

Der Entmagnetisierungsfaktor und Entelektrisierungsfaktor für Rotationsellipsoide*)

Von

U. Stille

(Eingegangen am 13. 3. 1944)

DK 538. 122 : 537. 212

Übersicht. I. Der Entmagnetisierungsfaktor: 1. Allgemeine Definitionen zur Beschreibung des materiefüllten magnetischen Feldes. 2. Definition der Entmagnetisierung und des Entmagnetisierungsfaktors. 3. Berechnung der Entmagnetisierungsfaktoren für Rotationsellipsoide. 4. Zahlenwerte für die Entmagnetisierungsfaktoren bei Rotationsellipsoiden. 5. Spezielle Fälle. — II. Der Entelektrisierungsfaktor: 1. Allgemeine Definitionen zur Beschreibung des materiefüllten elektrischen Feldes. 2. Definition der Entelektrisierung und des Entelektrisierungsfaktors. 3. Berechnung der Entelektrisierungsfaktoren für Rotationsellipsoide. 4. Spezielle Fälle. — III. Zusammenfassung.

I. Der Entmagnetisierungsfaktor

1. Allgemeine Definitionen zur Beschreibung des materiefüllten magnetischen Feldes

Da im allgemeinen weitere Kreise durch technische Beispiele mit den Auswirkungen der Entmagnetisierung wesentlich vertrauter sind als mit der analogen Erscheinung der Entelektrisierung, sollen die folgenden Betrachtungen auch von der Seite des magnetischen Feldes her entwickelt werden.

Bringt man in ein magnetisches Feld der Vakuumfeldstärke \mathfrak{H}_0 ein permeables Medium ein, so ist innerhalb dieses Mediums die wirksame Feldstärke durch die in einem durch das Material in Feldrichtung gebohrten „Längskanal“ gemessene Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} gegeben, welche durch den Index LK ausdrücklich als solche gekennzeichnet werden soll. Die Induktion oder magnetische Kraftflußdichte innerhalb der Materie wird durch die Kraftflußdichte \mathfrak{B} in einem senkrecht zur Feldrichtung eingeschnittenen „Querschlitz“ bestimmt¹⁾. Der Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H}_{LK} wird bei magnetisch isotropen Medien durch die grundsätzliche Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mu \cdot \mu_0 \mathfrak{H}_{LK} \quad (1)$$

gegeben, wobei μ die relative Permeabilität des betreffenden Materials und μ_0 die absolute Permeabilität des Vakuums oder Induktionskonstante²⁾ bedeutet. Der Einfluß der permeablen Materie auf den magnetischen Feldzustand kann auch statt durch die Permeabilität μ durch die (relative) magnetische Suszeptibilität $\kappa = \mu - 1$, bzw. durch die magnetische Polarisierung oder Magnetisierung \mathfrak{S} beschrieben werden:

$$\mathfrak{B} = (1 + \kappa) \cdot \mu_0 \mathfrak{H}_{LK} = \mu_0 \cdot \mathfrak{H}_{LK} + \mathfrak{S} \quad (2)$$

mit

$$\mathfrak{S} = \kappa \cdot \mu_0 \mathfrak{H}_{LK} \quad (3)$$

Dabei ist bei diamagnetischen Substanzen $\mu < 1$, d. h. $\kappa < 0$ und \mathfrak{S} entgegengesetzt zu \mathfrak{H}_{LK} gerichtet, während bei paramagnetischen Körpern ($\mu < 1$, $\kappa > 0$) \mathfrak{S}

*) Herrn Prof. Dr. R. W. Pohl in dankbarer Verehrung zum 60. Geburtstag.

¹⁾ Entsprechend \mathfrak{H}_{LK} wäre hier präziser \mathfrak{H}_{QS} zu schreiben. Da im folgenden aber nur die eine, soeben definierte Kraftflußdichte benötigt wird, wurde von der Anfügung des Index QS abgesehen.

²⁾ Derzeitiger Zahlenwert in internationalen Einheiten: $\mu_0 = (1,25602 \pm 0,00002) \cdot 10^{-6}$ Vs/Am [s. U. Stille, Z. Phys. 121 (1943) S. 133].

³⁾ Die Magnetisierung \mathfrak{S} ist hier als eine Größe von der Art einer magnetischen Kraftflußdichte angesetzt worden. Zum Problem der Definition der Magnetisierung sei hier auf eine gerade erschienene zusammenfassende Arbeit von Diesselhorst [ETZ 65 (1944) S. 119] und experimentelle Untersuchungen von Fisseler (erscheint demnächst) verwiesen.

und \mathfrak{H}_{LK} gleichgerichtete Vektoren sind. Diese beiden Gruppen von permeablen Substanzen sind gemeinsam durch eine vom magnetisierenden Felde \mathfrak{H}_{LK} unabhängige Permeabilität ausgezeichnet, d. h. μ und κ sind bezüglich \mathfrak{H}_{LK} konstant. Die dritte Gruppe der ferromagnetischen Stoffe zeigt Permeabilitäten μ bzw. Suszeptibilitäten κ , welche in starkem Maße vom magnetisierenden Feld \mathfrak{H}_{LK} und der Vorgeschichte des Materials abhängen; die zu jedem Wert der Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} gehörigen Zahlenwerte für κ entnimmt man dabei entsprechend Gl. (3) der für das betreffende Ferromagnetikum experimentell bestimmten „Magnetisierungskurve“, welche \mathfrak{J} als Funktion von $\mu_0 \cdot \mathfrak{H}_{LK}$ darstellt.

2. Definition der Entmagnetisierung und des Entmagnetisierungsfaktors

Die Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} im Innern magnetisierter Körper ist nur in dem Spezialfall, daß die permeable Materie das magnetische Feld vollkommen ausfüllt (Beispiel: Ringmagnet!), mit der Vakuumfeldstärke \mathfrak{H}_0 identisch. Erfüllt das Material dagegen das Feld nur längs eines Teiles der Feldlinien, so bilden sich an den freien Enden des eingebrachten Körpers magnetische „Pole“ aus, von denen rückläufige Feldlinien ausgehen, welche je nach dem Vorzeichen von \mathfrak{J} bzw. κ das ursprüngliche Vakuumfeld \mathfrak{H}_0 schwächen oder verstärken. Diese Erscheinung nennt man „Entmagnetisierung“. Die Stärke der Entmagnetisierung hängt einmal von der bereits im permeablen Material erreichten Magnetisierung \mathfrak{J} ab, der sie proportional ist, zum anderen von der geometrischen Form des Körpers. Im allgemeinen ist sowohl \mathfrak{J} nach Betrag und Richtung, wie der geometrisch bestimmte Faktor der Entmagnetisierung eine Raumfunktion; welche nicht in aller Allgemeinheit formelmäßig anzugeben ist. Lediglich für den Spezialfall, daß \mathfrak{J} im magnetisierten Körper überall parallel der Vakuumfeldstärke \mathfrak{H}_0 bzw. der wirksamen Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} verläuft und dem Betrage nach räumlich konstant ist („homogene Magnetisierung“), läßt sich der Einfluß der Entmagnetisierung und damit die magnetisierende Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} in der einfachen Form darstellen:

$$\mathfrak{H}_{LK} = \mathfrak{H}_0 - \frac{N}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{H}_0 - N \cdot \kappa \mathfrak{H}_{LK}, \quad (4)$$

bzw. hieraus

$$\mathfrak{H}_{LK} = \frac{1}{1 + N \cdot (\mu - 1)} \cdot \mathfrak{H}_0 \quad (5)$$

und

$$\mathfrak{J} = \frac{\mu - 1}{1 + N \cdot (\mu - 1)} \cdot \mu_0 \mathfrak{H}_0. \quad (6)$$

N hängt nur noch von der geometrischen Gestalt des homogen magnetisierten Körpers ab und wird sein „Entmagnetisierungsfaktor“ genannt. Homogene Magnetisierung erreicht man in Rotationsellipsoiden¹⁾ bei Magnetisierung in Richtung einer der Hauptachsen. Als spezielle Entartungsfälle des Rotationsellipsoides besitzen die „unendlich dünne“ Scheibe (Rotationsachse a : zu dieser senkrechte Achse $b \equiv$ Achsenverhältnis p : $p \equiv a/b = 0$), die Kugel ($p = 1$) und der „unendlich lange“ Stab ($p = \infty$) besonderes Interesse.

Falls das Rotationsellipsoid in einer beliebigen, nicht mehr mit einer der Hauptachsen zusammenfallenden Richtung magnetisiert wird, ist die erzielte Magnetisierung im Innern des materiellen Rotationsellipsoides auch überall nach Betrag und

¹⁾ Körper von der Gestalt eines allgemeinen 3-achsigen Ellipsoides sind ebenfalls homogen magnetisierbar. Jedoch sind hier mit Rücksicht auf die in der Praxis am häufigsten vorkommenden und auf Rotationsellipsoide entsprechender Achsenverhältnisse zurückzuführenden Formen von Stäben und Scheiben die folgenden Betrachtungen auf Rotationsellipsoide beschränkt worden.

Bei der Behandlung des allgemeinen Falles eines 3-achsigen Ellipsoides treten in der Komponentendarstellung \mathfrak{J} voneinander verschiedene Entmagnetisierungsfaktoren N_a , N_b und N_c in Richtung der 3 Hauptachsen auf [s. z. B. in den Beziehungen (4a bis c) der vorliegenden Arbeit auf S. 44].

Richtung konstant; das gleiche gilt für die Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} im Innern, welche der Magnetisierung \mathfrak{J} parallel liegt. Jedoch weicht die Richtung der beiden Vektoren \mathfrak{H}_{LK} und \mathfrak{J} dann von der des ursprünglichen Vakuumfeldes \mathfrak{H}_0 ab.

Daher sind in diesem allgemeineren Fall die Gl. (4) bis (6) bezüglich der Vektoren \mathfrak{H}_0 , \mathfrak{H}_{LK} und \mathfrak{J} als Beziehungen zwischen den zugehörigen Komponenten in Richtung der 3 Hauptachsen a, b, c des Ellipsoids zu schreiben, wobei die einzelnen Komponenten durch Anfügung der entsprechenden Achsenindizes gekennzeichnet werden:

$$(\mathfrak{H}_{LK})_a = (\mathfrak{H}_0)_a - \frac{N_a}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J}_a = (\mathfrak{H}_0)_a - \frac{N_{\parallel}}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J}_a = (\mathfrak{H}_0)_a - N_{\parallel} \cdot \kappa \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_a, \quad (4a)$$

$$(\mathfrak{H}_{LK})_b = (\mathfrak{H}_0)_b - \frac{N_b}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J}_b = (\mathfrak{H}_0)_b - \frac{N_{\perp}}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J}_b = (\mathfrak{H}_0)_b - N_{\perp} \cdot \kappa \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_b, \quad (4b)$$

$$(\mathfrak{H}_{LK})_c = (\mathfrak{H}_0)_c - \frac{N_c}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J}_c = (\mathfrak{H}_0)_c - \frac{N_{\perp}}{\mu_0} \cdot \mathfrak{J}_c = (\mathfrak{H}_0)_c - N_{\perp} \cdot \kappa \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_c. \quad (4c)$$

Die Vektorgleichungen (5) und (6) sind ganz analog jeweils durch 3 Komponentengleichungen zu ersetzen.

Da wegen der Rotationssymmetrie bei einem Rotationsellipsoid die beiden Hauptachsen b und c gleich sind, werden auch die beiden nur geometrisch bedingten Entmagnetisierungsfaktoren N_b und N_c identisch. Es sind daher im folgenden nur die beiden Entmagnetisierungsfaktoren $N_a \equiv N_{\parallel}$ für die Komponente der magnetisierenden Feldstärke parallel zur Rotationsachse und $N_b = N_c \equiv N_{\perp}$ für die Feldstärkenkomponenten senkrecht zur Rotationsachse zu unterscheiden: Da N_{\parallel} und N_{\perp} im allgemeinen voneinander verschieden sind, kann die vektorielle Zusammensetzung der Komponenten aus den Beziehungen (4a bis c) nicht mehr zu Vektoren \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{H}_{LK} (bzw. \mathfrak{J}) von gleicher Richtung führen. Diese Tatsache wird auch aus den erst in Abschnitt I, 5 enthaltenen allgemeinen Gleichungen (7a bis c) ersichtlich.

Die voraufgehenden Überlegungen gelten allerdings bezüglich der Vektoren \mathfrak{J} und \mathfrak{H}_{LK} nur für den Fall, daß die Permeabilität μ bzw. die Suszeptibilität κ von der magnetisierenden Feldstärke \mathfrak{H}_{LK} unabhängige Materialkonstanten sind. Besteht dagegen eine funktionale Abhängigkeit $\mu = f(H_{LK})$ bzw. $\kappa = f(H_{LK})$ — Ferromagnetika! —, so ändern sich die Verhältnisse insofern, als dann auch \mathfrak{J} und \mathfrak{H}_{LK} im magnetisierten Körper nicht mehr gleichgerichtete Vektoren sind, falls die Magnetisierungsrichtung beliebig gegenüber den Hauptachsenrichtungen des Rotationsellipsoides orientiert ist. Man erkennt dieses schon aus der rechten Seite der Komponentenbeziehungen (4a bis c). Noch einfacher ersieht man diese Tatsache aus der entsprechenden Komponentendarstellung für die Vektorgleichung (3):

$$\frac{\mathfrak{J}_a}{\mu_0} = \kappa \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_a = \kappa ((\mathfrak{H}_{LK})_a) \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_a, \quad (3a)$$

$$\frac{\mathfrak{J}_b}{\mu_0} = \kappa \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_b = \kappa ((\mathfrak{H}_{LK})_b) \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_b, \quad (3b)$$

$$\frac{\mathfrak{J}_c}{\mu_0} = \kappa \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_c = \kappa ((\mathfrak{H}_{LK})_c) \cdot (\mathfrak{H}_{LK})_c. \quad (3c)$$

Sind die Koeffizienten κ noch Funktionen der Komponenten $(\mathfrak{H}_{LK})_{a, b, c}$, d. h. bei verschiedenen Werten der $(\mathfrak{H}_{LK})_{a, b, c}$ auch voneinander verschieden, so können im allgemeinen die Verhältnisse $\mathfrak{J}_{a, b, c} / (\mathfrak{H}_{LK})_{a, b, c}$ nicht mehr gleich sein, woraus folgt, daß im allgemeinen \mathfrak{J} und \mathfrak{H}_{LK} Vektoren von verschiedener Richtung darstellen.

Hier sei noch angemerkt, daß für Diamagnetika ($\kappa < 0$, \mathfrak{J} entgegengesetzt zu \mathfrak{H}_{LK} gerichtet!) $\mathfrak{H}_{LK} > \mathfrak{H}_0$ ist, während in Paramagnetika und in Ferromagnetika auf der jungfräulichen Kurve ($\kappa > 0$, \mathfrak{J} und \mathfrak{H}_{LK} gleichgerichtet!) $\mathfrak{H}_{LK} < \mathfrak{H}_0$ ist, das Vakuumfeld \mathfrak{H}_0 also durch die Entmagnetisierung geschwächt wird.

Wie die Gl. (4) zeigt, spielt die Entmagnetisierung nur eine wesentliche Rolle, falls \mathfrak{J} hinreichend groß ist, d. h. entsprechend Gl. (3) bei Materialien mit großem κ .

Während die Suszeptibilität für dia- und paramagnetische Substanzen günstigstenfalls Werte von der Größenordnung 10^{-3} hat, erreicht κ für Ferromagnetika Werte von 10^2 bis 10^5 oder mehr. Insofern besitzt die Entmagnetisierung technisch vor allem für Ferromagnetika Bedeutung, z. B. bei permanenten Magneten¹⁾ und allen Anordnungen, die irgendwie mit Elektromagneten bzw. Eisenspulen arbeiten, besonders wenn das ferromagnetische Material stark magnetisiert ist oder bei relativ hoher Remanenz eine kleine Koerzitivkraft besitzt.

3. Berechnung der Entmagnetisierungsfaktoren für Rotationsellipsoide

Die theoretische Berechnung der Entmagnetisierungsfaktoren für Rotationsellipsoide ist formelmäßig mittels Potentialtheorie schon vor Jahrzehnten durchgeführt worden²⁾. Nur war damals der Begriff „Entmagnetisierungsfaktor“ noch nicht geprägt, vielmehr sprach man z. B. von den Komponenten der „Wirkung eines mit homogener magnetischer Masse erfüllten Ellipsoids auf einen inneren Punkt“ oder denen des „inneren Feldes eines Ellipsoids“. Weiterhin wurden die Formeln entsprechend dem damaligen Brauch unter Zuschnitt auf die CGS-Systeme nicht-rational geschrieben, d. h. sie unterscheiden sich von denen unserer rationalen Schreibweise um den Faktor 4π . Dagegen sind ausgerechnete Zahlenwerte für N nur sehr unvollkommen tabelliert. Man findet in älteren Handbüchern³⁾ einigermaßen ausführlich Zahlenwerte für den Entmagnetisierungsfaktor N_{\parallel} bei Magnetisierung parallel zur Rotationsachse aufgeführt, aber auch hier im wesentlichen nur für gestreckte Rotationsellipsoide (Achsenverhältnis $p > 1$); die neueren Handbücher bringen schon weniger oder gar keine Zahlenwerte mehr für N_{\parallel} . Der Entmagnetisierungsfaktor N_{\perp} für Magnetisierung senkrecht zur Rotationsachse ist dem Verfasser auch in neueren Tabellenwerken nicht bekannt geworden, trotzdem die Quermagnetisierung von Stäben bzw. Scheiben, welche bei hinreichend großem bzw. kleinem Achsenverhältnis durch quermagnetisierte Rotationsellipsoide für die Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors ersetzt werden können, ihre Bedeutung besitzt.

Da für spezielle Zwecke Zahlenwerte für N_{\parallel} und N_{\perp} benötigt wurden und berechnet werden mußten, seien hier zunächst die erforderlichen Formeln zusammengestellt und anschließend die rechnerischen Ergebnisse mitgeteilt.

a) Abgeplattetes Rotationsellipsoid. Für dieses ist das Achsenverhältnis

$$\frac{a}{b} = p < 1 \quad (9)$$

und die numerische Exzentrizität durch

$$e_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - p^2} \quad (10)$$

gegeben. Für den Entmagnetisierungsfaktor bei Magnetisierung parallel bzw. senkrecht zur Rotationsachse ergibt sich in rationaler Schreibweise

$$N_{\parallel} = \frac{1}{e_1^2} - \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^3} \cdot \arcsin e_1 = \frac{1}{1 - p^2} - \frac{p}{(1 - p^2)^{3/2}} \cdot \arcsin \sqrt{1 - p^2} \quad (11)$$

¹⁾ Bezüglich der speziellen Gegebenheiten und der Darstellung der Entmagnetisierung in permanenten Magneten, sowie der Rolle, welche die „reversible Permeabilität“ von permanenten Magneten hierbei spielt, sei auf die schon oben zitierte Arbeit von Fisseler hingewiesen.

²⁾ Siehe z. B. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. Leipzig: B. G. Teubner 1881, S. 69ff. J. Cl. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus (übersetzt von B. Weinstein), Bd. II. Berlin: Springer 1883, S. 78ff.

³⁾ Siehe z. B. A. Wiedemann, Handbuch der Physik, Bd. V. Leipzig: Barth 1908, S. 143. L. Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. V. Leipzig: Barth 1920, S. 161 (Artikel F. Auerbach).

bzw.

$$N_{\perp} = \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2e_1^2} \cdot \arcsin e_1 - \frac{1-e_1^2}{2e_1^2} = \frac{p}{2(1-p^2)^{3/2}} \cdot \arcsin \sqrt{1-p^2} - \frac{p^2}{2(1-p^2)} \quad (12)$$

Für den Fall $p \ll 1$, d. h. $p \approx \sqrt{2(1-e_1)}$, kann man näherungsweise schreiben

$$N_{\parallel} \approx 1 - 0,5\pi\sqrt{2(1-e_1)} \approx 1 - 0,5\pi p \equiv N'_{\parallel} \quad (11a)$$

bzw.

$$N_{\perp} \approx 0,25\pi\sqrt{2(1-e_1)} - (1-e_1) \approx 0,25\pi p - 0,5p^2 \equiv N'_{\perp} \quad (12a)$$

b) Gestrecktes Rotationsellipsoid. Für dieses ist das Achsenverhältnis

$$\frac{a}{b} = p > 1 \quad (13)$$

und die numerische Exzentrizität

$$e_2 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{p^2-1}}{p} \quad (14)$$

Für den Entmagnetisierungsfaktor bei Magnetisierung parallel bzw. senkrecht zur Rotationsachse ergibt sich in rationaler Schreibweise

$$N_{\parallel} = \frac{1-e_2^2}{2e_2^2} \left\{ \frac{1}{2e_2} \cdot \ln \frac{1+e_2}{1-e_2} - 1 \right\} = \frac{1}{p^2-1} \left\{ \frac{p}{\sqrt{p^2-1}} \cdot \ln(p + \sqrt{p^2-1}) - 1 \right\} \quad (15)$$

bzw.

$$N_{\perp} = \frac{1}{2e_2^2} - \frac{1-e_2^2}{4e_2^2} \cdot \ln \frac{1+e_2}{1-e_2} = \frac{p^2}{2(p^2-1)} - \frac{p}{2(p^2-1)^{3/2}} \cdot \ln(p + \sqrt{p^2-1}) \quad (16)$$

Für den Fall $p \gg 1$, d. h. $p \approx 1/\sqrt{2(1-e_2)}$ kann man näherungsweise schreiben

$$N_{\parallel} \approx (1-e_2) \{-\ln(1-e_2) - 1,30685\} \approx (\ln 2 p - 1)/p^2 \equiv N'_{\parallel} \quad (15a)$$

bzw.

$$N_{\perp} \approx 0,5 [1 - (1-e_2) \{0,69315 - \ln(1-e_2)\}] \approx 0,5 [1 - (\ln 2 p)/p^2] \equiv N'_{\perp} \quad (16a)$$

4. Zahlenwerte für den Entmagnetisierungsfaktor bei Rotationsellipsoiden

Die Tabelle 1 enthält für den Bereich des Achsenverhältnisses $10^{-3} < p < 10^3$ die zugehörigen numerischen Exzentrizitäten e_1 bzw. e_2 und die nach den Formeln (11), (12), (15), (16) berechneten Zahlenwerte für N_{\parallel} und N_{\perp} . Dabei sind diese Werte auf vier Stellen abgerundet worden, da diese Stellenzahl im allgemeinen für praktische Zwecke immer ausreichen dürfte.

In Bild 1 ist der Gesamtverlauf für N_{\parallel} und N_{\perp} dargestellt worden. Falls für verschiedene Werte des Achsenverhältnisses p die Zahlenwerte der Entmagnetisierungsfaktoren gebraucht werden, trägt man sich zweckmäßigerweise die Beziehungen für die Entmagnetisierungsfaktoren — d. h. z. B. die Zahlenwerte der

Tabelle 1 — in einer graphischen Darstellung auf und entnimmt dieser Kurve dann die zu den vorgegebenen Achsenverhältnissen gehörigen N -Werte. Dabei wählt man am besten für den N_{\parallel} -Ast im Bereich $p < 1$ und den N_{\perp} -Ast im Bereich $p > 1$ ($N > 1/3$) halb-logarithmisches, für den N_{\parallel} -Ast im Bereich $p > 1$ und den N_{\perp} -Ast im Bereich $p < 1$:

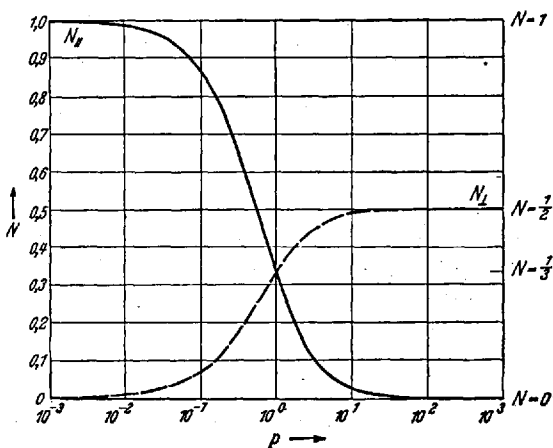


Bild 1. Die Entmagnetisierungsfaktoren N_{\parallel} (—) und N_{\perp} (---) als Funktion des Achsenverhältnisses p .

($N < 1/3$) doppellogarithmisches Koordinatenpapier. In dieser Auftragung kann man bequem den Kurven die einzelnen Zahlenwerte für N mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit entnehmen. Von einer Wiedergabe dieser Kurven wurde hier abgesehen, da bei der durch das Format einer Zeitschrift vorgegebenen Seitengröße die Genauigkeit der Ablesung aus den graphischen Darstellungen für diesen Fall zu sehr beeinträchtigt werden würde.

Tabelle 1. Zahlenwerte für die Entmagnetisierungsfaktoren N_{\parallel} und N_{\perp} bei verschiedenen Achsenverhältnissen p .

p	e_1	N_{\parallel}	N_{\perp}	p	e_2	N_{\parallel}	N_{\perp}
0,001	0,999999 ₅	0,9984 ₃	0,0007843 ₉	1	0	0,3333 ₃	0,3333 ₃
0,0015	0,999998 ₈	0,9976 ₅	0,001175 ₈	1,5	0,745356	0,2329 ₈	0,3835 ₁
0,002	0,999998 ₀	0,9968 ₇	0,001566 ₈	2	0,866025 ₅	0,1735 ₆	0,4132 ₂
0,003	0,999995 ₅	0,9953 ₀	0,002347 ₂	3	0,942809	0,1087 ₁	0,4456 ₅
0,004	0,999992	0,9937 ₅	0,003125 ₇	4	0,968246	0,07540 ₇	0,4623 ₀
0,005	0,999987	0,9922 ₀	0,003902 ₂	5	0,979796	0,05582 ₁	0,4720 ₉
0,006	0,999982	0,9906 ₅	0,004676 ₇	6	0,986013	0,04323 ₀	0,4783 ₉
0,007	0,999975 ₅	0,9891 ₀	0,005449 ₃	7	0,989743	0,03460 ₉	0,4827 ₀
0,008	0,999968	0,9875 ₆	0,006219 ₇	8	0,992157	0,02842 ₁	0,4857 ₇
0,009	0,999960	0,9860 ₂	0,006988 ₆	9	0,993808	0,02381 ₅	0,4880 ₉
0,01	0,999950	0,9844 ₉	0,007755 ₃	10	0,994987	0,02028 ₈	0,4898 ₈
0,015	0,999887 ₅	0,9767 ₇	0,01156 ₀	15	0,997775	0,01074 ₉	0,4946 ₃
0,02	0,999800	0,9693 ₇	0,01531 ₇	20	0,998749	0,006749 ₁	0,4966 ₃
0,03	0,999550	0,9546 ₃	0,02268 ₄	30	0,999444	0,003444 ₂	0,4982 ₈
0,04	0,999200	0,9402 ₂	0,02988 ₈	40	0,999687 ₅	0,002115 ₈	0,4989 ₄
0,05	0,998749	0,9261 ₈	0,03691 ₀	50	0,999800	0,001443 ₀	0,4992 ₆
0,06	0,998198	0,9124 ₈	0,04376 ₂	60	0,999861	0,001052 ₅	0,4994 ₇
0,07	0,997547	0,8991 ₀	0,05045 ₂	70	0,999898	0,0008046 ₇	0,4996 ₀
0,08	0,996795	0,8860 ₃	0,05698 ₅	80	0,999922	0,0006369 ₀	0,4996 ₈
0,09	0,995942	0,8732 ₇	0,06330 ₅	90	0,999938	0,0005182 ₄	0,4997 ₄
0,1	0,994987	0,8608 ₀	0,06959 ₈	100	0,999950	0,0004299 ₀	0,4997 ₉
0,15	0,988686	0,8019 ₇	0,09901 ₇	150	0,999978	0,0002090 ₇	0,4999 ₀
0,2	0,979796	0,7504 ₈	0,1247 ₆	200	0,999987	0,001247 ₀	0,4999 ₄
0,3	0,953939	0,6613 ₅	0,1693 ₃	300	0,999994	0,00005996 ₇	0,4999 ₇
0,4	0,916515	0,5881 ₅	0,2059 ₂	400	0,999997	0,00003552 ₉	0,4999 ₈
0,5	0,866025 ₅	0,5272 ₀	0,2364 ₀	500	0,999998 ₀	0,00002363 ₁	0,4999 ₉
0,6	0,800000	0,4758 ₃	0,2620 ₉	600	0,999998 ₆	0,00001691 ₇	0,4999 ₉
0,7	0,714143	0,4320 ₆	0,2839 ₇	700	0,999999 ₀	0,00001274 ₃	0,4999 ₉
0,8	0,600000	0,3944 ₃	0,3027 ₈	800	0,999999 ₃	0,000009965 ₃	0,4999 ₉
0,9	0,435890	0,3618 ₂	0,3190 ₉	900	0,999999 ₄	0,000008019 ₂	0,4999 ₉
1	0	0,3333 ₃	0,3333 ₃	1000	0,999999 ₅	0,000006600 ₉	0,4999 ₉

Für $p = 1$ (Kugel) haben N_{\parallel} und N_{\perp} den gleichen Wert; dieses entspricht dem physikalischen Tatbestand, daß bei einer magnetisierten Kugel auch magnetisch alle Achsen gleichberechtigt sind. In der Tabelle 2 sind noch einmal die Zahlenwerte für N_{\parallel} und N_{\perp} für die Fälle der schon oben genannten speziellen Entartungsformen des Rotationsellipsoides zusammengestellt worden.

Tabelle 2. Entmagnetisierungsfaktoren für Scheibe, Kugel und Stab.

	p	e_1 bzw. e_2	N_{\parallel}	N_{\perp}
„Unendlich“ dünne Scheibe	0	1	1	0
Kugel	1	0	$1/3$	$1/3$
„Unendlich“ langer Stab	∞	1	0	$1/2$

Weiter sollen noch einige Zahlenangaben über den Fehler gegeben werden, den man macht, wenn man statt der strengen Formeln (11), (12), (15), (16) die Näherungsbeziehungen (11a), (12a), (15a), (16a) benutzt, d. h. wenn man statt N_{\parallel} bzw. N_{\perp} die genäherten Größen N'_{\parallel} bzw. N'_{\perp} berechnet. Die entsprechenden relativen Fehler $\Delta(N'_{\parallel})$ und $\Delta(N'_{\perp})$ sind in der Tabelle 3 zusammengestellt worden. Dabei sind diese relativen Fehler folgendermaßen definiert:

$$\Delta(N'_{\parallel}) = \frac{N_{\parallel} - N_{\parallel}}{N'_{\parallel}} \quad (17)$$

bzw.

$$\Delta(N'_{\perp}) = \frac{N_{\perp} - N_{\perp}}{N'_{\perp}} \quad (18)$$

Diese Zusammenstellung ergibt, daß man zumindest bei Achsenverhältnissen $p < 10^{-2}$ bzw. $p > 10^2$ mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit die Näherungsbeziehungen (11a), (12a), (15a), (16a) zur Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors benutzen kann.

Tabelle 3. Relative Fehler $\Delta(N'_{\parallel})$ und $\Delta(N'_{\perp})$ bei verschiedenem p .

p	$\Delta(N'_{\parallel})$	$\Delta(N'_{\perp})$
10^{-3}	$+ 2,0 \cdot 10^{-6}$	$- 6,5 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$+ 2,0 \cdot 10^{-4}$	$- 6,2 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$+ 2,1 \cdot 10^{-2}$	$- 5,2 \cdot 10^{-2}$
10^1	$+ 1,6 \cdot 10^{-2}$	$+ 1,0 \cdot 10^{-3}$
10^2	$+ 1,6 \cdot 10^{-4}$	$+ 1,0 \cdot 10^{-5}$
10^3	$+ 1,5 \cdot 10^{-6}$	$+ 1,0 \cdot 10^{-7}$

5. Spezielle Fälle

Von Bedeutung ist noch folgender Fall. Ein homogenes magnetisches Feld der Vakuumfeldstärke \mathfrak{H}_0 sei längs der geschlossenen Feldlinien vollkommen und gleichmäßig mit einer Substanz der Permeabilität μ_1 ausgefüllt; in diese werde an irgendeiner Stelle ein Körper von der Gestalt eines Rotationsellipsoides (Entmagnetisierungsfaktor N) und der Permeabilität μ_2 mit einer der Hauptachsen parallel zu den Feldlinien eingebettet. Für die Feldstärke \mathfrak{H}_{2LK} im Innern des magnetisierten Rotationsellipsoides ergibt sich dann mit der Stetigkeitsbedingung $\text{Div } \mathfrak{B} = 0$ folgende einfache Beziehung:

$$\mathfrak{H}_{2LK} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + N \cdot (\mu_2 - \mu_1)} \cdot \mathfrak{H}_0 \quad (7)$$

Für den allgemeinen Fall beliebiger Orientierung der Ellipsoidachsen gegenüber dem Vakuumfeld \mathfrak{H}_0 ist entsprechend dem schon zu den Gleichungen (4a bis c) Gesagten wieder die Komponentendarstellung zu benutzen:

$$(\mathfrak{H}_{2LK})_a = \frac{\mu_1}{\mu_1 + N_{\parallel} \cdot (\mu_2 - \mu_1)} \cdot (\mathfrak{H}_0)_a \quad (7a)$$

$$(\mathfrak{H}_{2LK})_b = \frac{\mu_1}{\mu_1 + N_{\perp} \cdot (\mu_2 - \mu_1)} \cdot (\mathfrak{H}_0)_b \quad (7b)$$

$$(\mathfrak{H}_{2LK})_c = \frac{\mu}{\mu_1 + N_{\perp} \cdot (\mu_2 - \mu_1)} \cdot (\mathfrak{H}_0)_c \quad (7c)$$

Die allgemeinen Beziehungen (7) bzw. (7a bis c) umfassen noch zwei spezielle Grenzfälle. Einmal führt die Betrachtung für die Magnetisierung eines Rotationsellipsoides der Permeabilität μ in umgebendem Vakuum — d. h. die Festsetzung $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = \mu$ — selbstverständlich wieder auf die Gleichungen (4) bzw. (4a bis c) dieses schon oben behandelten Falles zurück.

Zum anderen ergibt die Festsetzung $\mu_1 = \mu$ und $\mu_2 = 1$ die in die Gleichungen (7) bzw. (7a bis c) einzusetzende Bedingung für den Fall eines Hohlraumes von der Gestalt eines Rotationsellipsoides in einer gleichförmig magnetisierten Substanz. Man erhält also für die Feldstärke in einem solchen Hohlraum (Index H):

$$\mathfrak{H}_H = \frac{\mu}{\mu - N \cdot (\mu - 1)} \cdot \mathfrak{H}_0 \quad (8)$$

bzw.

$$(\mathfrak{H}_H)_a = \frac{\mu}{\mu - N_{\parallel} \cdot (\mu - 1)} \cdot (\mathfrak{H}_0)_a \quad (8a)$$

$$(\mathfrak{H}_H)_b = \frac{\mu}{\mu - N_{\perp} \cdot (\mu - 1)} \cdot (\mathfrak{H}_0)_b \quad (8b)$$

$$(\mathfrak{H}_H)_c = \frac{\mu}{\mu - N_{\perp} \cdot (\mu - 1)} \cdot (\mathfrak{H}_0)_c \quad (8c)$$

Es läßt sich also die Feldstärke im Innern des Rotationsellipsoides durch das ursprüngliche Vakuumfeld, die Permeabilitäten der beiden Medien und die Entmagnetisierungsfaktoren darstellen.

Praktisch kommen als wichtige Fälle Zylinderstäbe und Scheiben bzw. Schlitz vor. Man kann den Entmagnetisierungsfaktor für diese geometrischen Formen im allgemeinen mit hinreichender Näherung durch den Entmagnetisierungsfaktor für ein Rotationsellipsoid gleichen Achsenverhältnisses ersetzen, sofern dieses hinreichend groß bzw. klein ist.

Über den Entmagnetisierungsfaktor für Kreiszyylinder bei Magnetisierung in Richtung der Zylinderachse — d. h. in unserer Schreibweise für N_{\parallel} bei $p > 1$ — liegen außerdem noch eine Reihe spezieller theoretischer und experimenteller Untersuchungen vor. Die Berechnung dieses Entmagnetisierungsfaktors ist nur in Näherungsverfahren möglich, da unter anderem die Magnetisierung im Kreiszyylinder nicht mehr homogen und dementsprechend N keine rein geometrisch bedingte Größe mehr ist, sondern auch noch von der jeweils an jedem Punkte erreichten Magnetisierung abhängt. Die experimentellen Bestimmungen des Entmagnetisierungsfaktors beim Kreiszyylinder sind nach verschiedenen Methoden („magnetometrischer Entmagnetisierungsfaktor“, „ballistischer Entmagnetisierungsfaktor“) durchgeführt worden. Die verschiedenen Ergebnisse weisen — zumal mit den verschiedenen Verfahren auch verschiedene Größen gemessen werden — untereinander und gegenüber den durch die rechnerischen Näherungsverfahren gewonnenen zum Teil nicht unerhebliche Abweichungen auf. Bezüglich aller Einzelheiten sei daher hier auf die einschlägige Literatur¹⁾ verwiesen, in der man auch Angaben über den Entmagnetisierungsfaktor N_{\parallel} für Stäbe von rechteckigem Querschnitt bei „Achsenverhältnissen“ $p > 1$ findet.

II. Der Entelektrisierungsfaktor

1. Allgemeine Definitionen zur Beschreibung des materieverfüllten elektrischen Feldes

Die Auswirkung der an den Enden eines in ein Feld eingebrachten Körpers entstehenden „Pole“ durch die von diesen ausgehenden rückläufigen Feldlinien ist selbstverständlich grundsätzlich nicht auf das magnetische Feld beschränkt, sondern äußert sich ganz entsprechend in einem nur zum Teil mit dielektrischer Materie erfüllten elektrischen Feld in einer dort auftretenden Änderung des Feldes.

Die formale Beschreibung dieser Beeinflussung des elektrischen Feldzustandes durch räumlich begrenzte dielektrische Körper entspricht dabei ganz der Darstellung der Entmagnetisierung und kann daher hier einfach mit dem Hinweis auf die analogen Verhältnisse im magnetischen Feld zusammengestellt werden. Dabei werden die einzelnen Beziehungen mit denselben Zahlen durchnummeriert wie die entsprechenden Formeln im magnetischen Feld; von diesen sollen sie lediglich durch einen angefügten Strich (') unterschieden werden.

Bringt man in ein elektrisches Feld der Vakuumfeldstärke \mathcal{E}_0 eine dielektrische Substanz der relativen Dielektrizitätskonstante ϵ , bzw. der elektrischen Suszeptibilität $\xi = \epsilon - 1$ ein, so ist das Feld innerhalb der Materie wieder in einem durch diese gebohnten „Längskanal“ zu messen und soll entsprechend mit \mathcal{E}_{LK} bezeichnet werden. Die im eingeschnittenen „Querschlitze“ zu bestimmende Verschiebung oder dielektrische

¹⁾ Siehe z. B. bei J. Würschmidt, Theorie des Entmagnetisierungsfaktors und der Scherung von Entmagnetisierungskurven. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1925. H. Neumann u. K. Warmuth, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern 11 (1932) S. 25. F. Stäblein u. H. Schlechtweg, Z. Phys. 95 (1935) S. 630. K. Warmuth, Arch. Elektrotechn. 30 (1936) S. 761; 31 (1937) S. 124; 33 (1939) S. 747. In diesen Arbeiten ist übrigens entsprechend der benutzten nichtrationalen Schreibweise der Gleichungen der 4π -fache Wert des hier definierten Entmagnetisierungsfaktors angegeben worden.

In der zuletzt zitierten Veröffentlichung hat Warmuth bei seinen Näherungsberechnungen für den Entmagnetisierungsfaktor des Kreiszyinders Beziehungen entwickelt, welche außer einer Funktion des Achsenverhältnisses p den Entmagnetisierungsfaktor N — d. h. in unserer Schreibweise $4\pi N_{\parallel}$ — für das Rotationsellipsoid gleichen Achsenverhältnisses als Faktor enthalten. Durch diese Formeln erzielt Warmuth eine befriedigendere Übereinstimmung zwischen berechneten und experimentell beobachteten Werten für N .

Verschiebungsdichte \mathfrak{D} und die im isotropen Dielektrikum erzielte elektrische Polarisierung oder Elektrizierung \mathfrak{P} sind dann durch folgende Beziehungen mit \mathfrak{E}_{LK} verknüpft:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \mathfrak{E}_{LK}, \quad (1')$$

$$\mathfrak{D} = (1 + \xi) \cdot \varepsilon_0 \mathfrak{E}_{LK} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}_{LK} + \mathfrak{P} \quad 1) \quad (2')$$

mit

$$\mathfrak{P} = \xi \cdot \varepsilon_0 \mathfrak{E}_{LK}. \quad (3')$$

Dabei bedeutet ε_0 die absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder Influenzkonstante²⁾. Für Dielektrika ist $\varepsilon > 1$, d. h. $\xi > 0$ und somit \mathfrak{P} stets mit \mathfrak{E}_{LK} gleichgerichtet.

2. Definition der Entelektrisierung und des Entelektrisierungsfaktors

Auch im elektrischen Feld ist die Vakuumfeldstärke \mathfrak{E}_0 mit der Feldstärke \mathfrak{E}_{LK} im Längskanal innerhalb der Materie nur dann identisch, wenn das Dielektrikum das Feld längs seiner ganzen Ausdehnung erfüllt (Beispiel: voll ausgefüllter Plattenkondensator!). Anderenfalls treten an den Enden des Dielektrikums „Polarisationsladungen“ auf, die zu rückläufigen Feldlinien und damit zu einer Schwächung des elektrisierenden Feldes \mathfrak{E}_{LK} führen. Diese Erscheinung nennt man in Analogie zur Entmagnetisierung im magnetischen Feld „Entelektrisierung“. Dabei hängt die Stärke dieser entelektrisierenden Wirkung wieder einmal von der geometrischen Gestalt des in das Feld eingebrachten Dielektrikums und zum anderen von der in diesem bereits erreichten Elektrizierung \mathfrak{P} ab, ist also nach Betrag und Richtung wieder eine für den Allgemeinfall nicht streng berechenbare Größe. Sie ist jedoch wieder in einfacher Weise anzugeben, falls das Dielektrikum „homogen elektrisiert“ ist, d. h. wenn \mathfrak{P} nach Betrag und Richtung innerhalb des dielektrischen Körpers konstant und mit \mathfrak{E}_0 gleichgerichtet ist. Dieser Fall ist wieder für Dielektrika von der Gestalt eines Rotationsellipsoides bei Elektrizierung in Richtung einer der Hauptachsen gegeben. Dann kann man \mathfrak{E}_{LK} darstellen in der Form

$$\mathfrak{E}_{LK} = \mathfrak{E}_0 - \frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{E}_0 - N \cdot \xi \mathfrak{E}_{LK}, \quad (4')$$

bzw. hieraus

$$\mathfrak{E}_{LK} = \frac{1}{1 + N \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot \mathfrak{E}_0 \quad (5')$$

und

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{1 + N \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot \varepsilon_0 \mathfrak{E}_0. \quad (6')$$

Bei Berücksichtigung beliebiger Orientierung des Vakuumfeldes \mathfrak{E}_0 zu den Hauptachsen des Rotationsellipsoides ist entsprechend den obigen Ausführungen zu dem analogen Fall im magnetischen Feld wieder an Stelle der Vektorgleichungen (4'), (5'), (6') die Komponentendarstellung zu benutzen, z. B.:

$$(\mathfrak{E}_{LK})_a = (\mathfrak{E}_0)_a - \frac{N_a}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}_a = (\mathfrak{E}_0)_a - \frac{N_{\parallel}}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}_a = (\mathfrak{E}_0)_a - N_{\parallel} \cdot \xi (\mathfrak{E}_{LK})_a, \quad (4a')$$

$$(\mathfrak{E}_{LK})_b = (\mathfrak{E}_0)_b - \frac{N_b}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}_b = (\mathfrak{E}_0)_b - \frac{N_{\perp}}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}_b = (\mathfrak{E}_0)_b - N_{\perp} \cdot \xi (\mathfrak{E}_{LK})_b, \quad (4b')$$

$$(\mathfrak{E}_{LK})_c = (\mathfrak{E}_0)_c - \frac{N_c}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}_c = (\mathfrak{E}_0)_c - \frac{N_{\perp}}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}_c = (\mathfrak{E}_0)_c - N_{\perp} \cdot \xi (\mathfrak{E}_{LK})_c. \quad (4c')$$

N — bzw. N_{\parallel} und N_{\perp} — hängt wieder lediglich von der geometrischen Form des homogen elektrisierten Körpers ab, heißt sein „Entelektrisierungsfaktor“ und ist

¹⁾ \mathfrak{P} ist entsprechend der Auffassung, daß im elektrischen Feld \mathfrak{E} der Kraftwirkungsvektor ist, als eine Größe von der Art einer dielektrischen Verschiebungsdichte definiert.

²⁾ Derzeitiger Zahlenwert in internationalen Einheiten: $\varepsilon_0 = (8,8594 \pm 0,0014) \cdot 10^{-12}$ As/Vm [s. U. Stille, Z. Phys. 121 (1943) S. 133].

zahlenmäßig mit dem schon oben besprochenen und für verschiedene Achsenverhältnisse bzw. Magnetisierungsrichtungen berechneten Entmagnetisierungsfaktor identisch.

3. Berechnung der Entelektrisierungsfaktoren für Rotationsellipsoide

Zur Berechnung des Entelektrisierungsfaktors sind also wieder die Formeln (9) bis (18) zu benutzen. Die Tabellen 1 bis 3 und Bild 1 enthalten somit gleichfalls die zahlenmäßigen Ergebnisse für den Entelektrisierungsfaktor, sodaß hier weitere Ausführungen über die rechnerische Behandlung des Entelektrisierungsfaktors überflüssig werden.

Die Entelektrisierung hängt außer von dem geometrischen Faktor N noch von der jeweils erzielten Elektrizierung \mathfrak{B} ab, welcher sie entsprechend Gl. (4') proportional ist. Da die früher bekannten Dielektrika — mit Ausnahme des Wassers und einiger organischer Flüssigkeiten — fast durchweg Zahlenwerte der Größenordnung 1 für die elektrische Suszeptibilität ξ aufweisen, d. h. die erreichten Elektrizierungen nur etwa von derselben Größe wie das Produkt $\varepsilon_0 \mathfrak{E}_{LK}$ sind, blieb bis auf vereinzelte Fälle die Erscheinung der Entelektrisierung zumindest in der Praxis außer Betracht oder überhaupt ohne Beachtung. Nachdem aber heute eine ganze Reihe von dielektrischen Kunststoffen mit Werten der Dielektrizitätskonstante ε bis zu etwa 10^2 der Elektrotechnik zur Verfügung stehen, dürfte die Entelektrisierung auch in der Praxis in manchen Fällen nicht mehr vernachlässigbar sein, bzw. sogar eine besondere Bedeutung besitzen, sodaß für Anordnungen mit längs- oder querelektrisierten Zylindern und Scheiben die Kenntnis der entsprechenden Entelektrisierungsfaktoren erforderlich wird.

4. Spezielle Fälle

Falls ein dielektrischer Körper von der Form eines Rotationsellipsoides (Entelektrisierungsfaktor N) und der Dielektrizitätskonstanten ε_2 in ein Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ε_1 eingebettet ist, welches ein elektrisches Feld der Vakuumfeldstärke \mathfrak{E}_0 längs der Feldlinien gleichmäßig erfüllt, gilt für die Feldstärke \mathfrak{E}_{2LK} im Innern des homogen in einer Hauptachsenrichtung elektrisierten Rotationsellipsoides mit der hier gültigen Stetigkeitsbedingung $\text{Div } \mathfrak{D} = 0$ die der Gl. (7) analoge Beziehung

$$\mathfrak{E}_{2LK} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + N \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot \mathfrak{E}_0, \quad (7')$$

bzw. bei beliebiger Feldorientierung gegenüber den Hauptsachsen des Rotationsellipsoides die den Gl. (7a bis c) entsprechende Komponentendarstellung

$$(\mathfrak{E}_{2LK})_a = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + N_{\parallel} \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot (\mathfrak{E}_0)_a, \quad (7a')$$

$$(\mathfrak{E}_{2LK})_b = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + N_{\perp} \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot (\mathfrak{E}_0)_b, \quad (7b')$$

$$(\mathfrak{E}_{2LK})_c = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + N_{\perp} \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot (\mathfrak{E}_0)_c. \quad (7c')$$

Für das Wertepaar $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ erhält man wieder die Gl. (4') bzw. (4a' bis c') zurück. Mit $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 1$ ergeben sich analog dem schon bei der Behandlung des magnetischen Feldes Gesagten die Beziehungen für die Feldstärke \mathfrak{E}_H in einem Hohlraum von der Form eines Rotationsellipsoides:

$$\mathfrak{E}_H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - N \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot \mathfrak{E}_0, \quad (8')$$

bzw.

$$(\mathfrak{E}_H)_a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - N_{\parallel} \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot (\mathfrak{E}_0)_a, \quad (8a')$$

$$(\mathfrak{E}_H)_b = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - N_{\perp} \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot (\mathfrak{E}_0)_b, \quad (8b')$$

$$(\mathcal{E}_H)_c = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - N_{\perp} \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot (\mathcal{E}_0)_c. \quad (8c')$$

Für die Feldstärke im Innern eines Rotationsellipsoides sind also wieder außer dem ursprünglichen Vakuumfeld und den Dielektrizitätskonstanten die Entelektrisierungsfaktoren bestimmend.

Zusammenfassung

Die grundsätzlichen Beziehungen zur Beschreibung des materieverfüllten magnetischen und elektrischen Feldes werden in rationaler Schreibweise zusammengestellt.

Bringt man in ein Vakuumfeld in räumlich begrenzten Gebieten elektrisierbare bzw. magnetisierbare Substanzen ein, so bilden sich an den freien Enden der eingebrachten Körper „Pole“ aus, von denen rückläufige Feldlinien ausgehen, welche im Innern des Materials zum Auftreten der Entelektrisierung bzw. Entmagnetisierung genannten Erscheinungen führen. Der Feldzustand innerhalb der Materie hängt dann außer von der Vakuumfeldstärke des polarisierenden Feldes noch in komplizierter Weise von der im Material erzielten elektrischen bzw. magnetischen Polarisation ab.

Falls die in das Feld eingebrachten Substanzen geometrisch die Gestalt eines Ellipsoides haben, ist die in ihnen hervorgerufene Polarisation nach Betrag und Richtung konstant. Der Einfluß der Entelektrisierung bzw. Entmagnetisierung auf das Feld im Innern eines materieverfüllten Rotationsellipsoides läßt sich in einfacher Weise durch das Produkt aus der jeweils erzielten Polarisation und einem rein geometrischen, durch das Achsenverhältnis des Rotationsellipsoides gegebenen, konstanten Faktor beschreiben, dem Entelektrigungs- bzw. Entmagnetisierungsfaktor N ; dabei sind diese bei gleichen Achsenverhältnissen im elektrischen und magnetischen Fall identisch. Bei beliebiger Orientierung des polarisierenden Feldes gegenüber den Hauptachsen des Rotationsellipsoides ist an Stelle der Vektorgleichungen jeweils die Komponentendarstellung zu benutzen.

Die strengen Formeln sowie Näherungsbeziehungen für kleine und große Achsenverhältnisse p werden für die Entelektrigungs- bzw. Entmagnetisierungsfaktoren N_{\parallel} und N_{\perp} — zur Beschreibung der entpolarisierenden Wirkung parallel und senkrecht zur Rotationsachse des Rotationsellipsoides — in rationaler Gleichungsschreibweise angegeben. Die ausgerechneten Zahlenwerte sind in einer Tabelle zusammengefaßt und in Kurvenform als Funktion des Achsenverhältnisses graphisch dargestellt worden. Weitere Tabellen enthalten die entsprechenden Werte für die speziellen Entartungsfälle des Rotationsellipsoides sowie Zahlenangaben über den relativen Fehler bei Benutzung der Näherungsbeziehungen gegenüber den strengen Formeln; es ergibt sich, daß im allgemeinen für die in der Praxis zu fordernden Genauigkeiten die Näherungsbeziehungen für Achsenverhältnisse $p < 10^{-2}$ bzw. $p > 10^2$ ausreichend sind.

Schließlich werden jeweils noch die Spezialfälle der Felderfüllung durch zwei Substanzen verschiedener Suszeptibilität, von denen die eine in Form eines Rotationsellipsoides in die andere eingebettet ist, bzw. eines Hohlraumes von der Gestalt eines Rotationsellipsoides in einem polarisierbaren Material behandelt. Körperformen von der Gestalt zylindrischer Scheiben bzw. Stäbe lassen sich näherungsweise auf Rotationsellipsoide zurückführen oder mit deren Entelektrigungs- bzw. Entmagnetisierungsfaktoren in funktionalen Zusammenhang bringen, so daß auch hier wieder die Kenntnis dieser Faktoren erforderlich wird.

Während bisher nur die Erscheinungen der Entmagnetisierung in ferromagnetischen Substanzen wegen der in diesen erreichten hohen Permeabilitätswerte allgemeines Interesse besaßen, werden heute auch die Auswirkungen der Entelektrisierung auf die elektrischen Feldverhältnisse bei den technischen Kunststoffen hoher Dielektrizitätskonstante zu beachten sein.

Herrn Prof. Dr. Diesselhorst und Herrn Dipl.-Phys. Fissler danke ich für wertvolle Aussprachen.