Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*)

Von Felix Klein in Göttingen.

Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie von Gauss, Lobatschefsky, Bolyai und die verwandten Betrachtungen, welche Riemann und Helmholtz über die Grundlagen unserer geometrischen Vorstellungen angestellt haben. Sie sollen indess nicht etwa die philosophischen Speculationen weiter verfolgen, welche zu den genannten Arbeiten hingeleitet haben, vielmehr ist ihr Zweck, *die mathematischen Resultate dieser Arbeiten, soweit sie sich auf Parallelentheorie beziehen, in einer neuen anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen.*

Der Weg hierzu führt durch die projectivische Geometrie. Man kann nämlich, nach dem Vorgange von Cayley**), eine projectivische Massbestimmung im Raume construiren, welche eine beliebig anzunehmende Fläche 2^{ten} Grades als sogenannte fundamentale Fläche benutzt. Je nach der Art der von ihr benutzten Fläche 2^{ten} Grades ist nun diese Massbestimmung ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorieen. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sie deckt geradezu, wie sich zeigen wird, deren inneres Wesen auf.

Ich beginne damit, die in Rede stehenden Parallelentheorieen kurz auseinander zu setzen (§ 1.). Sodann wende ich mich der Cayley'schen Massbestimmung zu, die ich im Zusammenhange entwickele, so zwar, dass fortwährend auf die verschiedenartigen Parallelentheorieen Bezug genommen wird. Ich bin dabei um so lieber in ausführlichere Erörterungen eingegangen, als die bez. Cayley'schen Untersuchungen nicht hinlänglich bekannt geworden zu sein scheinen, dann aber auch

*) Vergl. eine unter demselben Titel mitgetheilte Note in den Gött. Nachrichten. 1871. Nr. 17.

**) Im Sixth Memoir upon Quantics. Phil. Transactions. t. 149. 1859. Vergl. die Fiedler'sche Uebersetzung von Salmon's Kegelschnitten. 2. Aufl. (Leipzig 1866), oder auch Fiedler: Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen (Leipzig 1862).

bei ihnen der leitende Gesichtspunkt ein anderer ist, als der hier vorliegende. Bei Cayley handelt es sich darum, nachzuweisen, dass die gewöhnliche (Euklidische) Massgeometrie als ein besonderer Theil der projectivischen Geometrie aufgefasst werden kann. Zu diesem Zwecke stellt er die allgemeine projectivische Massbestimmung auf und zeigt sodann, dass aus ihren Formeln die Formeln der gewöhnlichen Massgeometrie hervorgehen, wenn die fundamentale Fläche in einen bestimmten Kegelschnitt, den unendlich fernen imaginären Kreis, degenerirt. Hier dagegen handelt es sich darum, den *geometrischen Inhalt* der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung möglichst deutlich darzulegen und zu erkennen, nicht nur, wie sie durch eine geeignete Particularisation die Euklidische Massgeometrie ergiebt, sondern wesentlich, dass sie in ganz derselben Beziehung zu den verschiedenen Massgeometrieen steht, die sich den genannten Parallelentheorieen anschliessen.

Bei diesen Auseinandersetzungen ergeben sich einige neue Betrachtungen. Ich rechne dahin, abgesehen von den Detailausführungen, namentlich die Art und Weise, wie die Cayley'sche Massbestimmung durch Betrachtung wiederholter räumlicher Transformationen begründet wird. Sodann hebe ich noch die Form hervor, unter welcher in § 7. und § 14. der Begriff des Krümmungsmasses auftritt.

Es ist übrigens die Definition, welche ich für die projectivische Massbestimmung aufstelle, etwas allgemeiner, als die von Cayley selbst gegebene. Um die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, denke ich mir dieselben durch eine gerade Linie verbunden. Dieselbe schneidet die Fundamentalfläche in 2 weiteren Punkten, welche mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss besitzen. *Den mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Constante c multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichne ich als die Entfernung der beiden Punkte.* Um den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen, lege ich durch deren Durchschnittslinie die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bilden mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhältniss. *Als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichne ich sodann den mit einer anderen willkürlichen, aber fest gewählten Constanten c′ multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses.* Die hiermit aufgestellten geometrischen Definitionen stimmen mit den analytischen, von Cayley gegebenen überein, sobald man noch c und c' particuläre Werthe ertheilt, nämlich beide gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzt.*) Es ist aber für das Folgende wesentlich, die

*) Gelegentlich bezeichnet Cayley auch den „Quadranten" als Einheit. Dies kommt darauf hinaus, c und c' gleich $\frac{\sqrt{-1}}{\pi}$ zu nehmen.

Constanten c und c' beizubehalten, da z. B. c gerade der in der Nicht-Euklidischen Geometrie vorkommenden charakteristischen Constanten entspricht (vergl. auch § 4.).

§ 1.

Die verschiedenen Parallelentheorieen.

Das 11[te] Axiom des Euklides ist, wie bekannt, mit dem Satze gleichbedeutend, dass die Summe der Winkel im Dreiecke gleich zwei Rechten ist. Nun gelang es Legendre, zu beweisen*), dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht grösser sein kann, als 2 Rechte; er zeigte ferner, dass, wenn in einem Dreiecke die Winkelsumme 2 Rechte beträgt, dass dann ein Gleiches bei jedem Dreiecke der Fall ist. Aber er vermochte nicht zu zeigen, dass die Winkelsumme nicht möglicherweise kleiner ist, als 2 Rechte.

Eine ähnliche Ueberlegung scheint den Ausgangspunkt von Gauss' Untersuchungen über diesen Gegenstand gebildet zu haben. Gauss war der Auffassung, dass es in der That unmöglich sei, den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme mit 2 Rechten zu beweisen, dass man vielmehr auf Grund der vorangehenden Axiome eine in sich consequente Geometrie construiren könne, bei der die Winkelsumme kleiner ausfällt. Gauss bezeichnete diese Geometrie als Nicht-Euklidische**); er hat sich mit ihr viel beschäftigt, leider aber, von einigen Andeutungen abgesehen, nichts über dieselbe veröffentlicht. In dieser Nicht-Euklidischen Geometrie kommt eine gewisse, für die räumliche Massbestimmung charakteristische Constante vor. Ertheilt man derselben einen unendlichen Werth, so erhält man die gewöhnliche Euklidische Geometrie. Hat aber die Constante einen endlichen Werth, so hat man eine abweichende Geometrie, für welche unter Anderem folgende Gesetze gelten:

Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner, als 2 Rechte, und zwar um so mehr, je grösser die Fläche des Dreiecks ist. Für ein Dreieck, dessen Ecken unendlich weit entfernt sind, ist die Winkelsumme gleich Null. — Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden kann man 2 Parallele zu der Geraden ziehen, d. h. Linien, welche die Gerade auf der einen oder anderen Seite in einem unendlich fernen Punkte schneiden. Die durch den Punkt gehenden Geraden, welche zwischen den beiden Parallelen verlaufen, schneiden die gegebene Gerade gar nicht.

*) Dieser Beweis, sowie der sich auf den nämlichen Gegenstand beziehende Beweis von Lobatschefsky setzt die unendliche Länge der Geraden voraus. Lässt man diese Annahme fallen (vergl. den weiteren Text), so fallen auch die Beweise, wie man daraus deutlich übersehen mag, dass dieselben sonst in gleicher Weise für die Geometrie auf der Kugel gelten müssten.

**) Vergl. Sartorius v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, p. 81. Sodann einige Briefe in dem Briefwechsel von Gauss und Schumacher.

Auf eben diese Nicht-Euklidische Geometrie ist Lobatchefsky*), Professor der Mathematik an der Universität zu Kasan, und, einige Jahre später, der ungarische Mathematiker J. Bolyai**) geführt worden, und haben dieselben den Gegenstand in ausführlichen Veröffentlichungen behandelt. Indess blieben diese Arbeiten ziemlich unbekannt, bis man durch die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher, die 1862 erfolgte, auf dieselben aufmerksam gemacht wurde. Seitdem verbreitete sich die Auffassung, dass nunmehr die Parallelentheorie in ihrer realen Unbestimmtheit erkannt sei.

Aber diese Auffassung muss wohl einer wesentlichen Modification unterliegen, seit im Jahre 1867 nach Riemann's Tode dessen Habilitationsvorlesung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" erschienen ist und bald darauf Helmholtz in den Göttinger Nachrichten (1868. Nr. 6.) seine Untersuchungen: „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", veröffentlichte.

In Riemann's Schrift ist darauf hingewiesen, wie die Unbegränztheit des Raumes nicht auch nothwendig dessen Unendlichkeit mit sich führt. Es wäre vielmehr denkbar und würde unserer Anschauung, die sich immer nur auf einen endlichen Theil des Raumes bezieht, nicht widersprechen, dass der Raum endlich wäre und in sich zurückkehrte: die Geometrie unseres Raumes würde sich dann gestalten, wie die Geometrie auf einer in einer Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen gelegenen Kugel von 3 Dimensionen. — Diese Vorstellung, die sich auch bei Helmholtz findet, würde mit sich bringen, dass die Winkelsumme im Dreiecke (wie beim gewöhnlichen sphärischen Dreiecke) grösser***) ist, als 2 Rechte, und zwar in dem Masse grösser, als das Dreieck einen grösseren Inhalt hat. Die gerade Linie würde alsdann keine unendlich fernen Punkte haben, und man könnte durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden überhaupt keine Parallele ziehen.

Eine auf diese Vorstellungen gegründete Geometrie würde sich in ganz gleicher Weise neben die gewöhnliche Euklidische Geometrie

---

*) Im Kasan'schen Boten 1829. — Schriften der Universität Kasan, 1836—38. — Crelle's Journal, t. XVII. 1837. (Géométrie imaginaire.) — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. — Pangéométrie. Kasan 1855. (Die Pangéométrie findet sich in italienischer Uebersetzung im t. V. des Giornale di Matematiche. 1867.)

**) In einem Appendix zu W. Bolyai's Werke: Tentamen juventutem .... Maros Vasarhely. 1832. Cf. eine italienische Uebersetzung desselben im t. VI. des Giornale di Matematiche. 1868.

***) Die entgegenstehenden Beweise von Legendre und Lobatchefsky setzen, wie bereits bemerkt, die Unendlichkeit des Raumes voraus.

stellen, wie die soeben erwähnte Geometrie von Gauss, Lobatchefsky, Bolyai. Während letztere der Geraden 2 unendlich ferne Punkte ertheilt, giebt diese der Geraden überhaupt keine (d. h. 2 imaginäre) unendlich ferne Punkte. Zwischen beiden steht die Euklidische Geometrie als Uebergangsfall; sie legt der Geraden 2 zusammenfallende unendlich ferne Punkte bei.

Einem in der neueren Geometrie gewöhnlichen Sprachgebrauche*) folgend, sollen diese 3 Geometrieen bezüglich als *hyperbolische*, als *elliptische* und als *parabolische* Geometrie im Nachstehenden bezeichnet werden, je nachdem die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.

Diese dreierlei Geometrieen werden sich nun im Folgenden als besondere Fälle der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung erweisen. Zu der parabolischen (der gewöhnlichen) Geometrie wird man geführt, wenn man die Fundamentalfläche der Cayley'schen Massbestimmung in einen imaginären Kegelschnitt degeneriren lässt. Nimmt man für die Fundamentalfläche eine eigentliche Fläche 2^{ten} Grades, die aber imaginär ist, so erhält man die elliptische Geometrie. Die hyperbolische Geometrie endlich erhält man, wenn man für die Fundamentalfläche eine reelle, aber nicht geradlinige Fläche 2^{ten} Grades nimmt und auf die Punkte in deren Innerem achtet.

Ich wende mich jetzt zu der Aufstellung der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung, zunächst für die Grundgebilde erster Stufe. Dabei erörtere ich jedesmal, wie sich unter die projectivischen Vorstellungen die Vorstellungen der elliptischen und hyperbolischen Geometrie subsumiren.

Es mag hier übrigens noch des Zusammenhangs gedacht werden, in welchem sich die in Rede stehenden geometrischen Dinge mit den Betrachtungen befinden, die sich auf Massbestimmung in beliebig ausgedehnten analytischen Mannigfaltigkeiten beziehen.

Herr Beltrami hat zuerst gezeigt**), wie der planimetrische Theil der hyperbolischen (Nicht-Euklidischen) Geometrie seine Interpretation in der gewöhnlichen Metrik der Flächen mit constantem negativem Krümmungsmasse findet. In der hyperbolischen Geometrie ist also die Ebene wie eine Mannigfaltigeit von 2 Dimensionen mit constantem negativem Krümmungsmasse. Als darauf die bez. Rie-

*) Man bezeichnet z. B. die Punkte einer Fläche als hyperbolische oder elliptische oder parabolische, je nachdem die Haupttangenten reell oder imaginär sind oder zusammenfallen. Steiner nennt die Involutionen hyperbolisch oder elliptisch oder parabolisch, je nachdem die Doppelelemente reell oder imaginär sind oder zusammenfallen u. s. f.

**) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche. 1868.

mann'sche Arbeit erschien, in der zum ersten Male der Begriff des Krümmungsmasses auch für höhere Mannigfaltigkeiten aufgestellt wurde, dehnte Beltrami seine Untersuchungen auf Räume mit beliebig vielen Dimensionen aus.*) Insbesondere zeigte er, dass bei der hyperbolischen Geometrie dem gewöhnlichen Raume (von 3 Dimensionen) auch wieder ein constantes negatives Krümmungsmass beigelegt wird, dass geradezu die Annahme eines constanten negativen Krümmungsmasses sich mit der Annahme der hyperbolischen Geometrie deckt. Die elliptische Geometrie dagegen, oder, wie er sie bezeichnet, die sphärische**) (denn die gewöhnliche sphärische Geometrie gehört hierher), würde dem Raume ein constantes positives Krümmungsmass beilegen. Bei der parabolischen Geometrie endlich würde das Krümmungsmass auch constant, aber gleich Null sein.

Da nun, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung im Raume von 3 Dimensionen gerade die hyperbolische, elliptische und parabolische Geometrie umfasst, sich also mit der Annahme eines constanten Krümmungsmasses deckt, so wird man zu der Vermuthung geleitet, dass auch bei beliebig vielen Dimensionen die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung und die Annahme eines constanten Krümmungsmasses überein kommen. Dieses ist, wie indess nicht weiter gezeigt werden soll, in der That der Fall. Man wird also für Räume mit constantem Krümmungsmasse ohne Weiteres die Formeln benutzen können, die im Folgenden unter Annahme von 2 und 3 Dimensionen aufgestellt werden. Es schliesst dies ein, dass in solchen Räumen die kürzesten Linien wie gerade Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden können***); dass die unendlich fernen Elemente eine Fläche 2ten Grades bilden u. s. w. Es sind dies Resultate, welche bereits Beltrami, von anderen Betrachtungen ausgehend, nachgewiesen hat†); auch ist, um von den Formeln von Beltrami zu denen von Cayley zu gelangen, kaum noch ein Schritt zu thun.

Zugleich mag hiermit der Zusammenhang angedeutet sein, der zwischen dem Nachstehenden und den allgemeinen Untersuchungen

---

*) Teoria fundamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica. Serie II. t. II. 1868/69.

**) Dem gegenüber bezeichnet er die hyperbolische Geometrie als „pseudosphärische“.

***) Insbesondere also wird für Räume mit constanter Krümmung die projectivische Geometrie gelten. Vergl. § 17. des Textes.

†) Zunächst für Flächen von constantem Krümmungsmasse in einem Aufsatze: Risolutione del problema di riportare i punti di una superficie etc. Annali di Matematica. Serie I. t. VII. 1866. Sodann allgemein in der genannten Abhandlung: Teoria generale etc.

der Herren Christoffel*) und Lipschitz**) über Differentialausdrücke besteht.

§ 2.

Allgemeines über räumliche Massbestimmung.

Alle räumlichen Massbestimmungen lassen sich bekanntlich auf 2 fundamentale Aufgaben zurückführen: auf die Bestimmung *der Entfernung zweier Punkte* und auf die Bestimmung *der Neigung zweier sich schneidender Geraden*; wie denn die Instrumente, mit denen der praktische Geometer arbeitet, im Allgemeinen *Strecken* oder *Winkel* messen; alle übrigen zu bestimmenden Dinge können aus diesen berechnet werden.

Im Sinne der projectivischen Geometrie wird man diese beiden Grundaufgaben als *das Problem der Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe* bezeichnen können. Das Messen der Entfernung zweier Punkte entspricht der Massbestimmung auf der geraden Punktreihe; das Messen der Neigung zweier sich schneidender Geraden der Massbestimmung im ebenen Strahlbüschel. Die Massbestimmung im Ebenenbüschel endlich ist von der im ebenen Strahlbüschel nicht verschieden, da als Neigung zweier Ebenen die Neigung solcher zwei sich schneidender Linien anzusehen ist, in welchen die beiden Ebenen durch eine auf ihrer Durchschnittslinie senkrechte Ebene geschnitten werden. Es bleiben sonach nur zu betrachten die Massbestimmung auf der geraden Punktreihe und die Massbestimmung im ebenen Strahlbüschel, und von ihnen soll hier zunächst gehandelt werden.

Sofern man die gerade Punktreihe und das ebene Strahlbüschel als in der Ebene gelegen betrachtet, sind sie durch das Princip der Dualität verknüpft. Nicht so die für dieselben geltenden Massbestimmungen, die im Gegentheil wesentlich verschieden sind, z. B.:

Die Entfernung zweier Punkte ist eine algebraische, der Winkel zweier Geraden eine transscendente (cyclometrische) Function der Coordinaten.

Die Länge einer unbegränzten geraden Punktreihe ist unendlich gross; dagegen ist die Summe der Winkel im Strahlbüschel endlich.

Eine Strecke ist (bis aufs Vorzeichen) eindeutig bestimmt, ein Winkel nur bis auf Multipla einer Periode. Entsprechend kann die Strecke auf einfache Weise in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden; nicht so der Winkel, bei dem im Allgemeinen nur die Zweitheilung gelingt etc.

---

*) Borchardt's Journal. t. 70. p. 46.

**) Borchardt's Journal. t. 70. p. 71; t. 72. p. 1.

Trotz dieser Unterschiede haben beide Arten von Massbestimmungen etwas Gemeinsames, und dieser Umstand wird gestatten, beide als besondere Fälle unter eine allgemeinere Massbestimmung zu subsumiren. Dieses Gemeinsame ist zweierlei Art.

Erstens gilt für beide Massbestimmungen das Gesetz, dass sich die Massunterschiede addiren *), d. h. dass der Massunterschied $\overline{12}$, vermehrt um den Massunterschied $\overline{23}$, gleich ist dem Massunterschiede $\overline{13}$, in Zeichen $\overline{12} + \overline{23} = \overline{13}$. Diese *Addirbarkeit der Massunterschiede* ist ein allgemeines Gesetz, welches bei allen Massbestimmungen in Mannigfaltigkeiten einer Dimension von vorn herein gegeben ist.**) Dasselbe hat für die Bestimmung derjenigen Function der Coordinaten, welche den Massunterschied darstellen soll, den Werth einer Functionalgleichung. — Mit dieser Addirbarkeit der Massunterschiede können wir gleich die weitere Eigenschaft verknüpfen, die ebenfalls bei allen Massbestimmungen in Mannigfaltigkeiten einer Dimension hervortritt, nämlich die, dass die Entferung eines Elementes von sich selbst gleich Null ist: $\overline{11} = 0$. Hieraus und aus der eben genannten Eigenschaft folgt noch insbesondere: $\overline{12} = -\overline{21}$.

Zweitens haben die hier zu betrachtenden Massbestimmungen noch eine zweite Eigenschaft, welche sie eben geeignet macht, zur Messung im Raume angewandt zu werden. Diese Eigenschaft ist die, *durch eine Bewegung im Raume nicht geändert zu werden.* Der Winkel zweier Geraden eines Büschels ändert sich inbesondere nicht, wenn man das Büschel in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt eine Rotation ausführen lässt; ebenso wenig die Entfernung zweier Punkte einer Geraden, wenn man die Gerade in sich verschiebt.

Die genannten beiden Eigenschaften reichen hin, um beide Massbestimmungen zu charakterisiren; sie treten auch in deutlichster Weise hervor bei der Art, wie wirkliche Messungen ausgeführt werden. Man bedient sich dazu, sowohl beim Winkel- als beim Streckenmessen, *einer Scala äquidistanter Elemente*, die man beliebig an den zu messenden Gegenstand anlegt.***) Die Zahl der Scalentheile, welche

---

*) Bei der Winkelmessung gilt dies natürlich nur so weit, als man nicht, was man immer kann, den Winkeln $\overline{12}$ etc. unabhängig von einander Multipla von 2π zufügt.

**) Dasselbe gilt z. B., wenn wir die Zeit oder Gewichte oder Intensitäten messen.

***) Beim Streckenmessen bedient man sich, in Uebereinstimmung mit dem im Texte Gesagten, einer Scala äquidistanter, auf einer Geraden gelegener Punkte, eines *Massstabs.* Dagegen wendet man beim Winkelmessen nicht eine Winkelscala, sondern einen *getheilten Kreis* an, der eine Winkelscala vertritt. Im Texte soll aber an der Vorstellung einer Winkelscala festgehalten werden, weil ein Kreis nicht im Sinne der projectivischen Geometrie ein Grundgebilde ist.

zwischen den beiden Elementen liegen, deren Massunterschied zu bestimmen ist, ergiebt geradezu den gesuchten Massunterschied. Dabei soll nicht weiter discutirt werden, wie die Zahl dieser Scalentheile im Allgemeinen keine ganze und nicht einmal eine rationale ist, wie man damit zusammenhängend auch den Massunterschied zweier Elemente nie genau, sondern nur innerhalb gewisser Fehlergränzen wird bestimmen können. — Dagegen mögen wir des Näheren betrachten, wie die genannten beiden Eigenschaften der Massbestimmung in der hier mit geschilderten Operation des Messens zu Tage treten. Die erste Eigenschaft, die Addirbarkeit der Massunterschiede, ist unmittelbar darin ausgesprochen, dass wir als Massunterschied zweier Elemente schlechthin die Zahl der zwischen ihnen befindlichen Scalentheile nehmen. Die zweite Eigenschaft tritt namentlich darin hervor, dass wir für den Massunterschied dieselbe Zahl finden, unabhängig von der Art und Weise, wie wir die Scala an das zu Messende anlegen. Zu diesem Zwecke muss die Scala die Eigenschaft haben, sich selbst zu decken, wenn man sie an sich selbst beliebig anlegt. Oder, mit anderen Worten: Uebt man auf die Scala eine Bewegung aus, bei der die gerade Punktreihe bez. das Strahlbüschel, welche ihre Träger sind, unverändert bleiben, bei der ferner ein Scalentheil in den nächstfolgenden übergeht, so geht jeder Scalentheil in den nächstfolgenden über.

Diese letztere Eigenschaft der Scala gestattet es, *dieselbe durch eine wiederholte Bewegung anzufertigen.*

Insbesondere, um eine Scala auf der geraden Punktreihe zu construiren, nehme man zwei Punkte (1) und (2) als Gränzpunkte eines ersten Scalentheils an. Sodann verschiebe man die Gerade in sich, bis (1) in (2) fällt. So ist (2) in einen Punkt (3) gerückt, welcher der dritte Scalentheilpunkt sein soll. Verschiebt man noch einmal um ein gleiches Stück, so rückt wieder (1) in (2), (2) in (3), endlich (3) in einen neuen Scalentheilpunkt (4) u. s. w.

Ebenso, will man eine Scala auf dem ebenen Strahlbüschel construiren, so nehme man zuvörderst 2 Strahlen (1) und (2) an als Gränzstrahlen eines ersten Scalentheils*). Eine Drehung des Büschels in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt bringe (1) in die Lage von (2), so hat (2) eine Lage (3) angenommen, welches der dritte Theilstrahl ist u. s. f.

Verschiebung einer Punktreihe oder Drehung eines Strahlbüschels in sich fallen nun beide vom Standpunkte der projectivischen Geometrie aus unter den allgemeineren Begriff *einer linearen Transformation,*

---

*) In praxi wird man für den Scalentheil einen solchen Winkel nehmen, dass der rechte Winkel durch eine ganze Anzahl Scalentheile ausgedrückt wird, was hier nicht in Betracht kommt.

welche das betreffende Grundgebilde in sich überführt. Hiernach wird man sofort *eine allgemeinere Construction einer Scala* für die gerade Punktreihe oder das Strahlbüschel und damit *eine allgemeinere Massbestimmung* auf diesen Grundgebilden concipiren, die dann die wirklich angewandten Constructionen und Massbestimmungen als besondere Fälle umfasst. Man wird sich nämlich dadurch, sei es für die Punktreihe oder für das Strahlbüschel, eine Scala construiren, dass man auf ein Element des betreffenden Gebildes eine beliebig anzunehmende lineare Transformation, durch welche das Gebilde in sich übergeht, wiederholt anwendet. Das anfänglich gewählte Element erzeugt dabei eine Elementenreihe, welche eben die Scala ist. Als Massunterschied zweier Elemente gilt die Zahl der zwischen den beiden Elementen befindlichen Scalentheile.*) Ist hiernach zunächst nur der Massunterschied solcher Elemente definirt, welche gerade um eine ganze Anzahl von Scalentheilen von einander abstehen, so wird man durch fortgesetztes Unterabtheilen der Scalentheile (vergl. den folgenden Paragraphen) auch den Massunterschied zweier Elemente festlegen können, die um eine rationale Zahl von Scalentheilen unterschieden sind; man wird endlich, indem man den Begriff der irrationalen Gränze aufnimmt, von einem Massunterschiede zweier beliebiger Elemente reden können.

Diese allgemeinere Art der Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe soll in dem folgenden Paragraphen näher untersucht werden. Man wird dabei so viele wesentlich verschiedene Massbestimmungen erhalten, als es wesentlich verschiedene lineare Transformationen im Grundgebilde erster Stufe giebt. Nun giebt es aber solcher Transformationen nur zweierlei Arten:

1) Solche, bei denen zwei (reelle oder imaginäre) Elemente des Grundgebildes fest bleiben. (Allgemeiner Fall.)

2) Solche, bei denen nur ein (doppeltzählendes) Element des Grundgebildes ungeändert bleibt. (Specieller Fall.)

Entsprechend wird es auch nur zwei wesentlich verschiedene Arten projectivischer Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe geben: eine *allgemeine*, welche Transformationen erster Art, eine *specielle*, welche Transformationen zweiter Art benutzt.

Die gewöhnliche Massbestimmung im Strahlbüschel ist von der ersten Art. Denn bei einer Rotation des Büschels um seinen Mittelpunkt in seiner Ebene bleiben zwei getrennte Strahlen desselben, die

*) Hierdurch wird die Art der zu benutzenden linearen Transformation beschränkt. In erster Linie muss die lineare Transformation eine reelle sein, welche ein reelles erstes Element in ein reelles zweites überführt. Sodann ist auch noch erforderlich, dass die Scalentheilelemente in der Reihenfolge ihrer Entstehung aufeinander folgen, und nicht etwa das erste und zweite Element durch das dritte und vierte getrennt werden. Vergl. den weiteren Text.

jenigen, welche nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten hingehen, ungeändert.

Dagegen ist die gewöhnliche Massbestimmung auf der Geraden von der zweiten Art. Denn bei einer Verschiebung einer Geraden in sich selbst bleibt nach der Annahme der gewöhnlichen parabolischen Geometrie nur ein Punkt derselben, der unendlich ferne Punkt, ungeändert. —

Hiermit ist denn bereits angedeutet, wie nach der Annahme der hyperbolischen bez. der elliptischen Geometrie die Massbestimmung auf der Geraden den speciellen Charakter verliert, den ihr die parabolische Geometrie beilegt. Die hyperbolische Geometrie ertheilt der Geraden zwei reelle, die elliptische zwei imaginäre unendlich ferne Punkte. Sie hat dementsprechend eine Verschiebung einer Geraden in sich als eine allgemeine lineare Transformation aufzufassen, welche zwei getrennte Punkte, die beiden unendlich fernen Punkte, ungeändert lässt. Es wird dies im Folgenden noch näher erörtert werden.

§ 3.

Die allgemeine projectivische Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe.

Wir wollen hier zunächst nur den allgemeinen Fall der eben aufgestellten projectivischen Massbestimmung ins Auge fassen, dass nämlich zwei getrennte Elemente bei der die Scala erzeugenden linearen Transformation vorhanden sind. Dieselben mögen als die beiden *Fundamentalelemente* bezeichnet werden. In sie verlegen wir die beiden Grundelemente einer Coordinatenbestimmung, welche jedes weitere Element durch das Verhältniss zweier homogener Veränderlichen $x_1 : x_2$ festlegt. Den Werth dieses Verhältnisses mögen wir kurz durch z bezeichnen, sodass also $z = 0$ und $z = \infty$ die beiden Fundamentalelemente vorstellt. Alsdann ist die lineare Transformation, von der wir bei der Construction der Scala ausgehen wollen, durch eine Gleichung von der folgenden Form gegeben:

$$z' = \lambda z,$$

wo λ eine die Transformation bestimmende Constante ist.*) — Wenden

*) Dieses λ darf nach einer oben gemachten Bemerkung nicht ganz beliebig sein, weil wir bei der Construction der Scala nur reelle Elemente des Grundgebildes ins Auge fassen. Es muss λ zunächst der Beschränkung genügen, dass durch die Transformation $z' = \lambda z$ reelle Elemente in reelle übergehen (unabhängig davon, ob die beiden Fundamentalelemente $z = 0$, $z = \infty$ reell oder imaginär sind). Sodann muss λ (vergl. den weiteren Text) bei reellen Fundamentalelementen positiv sein.

wir nun diese Transformation wiederholt auf ein willkürlich angenommenes Element $z = z_1$ an, so erhalten wir eine Elementenreihe:

$$z_1, \quad \lambda z_1, \quad \lambda^2 z_1, \quad \lambda^3 z_1, \ldots .$$

und diese Elementenreihe ist unsere Scala. Dieselbe geht, wie a priori ersichtlich, durch die erzeugende Transformation in sich über.

Bezeichnen wir nun *den Scalentheil als Einheit der Entfernung*, so wird die Entfernung der Elemente z_1, λz_1, $\lambda^2 z_1$, $\lambda^3 z_1$, ... von dem Elemente z_1 bez. gleich 0, 1, 2, 3, ...

Jetzt werden wir, um auch die Entfernung anderer Elemente von dem Elemente z_1 messen zu können, die Scalentheile unterabtheilen, etwa zunächst in n (gleiche) Theile. Man erreicht dies, indem man auf das eine Gränzelement eines Scalentheils diejenige lineare Transformation $(n - 1)$ mal anwendet, welche nach n maliger Wiederholung die Transformation $z' = \lambda z$ ergiebt, d. h. also die Transformation:

$$z' = \lambda^{\frac{1}{n}} . z .$$

Dabei wird man die n^{te} Wurzel des Näheren so wählen*), dass das Element $\lambda^{\frac{1}{n}} z$ zwischen die Elemente z und λz zu liegen kommt.

Ist diese Unterabtheilung ausgeführt, so kann man nunmehr die Entfernung aller Elemente von z_1 angeben, deren Coordinate z sich auf die folgende Form bringen lässt:

$$z = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{n}} . z_1 ,$$

wo α, β ganze Zahlen sind. Diese Entfernung wird geradezu gleich dem Exponenten $\alpha + \frac{\beta}{n}$.

Indem man sich nun die Untertheilung der Scala unbegränzt fortgesetzt denkt, ist ersichtlich, dass überhaupt als Entfernung eines Elementes z von dem Elemente z_1 derjenige Exponent α anzusehen ist, zu welchem λ erhoben werden muss, damit $\lambda^\alpha z_1 = z$ ist. Es ist dabei α irgend eine rationale oder irrationale Zahl.

---

*) Warum gerade diese Bestimmung, übersieht man am besten an dem Beispiele der Kreistheilung. Soll bei einem Kreise ein Scalentheil, etwa ein Grad, untergetheilt werden, so ist das zunächst noch eine unbestimmte Aufgabe, weil der gegebene Scalentheil nur bis auf Multipla der Periode 2π gegeben ist. Diese Unbestimmtheit wird durch die Festsetzung im Texte aufgehoben. — Bei reellen Fundamentalelementen genügt es, $\lambda^{\frac{1}{n}}$ einfach als die reelle n^{te} Wurzel von λ zu definiren. Damit es aber eine solche giebt, muss λ positiv sein, was schon oben angegeben wurde. Bei negativem λ würde man für die Scala eine Elementenreihe erhalten, deren Elemente nicht in der Reihenfolge ihrer Entstehung aufeinander folgten.

Wir können dies, da offenbar $\alpha = \log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ ist, auch so aussprechen:

Die Entfernung eines Elementes z von dem Elemente z_1 ist gleich dem Logarithmus des Quotienten $\frac{z}{z_1}$, dividirt durch die Constante $\log \lambda$.

Das Element z_1 ist dabei nur zufällig als Anfangselement der Scala gewählt, aber nicht weiter ausgezeichnet gewesen; man kann dasselbe durch eine lineare Transformation, welche die beiden Fundamentalelemente und also die ganze Massbestimmung nicht ändert, überall hinbringen. Man hat also:

Die Entfernung zweier beliebiger Elemente z und z' ist gleich $\log \frac{z}{z'} : \log \lambda$, wie man noch verificiren mag, indem man die Entfernungen der beiden Elemente z und z' von z_1, nämlich $\log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ und $\log \frac{z'}{z_1} : \log \lambda$ von einander subtrahirt.

Statt der Constanten $\frac{1}{\log \lambda}$ wollen wir jetzt kürzer c schreiben *), eine Bezeichnung, die im Folgenden immer angewendet werden soll.

Dann ist also die Entfernung zweier beliebiger Elemente z und z' gleich $c \cdot \log \frac{z}{z'}$.

An diesem Ausdrucke für den Massunterschied zweier Elemente verificirt man leicht das Vorhandensein derjenigen Eigenschaften, durch deren Forderung wir ihn construirt haben. Zunächst findet die Addirbarkeit der Massunterschiede statt:

$$c \log \frac{z}{z''} = c \log \frac{z}{z'} + c \log \frac{z'}{z''}.$$

Es ist ferner die Entfernung eines Elementes von sich selbst gleich Null:

$$c \,.\, \log \frac{z}{z} = 0.$$

Endlich bleibt die Entfernung zweier Elemente:

$$c \log \frac{z}{z'}$$

ungeändert, wenn man auf z und z' gleichzeitig eine lineare Transformation anwendet, bei der die beiden Fundamentalelemente:

$$z = 0, \quad z = \infty$$

---

*) Entsprechend den Beschränkungen, die der Constanten λ aufgelegt waren, wird man Beschränkungen für die Constante c erhalten. Dieselben gehen dahin, dass c reell oder rein imaginär sein muss, je nachdem die Fundamentalelemente reell oder imaginär sind. Wählte man c anders, so würde man noch immer den hier gewonnenen analytischen Ausdruck als Massunterschied bezeichnen können, aber der Massunterschied zweier consecutiver reeller Elemente wäre dann imaginär.

ungeändert bleiben, also eine Transformation, welche z und z' gleichzeitig in Multipla ihrer selbst überführt. —

Der hiermit für die Massbestimmung gewonnene analytische Ausdruck lässt sich einfach geometrisch interpretiren. Der Quotient $\frac{z}{z'}$ hat, wie bekannt, die Bedeutung des Doppelverhältnisses der Elemente z, z' zu den beiden Fundamentalelementen $z = 0$, $z = \infty$.

Es wird also bei unserer Massbestimmung die Entfernung zweier Elemente des Grundgebildes gleich dem mit einer gewissen Constanten multiplicirten Logarithmus des von denselben mit den beiden Fundamentalelementen gebildeten Doppelverhältnisses.

Die fragliche Constante c ist dabei unbestimmt und willkürlich anzunehmen.

§ 4.

Uebergang zu complexen Elementen. Verallgemeinerung der Coordinatenbestimmung.

Wir haben bei der Construction der Scala und also bei der Definition des Massunterschiedes zweier Elemente seither nur reelle Elemente des Grundgebildes betrachtet. Nun wir aber den analytischen Ausdruck für den Massunterschied zweier Elemente gewonnen haben:

$$c \log \frac{z}{z'},$$

so können wir auch unmittelbar von einem Massunterschiede zweier complexen Elemente des Grundgebildes sprechen. Dabei tritt dann in Allgemeinheit eine Erscheinung auf, die wir beim Winkel kennen und die, wie im nächsten Paragraphen weiter erörtert werden soll, bei reellen Elementen immer dann in Evidenz tritt, wenn die Fundamentalelemente imaginär sind. Es ist dies, *dass der Massunterschied zweier Elemente keine eindeutig bestimmte, vielmehr eine unendlich vielwerthige Function mit einem Periodicitätsmodul ist.*

Dieser Periodicitätsmodul beträgt, da die Function des Logarithmus die Periode $2\pi i$ hat, $2c\pi i$.

Da ferner der Logarithmus unendlich gross wird, wenn sein Argument 0 oder ∞ beträgt, so sind offenbar solche Elemente unendlich weit von einander entfernt, für welche $\frac{z}{z'} = 0$ oder $= \infty$ wird. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn eines der beiden Elemente mit einem der beiden Fundamentalelemente ($z = 0$, $z = \infty$) zusammenfällt. Also:

Bei unserer Massbestimmung erhält das Grundgebilde zwei (reelle oder imaginäre) unendlich ferne Elemente: die beiden Fundamentalelemente.

Die Entfernung dieser Elemente von einem beliebigen anderen ist in derselben Weise unendlich gross, wie log 0 oder log ∞.

Die beiden Fundamentalelemente sind logarithmisch unendlich weit.

Wir mögen nun auch die beschränkende Annahme fallen lassen, welche wir seither hinsichtlich der Coordinatenbestimmung gemacht hatten. Die beiden Fundamentalelemente mögen nicht mehr mit den Grundelementen der Coordinatenbestimmung zusammenfallen, sondern sollen durch eine allgemeine Gleichung 2ten Grades gegeben sein:

$$\Omega = az^2 + 2bz + c = 0,$$

oder, homogen geschrieben:

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0.$$

Um den Massunterschied zweier Elemente mit den homogenen Coordinaten x_1, x_2 und y_1, y_2 anzugeben, hat man nur das Doppelverhältniss derselben zu den beiden Elementen $\Omega = 0$ zu bilden. Dieses letztere wird aber nach bekannten Regeln:

$$= \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

wo Ω_{xx}, Ω_{yy}, Ω_{xy} die folgenden Ausdrücke bedeuten. Es ist Ω_{xx}, Ω_{yy} dasjenige, was aus Ω entsteht, wenn man statt der Variabeln bez. x_1, x_2 und y_1, y_2 einsetzt, also:

$$\Omega_{xx} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \qquad \Omega_{yy} = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2.$$

Sodann Ω_{xy} bedeutet den Ausdruck:

$$\Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Bei Anwendung dieser Bezeichnung wird jetzt der Massunterschied zweier Elemente gleich:

$$c \cdot \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

und dies ist der allgemeine analytische Ausdruck für den Massunterschied.

Gelegentlich werden wir statt des Logarithmus einen Arcus Cosinus einführen. Es ist bekanntlich:

$$c \log a = 2ic \cdot \text{arc cos} \frac{a+1}{2\sqrt{a}}.$$

Also auch unser Massunterschied:

$$= 2ic \cdot \text{arc cos} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}.$$

Dies ist diejenige Form des analytischen Ausdrucks, welche bei Cayley vorkommt; Cayley hat nur, wie bereits erwähnt, der Constanten c den particulären Werth $-\frac{i}{2}$ beigelegt, sodass bei ihm der Massunterschied geradezu gleich wird dem betreffenden Arcus Cosinus.

§ 5.

Besondere Betrachtung der reellen Elemente des Grundgebildes.

Wir wollen nunmehr betrachten, wie sich die in den vorigen beiden Paragraphen entwickelte Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe des Näheren für die reellen Elemente des Gebildes gestaltet. Dabei werden die beiden Fälle zu unterscheiden sein, dass die Fundamentalelemente reell oder dass sie imaginär sind. Der bestimmteren Vorstellung wegen wollen wir dabei insbesondere die Massbestimmung auf der geraden Punktreihe ins Auge fassen; für das Strahlbüschel gelten selbstverständlich die nämlichen Dinge.

Es mögen *erstens* auf der Geraden zwei reelle Fundamentalpunhte o, o' gegeben sein.

Sind dann x und y reelle Punkte der Geraden, so haben x, y zu o, o' ein negatives oder positives Doppelverhältniss, je nachdem die Strecke xy von der Strecke oo' getrennt wird oder nicht. Im ersten Falle ist also der Logarithmus des Doppelverhältnisses rein imaginär, im zweiten (bis auf imaginäre Perioden) reell. Stellen wir also die Forderung, dass die Entfernung zweier aufeinander folgender Punkte der Geraden reell sei, so müssen wir die den Logarithmus multiplicirende Constante c ebenfalls reell nehmen. Dann gilt der Satz:

Die Entfernung zweier Punkte x, y ist eine imaginäre oder eine reelle Grösse, je nachdem die Strecke xy von der Strecke oo' getrennt wird oder nicht.

Man könnte natürlich c (wie dies bei Cayley geschieht) einen rein imaginären Werth beilegen; dann würden sich in dem vorstehenden Satze die Worte reell und imaginär vertauschen. Von vornherein ist dies gerade so zulässig, wie die andere Annahme. Nur würde dadurch die Massbestimmung einen ganz anderen Charakter für reelle Punkte bekommen, als die von uns gewöhnlich angewandte ist. Wollten wir z. B. eine Scala solcher Punkte construiren, 1, 2, 3 . . ., die jedesmal um die Einheit der Entfernung von einander abstehen, so würde 2 von 1 und 3 durch oo' getrennt sein und die Entfernung $\overline{13}$ nur insofern gleich zwei Einheiten sein, als man von 1 zuerst zu 2, von 2 sodann zu 3 geht, während $\overline{13}$ unmittelbar gemessen einen imaginären Werth ergiebt u. s. f. Desshalb soll die Annahme eines imaginären c hier ausgeschlossen sein.

Bei reellem c haben wir zunächst den eben angegebenen Satz. Wir werden uns dementsprechend auf die Betrachtung der einen der beiden Strecken beschränken, in welche die Gerade durch die beiden Fundamentalpunkte zerlegt wird. Jede dieser beiden Strecken ist unendlich lang, insofern ihre beiden Gränzpunkte, die Fundamentalpunkte, von allen anderen Punkten unendlich fern sind.

Man stelle sich nun vor, dass man in einen Punkt der Strecke $o\,o'$, die wir gerade betrachten, gesetzt wäre und dass man sich nicht anders auf der Geraden fortbewegen könne, als vermöge solcher linearer Transformationen, welche die Punkte o, o' und also die Massbestimmung ungeändert lassen. Wir wollen dann auch von einer Geschwindigkeit der Bewegung sprechen, indem wir darunter das Verhältniss des durchlaufenen Raumes (gemessen in unserer Massbestimmung) zu der gebrauchten Zeit verstehen. Wenn man sich dann mit constanter Geschwindigkeit in dem einen oder dem anderen Sinne auf der Geraden bewegt, so wird man sich dem Punkte o oder o' beständig nähern, man wird ihn aber, da er unendlich fern ist, nie erreichen. *In die zweite Strecke $o'o$ aber, auf der man sich gerade nicht befindet, wird man nie gelangen, sodass man sich von ihrem Vorhandensein nicht wird überzeugen können.*

Dies ist nun gerade diejenige Vorstellung, welche man sich in der *hyperbolischen* Geometrie von dem Messen auf der geraden Linie bildet. Die hyperbolische Geometrie ertheilt der Geraden zwei unendlich ferne Punkte. Ob jenseits der beiden unendlich fernen Punkte noch ein Stück der Geraden existirt, welches das im Endlichen gelegene Stück zu einer geschlossenen Curve ergänzt, ist nicht zu sagen, da uns unsere Bewegungen nie an die unendlich fernen Punkte hinan, geschweige denn über dieselben hinausführen. Jedenfalls wird man aber ein solches Stück als ein gedachtes, ideales der geraden Linie hinzufügen können.

Wir wollen nun *zweitens* annehmen, die beiden der Massbestimmung auf der Geraden zu Grunde zu legenden Fundamentalpunkte seien (conjugirt) imaginär. Dann ist das Doppelverhältniss der beiden Fundamentalpunkte zu zwei beliebigen reellen Punkten x, y negativ, der Logarithmus also rein imaginär. Wir müssen also c einen rein imaginären Werth $c_1 i$ ertheilen, damit die Entfernung reeller Punkte reell sein kann. Dann aber ist zugleich die gegenseitige Entfernung aller reeller Punkte reell. Unendlich ferne reelle Punkte giebt es nicht. Die Linie kehrt wie eine geschlossene Curve in sich zurück. Die reelle Entfernung zweier Punkte ist nicht vollständig bestimmt, sondern nur bis auf Multipla einer reellen Periode, welche die Gesammtlänge der Geraden vorstellt. Dieselbe beträgt $2\,i\pi c = -2\pi c_1$. Die Massbestimmung auf der Geraden ist dann ganz so, wie die gewöhnliche Massbestimmung auf einem Kreise mit dem Radius c_1.

Die hiermit geschilderte Massbestimmung auf der Geraden ist gerade diejenige, welche die *elliptische* Geometrie anzunehmen hat. —

Was wir jetzt für die gerade Punktreihe ausgeführt haben, können wir genau in derselben Weise für das *Strahlbüschel* aussprechen. Sind die beiden der Massbestimmung im Strahlbüschel zu Grunde liegenden Fundamentalstrahlen reell, so hat der Büschel zwei reelle Strahlen, welche einen unendlich grossen Winkel mit allen übrigen einschliessen. Eine Rotation eines Strahles im Büschel — entsprechend definirt, wie eben die Bewegung eines Punktes auf der Geraden — führt den Strahl nie an diese beiden Gränzstrahlen hinan oder gar über dieselben hinaus. Eine solche Massbestimmung liegt unserer gewöhnlichen Winkelbestimmung gewiss nicht zu Grunde, da eine fortgesetzte Rotation eines Strahles um einen auf ihm gelegenen Punkt den Strahl nach endlicher Zeit in seine Anfangslage zurückführt. Vielmehr verlangt diese Thatsache imaginäre Fundamentalstrahlen. Und in der That erkannten wir bereits in § 2., dass die gewöhnliche Winkelbestimmung zwei imaginäre Fundamentalstrahlen benutzt, nämlich diejenigen beiden Strahlen des Büschels, welche durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte durchgehen. Bei der hyperbolischen und elliptischen Geometrie bleibt die Winkelbestimmung im Strahlbüschel ganz die gewöhnliche; die beiden Fundamentalstrahlen werden nur nicht mehr als diejenigen beiden Strahlen definirt, welche durch die Kreispunkte hindurchgehen, sondern als diejenigen, welche einen bestimmten Kegelschnitt, den in diesen Geometrieen vorkommenden unendlich fernen Kreis (vergl. § 8.) berühren.

Die in der allgemeinen Formel des § 4. unbestimmt bleibende Constante c ist, damit dieselbe für die gewöhnliche Winkelbestimmung gilt, gleich $\pm \frac{\sqrt{-1}}{2}$ zu setzen. Zunächst muss sie, nach den vorstehend bei der geraden Punktreihe ausgeführten Betrachtungen, rein imaginär $= \pm c_1 i$ sein. Alsdann wird die Summe der Winkel im Strahlbüschel gleich $2\pi c_1$, und da dieselbe bei der gewöhnlichen Bestimmung gleich π gesetzt wird*), so ist $c_1 = \frac{1}{2}$ zu nehmen. Unter dieser Annahme ergiebt die Formel des § 4. in der That die gewöhnlich bei der Winkelbestimmung benutzte Formel. Seien x und y rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Der Mittelpunkt des Strahlbüschels, welches wir betrachten, soll in den Coordinatenanfangspunkt fallen. So sind die beiden nach den Kreispunkten gehenden Strahlen:

$$x^2 + y^2 = 0\,.$$

Mögen sodann zwei Strahlen durch die homogenen Coordinaten x, y und x', y' festgelegt sein. So wird, nach der Formel des § 4., indem wir noch $c = \frac{i}{2}$ setzen, ihr Winkel

*) Unter der Summe der Winkel im Strahlbüschel ist hier derjenige Winkel zu verstehen, den ein sich um einen seiner Punkte drehender Strahl durchlaufen muss, um zum ersten Male wieder mit seiner anfänglichen Lage zusammen zu fallen. Es ist dies die Hälfte desjenigen Winkels, den ein Punkt auf der Peripherie eines Kreises durchlaufen muss, um zur Anfangslage zurück zu gelangen.

$$= \text{arc cos} \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

und dieses ist ersichtlich die gewöhnliche Winkelbestimmung.

Der Winkel zweier Geraden ist also im Sinne der projectivischen Geometrie zu definiren, *als der mit* $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ *multiplicirte Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, welches die beiden Geraden mit den von ihrem Schnittpunkte nach den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten gehenden Linien bilden.*

Gerade Linien bilden mit einander insbesondere einen rechten Winkel, wenn dieses Doppelverhältniss ein harmonisches ist. Die Bezeichnung eines solchen Winkels (oder auch einer entsprechenden Strecke) als eines Rechten werden wir in der Folge gelegentlich auch bei der allgemeinen Massbestimmung anwenden.

§ 6.

Die specielle Massbestimmung bei zusammenfallenden Grundelementen.

Bisher hatten wir den besonderen Fall noch nicht in Betracht gezogen, der bei dem Zusammenfallen der beiden Fundamentalelemente der Massbestimmung eintritt. Unsere allgemeine Formel

$$2ic \text{ arc cos} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

ergiebt dann, unabhängig von den Werthen, die man x und y beilegen mag, als Entfernung der beiden Elemente Null. Aber eine Massbestimmung bleibt nach wie vor möglich, da die Art, wie die Entfernungen verschiedener Elemente beim Zusammenfallen der Fundamentalelemente Null werden, eine ganz bestimmte ist. Es ist offenbar:

$$\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \cdot \Delta,$$

wo Δ die Discriminante $(ac - b^2)$ der quadratischen Form Ω ist. Deshalb können wir die allgemeine Formel für die Massbestimmung auch so schreiben:

$$2ic \cdot \text{arc sin} \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}.$$

Fallen jetzt die beiden Fundamentalelemente zusammen, so wird Ω ein vollständiges Quadrat eines linearen Ausdruckes $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_x$ und Δ verschwindet. Wir können deshalb zunächst den arc sin dem sinus selbst gleich setzen, also die Entfernung schreiben:

$$2ic\sqrt{\Delta} \cdot \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

oder, wenn wir für Ω_{xx}, Ω_{yy} noch bez. p_x^2 und p_y^2 einführen:

$$2\,i\,c\,\Delta\,\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)\,(p_1 y_1 + p_2 y_2)}.$$

Den verschwindenden Factor Δ vereinigen wir mit dem $2\,ic$, dem wir einen beliebig grossen Werth beilegen können, zu einer neuen Constanten k. *So erhalten wir denn für den Massunterschied die Formel**):

$$k\cdot\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)\,(p_1 y_1 + p_2 y_2)},$$

wo $p = 0$ das doppeltzählende Fundamentalelement vorstellt.

Dass dieser Ausdruck, den wir durch einen Gränzübergang gefunden haben, in der That den Forderungen genügt, die wir nach § 2. an ihn zu stellen haben, ist leicht zu verificiren.

Wir wollen ihn zu dem Zwecke in der etwas anderen Form schreiben:

$$\frac{q_1 x_1 + q_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2} - \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{p_1 y_1 + p_2 y_2},$$

wo q_1, q_2 im Uebrigen beliebige Grössen sind, welche die Bedingung befriedigen:

$$q_1 p_2 - p_1 q_2 = k.$$

An dieser Form tritt zuvörderst die Addirbarkeit der Massunterschiede ohne Weiteres in Evidenz.

Sodann aber auch die Unveränderlichkeit derselben durch diejenigen speciellen linearen Transformationen, welche das Fundamentalelement $p = 0$ doppeltzählend ungeändert lassen. Diese Transformationen führen p in ein Multiplum seiner selbst über; jeden anderen linearen Ausdruck, also auch q, in dasselbe Multiplum seiner selbst, vermehrt um ein Vielfaches von p:

$$p' = \varrho p$$
$$q' = \varrho q + \sigma p.$$

Der Quotient $\frac{q}{p}$ ändert sich dabei also um die Constante σ, und der Massunterschied zweier Elemente, der die Differenz zweier solcher Quotienten ist, bleibt völlig ungeändert, w. z. b.

Geometrisch definirt sich die hiermit gefundene Massbestimmung folgendermassen. Der Quotient $\frac{p_x}{q_x}$ stellt, wie bekannt, das Doppelverhältniss des Punktes x und desjenigen Punktes, für welchen $\frac{p}{q}$ den Werth 1 annimmt, zu den beiden Punkten $p = 0$, $q = 0$ dar, also zu dem gegebenen doppeltzählenden Fundamentalelemente und einem beliebig gewählten hinzutretenden Elemente. *Die Differenz der Werthe*

*) Cayley leitet diese Formel in ganz ähnlicher Weise ab.

dieses Doppelverhältnisses, gebildet für zwei Elemente, stellt den Massunterschied der beiden Elemente dar.

Diese Massbestimmung, die sich als ein Gränzfall der allgemeinen ergab, soll der letzteren gegenüber fortan als *specielle Massbestimmung* bezeichnet werden. Dieselbe besitzt im Gegensatze zu der allgemeinen besonders die folgenden beiden Eigenschaften:

Sie ist nicht mehr mehrdeutig, sondern eindeutig definirt.

Sie besitzt nicht zwei logarithmisch unendlich ferne Elemente, sondern nur ein algebraisch unendlich weites (das doppeltzählende Fundamentalelement).

Unter diese specielle Massbestimmung subsumirt sich insbesondere, wie bereits in § 2. angedeutet, die gewöhnliche (Euklidische, parabolische) Massbestimmung auf der geraden Linie. Desshalb hat die Gerade bei der gewöhnlichen Anschauung auch nur einen unendlich fernen Punkt. Diesem Punkte kann man sich auf der einen oder der anderen Seite unausgesetzt nähern, ohne ihn allerdings zu erreichen. Die gerade Linie ist bei der parabolischen Geometrie, im Gegensatze zu der elliptischen, unendlich lang. Aber ein ideales Stück, wie bei der hyperbolischen Geometrie, besitzt sie nicht mehr; sie hängt im Unendlichen zusammen.

§ 7.

Specielle Massbestimmung, welche eine allgemeine in einem Elemente berührt. Krümmung der letzteren.

Wir wollen uns jetzt auf einem Grundgebilde erster Stufe zwei Massbestimmungen denken, eine allgemeine und eine specielle. Dieselben sollen in einer besonderen gegenseitigen Beziehung stehen, die als *Berührung der beiden Massbestimmungen in einem Elemente* bezeichnet werden wird. Welcher Art diese Beziehung ist, wird man am besten an einem Beispiele erkennen.

Auf einer geraden Linie sei eine gewöhnliche Massbestimmung gegeben, die den unendlich fernen Punkt der Geraden als Doppelelement benutzt. Die Punkte der Geraden seien durch eine nicht homogene Coordinate z vorgestellt, wo z geradezu den Abstand vom Coordinatenanfangspunkte bedeuten mag.

Sodann construire man auf der Geraden in der folgenden Weise eine allgemeine Massbestimmung. In dem Abstande 1 von der gegebenen Geraden und auf der im Coordinatenanfangspunkte errichteten Senkrechten sei der Mittelpunkt eines Strahlbüschels gelegen. Für dieses Strahlbüschel sei wiederum die gewöhnliche Massbestimmung, d. h. jetzt die für das Strahlbüschel gewöhnliche Winkelbestimmung, gegeben. Diese Massbestimmung kann man auf die gegebene Gerade übertragen, indem man als Massunterschied zweier Punkte der Geraden den Winkel definirt, den die durch sie hindurchgehenden Strahlen des Büschels bilden. Sei z die Coordinate eines der Punkte, so ist der Winkel, den der hindurchgehende Strahl des Büschels mit dem durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden bildet, gleich arc tang z; überhaupt wird also bei dieser Massbestimmung der Massunterschied zweier Elemente z und z':

$$= \text{arc tang}\, z - \text{arc tang}\, z'.$$

Die Fundamentalelemente dieser Massbestimmung sind imaginär und des Näheren bestimmt durch $z = \pm i$.

Zwischen der angenommenen speciellen Massbestimmung und der jetzt hinzutretenden allgemeinen besteht nun die Beziehung, dass sie für Werthe von z, die sehr wenig von $z = 0$ abweichen, nahezu übereinstimmen, da ja für sehr kleine Winkel der Unterschied zwischen Winkel und trigonometrischer Tangente verschwindet.

Am deutlichsten tritt dies hervor, wenn wir für den arc tang z seine Reihenentwickelung setzen: $= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots$ *Beide Massbestimmungen sind also in der Nähe von $z = 0$ bis auf Grössen höherer Ordnung identisch.* Diese Beziehung der beiden Massbestimmungen ist es, welche als *Berührung* derselben bezeichnet sein soll.

Wenn sich, wie im Vorstehenden, eine allgemeine und eine specielle Massbestimmung berühren, so ist augenscheinlich der Berührungspunkt der vierte harmonische Punkt zu den beiden Fundamentalpunkten der allgemeinen und dem doppeltzählenden Fundamentalpunkte der speciellen Massbestimmung. Will man also, wenn auf einem Grundgebilde eine allgemeine Massbestimmung gegeben ist, eine specielle Massbestimmung construiren, welche die gegebene in einem bestimmten Elemente berührt, so suche man zuerst zu diesem und zu den beiden Fundamentalelementen der allgemeinen Massbestimmung das vierte harmonische. Dieses ist als Doppelelement der gesuchten Massbestimmung zu benutzen. Es sind dann nur noch die absoluten Werthe der in der letzteren vorkommenden Constanten so zu bestimmen, dass in der Nähe des gegebenen Elementes zwischen beiden Massbestimmungen Uebereinstimmung stattfindet. Diese Uebereinstimmung ist dann wegen der besonderen Lage des doppeltzählenden Fundamentalelementes sofort eine innigere, eine Berührung.

Nun findet ein charakteristischer Unterschied statt zwischen der allgemeinen Massbestimmung mit imaginären und der allgemeinen Massbestimmung mit reellen Fundamentalelementen.

Sind die beiden Fundamentalelemente imaginär, so eilt die in einem Punkte berührende specielle Massbestimmung der allgemeinen voran. Das heisst, für das eben gebrauchte Beispiel, der Abstand eines Punktes z vom Nullpunkte, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung, ist immer grösser, als der Abstand derselben beiden Elemente, gemessen in der gegebenen allgemeinen Massbestimmung. Man übersieht dies deutlich, wenn man bedenkt, dass die ganze Linie, gemessen in der speciellen Massbestimmung, eine unendliche Länge hat, während sie in der gegebenen allgemeinen Massbestimmung von endlicher Länge ist. Nur für Punkte, die unendlich nahe an dem Berührungspunkte ($z = 0$) gelegen sind, stimmen beide Massbestimmungen überein.

Sind dagegen die beiden Fundamentalelemente der gegebenen allgemeinen Massbestimmung reell, so bleibt umgekehrt die in einem Punkte berührende specielle Massbestimmung hinter der gegebenen zurück. In der That, die von den beiden Fundamentalelementen begrenzte Strecke ist in der gegebenen allgemeinen Massbestimmung bereits unendlich gross, während sie für die berührende Massbestimmung noch endlich ist.

Dieses Zurückbleiben resp. Voraneilen der allgemeinen Massbestimmung, gegenüber der speciellen tangirenden, bezeichne ich als die *Krümmung der allgemeinen Massbestimmung,* zunächst im Berührungselemente. Die Krümmung soll *positiv* heissen, wenn die Fundamentalelemente imaginär, *negativ,* wenn sie reell sind. Als *Mass der Krümmung* bezeichne ich, schlechthin ausgesprochen, die Grösse des Zurückbleibens resp. Voraneilens. Dieses Krümmungsmass erhält, wie ich jetzt zeigen will, für alle Elemente des Gebildes denselben Werth. Für denselben kann $-\frac{1}{4c^2}$ genommen werden, wo c die charakteristische Constante der allgemeinen Massbestimmung ist.

Die beiden Fundamentalelemente der allgemeinen Massbestimmung mögen, wie oben in dem Beispiele, harmonisch zu $z = 0$ und zu $z = \infty$ gelegen sein, und zwar seien sie durch:

$$z^2 = a$$

bestimmt. Ist dann c, wie immer, die charakteristische Constante der Massbestimmung, so findet man für den Abstand eines Elementes z vom Coordinatenanfangselemente:

$$2ci \text{ arc tg} \cdot \frac{z}{\sqrt{a}},$$

oder, in eine Reihe entwickelt:

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}} \cdot z - \frac{2ci}{3\sqrt{a^3}} \cdot z^3 + \frac{2ci}{5\sqrt{a^5}} \cdot z^5 - + \cdots.$$

Die im Elemente $z = 0$ tangirende specielle Massbestimmung ist diejenige, welche als Entfernung des Elementes z vom Elemente $z = 0$ das erste Glied der Reihenentwicklung, also den Ausdruck:

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}} \cdot z$$

benutzt. Als Abweichung der allgemeinen Massbestimmung von der tangirenden speciellen, oder als Krümmungsmass der ersteren, kann man dann definiren: das negativ genommene zweite Glied der Reihenentwicklung, dividirt durch die dritte Potenz des ersten Gliedes. Dies aber ergiebt den eben angegebenen Ausdruck $-\frac{1}{4c^2}$.

Dieser Ausdruck für das Krümmungsmass hat auch das oben festgesetzte Vorzeichen. Bei reellen Fundamentalelementen muss man (§ 4.) c ein positives Vorzeichen ertheilen, das Krümmungsmass wird also negativ; bei imaginären Fundamentalelementen dagegen ist c rein imaginär zu nehmen, somit das Krümmungsmass positiv. Das Krümmungsmass einer speciellen Massbestimmung wird Null. Denn wir mussten im vorigen Paragraphen, um durch einen Grenzübergang zu der speciellen Massbestimmung zu gelangen, c einen unendlich grossen Werth ertheilen.

Endlich ist auch die Krümmung in allen Elementen dieselbe, insofern c für alle Elemente dieselbe Bedeutung hat.

Das hiermit aufgestellte Krümmungsmass einer allgemeinen Massbestimmung kann noch in der folgenden Weise definirt werden.

In § 5. wurde gezeigt, dass die Länge der ganzen Linie bei imaginären Fundamentalelementen und der Constanten $c_1 i$ gleich $2c_1\pi$ wird. Der mit π^2 multiplicirte reciproke Werth des Quadrats dieses Ausdruckes ist aber das Krümmungsmass. Das Krümmungsmass ist gleich der Fläche eines Kreises, der einen Radius gleich dem reciproken Werthe der scheinbaren Länge der ganzen Geraden hat.

Bei reellen Fundamentalelementen kann man folgende Betrachtung machen. Der gegenseitige Abstand der beiden Fundamentalelemente $z = \pm\sqrt{a}$, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung, ist gleich $4c$. Das Krümmungsmass wird also gleich dem mit -4 multiplicirten reciproken Quadrate des in der tangirenden speciellen Massbestimmung gemessenen Abstandes der beiden Fundamentalelemente.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die dreierlei Massbestimmungen, welche die elliptische, die hyperbolische und die parabolische Geometrie auf der geraden Linie annehmen, zu einander in dem Verhältnisse der Berührung stehen. Die Berührung findet jedesmal in demjenigen Punkte Statt, den wir gerade ins Auge fassen, von dem aus wir im Sinne der hyperbolischen oder der elliptischen oder der parabolischen Geometrie messen. Die Massbestimmung der parabolischen Geometrie ist die specielle Massbestimmung, welche die allgemeine Massbestimmung der elliptischen bez. der hyperbolischen Geometrie tangirt. Sie kann desswegen die letzteren für alle Punkte ersetzen, welche von dem Punkte, den wir gerade betrachten, wenig entfernt sind.

§ 8.

Die allgemeine projectivische Massbestimmung in der Ebene.

Nachdem nunmehr die projectivische Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe auseinandergesetzt worden ist, können wir, fast unmittelbar, zu den projectivischen Massbestimmungen auf den Grundgebilden zweiter und sodann beliebiger Dimension übergehen. Wir finden sodann eine allgemeinere Massbestimmung, welche die von uns bei diesen Grundgebilden gewöhnlich in Anwendung gebrachten Massbestimmungen, andererseits aber auch die Massbestimmungen, welche die elliptische und die hyperbolische Geometrie für die betreffenden Gebilde aufstellt, als specielle Fälle umfasst. Es soll dieselbe hier zunächst für die Ebene auseinandergesetzt werden. Für den Punkt (als Strahlen- und Ebenenbündel im Raume) gestaltet sich dieselbe ganz in gleicher Weise, wie in § 10. noch näher erörtert werden soll.

So wie man bei der projectivischen Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe zwei Elemente derselben als Fundamentalelemente benutzt, so legt man der projectivischen Massbestimmung in der Ebene einen Kegelschnitt zu Grunde, welcher *der fundamentale Kegelschnitt* heissen soll (bei Cayley „the absolute"). An diesen fundamentalen Kegelschnitt knüpft sich zunächst die Massbestimmung auf allen Grundgebilden erster Stufe, welche der Ebene angehören, d. h. die Massbestimmung auf den Geraden und in den Strahlbüscheln der Ebene. Jede gerade Linie schneidet den fundamentalen Kegelschnitt in zwei (reellen oder imaginären oder zusammenfallenden) Punkten. Diese sollen die Fundamentalpunkte für die auf ihr zu treffende Massbestimmung sein. Unter den Linien jedes Büschels finden sich zwei (reelle oder imaginäre oder zusammenfallende) Tangenten des Kegelschnitts. Dieselben sollen als Fundamentalstrahlen für die Massbestimmung im Strahlbüschel genommen werden. — Sodann wollen wir noch eine Festsetzung hinsichtlich der Constanten c machen, die in Anwendung zu bringen sind. Zur Massbestimmung auf allen geraden Punktreihen wollen wir dieselbe, übrigens willkürlich gewählte Constante c benutzen; ebenso zur Massbestimmung in allen Strahlbüscheln ein und dieselbe, übrigens beliebig angenommene Constante c'.

Für die hiermit eingeführte Massbestimmung wollen wir nunmehr den analytischen Ausdruck aufstellen.

Die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in Punktcoordinaten mag sein:
$$\Omega = 0.$$

Sodann seien durch:

$$\Omega_{xx} \quad , \quad \Omega_{yy}$$

diejenigen Ausdrücke bezeichnet, welche entstehen, wenn man in Ω die Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes (x), resp. die Coordinaten y_1, y_2, y_3 eines Punktes (y) einsetzt. Endlich bedeute:

$$\Omega_{xy}$$

das Resultat der Einsetzung der Coordinaten y in die Polare von (x), oder, was dasselbe ist, der Coordinaten x in die Polare von (y). Dann ist das Doppelverhältniss der beiden Punkte (x) und (y) zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungsgeraden mit dem fundamentalen Kegelschnitt durch den Quotienten der Wurzeln der folgenden in λ quadratischen Gleichung gegeben:

$$\lambda^2\Omega_{xx} + 2\lambda\Omega_{xy} + \Omega_{yy} = 0.$$

Das Doppelverhältniss ist also gleich:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

und *die Entfernung der beiden Punkte wird:*

$$= c \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

oder auch, was dasselbe ist:

$$= 2ic \,.\, \operatorname{arc\,cos} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}\,.$$

Es sind dies also, bei der hier gebrauchten Bezeichnung, genau dieselben Ausdrücke, welche bei den Grundgebilden erster Stufe auftraten.

Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich der Winkel zweier Geraden mit den Coordinaten u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3, wenn:

$$\Phi = 0$$

die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes in Liniencoordinaten ist, durch die folgende Formel. *Der Winkel der beiden Geraden ist:*

$$= c' \log \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$= 2ic' \operatorname{arc\,cos} \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}}\,.$$

Es entsteht nun zunächst die Frage: Wo liegen diejenigen Punkte (y), welche von einem Punkte (x) gleich weit abstehen? Da die Entfernung $\overline{xy}$ nur von:

$$\frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{yy}}}$$

abhängt, so erhalten wir die Gleichung des geometrischen Ortes für (y), indem wir diesen Ausdruck gleich einer Constanten k, oder, was dasselbe ist, wenn wir:

$$\Omega^2_{xy} = k^2 \Omega_{xx} \Omega_{yy}$$

setzen. Dies ist aber ein Kegelschnitt, welcher den fundamentalen Kegelschnitt $\Omega_{yy} = 0$ in den beiden Durchschnittspunkten mit $\Omega_{xy} = 0$, der Polare von (x) in Bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt, berührt.

Von dem Punkte (x) stehen alle diejenigen Punkte gleich weit ab, die demselben Kegelschnitte angehören, welcher den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnitten mit der Polare des Punktes (x) berührt.

Diese Kegelschnitte also sind es, die wir, gewöhnlichem Sprachgebrauche folgend, bei unserer Massbestimmung als *Kreise* zu bezeichnen haben. Der Punkt (x) ist das gemeinsame *Centrum* der Kreise. Unter dem *Radius* des Kreises haben wir die Entfernung eines beliebigen seiner Punkte (y) vom Mittelpunkte (x), das heisst den Ausdruck:

$$2ic \text{ arc cos } k$$

zu verstehen.

Unter diesen um das Centrum (x) beschriebenen Kreisen findet sich insbesondere, $k=0$ und also einem Radius gleich $\pi i c$ entsprechend, die Polare des Punktes (x). Es findet sich ferner unter ihnen (für $k = 1$) ein Kreis mit dem Radius Null. Derselbe besteht aus dem Paare der von (x) an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten. Der Abstand zweier auf einer solchen Tangente gelegenen Punkte ist in der That immer Null, weil sie mit den Durchschnittspunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitt das Doppelverhältniss $+1$ bilden. Man müsste denn der Constanten c einen unendlich grossen Werth ertheilen, was hier nicht angeht, da sonst die Entfernung aller nicht auf einer Tangente des Kegelschnitts gelegener Punkte unendlich gross würde. Es bleibt natürlich unbenommen, zur Massbestimmung auf den Tangenten des Kegelschnitts dem c einen besonderen unendlich grossen Werth beizulegen. Diese Massbestimmung ist dann aber nicht mehr mit der allgemeinen vergleichbar. — Es giebt endlich unter den in Rede stehenden concentrischen Kreisen, $k = \infty$ entsprechend, einen mit unendlich grossem Radius. Dies ist der fundamentale Kegelschnitt selbst; wie denn auf jeder durch (x) hindurchgehenden Geraden die beiden Durchschnittspunkte mit dem fundamentalen Kegelschnitte die beiden unendlich fernen Punkte sind: *Der Fundamentalkegelschnitt ist der Ort derjenigen Punkte, welche von einem beliebigen Punkte unendlich abstehen.*

Ganz entsprechende Betrachtungen, wie vorstehend für die Punkte der Ebene, kann man ohne Weiteres für die Geraden derselben anstellen:

Diejenigen Geraden, welche mit einer festen Geraden (u) *den nämlichen Winkel einschliessen, umhüllen Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnittspunkten mit* (u) *berühren, unter denen sich also insbesondere der Pol von* (u) (*als Strahlbüschel gedacht*) *befindet. — Diejenigen Geraden, welche durch einen der Durchschnittspunkte des Fundamentalkegelschnitts mit* (u) *hindurchgehen, schliessen mit* (u) *einen Winkel Null ein. — Die Tangenten des fundamentalen Kegelschnitts bilden mit* (u) *einen unendlich grossen Winkel.*

Diejenigen Kegelschnitte also, welche den Fundamentalkegelschnitt zweimal berühren, sind gleichzeitig Ort derjenigen Punkte, welche von einem festen Punkte, dem Pole der Berührungssehne, gleich weit abstehen, und werden umhüllt von denjenigen Geraden, welche eine feste Gerade, die Berührungssehne, unter constantem Winkel schneiden. Man bemerke ferner noch dies. Als *parallele* Linien wird man solche Linien bezeichnen, die sich unendlich weit, d. h. auf dem Fundamentalkegelschnitte schneiden. Der Winkel zweier paralleler Linien ist gleich Null. Aber es steht nichts im Wege, für ein Büschel paralleler Linien, indem man c einen unendlich grossen Werth beilegt, eine *specielle* Massbestimmung einzuführen. Auf die Einführung einer solchen speciellen Massbestimmung kommt es hinaus, wenn wir in der gewöhnlichen, parabolischen Geometrie von einem Abstande*) zweier Parallelen reden.

§ 9.

Ueber diejenigen linearen Transformationen der Ebene, welche an Stelle der Bewegungen treten.

Ein Kegelschnitt hat die Eigenschaft, durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen der Ebene in sich überzugehen. Denn es giebt achtfach unendlich viele lineare Transformationen in der Ebene und nur fünffach unendlich viele Kegelschnitte, so dass jeder Kegelschnitt in jeden anderen, und also auch in sich selbst, durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen übergeführt werden kann.

Bei einer solchen linearen Transformation der Ebene vertauschen sich die Punkte des Kegelschnittes unter sich, gerade so, wie bei einer linearen Transformation eines Grundgebildes erster Stufe, dessen Elemente unter einander vertauscht werden. Man wird hieraus schliessen, dass bei jeder solchen linearen Transformation zwei Punkte des Kegel-

*) Es ist dabei eine Besonderheit der parabolischen Geometrie, wenn der Abstand zweier Parallelen gleich ist dem Minimalabstande zweier auf ihnen beweglicher Punkte.

schnitts ungeändert bleiben. In der That, man betrachte die beiden Strahlbüschel $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ und $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$, welche von einem festen Punkte o des Kegelschnitts nach beliebig gegebenen Punkten $p_1, p_2, p_3 \ldots$ desselben und nach denjenigen Punkten $p_1', p_2', p_3' \ldots$ hingehen, die aus letzteren vermöge einer linearen Transformation der Ebene, die den Kegelschnitt ungeändert lässt, entspringen. Die beiden Büschel sind projectivisch, denn $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ ist projectivisch mit $o'(p_1', p_2', p_3', \ldots)$, wo o' den Punkt bezeichnet, in welchen o bei der Transformation übergeht. Dieser Punkt o' ist aber, wie o, ein Punkt des gegebenen Kegelschnittes, also ist $o'(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ projectivisch zu $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ und also letzteres auch zu $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$, w. z. b. Sind aber die beiden Büschel $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ und $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ projectivisch, so haben sie zwei Strahlen $o\pi_1$ und $o\pi_2$ entsprechend gemein, mithin giebt es zwei Punkte π_1, π_2 des Kegelschnittes, welche bei der Transformation ungeändert bleiben.

Bleiben aber zwei Punkte des Fundamentalkegelschnitts ungeändert, so auch deren Verbindungslinie, die Tangenten in ihnen und deren Durchschnitt, überhaupt also das von der Verbindungslinie und den Tangenten gebildete Dreieck. Unter Zugrundelegung dieses Dreiecks als Coordinatendreieck ist die Gleichung des Kegelschnittes von der Form:

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0 .$$

Die lineare Transformation, durch welche er in sich selbst übergeht, muss, da sie das Dreieck ungeändert lässt, von der Form sein:

$$x_1 = \alpha_1 y_1 \quad , \quad x_2 = \alpha_2 y_2 \quad , \quad x_3 = \alpha_3 y_3 .$$

Als Bedingung dafür, dass durch sie der Kegelschnitt ungeändert bleibt, kommt:

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = 0 ,$$

und da dies nur eine Bedingung für die drei homogenen α ist, so giebt es einfach unendlich viele lineare Transformationen, die das Dreieck und den Kegelschnitt ungeändert lassen.

Durch diese Transformationen bleibt der Quotient $\frac{x_1 x_2}{x_3^2}$ unabhängig von seinem Werthe ungeändert. Es gehen also durch die nämlichen Transformationen alle Kegelschnitte von der Form:

$$x_1 x_2 - k x_3^2 = 0$$

in sich über*).

Die hiermit näher bestimmten linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, zerfallen nun, sofern

*) Beiläufig bemerkt, sieht man hieraus: Nicht jede lineare Transformation führt einen Kegelschnitt in sich selbst über; steht aber die Transformation zu *einem* Kegelschnitte in dieser Beziehung, so gleich zu unendlich vielen.

sie reell sind, in zwei Gruppen. *Die Transformationen der ersten Gruppe können durch Wiederholung einer reellen, unendlich kleinen Transformation derselben Art erzeugt werden, die der zweiten nicht.*

Ist beispielsweise der Fundamentalkegelschnitt reell, ebenso die beiden festbleibenden auf ihm befindlichen Punkte π_1 und π_2, so hat man eine Transformation der ersten oder zweiten Gruppe, jenachdem $\alpha_3 = \sqrt{\alpha_1\,\alpha_2}$ oder $\alpha_3 = -\sqrt{\alpha_1\,\alpha_2}$. Im letzteren Falle wird die Strecke $\pi_1\,\pi_2$ von je zwei entsprechenden Punkten des Kegelschnitts getrennt, im ersteren nicht.

Die Transformationen der ersten Gruppe, durch die der Fundamentalkegelschnitt ungeändert bleibt, sind es nun, welche als *Bewegungen* der Ebene bezeichnet sein sollen. Dieselben gehen nämlich in den Cyclus der wirklichen Bewegungen der Ebene über, wenn wir den Fundamentalkegelschnitt in der Art passend particularisiren, dass die auf ihn gegründete Massbestimmung in die wirklich angewandte übergeht*).

Bei dieser Definition können wir den eben bewiesenen Satz, dass durch jede lineare Transformation, durch die der gegebene Kegelschnitt in sich übergeht, unendliche viele Kegelschnitte ungeändert bleiben, so aussprechen:

Bei einer Bewegung der Ebene geht nicht nur der Fundamentalkegelschnitt, sondern jeder Kegelschnitt (jeder Kreis) in sich über, welcher ihn in den beiden fest bleibenden Punkten berührt.

Unter diesen Kegelschnitten findet sich namentlich auch der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, der gemeinsames Centrum der Kreise ist. Wir wollen die Bewegung als eine *Rotation der Ebene um dieses Centrum* bezeichnen.

Dann haben wir den Satz:

Jede Bewegung der Ebene besteht in einer Rotation um einen Punkt. Alle anderen Punkte beschreiben um diesen Punkt als Centrum herumgelegte Kreise.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass bei der Bewegung die Polare des Rotationscentrums dualistisch dieselbe Rolle spielt, wie das Centrum, dass also bei unserer Massbestimmung Bewegung ein sich selbst dualistischer Begriff ist. Diese Dualität wird erst aufgehoben, wenn wir, um zur parabolischen Geometrie zu gelangen, den fundamentalen Kegelschnitt undualistisch particularisiren.

**) Die andere Classe von Transformationen des Kegelschnittes in sich selbst liefert bei diesem Uebergange diejenigen Transformationen der Ebene, welche aus ebenen Figuren beliebig gelegene, invers congruente machen.

Unter den Bewegungen der Ebene giebt es noch einen ausgezeichneten Fall, der dann eintritt, wenn das Centrum der Rotation unendlich weit, d. h. auf den Fundamentalkegelschnitt rückt.

Die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Ebene beschrieben werden, sind dann Kegelschnitte, die den fundamentalen Kegelschnitt im Centrum vierpunktig berühren. Diejenige Art der Bewegung, welche dieser Annahme bei der gewöhnlichen Massbestimmung entspricht, bezeichnet man als *Translation* *).

Es ist nun ersichtlich, dass, wenn man Bewegungen der Ebene so definirt, wie vorstehend geschehen, dann der Satz gilt:

Bei den Bewegungen der Ebene bleiben die Massverhältnisse ungeändert.

Denn da bei einer Bewegung der Fundamentalkegelschnitt in sich übergeht, so wird bei derselben das Doppelverhältniss zweier Punkte zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitte erhalten. Also auch der mit einer Constanten multiplicirte Logarithmus des Doppelverhältnisses, d. h. die Entfernung der beiden Punkte. Aehnlich ist es mit dem Winkel zweier Geraden.

Es gilt dies nicht nur für die Bewegungen der Ebene, sondern auch, und aus demselben Grunde, bei den Transformationen zweiter Art, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen.

Es gilt ferner etwas Aehnliches bei denjenigen reciproken (dualistischen) Transformationen, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen, namentlich für die durch denselben begründete Polar-Reciprocität. Denn zwei Punkten und den Durchschnittspunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitt, die ein gewisses Doppelverhältniss besitzen, entsprechen bei diesen Transformationen zwei Linien und die beiden von deren Durchschnittspunkte an den Fundamentalkegelschnitt gehenden Tangenten, welche dasselbe Doppelverhältniss mit einander bilden. Nehmen wir also die beiden Constanten c und c' (§ 8.) der beiden Massbestimmungen gleich, so haben wir den Satz:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel der ihnen entsprechenden Geraden, und umgekehrt;

insbesondere:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel ihrer Polaren.

---

*) Eine durch die Particularisation des Fundamentalkegelschnitts herbeigeführte Besonderheit ist er, wenn bei der parabolischen Geometrie die Translationen ein geschlossenes System bilden und je zwei Translationen vertauschbar sind.

Wir werden hier diese Sätze nicht weiter benutzen, und nur noch im folgenden Paragraphen auf den letzten derselben zurückkommen. Unter ihn subsumirt sich nämlich der Satz aus der Geometrie der Kugel: dass sich die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks beim Uebergange zum Polardreiecke vertauschen*).

§ 10.

Die allgemeine projectivische Massbestimmung im Strahlen- und Ebenenbüschel.

In ganz ähnlicher Weise, wie in den beiden vorigen Paragraphen eine allgemeine projectivische Massbestimmung für die Ebene aufgestellt wurde, wird man eine solche für das andere Grundgebilde zweiter Stufe, den Punkt (aufgefasst als Ebenen- und Strahlenbündel), aufstellen können. Bei derselben wird man statt des fundamentalen Kegelschnittes einen *fundamentalen Kegel zweiten Grades* benutzen. Als Winkel zweier Geraden, die sich im Mittelpunkte des Kegels schneiden, ist der mit einer Constanten c multiplicirte Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses anzusehen, welches die beiden Geraden mit den beiden Erzeugenden des Kegels bilden, die mit ihnen in einer Ebene liegen; als Winkel zweier durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen der mit einer (anderen) Constanten c' multiplicirte Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden Ebenen zu denjenigen beiden Tangentenebenen des fundamentalen Kegels, welche durch ihren Durchschnitt gehen.

Der analytische Ausdruck dieser Massbestimmung ist genau derselbe, wie derjenige, der oben für die Massbestimmung in der Ebene aufgestellt wurde. Man hat nur den Coordinaten (x), (y) bez. (u), (v) in der Ebene die Bedeutung von Strahlen- und Ebenencoordinaten im Punkte zu geben. Auch alle anderen für die Ebene ausgeführten Entwickelungen lassen sich ohne Weiteres auf den Punkt übertragen, welche Andeutung hier genügen soll.

Es ist nun leicht zu sehen, dass sich die gewöhnliche Massbestimmung im Punkte**), d. h. die gewöhnliche Art und Weise, Winkel von Geraden oder Ebenen, die durch einen Punkt gehen, zu messen, als specieller Fall unter diese allgemeine Massbestimmung subsumirt. *Dieselbe benutzt als fundamentalen Kegel zweiten Grades den Kegel,*

---

*) Vergl. Cayley, l. c.

) Man spricht gewöhnlich nicht von der Massbestimmung im Punkte, sondern von der Massbestimmung auf einer um ihn als Centrum herumgelegten Kugel (vom Radius 1). Im Texte ist die erstere Ausdrucksweise vorzuziehen, da der Punkt *der vom Punkte sich nach dem unendlich weit entfernten imaginären Kreise) *erstreckt; sie setzt überdies die beiden Constanten c und c' gleich* $\frac{\sqrt{-1}}{2}$**).

Denn auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, ist der Kegel, welcher von dem Punkte nach dem unendlich fernen imaginären Kreise hingeht, dargestellt durch:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

oder in Ebenencoordinaten durch:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Für den Winkel, den zwei gerade Linien mit den Coordinaten (x, y, z), (x', y', z') bez. zwei Ebenen (u, v, w), (u', v', w') mit einander bilden, erhalten wir also nach den Formeln des § 8., indem wir noch $c = c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzen, bez.:

$$\text{arc cos} \cdot \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

und:

$$\text{arc cos} \cdot \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

und dies ist die gewöhnliche Winkelbestimmung. — Die Polare einer durch den Punkt gehenden Ebene mit Bezug auf den fundamentalen Kegel ist deren Senkrechte. Der letzte Satz des vorigen § geht also jetzt in den Satz über: Der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel ihrer Normalen. Auf diesem Satze beruht das in der sphärischen Geometrie angewandte Princip, nach welchem in einem sphärischen Dreiecke und seinem Polardreiecke die Massverhältnisse dualistisch dieselben sind, d. h. dieselben sind, wenn man die Seiten mit den Winkeln vertauscht.

---

das einfache Grundgebilde ist, mit dem die projectivische Geometrie operirt. Dabei ist ein Unterschied nicht zu übersehen, der auch schon auftritt, wenn man statt von der Massbestimmung im Strahlbüschel von der Massbestimmung auf dem Kreise spricht. Jeder durch den Punkt hindurchgehenden Geraden (jedem Strahle des Büschels) entsprechen *zwei* Punkte der Kugel (des Kreises). Dadurch wird für die Massbestimmung auf der Kugel (dem Kreise) noch ein Unterschied geschaffen, der hier nur unnöthigerweise compliciren würde.

*) Bei der elliptischen und hyperbolischen Geometrie muss statt dessen gesetzt werden: den Tangentenkegel, der sich von dem Punkte nach der unendlich fernen Fläche zweiten Grades erstreckt.

**) Dies ist diejenige Annahme der Constanten, welche Cayley immer in Anwendung bringt.

§ 11.

Die Massbestimmung in der Ebene bei imaginärem Fundamentalkegelschnitte. Die elliptische Geometrie.

Die gewöhnliche Massbestimmung im Punkte ist ein Bild dafür, wie sich überhaupt die projectivische Massbestimmung in Punkt und Ebene stellt, wenn der fundamentale Kegel, resp. der fundamentale Kegelschnitt imaginär ist. Die *einzige* bei der gewöhnlichen Massbestimmung im Punkte hinzutretende Particularisation ist, dass die beiden Constanten c und c' gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ gesetzt werden. Hätten wir sie allgemeiner gleich $c_1\sqrt{-1}$ und $c_1'\sqrt{-1}$ gesetzt, so würden die Massunterschiede nur um Factoren $2c_1$, $2c_1'$ gewachsen sein:

$$2c_1 \,.\, \text{arc}\cos\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

und

$$2c_1' .\, \text{arc}\cos\frac{uu'+vv'+ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\,\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}},$$

Ausdrücke, an welche man ohne Weiteres dieselben Entwickelungen anknüpfen kann, wie an die ursprünglichen.

Ist also in der Ebene ein imaginärer Fundamentalkegelschnitt gegeben, so ist die Länge jeder reellen Linie endlich, ebenso die Summe der Winkel im Strahlbüschel. Behalten wir die Bezeichnung c_1 und c_1' für die durch i dividirten Constanten c und c' bei*), so ist die Länge der geraden Linie gleich $2c_1\pi$, die Summe der Winkel im Büschel gleich $2c_1'\pi$.

Es giebt weder reelle unendlich ferne Punkte, noch reelle Linien, welche mit anderen unendlich grosse Winkel bilden. Sodann werden sich auch alle Relationen zwischen den Winkeln von Linien und von Ebenen, die durch einen Punkt gehen, auf die Abstände von Punkten und die Winkel von Geraden in der Ebene übertragen, wenn man nur vorher die Abstände durch $2c_1$, die Winkel durch $2c_1'$ dividirt. *Die ebene Trigonometrie unter Zugrundelegung dieser Massbestimmung wird also sein wie die sphärische Trigonometrie*, nur mit dem Unterschiede, dass man statt der Seiten der Dreiecke und ihrer Winkel die durch $2c_1$ dividirten Seiten und die durch $2c_1'$ dividirten Winkel in die Formeln einzuführen hat.

---

*) c und c' sind in der That rein imaginär zu nehmen, aus demselben Grunde, aus dem in § 5. die Constante c bei imaginären Fundamentalelementen imaginär gesetzt wurde.

Die hiermit geschilderte Massbestimmung in der Ebene ist nun gerade diejenige, welche die *elliptische* Geometrie anzunehmen hat. Man wird bei ihr noch insbesondere, damit die Winkelsumme im Büschel gleich π sind, die Constante c_1', wie bei der gewöhnlichen Massbestimmung im Punkte, gleich $\frac{1}{2}$ setzen. Die Winkelsumme im ebenen Dreiecke ist dann, wie beim sphärischen Dreiecke, grösser als 2π, und wird nur gleich 2π beim unendlich kleinen Dreiecke u. s. f.

Man hat hiernach ein Bild für den planimetrischen Theil der elliptischen Geometrie, wenn man sich in der Ebene einen imaginären Kegelschnitt willkürlich gegeben denkt und auf ihn eine projectivische Massbestimmung gründet. Beispielsweise wähle man für den Kegelschnitt denjenigen, in welchem die Ebene von dem Kegel geschnitten wird, der von einem bestimmten Punkte des Raumes nach dem unendlich fernen imaginären Kreise hingeht. Sodann setze man c und c' gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$. So ist die Entfernung zweier Punkte oder der Winkel zweier Geraden der Ebene gleich dem Winkel, unter welchem die beiden Punkte, bez. die beiden Geraden von dem gewählten Punkte aus erscheinen. — Andererseits: ist die uns thatsächlich gegebene Massgeometrie die elliptische, so bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene einen imaginären Kegelschnitt, und die elliptische Geometrie fällt mit der auf diesen Kegelschnitt gegründeten projectivischen Massbestimmung zusammen.

§ 12.

Die Massbestimmung in der Ebene bei reellem Fundamentalkegelschnitt. Die hyperbolische Geometrie.

Wir wollen uns jetzt in der Ebene einen reellen Fundamentalkegelschnitt gegeben denken. Es wird dies zu einer Massbestimmung führen, die für die Punkte innerhalb des Fundamentalkegelschnittes mit den Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie übereinkommt.

Ist der fundamentale Kegelschnitt reell, so zerfallen die reellen Punkte und Geraden der Ebene, jede für sich, in zwei Classen. Es giebt Punkte, von denen aus sich zwei reelle, und solche, von denen aus sich keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt legen lassen. Die ersteren bezeichnet man als die Punkte ausserhalb, die letzteren als die Punkte innerhalb des Kegelschnittes. Analog zerfallen die Geraden in zwei Gruppen, in solche, welche den Kegelschnitt in zwei reellen, und in solche, welche ihn in zwei imaginären Punkten schneiden.

Des Zusammenhangs mit der hyperbolischen Geometrie wegen wollen wir uns auf die Betrachtung der Punkte innerhalb des Kegelschnittes und der durch sie hindurchgehenden Geraden beschränken.

Keins der Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in den von uns betrachteten Raum fallen, hat reelle unendlich ferne Elemente. Desswegen soll die Constante c' rein imaginär, $= c_1' i$, genommen werden. Die Winkelsumme in einem beliebigen Büschel, dessen Mittelpunkt innerhalb des fundamentalen Kegelschnittes liegt, ist dann $2 c_1' \pi$.

Dagegen hat jede Gerade, welche das von uns betrachtete Gebiet durchsetzt, zwei reelle (logarithmisch) unendlich ferne Punkte: ihre Durchschnittspunkte mit dem Fundamentalkegelschnitt. Desshalb werden wir der Constanten c einen reellen Werth beilegen.

Bei dieser Festsetzung der Constanten c und c' haben alle Punkte, welche innerhalb des Kegelschnittes liegen, einen reellen Abstand; ebenso bilden alle Geraden, die sich innerhalb des Kegelschnittes schneiden, mit einander einen reellen Winkel. Aber der Abstand zweier Punkte, die durch den Fundamentalkegelschnitt getrennt werden, ist imaginär. Der Fundamentalkegelschnitt ist der Ort der unendlich fernen Punkte. Zwei Gerade, die durch das Innere des Kegelschnittes verlaufen, aber sich ausserhalb desselben schneiden, bilden einen imaginären Winkel. Zwischen ihnen und den Geraden, die sich innerhalb schneiden, bilden diejenigen den Uebergang, deren Schnittpunkt auf den fundamentalen Kegelschnitt, also unendlich weit fällt, d. h. diejenigen Linien, welche parallel (§ 8.) sind. Ihr Winkel ist gleich Null.

Wir wollen uns jetzt denken, dass wir uns an irgend einer Stelle im Inneren des Fundamentalkegelschnittes befänden und dass wir uns auf der Ebene nur vermöge derjenigen linearen Transformationen bewegen könnten, die den fundamentalen Kegelschnitt ungeändert lassen, (vergl. § 5., § 9.). Wir werden uns dann, wie bei unserer gewöhnlichen Massbestimmung, um uns selbst drehen können und nach endlicher Drehung in die Anfangslage zurückkommen, wir werden ebenfalls, wie bei der gewöhnlichen Massbestimmung, auf der geraden Linie nach der einen oder anderen Seite unausgesetzt fortschreiten können. *Aber wir werden nie den fundamentalen Kegelschnitt erreichen, geschweige denn überschreiten.* Wir sind also in das Innere des Kegelschnittes festgebannt; der Kegelschnitt begrenzt für uns die Ebene; ob jenseits desselben noch ein Stück der Ebene vorhanden ist oder nicht, würden wir nicht sagen können. Ein Beobachter, der, mit der gewöhnlichen Massbestimmung ausgerüstet, uns auf den fundamentalen Kegelschnitt zuschreiten sähe, während wir die Bewegung gemäss der neuen Massbestimmung mit constanter Geschwindigkeit ausführen, würde bemerken, wie wir (von einer gewissen Stelle an) zusehens immer langsamer vorwärts kämen und die uns gegebene Grenze, den Fundamentalkegelschnitt, nie erreichten.

Die hiermit geschilderte Massgeometrie *entspricht nun durchaus* *den Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie*, wenn wir noch die einstweilen unbestimmt gebliebene Constante c_1' gleich $\frac{1}{2}$ setzen, damit die Winkelsumme im Strahlbüschel gleich π wird. Betrachten wir, um uns davon zu überzeugen, einige der Propositionen der hyperbolischen Geometrie etwas näher (dieselben sollen in Anführungszeichen aufgeführt werden).

„Durch einen Punkt der Ebene giebt es zu einer gegebenen Geraden zwei Parallele, d. h. Linien, welche die gegebene Gerade in unendlich fernen Punkten schneiden.“ Es sind dies die beiden Verbindungslinien des Punktes mit den beiden Schnittpunkten der gegebenen Geraden und des Fundamentalkegelschnittes.

„Die Neigung der beiden Parallelen, die durch einen Punkt zu einer Geraden gezogen werden können, nimmt bei zunehmender Entfernung des Punktes von der Geraden zu. Rückt der Punkt unendlich weit, so wird dieselbe gleich π, d. h. in anderem Sinne gerechnet, die beiden Parallelen bilden einen Winkel gleich Null“. In der That, wenn der Punkt auf den Fundamentalkegelschnitt rückt, so schliessen die beiden Parallelen, wie überhaupt zwei Gerade, die sich auf dem Fundamentalkegelschnitt schneiden, einen Winkel gleich Null ein. Daher auch der Satz: „Der Winkel zwischen einer Geraden und jeder ihrer Parallelen ist gleich Null“. — Dass auch für nicht unendlich ferne Punkte der „Winkel des Parallelismus,“ den die hyperbolische Geometrie aufstellt, sich bei unserer projectivischen Massbestimmung wiederfindet, mag man daraus ersehen, dass, wie gleich gezeigt werden soll, überhaupt die trigonometrischen Formeln in beiden Fällen übereinstimmen.

„Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als 2π; für ein Dreieck mit unendlich fernen Ecken ist die Winkelsumme gleich Null.“ Das letztere folgt daraus, dass diese Ecken des Dreiecks nothwendig auf dem Fundamentalkegelschnitt liegen, und je zwei Linien, die sich in einem Punkte des Fundamentalkegelschnittes schneiden, einen Winkel gleich Null einschliessen. Die allgemeine Giltigkeit des ersteren Satzes, der dadurch wahrscheinlich gemacht wird, dass für unendlich grosse Dreiecke die Winkelsumme 0, für unendlich kleine gleich 2π ist, folgt aus den noch näher anzugebenden trigonometrischen Formeln.

„Zwei Perpendikel, auf einer Geraden errichtet, schneiden sich nicht.“ Bei uns schneiden sie sich allerdings, nämlich in dem Pole der Geraden. Aber dieser liegt in dem Raume ausserhalb des Kegelschnittes, von dessen Existenz wir durch unsere Bewegungen nichts wissen können. Einen solchen Raum können wir uns aber — und das geschieht auch in der hyperbolischen Geometrie — als einen *idealen*

Raum*) adjungiren; ganz in demselben Sinne, wie man in der parabolischen Geometrie den wirklich vorhandenen Elementen der Ebene eine (uneigentliche) unendlich ferne Gerade hinzufügt. Ueber die Existenz des idealen Raumstückes wird damit gar nichts ausgesagt; wir gebrauchen den Ausdruck nur als einen in sich nicht widersprechenden und bequemen Terminus.

„Ein Kreis mit unendlich grossem Radius ist von einer Geraden verschieden.“ Ein Kreis mit unendlich grossem Radius bedeutet bei uns einen Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt vierpunktig berührt. Dagegen würde die Gerade, d. h. eine Gerade, die durch das von uns betrachtete Innere des Kegelschnittes geht, ein Kreis sein, dessen Centrum (der Pol der Geraden) in das ideale Gebiet der Ebene fällt, und dessen Radius einen imaginären Werth hat. —

Wir wollen uns noch eine Vorstellung davon machen, wie sich die Ebene in sich transformirt, wenn sie um einen unendlich fernen oder einen idealen Drehpunkt rotirt (§ 9.). Im ersteren Falle beschreiben alle Punkte Kegelschnitte, die sich in unendlicher Entfernung vierpunktig berühren. Im zweiten Falle beschreiben sie Kegelschnitte, welche den fundamentalen Kegelschnitt in zwei reellen Punkten berühren. Unter ihnen befindet sich eine im Endlichen gelegene Gerade, die Polare des idealen Drehpunktes. Diese Gerade verschiebt sich in sich; aber die übrigen Punkte beschreiben nicht etwa, entsprechend den Vorstellungen der parabolischen Geometrie, parallele Gerade, sondern (in der Nähe der Geraden flachgestreckte) Kegelschnitte, die den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnittspunkten mit der ausgezeichneten Geraden berühren.

Was nun endlich die *trigonometrischen Formeln* angeht, die bei unserer jetzigen Massbestimmung gelten, so erhält man dieselben unmittelbar durch die folgende Ueberlegung. In § 11. haben wir gesehen, dass, bei Zugrundelegung eines imaginären Kegelschnittes in der Ebene und bei der Annahme der Constanten $c = c_1 i$, $c' = c_1' i = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ für die Ebene eine Trigonometrie gilt, deren Formeln sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, wenn man statt der Seiten die Seiten, dividirt durch $2c_1$, einführt. Ein Gleiches wird nun auch gelten, wenn ein reeller Kegelschnitt zu Grunde gelegt wird. Denn die Geltung der Formeln der sphärischen Trigonometrie beruht doch auf analytischen Identitäten, die unabhängig sind von der Frage nach der Art des zu Grunde gelegten fundamentalen Kegelschnittes. Der einzige Unterschied, der nun, gegenüber

*) Man vergl. hierzu namentlich die Auseinandersetzungen, welche Herr Battaglini gegeben hat: *Sulla geometria imaginaria di Lobatchefsky*. Giornale di Matematiche. t. V. 1867.

dem früheren Falle, eintritt, ist, dass $c_1 = \frac{c}{i}$ nunmehr imaginär geworden ist.

Die trigonometrischen Formeln, welche bei unserer jetzigen Massbestimmung gelten, ergeben sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man statt der Seiten die Seiten, dividirt durch $\frac{c}{i}$, einführt.

Das ist aber dieselbe Regel, nach welcher man in der hyperbolischen Geometrie die trigonometrischen Formeln aufstellt. Die Constante c ist die in der hyperbolischen Geometrie vorkommende charakteristische Constante. Man kann sagen, dass die Planimetrie sich nach der Annahme der hyperbolischen Geometrie so gestaltet, wie die Geometrie auf einer Kugel mit dem imaginären Radius $\frac{c}{i}$.

Für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie erhalten wir nach dem Vorstehenden sofort ein Bild, wenn wir einen beliebigen reellen Kegelschnitt hinzeichnen und auf ihn eine projectivische Massbestimmung gründen. Umgekehrt: ist die uns thatsächlich gegebene Massbestimmung von der Art, wie sie sich die hyperbolische Geometrie vorstellt, so bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene einen reellen uns umschliessenden Kegelschnitt, und ist die hyperbolische Geometrie nichts Anderes, als die auf diesen Kegelschnitt gegründete projectivische Massbestimmung.

§ 13.

Die specielle Massbestimmung in der Ebene. Die parabolische Geometrie.

Die Massbestimmung der parabolischen Geometrie ist unter den bis jetzt betrachteten nicht mit enthalten, da sie keinen eigentlichen Kegelschnitt als fundamentales Gebilde benutzt. Vielmehr subsumirt sie sich unter einen Grenzfall der seither betrachteten allgemeinen Massbestimmung, der dann entsteht, wenn der fundamentale Kegelschnitt sich in ein Punktepaar auflöst. Dieses fundamentale Punktepaar ist bei der parabolischen Geometrie imaginär; *es sind die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte.*

Ein imaginäres Punktepaar kann, wie hier beiläufig auseinandergesetzt werden mag, als Uebergang eines reellen Kegelschnittes zu einem imaginären angesehen werden, und stellt sich desswegen auch die parabolische Geometrie als Uebergangsfall zwischen die hyperbolische und die elliptische. Sei beispielsweise eine Hyperbel gegeben, deren (imaginäre) Nebenaxe einen festen Werth hat, während die Hauptaxe von einer gegebenen Grösse an allmählich gegen Null ab-nimmt und dann imaginär wird. An der Grenze Null fallen die beiden Aeste der Hyperbel in eine doppeltzählende Gerade, die Nebenaxe, zusammen. Diese Linie vertritt den Kegelschnitt, insofern er durch Punkte erzeugt war. Aber sofern er von Linien umhüllt war, ist er in zwei conjugirt imaginäre Punkte ausgeartet, welche im Abstande der constant gebliebenen Nebenaxe auf der doppelt zählenden Geraden liegen. Alle Tangenten des Kegelschnittes sind beim Grenzübergange imaginär geworden bis auf die eine Gerade, die jetzt den ganzen Kegelschnitt repräsentirt und die als Doppeltangente desselben aufzufassen ist. Wird sodann auch die Hauptaxe imaginär, so enthält der Kegelschnitt überhaupt keine reellen Elemente mehr.

Doch wir wollen zunächst allgemein eine solche Massbestimmung in der Ebene betrachten, die statt eines fundamentalen Kegelschnittes ein Punktepaar benutzt. Eine solche Massbestimmung soll eine *specielle* Massbestimmung heissen, im Gegensatze zu der bis jetzt betrachteten *allgemeinen*. Es versteht sich von selbst, dass man statt der Ausartung des Kegelschnittes in ein Punktepaar auch die Ausartung desselben in ein Linienpaar betrachten könnte; wenn wir uns hier auf die erste beschränken und ihr einen besonderen Namen geben, so geschieht dies, weil sie es ist, die unter sich die parabolische Geometrie begreift.

Wenn der fundamentale Kegelschnitt in ein Punktepaar ausartet, so bleibt die Bestimmung des Winkels ähnlich wie im allgemeinen Falle. Jedes Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt nicht gerade auf der Verbindungsgeraden der beiden Fundamentalpunkte, d. h. auf den fundamentalen Kegelschnitt fällt, hat zwei getrennte Fundamentalstrahlen, diejenigen beiden, welche durch die Fundamentalpunkte durchgehen. Dagegen wird die Bestimmung des Abstandes zweier Punkte jetzt wesentlich anders als in dem allgemeinen Falle. Da der Fundamentalkegelschnitt jetzt aus einer doppeltzählenden Geraden besteht, so schneiden ihn alle Geraden in zusammenfallenden Punktepaaren. Die auf ihnen zu messende Distanz wird also, so lange die Constante c nicht einen unendlichen Werth bekommt, Null. Wir müssen, damit die Distanz endlich werde, c einen unendlich grossen Werth ertheilen. Dann wird die Distanz gleichzeitig eine algebraische Function der Coordinaten. Aber die Vergleichbarkeit von Strecken und Winkeln, die bisher bestanden hatte, fällt fort; richtiger ausgesprochen: die Strecken sind nur noch unendlich kleinen Winkeln vergleichbar. Auch wenn wir c einen unendlich grossen Werth ertheilen, bleibt die Entfernung solcher Punkte, deren Verbindungsgerade durch einen Fundamentalpunkt durchgeht, gleich Null. Denn diese Linien entsprechen den Tangenten des früheren Kegelschnittes. Einen Winkel gleich Null bilden solche Geraden, welche sich in einem Punkte der Verbindungsgeraden der beiden Fundamentalpunkte schneiden.

Als Kreise wird man diejenigen Kegelschnitte bezeichnen, welche durch die Fundamentalpunkte gehen; concentrische Kreise sind solche, die sich in den beiden Fundamentalpunkten berühren. Unter jedem Systeme concentrischer Kreise findet sich einer mit dem Radius ∞. Er ist in die doppeltzählende Verbindungsgerade der beiden Fundamentalpunkte ausgeartet. *Die unendlich fernen Punkte bilden also jetzt eine doppeltzählende Gerade.* Die Kreise haben nicht mehr, wie früher, eine sich selbst dualistische Bedeutung. Diejenigen Linien, welche eine gegebene Linie unter constantem Winkel schneiden, umhüllen nicht mehr einen eigentlichen Kreis, sondern einen unendlich fern liegendenden Punkt. Die Kreise mit unendlich fernem Centrum, welche den Fundamentalkegelschnitt im Centrum vierpunktig berührten, sind jetzt in die unendlich ferne Gerade und eine weitere Gerade zerfallen u. s. f. Alles das sind Dinge, die sich aus dem früher Aufgestellten durch Grenzübergang ohne Weiteres ergeben.

So wie wir nun unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes eine dreifach unendliche Schaar linearer Transformationen der Ebene als *Bewegungen* bezeichnen konnten, so auch hier. Nur genügt es nicht mehr, die Bewegungen als diejenigen linearen Transformationen (oder vielmehr als die eine Classe derselben) zu definiren, welche das fundamentale Gebilde ungeändert lassen. Denn ein Punktepaar geht nicht nur durch dreifach unendlich viele, sondern durch vierfach unendlich viele lineare Transformationen der Ebene in sich über. Unter ihnen aber sind dreifach unendlich viele dadurch ausgezeichnet, dass jede einzelne unter ihnen die Kreise eines concentrischen Büschels ungeändert lässt. Diese selbst zerfallen wieder in zwei dreifach unendliche Gruppen. Die eine Gruppe umfasst die Bewegungen, die andere diejenigen Transformationen der Ebene, welche ebene Figuren in invers congruente überführen. Die beiden Gruppen sind einfach dadurch zu trennen, dass die Bewegungen jeden einzelnen der beiden Fundamentalpunkte ungeändert lassen, während die anderen Transformationen die beiden Fundamentalpunkte unter einander vertauschen. Jede Bewegung der Ebene besteht in einer Rotation um einen Punkt. Wird die Bewegung eine Translation, d. h. rückt das Rotationscentrum unendlich weit, so beschreiben alle Punkte der Ebene parallele Gerade, d. h. Gerade, welche sich in demselben unendlich fernen Punkte schneiden. Es existirt jetzt der Begriff der *Richtung*; *parallele Gerade haben gleiche Richtung.* Die Bewegung hat den sich selbst dualistischen Charakter verloren, den sie im allgemeinen Falle besessen hatte. — Neben die Verwandtschaft der *Congruenz*, welche durch jede der dreifach unendlich vielen Bewegungen, und der *inversen Congruenz*, welche durch die dreifach unendlich vielen Transformationen der zweiten Gruppe entstand, stellt sich jetzt, dem vierfach unendlichen Cyclus linearer Transformationen entsprechend, welche das Fundamentalgebilde zulässt, die Verwandtschaft *der directen und der inversen Aehnlichkeit.* Direct ist die Aehnlichkeit, wenn beide Fundamentalpunkte ungeändert bleiben, invers, wenn sich die beiden Punkte vertauschen. Bei der Aehnlichkeit bleiben alle Winkel ungeändert, während die Entfernungen in Multipla übergehen. Sei noch bemerkt, dass wir nunmehr durch die Bewegungen zu allen Punkten der Ebene hingelangen können, bis auf die Punkte der unendlich fernen Geraden. Ein ideales Gebiet, wie im Falle eines reellen Fundamentalkegelschnittes, giebt es nicht mehr, oder, wenn man will, es hat sich auf seine desswegen doppeltzählende Begrenzung zusammengezogen.

Die analytische Formel, welche jetzt die Entfernung zweier Punkte darstellt — und auf diese wollen wir uns beschränken — nimmt folgende Gestalt an. Sei $p_x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden, sei ferner $P_{xy} = 0$ die Bedingung, unter welcher die Verbindungslinie von (x) und (y) durch einen der beiden Fundamentalpunkte geht. So wird die Entfernung der beiden Punkte

$$= \frac{C\sqrt{P_{xy}}}{p_x \cdot p_y}.$$

Die Entfernung zweier Punkte wird also eine algebraische Function ihrer Coordinaten.

In der That wird man durch Grenzübergang von dem allgemeinen Ausdrucke der Entfernung zu dieser Formel geleitet. Der allgemeine Ausdruck lässt sich so schreiben:

$$2\,ic \text{ arc sin } \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}.$$

Zerfällt nun $\Omega = 0$ in ein Punktepaar, so wird $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}$ identisch Null, doch in der Art, dass es einen verschwindenden constanten Factor (die Discriminante) erhält. Sondert man diesen ab, so bleibt von $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}$ gerade noch P_{xy} stehen, d. h. der Ausdruck, der, gleich Null gesetzt, die Bedingung ausdrückt, dass die Verbindungsgerade von (x) und (y) eine Tangente nunmehr des ausgearteten Kegelschnittes sei. Aber wegen des verschwindenden Factors können wir den Arcus Sinus dem Sinus selbst gleich setzen, und indem wir sodann den verschwindenden Factor mit $2\,ic$ zu einer neuen Constante C vereinigen, endlich noch statt Ω_{xx}, Ω_{yy} bez. p_x^2 und p_y^2 schreiben (da $p^2 = 0$ die Gleichung des ausgearteten Kegelschnittes in Punktcoordinaten ist), so kommt der vorstehend angegebene Ausdruck.

Aus ihm ergiebt sich der in der parabolischen Geometrie gewöhnliche Ausdruck der Entfernung zweier Punkte ohne Weiteres, wenn man die beiden Fundamentalpunkte so bezeichnet, wie man gewöhnlich die beiden Kreispunkte darstellt. Die unendlich ferne Gerade hat bei der gewöhnlichen Bezeichnung die Gleichung: Constante $= 0$; es ist also $p_x = p_y$ gleich einer Constanten k. Die Kreispunkte auf ihr stellt man in rechtwinkligen Coordinaten als ihre Durchschnitte mit dem Linienpaare

$$x^2 + y^2 = 0$$

dar. Die Bedingung, dass zwei Punkte (x, y) und (x', y') so liegen, dass ihre Verbindungsgerade durch einen Kreispunkt geht, ist dann:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0 .$$

Folglich wird die Entfernung der beiden Punkte

$$= \frac{0}{k^2} \cdot \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Werden schliesslich statt der x und y solche Multipla derselben gesetzt, dass die Entfernung zweier Punkte auf der x-Axe bez. der y-Axe geradezu durch die Differenz der betr. Coordinaten vorgestellt ist, so kommt:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

der gewöhnliche Ausdruck für die Entfernung in rechtwinkligen Coordinaten.

Wir wollen hier nicht weiter erörtern, wie sich die Vorstellungen der parabolischen Geometrie mit ihren imaginären Grundpunkten in die vorhergegangenen allgemeinen Betrachtungen einordnen.*) Wir wollen nur hervorheben, dass bei imaginären Fundamentalpunkten die trigonometrischen Formeln in die betr. Formeln der parabolischen Geometrie übergehen, dass also die Winkelsumme im Dreiecke genau gleich 2π wird, während sie bei reellem Fundamentalkegelschnitt kleiner, bei imaginärem grösser war.

§ 14.

Specielle Massbestimmung in der Ebene, welche eine allgemeine in einem Punkte berührt. Krümmung der letzteren.

So wie wir in § 7. eine specielle Massbestimmung auf der Geraden angeben konnten, welche mit einer gegebenen allgemeinen Massbestimmung in einem Punkte und in dessen Nähe übereinstimmte, welche, wie wir uns ausdrückten, die gegebene Massbestimmung in dem Punkte berührte, so werden wir auch in der Ebene von einer speciellen Massbestimmung reden können, welche eine allgemeine ge-

*) Vergl. Cayley, l. c.

gebene in einem Punkte berührt. Dieselbe wird (§ 7.) als unendlich ferne Gerade die Polare des gegebenen Punktes mit Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt der allgemeinen Massbestimmung benutzen, als Fundamentalpunkte die beiden Berührungspunkte der an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten. Dann stimmt für beide Massbestimmungen bei gehöriger Bestimmung der Constanten die Winkelbestimmung in dem gegebenen Punkte vollkommen überein, so wie, bis auf Grössen höherer Ordnung, die Bestimmung des gegenseitigen Abstandes aller von ihm unendlich wenig verschiedenen Punkte. Kreise, welche um den gegebenen Berührungspunkt in der allgemeinen Massbestimmung herumgelegt sind, d. h. also Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Fundamentalpunkten der tangirenden speciellen Massbestimmung berühren, sind auch Kreise mit Bezug auf letztere. Insbesondere wird der Fundamentalkegelschnitt selbst, der für die allgemeine Massbestimmung der Kreis mit unendlich grossem Radius ist, für die tangirende specielle Massbestimmung ein Kreis sein, aber ein Kreis mit endlichem Radius. Für die Grösse dieses Radius findet man die Constante $2c$. Denn auf jeder durch den gegebenen Berührungspunkt hindurchgehenden Geraden bestimmen die gegebene allgemeine und die tangirende specielle Massbestimmung zwei eben solche Massbestimmungen, die auch in dem Verhältnisse der Berührung stehen. Die Fundamentalpunkte der auf der Geraden getroffenen allgemeinen Massbestimmung sind aber die Durchschnitte der Geraden mit dem Fundamentalkegelschnitt. Deren Abstand, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung (§ 7.), ist aber gleich $4c$; deshalb der gesuchte Radius gleich $2c$.

Wir wollen nun insbesondere diejenigen beiden Fälle der allgemeinen Massbestimmung ins Auge fassen, die in § 11. und § 12. betrachtet wurden und die Bilder für die elliptische und hyperbolische Geometrie ergeben, dass nämlich entweder der Fundamentalkegelschnitt imaginär ist oder dass er reell ist und uns umschliesst.

Die in einem Punkte berührende specielle Massbestimmung hat in beiden Fällen imaginäre Fundamentalpunkte, da die Polare des Berührungspunktes den Fundamentalkegelschnitt nicht in reellen Punkten schneiden wird. Aber es findet dabei zwischen den beiden Arten allgemeiner Massbestimmung ein Unterschied statt, analog demjenigen, der in § 7. bei den betreffenden Massbestimmungen auf der geraden Linie eintrat. Ist der Fundamentalkegelschnitt imaginär, so eilt die specielle Massbestimmung der allgemeinen voran, d. h. die Entfernung eines Punktes vom Berührungspunkte, gemessen in der speciellen Massbestimmung, ist immer grösser als die Entfernung, gemessen in der gegebenen allgemeinen. Umgekehrt ist es bei reellem Fundamentalkegelschnitt *): die specielle Massbestimmung bleibt hinter der allgemeinen zurück. Dieses Voraneilen, resp. Zurückbleiben der speciellen Massbestimmung soll als *Krümmung* der allgemeinen Massbestimmung bezeichnet werden, und zwar soll die Krümmung im ersten Falle eine *positive*, im zweiten eine *negative* genannt werden. Als *Mass der Krümmung* soll derselbe Ausdruck betrachtet werden, der nach § 7. die Krümmung der allgemeinen Massbestimmung auf einer durch den gegebenen Berührungspunkt laufenden Geraden angiebt, nämlich $-\frac{1}{4c^2}$. Dieser Ausdruck ist unabhängig von dem Berührungspunkte, den man ursprünglich gewählt hat, und von der Geraden, die man durch ihn hindurchgelegt hat. Wir haben also den Satz:

Das Krümmungsmass der allgemeinen Massbestimmung ist in allen Punkten dasselbe, nämlich gleich $-\frac{1}{4c^2}$.

Dasselbe ist positiv bei imaginärem Fundamentalkegelschnitt (also bei der elliptischen Geometrie), es ist negativ bei reellem Fundamentalkegelschnitt (also bei der hyperbolischen Geometrie).

Für den Uebergangsfall, dass der Fundamentalkegelschnitt in ein imaginäres Punktepaar ausartet (insonderheit für die parabolische Geometrie), wird das Krümmungsmass Null.

Es soll nun jetzt gezeigt werden, dass die hier aufgestellte Definition des Krümmungsmasses einer ebenen Massbestimmung mit derjenigen übereinstimmt, welche Gauss für das Krümmungsmass zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten aufgestellt hat. Es findet nur der Unterschied zwischen dem Begriffe des Krümmungsmasses, wie er hier und wie er bei Gauss auftritt, statt, dass bei Gauss das Krümmungsmass eine bleibende Eigenschaft des betreffenden geometrischen Gebildes ist, während es hier nur eine Eigenschaft der in dem gegebenen Gebilde, der Ebene, zufällig gewählten Massbestimmung ist.

Das Gauss'sche Krümmungsmass berechnet sich bekanntlich aus dem Ausdrucke für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Der betreffende Ausdruck ist hier zunächst aufzustellen. Sei $\Omega = 0$, wie immer, der Fundamentalkegelschnitt. Ω_{xx} habe die frühere Bedeutung. $\Omega_{x,dx}$, $\Omega_{dx,dx}$ sollen die Ausdrücke bezeichnen, die aus $\Omega_{x,y}$ und Ω_{yy} durch Einführung von Differentialien dx an Stelle der y entstehen. Nun war die Entfernung zweier Punkte (x) und (y)

$$= 2ic \text{ arc sin } \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

*) Dies gilt nur für die Punkte innerhalb des Fundamentalkegelschnittes; für die Punkte ausserhalb findet sowohl ein Voraneilen als ein Zurückbleiben statt, je nach der Richtung, in der man sich bewegt.

Setzt man $y_a = x_a + dx_a$, so wird dies unter Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung:

$$= 2\,ic \text{ arc sin } \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx,\,dx} - \Omega^2_{x,\,dx}}}{\Omega^2_{xx}};$$

oder, indem wir statt des Arcus Sinus des kleinen Argumentes den Sinus selbst setzen:

$$= 2\,ic\,\frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx,\,dx} - \Omega^2_{x,\,dx}}}{\Omega^2_{xx}}.$$

Das Quadrat des Bogenelementes wird also:

$$ds^2 = 4\,c^2 \cdot \frac{\Omega^2_{x,\,dx} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx,\,dx}}{\Omega^2_{xx}}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck durch eine besondere Coordinatenannahme auf eine einfachere Form bringen. Da nämlich der Fundamentalkegelschnitt für die berührende specielle Massbestimmung ein Kreis ist, da ferner in den hier betrachteten Fällen die Fundamentalpunkte der letzteren wie bei der gewöhnlichen parabolischen Massbestimmung imaginär sind, so wollen wir die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in der gewöhnlichen Form der Kreisgleichung schreiben:

$$x^2 + y^2 = 4\,c^2.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf Coordinaten x, y, die in der tangirenden speciellen Massbestimmung gemessen werden, denn der Radius des Fundamentalkreises, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung, ist, wie in der vorstehenden Gleichung angenommen, gleich $2\,c$.

Nunmehr wird:

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 - 4\,c^2, \qquad \Omega_{dx,\,dx} = dx^2 + dy^2,$$
$$\Omega_{x,\,dx} = x\,dx + y\,dy.$$

Also der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = 4\,c^2\,\frac{(x\,dx + y\,dy)^2 - (x^2 + y^2 - 4\,c^2)\,(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4\,c^2)^2}$$
$$= 4\,c^2\,\frac{-(y\,dx - x\,dy)^2 + 4\,c^2\,(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4\,c^2)^2}.$$

Führt man jetzt neue Veränderliche ein (Polarcoordinaten der speciellen Massbestimmung), indem man setzt:

$$x = r\,.\,\cos\varphi, \qquad y = r\,.\,\sin\varphi,$$

so wird:

$$ds^2 = \frac{16\,c^4\,dr^2}{(r^2 - 4\,c^2)^2} - \frac{4\,c^2\,r^2\,d\varphi^2}{r^2 - 4\,c^2},$$

ein Ausdruck, der in den gewöhnlichen Ausdruck des Bogenelementes in Polarcoordinaten übergeht, wenn c unendlich gross wird.*) Vergleicht man ihn mit der von Gauss zu Grunde gelegten Formel:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dr + G\,dr^2,$$

so verschwindet F, und E und G hängen nur von der einen Veränderlichen, etwa von u, ab. Unter dieser Voraussetzung ist aber das Gauss'sche Krümmungsmass K:

$$4\,E^2\,G^2 \,.\, K = E\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + G \cdot \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\,EG\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Setzt man hier für E, G ihre Werthe:

$$E = \frac{16\,c^4}{(u^2 - 4\,c^2)^2}, \qquad G = -\frac{4\,c^2\,u^2}{u^2 - 4\,c^2},$$

so kommt:

$$K = -\frac{1}{4\,c^2},$$

also derselbe Werth, den wir vorhin aufgestellt hatten.

Wir können jetzt, Krümmungsmass im Gauss'schen Sinne aufgefasst, den Satz aussprechen:

Je nachdem wir die elliptische, hyperbolische oder parabolische Geometrie annehmen, ist die Ebene eine Fläche von constantem positiven, von constantem negativen, oder von verschwindendem Krümmungsmasse.

Desshalb findet auch (wie in § 1. erwähnt), unter Zugrundelegung der parabolischen Massbestimmung, die elliptische Geometrie ihre Interpretation auf der Kugel oder den aus derselben durch Deformation

---

*) Setzt man r constant, so kommt:

$$ds = \frac{2\,cr}{\sqrt{4\,c^2 - r^2}} \cdot d\varphi\,.$$

Es wird also die Peripherie eines Kreises mit dem Radius r gleich $\frac{4\,cr\pi}{\sqrt{4\,c^2 - r^2}}$.

Aber dieses r bedeutet nur den Radius des Kreises, gemessen in der im Mittelpunkte tangirenden speciellen Massbestimmung. Den in der allgemeinen Massbestimmung gemessenen Radius ϱ erhält man aus der Formel des Textes, indem man statt ds $d\varrho$ schreibt, und $d\varphi$ gleich Null setzt, also:

$$d\varrho = \frac{-4\,c^2\,dr}{r^2 - 4\,c^2}$$

oder:

$$r = 2\,c \cdot \frac{e^{\frac{\varrho}{c}} - 1}{e^{\frac{\varrho}{c}} + 1}.$$

Setzt man dies für r ein, so erhält man die Peripherie des Kreises mit dem Radius ϱ gleich:

$$2\,c\pi\left(e^{\frac{\varrho}{2c}} - e^{-\frac{\varrho}{2c}}\right),$$

eine Formel, welche Gauss in einem Briefe an Schumacher anführt. Die Constante k, welche er dort benutzt, entspricht geradezu der hier gebrauchten Constante c.

entspringenden Flächen, die hyperbolische Geometrie auf den Flächen von constantem negativen Krümmungsmasse.

§ 15.

Das gegenseitige Verhältniss der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Geometrie in der Ebene.

In dem Vorstehenden haben wir gesehen, wie sowohl diejenige Massbestimmung, welche die parabolische, als diejenige, welche die elliptische oder hyperbolische Geometrie in der Ebene voraussetzt, in der allgemeinen projectivischen ebenen Massbestimmung als specielle Fälle enthalten sind. Die parabolische Geometrie benutzt als fundamentalen Kegelschnitt ein imaginäres Punktepaar, die sogenannten unendlich weiten*) imaginären Kreispunkte. Der Ort der unendlich fernen Punkte ist eine doppeltzählende Gerade. Die elliptische Geometrie bezieht sich auf einen eigentlichen Fundamentalkegelschnitt, der aber imaginär ist. Die hyperbolische Geometrie endlich hat gleich der elliptischen einen eigentlichen Fundamentalkegelschnitt, der aber reell ist (und uns umschliesst).

In der Nähe eines Punktes, den wir gerade betrachten, kommen alle drei Geometrieen, mag nun die thatsächlich vorhandene Massbestimmung parabolisch oder elliptisch oder hyperbolisch sein, miteinander überein. Sie berühren sich also in dem betreffenden Punkte; die parabolische Geometrie giebt die specielle tangirende Massbestimmung für die elliptische wie für die hyperbolische Geometrie.

Ist uns also die parabolische Geometrie thatsächlich gegeben, so können wir ohne Weiteres eine Geometrie construiren, die uns ein Bild für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie ist, indem wir eine allgemeine Massbestimmung mit reellem Fundamentalkegelschnitt construiren, welche die gegebene specielle in dem Punkte, den wir betrachten, berührt. Wir erreichen dies, indem wir um den Punkt, den wir gerade ins Auge fassen, einen Kreis mit dem Radius $2c$ beschreiben und auf ihn eine projectivische Massbestimmung mit der Constanten c zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte und der Constanten $c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ zur Bestimmung des Winkels zweier Geraden gründen. Diese allgemeine Massbestimmung schliesst sich um so genauer an die gegebene parabolische an, je grösser c ist; sie fällt mit ihr zusammen, wenn c unendlich wird.

---

*) Diese Punkte unendlich weit zu nennen, ist eigentlich unberechtigt, da ihre Entfernung von einem beliebig im Endlichen gelegenen Punkte nicht unendlich, sondern unbestimmt ist, weil ja alle um einen solchen Punkt herum gelegten Kreise dieselben enthalten.

Auf ganz ähnliche Weise construiren wir eine Geometrie, die uns versinnlicht, wie sich die elliptische Geometrie des Näheren gestalten würde. Zu dem Zwecke ist nur dem c, welches wir eben benutzten, ein rein imaginärer Werth $= c_1 i$ beizulegen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir in der Entfernung $2c_1$ über dem Berührungspunkte einen Punkt festlegen, und als Entfernung zweier Punkte der Ebene den mit c_1 multiplicirten Winkel betrachten, unter welchem die beiden Punkte von dem festen Punkte aus erscheinen. Der Winkel zweier Geraden der Ebene ist geradezu gleich dem Winkel zu nehmen, unter dem sie von dem festen Punkte aus gesehen werden. Die so entstehende Massbestimmung schliesst sich wieder um so genauer an die gegebene parabolische an, je grösser c_1 ist, und geht, wenn c_1 unendlich wird, geradezu in die parabolische über.

Aber auch, wenn die elliptische oder die hyperbolische Geometrie die thatsächlich gegebenen wären, würde man auf diese Weise sich ein Bild davon machen können, welche Vorstellungen die parabolische oder bezüglich die hyperbolische und elliptische Geometrie mit sich führen.

Es bleibt uns nun nur noch übrig, die bis jetzt allein für die Grundgebilde erster und zweiter Stufe auseinander gesetzten Dinge auf den Raum zu übertragen, was noch in möglichster Kürze geschehen soll.

§ 16.

Die projectivische Massbestimmung im Raume.

Der allgemeinen projectivischen Massbestimmung im Raume wird man eine beliebig anzunehmende *fundamentale Fläche zweiten Grades* zu Grunde legen.

Um dann die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, verbinde man sie durch eine gerade Linie. Dieselbe trifft die fundamentale Fläche in zwei neuen Punkten, die mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss bilden. *Der mit einer willkürlichen Constante c multiplicirte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses ist es, der als Entfernung der beiden gegebenen Punkte zu bezeichnen ist.*

Auf ähnliche Weise bestimmt man den Winkel zweier gegebenen Ebenen. Man lege durch die Durchschnittsgerade derselben die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bestimmen mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss. *Der Winkel der beiden Ebenen ist gleich dem mit einer beliebig gewählten Constanten c' multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses.*

Unter den *Bewegungen* des Raumes wird man einen Cyclus linearer Transformationen verstehen, welche die Fundamentalfläche ungeändert lassen. Eine Fläche zweiten Grades bleibt durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen ungeändert. Aber diese zerfallen in zwei Classen, von denen die eine ein geschlossenes System, die andere kein solches umfasst. Die beiden Classen lassen sich durch das Verhalten der Erzeugenden der Fläche ihren Transformationen gegenüber charakterisiren. Bei den Transformationen erster Classe — und diese bezeichnen wir als Bewegungen*) des Raumes — bleiben die beiden Systeme geradliniger Erzeugender als solche ungeändert; bei den Transformationen zweiter Classe vertauschen sich dieselben unter sich. Es giebt sechsfach unendlich viele Bewegungen; dieselben lassen die Massverhältnisse ungeändert.

Unter *Kugeln* hat man solche Flächen zweiten Grades zu verstehen, welche die fundamentale Fläche ~~nach~~ einer ebenen Curve berühren. Das Centrum der Kugel ist der Pol der Ebene, welche die Berührungscurve enthält. Die Fundamentalfläche selbst ist als eine um ein beliebiges Centrum herumgelegte Kugel mit dem Radius ∞ anzusehen etc.

Achtet man insbesondere auf die reellen Elemente des Raumes, so wird man unterscheiden, ob die Fundamentalfläche imaginär oder reell ist, und im letzteren Falle, ob sie geradlinig ist oder nicht.

Ist die Fundamentalfläche *imaginär*, so haben alle gerade Linien eine endliche Länge, alle Ebenenbüschel eine endliche Winkelsumme. Unter diesen Fall subsumirt sich die Massbestimmung der *elliptischen* Geometrie, wenn noch die Constante c' der Winkelbestimmung gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ gesetzt wird, damit die Winkelsumme im Ebenenbüschel gleich π ist.

Den Fall, dass die Fundamentalfläche *reell* und *geradlinig* ist, dass sie also ein einschaliges Hyperboloid ist, wollen wir hier nicht weiter betrachten, weil er zu den dreierlei Geometrieen, die wir hier betrachten, der elliptischen, hyperbolischen, parabolischen, in keiner Beziehung steht.

Ist endlich die Fundamentalfläche *reell* und *nicht geradlinig*, so werden wir für Punkte im Inneren eine Massbestimmung erhalten, die unter sich die Massbestimmung der *hyperbolischen* Geometrie begreift, wenn man die Constante c' wieder gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzt.

---

*) Ich habe diese Verhältnisse bereits in einer früheren Arbeit: *Ueber die Mechanik starrer Körper*, diese Annalen, t. IV, 3 auseinander gesetzt. Hinzufügen muss ich, dass bereits Herr Schering in dem Aufsatze: *Die Schwerkraft im Gauss'schen Raume*, Gött. Nachrichten 1870. Nr. 15. die Bewegungen des Raumes im Sinne der hyperbolischen Geometrie betrachtet hat.

Die *parabolische* Geometrie subsumirt sich unter einen speciellen Fall der allgemeinen Massbestimmung, der eintritt, wenn die Fundamentalfläche sich in einen Kegelschnitt, insbesondere in einen imaginären Kegelschnitt, particularisirt. Der fundamentale Kegelschnitt der parabolischen Geometrie ist der sogenannte unendlich ferne, imaginäre Kreis. In dem undualistischen Charakter der Particularisation, welche die Fundamentalfläche erfahren hat, haben die undualistischen Eigenschaften der parabolischen Massbestimmung ihren Grund.

Man kann nun wieder von *Krümmung* einer allgemeinen Massbestimmung u. s. w. reden; doch sollen alle diese Dinge der Kürze wegen hier unerörtert bleiben.

§ 17.

Die Unabhängigkeit der projectivischen Geometrie von der Parallelentheorie.

Man könnte gegen das gesammte Vorhergehende einen Einwand machen, der bei der seither eingehaltenen Darstellungsweise nicht unbegründet ist, der aber sofort weggeräumt werden kann.

Bei der Begründung der allgemeinen projectivischen Massbestimmung sind wir einmal geometrisch verfahren, indem wir Distanz zweier Punkte etc. als Logarithmen gewisser Doppelverhältnisse definirten, sodann analytisch, indem wir homogene Coordinaten in Anwendung brachten. Beide Dinge: die Doppelverhältnisse und die homogenen Coordinaten, setzen in ihrer gewöhnlichen Begründung die parabolische Massbestimmung voraus, wo denn Doppelverhältnisse wie homogene Coordinaten als gewisse Streckenverhältnisse definirt werden. Man würde also, wenn die thatsächlich gegebene Massbestimmung nicht parabolisch ist, zunächst von diesen Dingen nicht reden können, und alle vorhergehenden Auseinandersetzungen würden ihre Geltung verlieren.

Dem gegenüber hat man sich zu überzeugen, dass die projectivische Geometrie unabhängig von der Frage nach der Art der Massbestimmung gültig ist.

Der Beweis dafür kann in der Art geführt werden, dass man die projectivische Geometrie einmal unter Zugrundelegung der elliptischen, dann unter Zugrundelegung der hyperbolischen Massgeometrie aufbaut. Es ist dies nicht schwer zu leisten, wie man daraus übersehen mag, dass für den Punkt, als Strahlen- und Ebenenbündel im Raume, für den doch auch in der parabolischen Geometrie eine elliptische Massbestimmung angewandt wird, die projectivische Geometrie ungestört gilt.

Aber wesentlicher ist es wohl, zu bemerken, *dass die projectivische*

Geometrie überhaupt vor Erledigung der Frage nach der Massbestimmung entwickelt werden kann.

Denn um die Geltung der projectivischen Geometrie in einem beliebig gegebenen begränzten Raume zu erweisen, genügt es, in diesem Raume Constructionen zu machen, die nur sogenannte Lagenbeziehungen betreffen und die nicht über den Raum hinausführen. Die Doppelverhältnisse dürfen dabei natürlich nicht als Streckenverhältnisse definirt werden, da dies die Kenntniss einer Massbestimmung voraussetzen würde. In v. Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage*) sind aber die nöthigen Materialien gegeben, um ein Doppelverhältniss als eine reine Zahl zu definiren. Von den Doppelverhältnissen mögen wir sodann zu den homogenen Punkt- und Ebenencoordinaten aufsteigen, die ja auch nichts anderes sind, als die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse, wie dies v. Staudt ebenfalls gezeigt**) und noch neuerdings Herr Fiedler***) wieder aufgenommen hat. — Unentschieden bleibt dabei, ob sich zu sämmtlichen reellen Werthen der Coordinaten auch entsprechende Raumelemente finden lassen. Ist dies nicht der Fall, so steht nichts im Wege, den betreffenden Coordinatenwerthen entsprechend zu den wirklichen Raumelementen uneigentliche hinzuzufügen. Dies geschieht in der parabolischen Geometrie, wenn wir von der unendlich fernen Ebene reden. Unter Zugrundelegung der hyperbolischen Geometrie würde man ein ganzes Raumstück zu adjungiren haben. Dagegen würde bei der elliptischen Geometrie eine Adjunction uneigentlicher Elemente nicht nöthig sein.

§ 18.

Ableitung der dreierlei Geometrieen: der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen aus der projectivischen.

Hat man, wie vorstehend auseinandergesetzt, die projectivische Geometrie begründet, so wird man die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung aufstellen können. Dieselbe bleibt durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen, die wir als Bewegungen des Raumes bezeichneten, ungeändert, und kann sie als geradezu durch den Cyclus dieser linearen Transformationen erzeugt angesehen werden (§§ 2., 3.).

Nunmehr wende man sich der Betrachtung der thatsächlichen Bewegungen im Raume und der durch sie begründeten Massbestim-

*) § 27. n. 393.

**) Beiträge. § 29. n. 411.

***) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XV, 2. (1871). — Die darstellende Geometrie von Fiedler. Leipzig 1871.

mung zu. Man übersieht, dass die sechsfach unendlich vielen Bewegungen ebenso viele lineare Transformationen sind. Dieselben lassen überdies eine Fläche, die Fläche der unendlich fernen Punkte, ungeändert Es giebt aber, wie sich leicht beweisen lässt, keine anderen Flächen, welche durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, als die Flächen zweiten Grades und ihre Ausartungen. Die unendlich fernen Punkte bilden also eine Fläche zweiten Grades, und die Bewegungen des Raumes subsumiren sich unter die vorgenannten sechsfach unendlichen Cyclen linearer Transformationen, welche eine Fläche zweiten Grades ungeändert lassen. Desshalb subsumirt sich auch die durch die Bewegungen gegebene (thatsächliche) Massbestimmung unter die allgemeine projectivische. Während letztere sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades bezieht, ist diese Fläche bei ersterer ein für allemal gegeben.

Die Art dieser der thatsächlichen Massbestimmung zu Grunde liegenden Fläche zweiten Grades kann nun noch näher bestimmt werden. Man beachte, dass eine Ebene durch fortgesetzte Drehung um eine beliebig in ihr im Endlichen gelegene Axe in die Anfangslage zurückkommt. Es sagt dies aus, dass die beiden Tangentialebenen, welche man durch eine im Endlichen gelegene Gerade an die Fundamentalfläche legen kann, imaginär sind. Denn wären sie reell, so fänden sich in dem betreffenden Ebenenbüschel zwei reelle unendlich ferne Ebenen (d. h. Ebenen, welche mit allen anderen einen unendlich grossen Winkel bilden) und dann könnte keine in einem Sinne fortgesetzte Rotation eine Ebene des Büschels in die Anfangslage zurückführen.

Damit nun diese beiden Ebenen imaginär sind, oder, was dasselbe ist, damit der Tangentenkegel der Fundamentalfläche, der von einem beliebigen Punkte des (uns durch die Bewegungen zugänglichen) Raumes ausgeht, imaginär sei, sind drei und nur drei Fälle denkbar:

1. *Die Fundamentalfläche ist imaginär.* Dies ergiebt die elliptische Geometrie.

2. *Die Fundamentalfläche ist reell, nicht geradlinig und umschliesst uns.* Die Annahme der hyperbolischen Geometrie.

3. (Uebergangsfall.) *Die Fundamentalfläche ist in eine imaginäre ebene Curve ausgeartet.* Die Voraussetzung der gewöhnlichen parabolischen Geometrie.

So sind wir denn gerade zu den dreierlei Geometrieen hingeleitet, welche man, wie in § 1. berichtet, von ganz anderen Betrachtungen ausgehend, aufgestellt hat.

Düsseldorf, 19. August 1871.