots, z_{2r}) \in \boldsymbol{C}^{2r}: z_1^2 + \cdots + z_{2r}^2 = 1\}$, falls $n = 2r - 1$ ist und $X := \{(z_1, \ldots, z_{2r}) \in \boldsymbol{C}^{2r}: |z_1^2 + \cdots + z_{2r}^2 - 1| < 1\}$, falls $n = 2r$ ist. Beide Mannigfaltigkeiten sind holomorph-vollständig, die letzte ist sogar ein Holomorphiegebiet im $\boldsymbol{C}^n$. Die $(r \times 1)$-Matrix $f = (f_1, \ldots, f_r)$ mit $f_\rho(z_1, \ldots, z_{2r}) := z_{2\rho-1} + i z_{2\rho}$ für $(z_1, \ldots, z_{2r}) \in X$, $\rho = 1, \ldots, r$, läßt sich nicht in der gewünschten Weise ergänzen.

Es sei $z_\rho := x_\rho + i y_\rho$, $\rho = 1, \ldots, 2r$. f stellt eine holomorphe Abbildung von X in $\boldsymbol{C}_r^*$ dar; ihre Beschränkung auf die in X enthaltene $(2r-1)$-Sphäre

$$\{(z_1, \ldots, z_{2r}) \in \boldsymbol{C}^{2r}: x_1^2 + \cdots + x_{2r}^2 = 1, y_1 = \cdots = y_{2r} = 0\}$$

bildet diese homöomorph auf die $(2r-1)$-Sphäre

$$S_{2r-1} := \{(w_1, \ldots, w_r) \in \boldsymbol{C}^r: w_1 \bar{w}_1 + \cdots + w_r \bar{w}_r = 1\}$$

ab. Die unitäre Gruppe $U(r)$ ist zusammen mit der Projektionsabbildung $p := p_{r1} | U(r)$ ein Bündel über S_{2r-1}.

Könnte man $f = (f_1, \ldots, f_r)$ zu einer holomorphen Matrix $b: X \to GL(r, \boldsymbol{C})$ ergänzen, so ließe sich aus der Abbildung b in naheliegender Weise ein stetiger Schnitt im Bündel $p: U(r) \to S_{2r-1}$ konstruieren. Ein solcher existiert aber nicht, falls $r \geqq 3$ ist (vgl. z.B. [*1*], [*3*]).

(2) Andrerseits gibt es natürlich holomorphe Abbildungen $f: X \to \boldsymbol{C}_r^*$, die sich nicht auf eine konstante Abbildung deformieren lassen, die man aber doch zu einer holomorphen Abbildung $b: X \to GL(r, \boldsymbol{C})$ liften kann, $f = p_{r1} \circ b$. Ein einfaches Beispiel ist das folgende. $X := GL(r, \boldsymbol{C})$ ist Holomorphiegebiet im $\boldsymbol{C}^{r^2}$. Die Funktion f_ρ ordne dem Punkt $x \in X$ das Element in der ersten Spalte und ρ-ten Zeile der Matrix x zu, $\rho = 1, \ldots, r$. $f = (f_1, \ldots, f_r)$ ist eine holomorphe Abbildung von X in $\boldsymbol{C}_r^*$. Sie ist identisch mit der Bündelabbildung $p_{r1}: GL(r, \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}_r^*$. f läßt sich zur identischen Abbildung von X liften, ist aber nicht zu einer konstanten Abbildung homotop.

Literatur

[1] ADAMS, J.F.: Applications of the Grothendieck-Atiyah-Hirzebruch functor $K(X)$. Colloquium on Algebraic Topology. Aarhus 1962.
[2] ANDREOTTI, A., and R. NARASIMHAN: A topological property of Runge pairs. Ann. of Math. **76**, 499—509 (1962).
[3] BOREL, A., et J.P. SERRE: Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. Amer. J. Math. **75**, 409—448 (1953).
[4] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. J. Math. Pures Appl. **19**, 1—26 (1940).
[5] — Séminaire E.N.S. 1949/50 (hektographiert).
[6] — Variétés analytiques complexes et cohomologie. Coll. de Bruxelles, 41—55 (1953).
[7] — Espaces fibrés analytiques. Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico 1958.
[8] ECKMANN, B.: Zur Homotopietheorie gefaserter Räume. Comment. Math. Helv. **14**, 141—192 (1942).
[9] EHRESMANN, C.: Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement. Bull. Soc. Math. France **72**, 27—54 (1944).
[10] FRENKEL, J.: Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Bull. Soc. Math. France **85**, 135—220 (1957).
[11] GIESECKE, B.: Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume. Math. Z. **83**, 177—213 (1964).
[12] GRAUERT, H.: Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Math. Ann. **133**, 450—472 (1957).
[13] — Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Math Ann. **135**, 263—273 (1958).
[14] —, u. H. KERNER: Approximation von holomorphen Schnittflächen in Faserbündeln mit homogener Faser. Arch. Math. **14**, 328—333 (1963).
[15] —, u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).
[16] HEILBRONN, H.: On the representation of homotopic classes by regular functions. Bull. Acad. Pol. Sci. **6**, 181—184 (1958).
[17] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. der Math. 9. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.
[18] KOOPMAN, B.O., and A.B. BROWN: On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 231—251 (1931).
[19] KURATOWSKI, C.: Topologie II, 3^e éd. Warszawa: PWN 1961.
[20] RAMSPOTT, K.J.: Über die Homotopieklassen holomorpher Abbildungen in homogene komplexe Mannigfaltigkeiten. S.-B. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., 57—62 (1962).
[21] SERRE, J.P.: Géométrie algébriques et géométrie analytiques. Ann. Inst. Fourier **6**, 1—42 (1955/56).
[22] — Modules projectives et espaces fibrés a fibre vectorielle. Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot. Paris 1957/58.
[23] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton: University Press 1951.
[24] STEIN, K.: Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume. Arch. Math. **7**, 354—361 (1956).
[25] WAZEWSKI, T.: Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues. Compositio Math. **2**, 63—68 (1935).

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. März 1965)