

# Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs.

Von P. Riekert und T. E. Schunck in Stuttgart<sup>1</sup>.

**1. Einleitung.** Untersuchungen über die Fahrmechanik des Kraftfahrzeugs gingen früher von der Annahme aus, daß das Fahrzeug sich auf der durch die Lenkgeometrie bestimmten Bahn bewegt. **L. Huber** zeigte kürzlich<sup>2</sup>, daß die zur Einhaltung einer bestimmten Bahn notwendigen seitlichen Führungskräfte von den seitlich nachgiebigen Rädern des Kraftfahrzeugs nur aufgenommen werden können, wenn deren Ebenen einen gewissen „Schräglaufwinkel“ mit der Fahrtrichtung bilden. Diese Erkenntnis wurde aus Versuchen gewonnen. Mit ihr wurde qualitativ abgeleitet und schließlich durch Modellversuche wieder bestätigt, wie sich ein Fahrzeug unter verschiedenen Fahrbedingungen bewegt, insbesondere ob es das Bestreben hat, seine ursprüngliche Fahrtrichtung beizubehalten. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, das Fahrverhalten eines Kraftfahrzeugs unter diesen neuerkannten Bedingungen rechnerisch zu verfolgen.

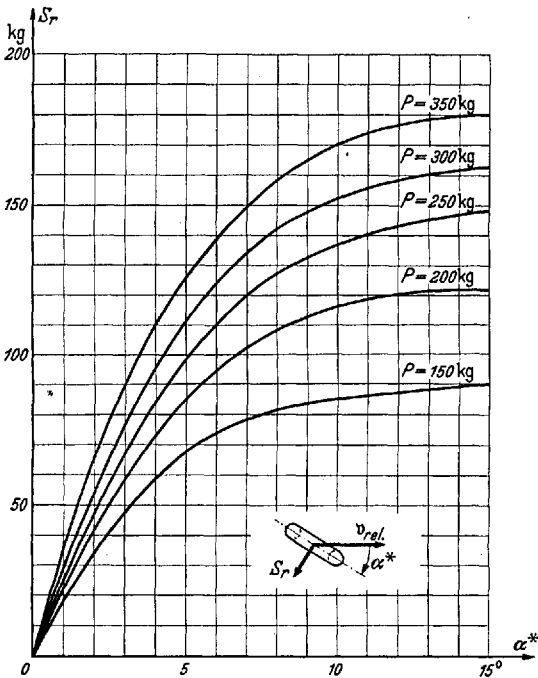


Abb. 1. Seitenkraft  $S_r$  eines gummibereiften Rades abhängig vom Schräglaufwinkel  $\alpha^*$  für verschiedene Raddrücke  $P$ .

2. Die Kräfte am Fahrzeug. Von den Versuchsergebnissen übernehmen wir dazu, wie die auf der Radebene senkrechte Kraft  $S_r$  eines gummibereiften Rades vom Schräglaufwinkel  $\alpha^*$  zwischen der Ebene des Rades und der Relativgeschwindigkeit der Radnabe zur Straße abhängt; diese Funktion muß für die jeweiligen Verhältnisse

experimentell bestimmt werden. Ein Beispiel dafür gibt die Abb. 1. Die Seitenkraft  $S_r$  hängt danach noch vom Raddruck  $P$  so ab, daß sie weniger stark als proportional mit diesem Druck ansteigt; außerdem ist sie von der Reibungszahl der haftenden Reibung  $\mu_H$  abhängig, von der Fahrgeschwindigkeit dagegen praktisch nicht. Sobald solche nur empirisch, nicht analytisch gegebenen Abhängigkeiten in mechanischen Problemen vorkommen, kann man genau nur noch Einzelfälle numerisch berechnen. Um allgemeine Schlüsse ziehen zu können, ist es jedoch häufig von Vorteil, die empirische Funktion näherungsweise durch eine einfache, analytische zu ersetzen. Die Funktion  $S_r(\alpha^*)$  zeigt bei allen Reifen qualitativ denselben Verlauf, den man nach **L. Huber** unter Einführung eines sog. Raddruckbeiwertes  $c_p$  durch

$$S_r = \mu_H P \mathfrak{F}(c_p \alpha^*) \tag{2.01}$$

analytisch mit guter Näherung erfassen kann. Beschränkt man sich auf kleine Schräglaufwinkel  $\alpha^*$ , für die  $1/3 (c_p \alpha^*)^2$  gegen 1 vernachlässigt werden darf, so kann man

<sup>1</sup> Die Arbeit wurde mit Unterstützung des Herrn Reichsverkehrsministers im Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart durchgeführt.

<sup>2</sup> **L. Huber**, Die Fahrtrichtungsstabilität des schnellfahrenden Kraftwagens. Dtsch. Kraftfahrtforsch. Heft 44. Berlin 1940.

die Gleichung (2.01) noch weiter zu

$$S_r = \mu_H c_p P \alpha^* \tag{2.01 a}$$

vereinfachen;  $\mu_H$  und  $c_p$  hängen selbst wieder von  $P$  ab. Wir wissen dabei aus dem Vorhergehenden, daß  $d(\mu_H c_p)/dP < 0$  ist und fassen deshalb die beiden Faktoren zu der Funktion

$$\mu_H c_p = C_p(P) = \bar{c} - c' P \tag{2.02}$$

zusammen, in der  $\bar{c}$  und  $c'$  positive Konstanten von solcher Größe sind, daß im Bereich der praktisch in Frage kommenden Raddrücke  $\bar{c} > c' P$  bleibt.

Mit diesen für ein einzelnes Rad geltenden Werten kann man die durch die Räder auf einen Wagen übertragenen Kräfte und Momente ableiten. Der Schwerpunkt  $SP$  des Wagens (Abb. 2) habe die Geschwindigkeit  $v$ , die mit einer beliebigen festen Achse in der Fahrebene den Winkel  $\gamma$  bildet. Alle Winkel seien im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Der Winkel  $\alpha$  zwischen der Wagenlängsachse und der Schwunggeschwindigkeit ist der Schwimmwinkel. Die Schräglaufwinkel an den Vorderrädern  $\alpha_v$  und an den Hinterrädern  $\alpha_h$  unterscheiden sich von ihm, sobald der Wagen sich um seinen Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$  dreht und sobald am Vorderrad ein Lenkwinkel  $\beta$  auftritt. Faßt man die beiden Räder einer Achse zu einem fiktiven Doppelrad in Achsmitte zusammen, so wird die Geschwindigkeit am fiktiven Vorderrad mit dem Abstand  $a$  vom Schwerpunkt

$$v_v = v + [\dot{\epsilon} a] \tag{2.03}$$

und am fiktiven Hinterrad im Abstand  $b$

$$v_h = v + [\dot{\epsilon} b]. \tag{2.04}$$

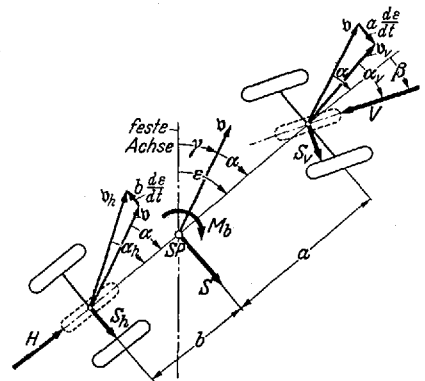


Abb. 2. Die vom Boden her auf das Fahrzeug wirkenden Kräfte nebst Geschwindigkeiten.

Beschränkt man sich auf kleine Schwimmwinkel, was ja auch praktisch notwendig ist, da sonst der Wagen „schleudert“, so wird der Schräglaufwinkel des um den Lenkwinkel  $\beta$  eingeschlagenen Vorderrades

$$\alpha_v = \alpha + \beta - \frac{a}{v} \frac{d\epsilon}{dt} \tag{2.05}$$

und des Hinterrades

$$\alpha_h = \alpha + \frac{b}{v} \frac{d\epsilon}{dt}. \tag{2.06}$$

Die resultierende Seitenkraft  $S$ , die an einem Wagen vom Gewicht  $G$  mit vier gleichen Rädern angreift, wird für kleine Lenkwinkel

$$S = S_v + S_h = \frac{G}{a+b} \left[ b \left( \bar{c} - \frac{c' G b}{2(a+b)} \right) \alpha_v + a \left( \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right) \alpha_h \right]. \tag{2.07}$$

Diesen Ausdruck spalten wir mit (2.05) und (2.06) so in

$$S = \sigma'_0 \beta + \sigma' \alpha + \sigma_1 \frac{1}{v} \frac{d\epsilon}{dt} \tag{2.07 a}$$

auf, daß mit

$$\sigma'_0 = \frac{G b}{a+b} \left( \bar{c} - \frac{c' G b}{2(a+b)} \right), \tag{2.08}$$

$$\sigma' = G \left( \bar{c} - \frac{c' G (a^2 + b^2)}{2(a+b)^2} \right), \tag{2.09}$$

$$\sigma_1 = \frac{c' G^2 a b (b-a)}{2(a+b)^2} \tag{2.10}$$

die drei Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (2.07a) der Reihe nach die durch den Lenkeinschlag, die durch den Schwimmwinkel und die durch die Drehung des Wagens um seine Hochachse bedingte Seitenkraftkomponente bedeuten. Daß überhaupt eine Seitenkraft bei einer reinen Drehung um den Schwerpunkt auftritt, sofern dieser nicht in der Mitte zwischen den beiden Achsen liegt ( $a \neq b$ ), ist eine Folge der Tatsache, daß die Seitenkraft des einzelnen Rades dem Raddruck nicht proportional ist.

Die Radseitenkräfte  $S_v$  und  $S_h$  erzeugen außerdem ein Moment  $M_b$  um die Schwerhochachse. Rechnet man es wie die Winkel im Uhrzeigersinn positiv, so wird

$$M_b \left( \alpha, \frac{1}{v} \frac{d\varepsilon}{dt} \right) = S_v(\alpha_v) a \cos \beta - S_h(\alpha_h) b \quad (2.11)$$

oder wieder näherungsweise für kleine Winkel  $\alpha$  und  $\beta$

$$M_b = \frac{G a b}{a+b} \left[ \left( \bar{c} - \frac{c' G b}{2(a+b)} \right) \alpha_v - \left( \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right) \alpha_h \right]. \quad (2.11a)$$

Dies spalten wir ebenso wie die Seitenkraft in

$$M_b = \mu'_0 \beta + \mu' \alpha + \mu_1 \frac{1}{v} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.11b)$$

auf, wobei

$$\mu'_0 = \frac{G a b}{a+b} \left( \bar{c} - \frac{c' G b}{2(a+b)} \right) \equiv a \sigma'_0, \quad (2.12)$$

$$\mu' = \frac{c' G^2 a b (a-b)}{2(a+b)^2} \equiv -\sigma_1, \quad (2.13)$$

$$\mu_1 = -G a b \left( \bar{c} - \frac{c' G a b}{(a+b)^2} \right) \quad (2.14)$$

ist.

Hierbei macht sich die fehlende Proportionalität zwischen Seitenkraft und Raddruck vor allem dadurch bemerkbar, daß auch ohne Lenkeinschlag  $\beta$  und ohne Drehung um die Schwerhochachse  $d\varepsilon/dt$  ein Moment auf das Fahrzeug wirkt, sofern der Schwerpunkt nicht in der Mitte zwischen den Achsen liegt und der Schwimmwinkel nicht verschwindet. Dieses Moment hat für  $a > b$ , d. h. für ein hinterachslastiges Fahrzeug, dasselbe Vorzeichen wie der Schwimmwinkel, ist also bestrebt, seinen Betrag zu vergrößern, während es bei einem vorderachslastigen Fahrzeug im umgekehrten Sinn wirkt.

Neben diesen Kräften senkrecht zur Radebene wirken vom Boden noch Kräfte in Richtung der Radebene auf die Räder und damit auf den Wagen, die wir ebenfalls wieder für jede Achse paarweise zusammenfassen wollen. In der Regel sind heute die Kraftfahrzeuge so gebaut, daß die feste Hinterachse angetrieben wird, die lenkbare Vorderachse aber nicht. Dann wirkt vorn, wie in Abb. 2 eingezeichnet, der Widerstand  $V$ , der durch den Roll- und Vorspurwiderstand der Vorderräder bedingt ist, hinten die Antriebskraft  $H$ . Beim Bremsen wechselt  $H$  seine Richtung und Größe und  $V$  erhöht für Vierradbremser seinen Betrag erheblich. Die Kraft  $V$  geht nur bei verschwindendem Lenkeinschlag durch den Schwerpunkt, hat also im allgemeinen ein Moment

$$M_v = -V a \sin \beta \quad (2.15)$$

um diesen.

Zu diesen vom Boden auf das Fahrzeug wirkenden Kräften treten die Luftkräfte. Wir benötigen davon für die Untersuchung folgendes<sup>1</sup>.

Der scheinbare Wind auf ein bewegtes Fahrzeug, das ist die Relativgeschwindigkeit  $v_r$  der Luft gegen das Fahrzeug, setzt sich nach Abb. 3 additiv aus dem wahren Wind  $w$  und dem Fahrtwind  $-v$  zusammen:

$$v_r = w - v. \quad (2.16)$$

<sup>1</sup> Vgl. z. B. E. Sawatzki, Autom.-techn. Z. 42 (1939) S. 515.

Bezeichnet man die Projektion der Geschwindigkeit des wahren Windes auf die raum-feste Achse mit  $w_a$  und die Komponente senkrecht dazu in Richtung positiver Winkel mit  $w_q$ , so erhält man für den Betrag der Geschwindigkeit des scheinbaren Windes

$$v_r = \sqrt{(v \cos \gamma - w_a)^2 + (v \sin \gamma - w_q)^2} \quad (2.17)$$

und für den Winkel der Fahrzeugachse gegen die Anblasrichtung, den sog. Anström-winkel,

$$\tau = \varepsilon - \arctg \left( \frac{v \sin \gamma - w_q}{v \cos \gamma - w_a} \right). \quad (2.18)$$

Die Luft von der Dichte  $\rho$  übt auf ein so angeströmtes Fahrzeug mit der Hauptspant-fläche  $F$  eine Kraft aus, die im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt geht, also in bezug auf diesen ein Moment hat. Dieses Moment  $M_l$  ist mit den genannten Größen durch die Beziehung

$$M_l(v_r, \tau) = \frac{1}{2} \rho v_r^2 F (a + b) c_m(\tau) \quad (2.19)$$

verknüpft, in welcher der Momentenbeiwert  $c_m$  eine dimensionslose, durch Versuche zu bestimmende Zahl ist, die von  $\tau$  abhängt. Für Anströmwinkel bis zu  $10^\circ$  kann man ohne große Fehler

$$M_l(v_r, \tau) = k_m v_r^2 \tau \quad (2.19a)$$

setzen, wobei  $k_m \cong 0$  sein kann.

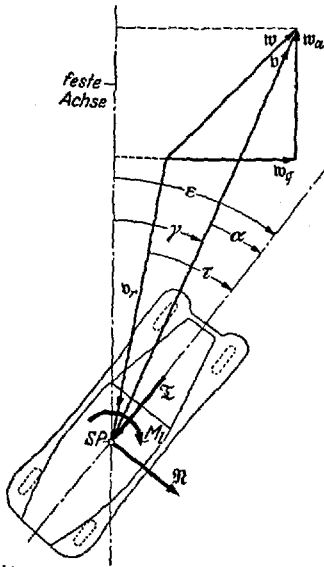


Abb. 3. Luftkräfte und Geschwindigkeiten.

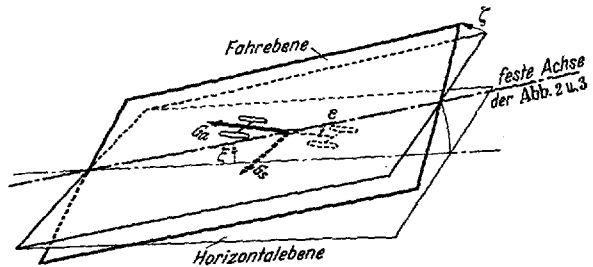


Abb. 4. Zusatzkräfte bei geneigter Fahrbene.

Die Luftkraft zerlegen wir wie die Bodenkräfte in ihre Projektion auf die Wagen-achse

$$T(v_r, \tau) = \frac{1}{2} \rho v_r^2 F c_t(\tau) \quad (2.20)$$

und senkrecht dazu

$$N(v_r, \tau) = \frac{1}{2} \rho v_r^2 F c_n(\tau). \quad (2.21)$$

Im ganzen praktisch in Frage kommenden Bereich ist nach den Versuchsergebnissen der Tangentialkraftbeiwert  $c_t$  konstant, der Normalkraftbeiwert  $c_n$  proportional mit  $\tau$ . Damit vereinfachen sich die Gleichungen (2.20) und (2.21) zu

$$T(v_r) = \bar{k}_t v_r^2 \quad (2.20a)$$

und

$$N(v_r, \tau) = k_n v_r^2 \tau. \quad (2.21a)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $k_n$  ist im Gegensatz zu  $k_m$  stets positiv.

Von den in der Fahrbene auftretenden Kräften seien der Vollständigkeit halber noch die beiden Komponenten  $G_a$  und  $G_s$  des Fahrzeuggewichts genannt, die in diese Ebene fallen, wenn die feste Achse in der Fahrbene gegenüber der Horizontalebene um den Winkel  $\xi$  ansteigt und dann die Fahrbene noch um den Winkel  $\zeta$  um diese Achse gedreht ist (Abb. 4). Entgegen der Richtung der Wagenachse wirkt

$$G_a = G (\sin \xi \cos \varepsilon - \cos \xi \sin \varepsilon \sin \zeta), \quad (2.22)$$

senkrecht zur Wagenachse

$$G_s = G (\cos \xi \cos \varepsilon \sin \zeta + \sin \xi \sin \varepsilon). \quad (2.23)$$

Die Reaktionsmomente, die durch die Kreiselwirkung der Räder verursacht werden und auf die Goldbeck<sup>1</sup> hingewiesen hat, seien in dieser Untersuchung vernachlässigt.

**3. Die Bewegungsgleichungen.** Unter der Einwirkung der in Ziff. 2 zusammengestellten Kräfte bewegt sich ein Fahrzeug mit der wahren Masse  $m = G/g$ , der um die Trägheit der rotierenden Teile erhöhten fiktiven Masse  $m'$  und dem Trägheitsmoment  $\Theta$  um die Schwerhochachse so, daß der Betrag der Schwerpunktsgeschwindigkeit  $v$  der Differentialgleichung

$$m' \frac{dv}{dt} = [H - T(v_r, \tau) - G_a(\varepsilon)] \cos \alpha - [S_h(\alpha_h) + N(v_r, \tau) + G_s(\varepsilon)] \sin \alpha - \left. \begin{aligned} & - S_v(\alpha_v) \sin(\alpha + \beta) - V \cos(\alpha + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.01)$$

gehört und die Richtung  $\gamma$  von  $v$  in der Fahrebene durch

$$m v \frac{d\gamma}{dt} = [H - T(v_r, \tau) - G_a(\varepsilon)] \sin \alpha + [S_h(\alpha_h) + N(v_r, \tau) + G_s(\varepsilon)] \cos \alpha + \left. \begin{aligned} & + S_v(\alpha_v) \cos(\alpha + \beta) - V \sin(\alpha + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.02)$$

gegeben ist. Die Stellung des Fahrzeugs selbst folgt aus

$$\Theta \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = M_b(\alpha_v, \alpha_h) + M_v + M_l(v_r, \tau). \quad (3.03)$$

Nimmt man hierzu die geometrische Beziehung

$$\varepsilon = \alpha + \gamma \quad (3.04)$$

und die bereits abgeleiteten Gleichungen (2.03), (2.04), (2.17) und (2.18), so stellen diese acht Beziehungen das vollständige System der Bewegungsgleichungen für das Fahrzeug dar, wenn neben den Daten des Wagens, der Straße und der umgebenden Luft die Antriebskraft  $H$  als Funktion der Zeit bekannt ist.

Für die weitere analytische Behandlung muß dieses System vereinfacht werden. Man setzt dazu an Stelle der wahren Funktionen  $S_h$ ,  $S_v$ ,  $T$ ,  $N$ ,  $M_b$  und  $M_l$  ihre schon in Ziff. 2 angegebenen Näherungen ein und beschränkt sich wie bei diesen auch in den Differentialgleichungen auf kleine Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , so daß Produkte dieser Winkel gegenüber den in ihnen linearen Gliedern vernachlässigt werden dürfen. Ferner sei entsprechend dem Vorgehen bei Fahr- und Modellversuchen der Betrag der Fahrgeschwindigkeit  $v$  konstant gesetzt. Damit verfügt man über die noch freistehende Funktion  $H$  so, daß gemäß (3.01)

$$H = T + G_a + V \quad (3.05)$$

sein soll.

Faßt man noch die von  $\beta$  abhängigen Beiträge der Kraft  $V$  zur Seitenkraft und zum Moment mit den entsprechenden Komponenten  $\sigma'_0 \beta$  und  $\mu'_0 \beta$  von  $S$  und  $M_b$  aus den Gleichungen (2.07a) und (2.11b) zu

$$\sigma_0 = \sigma'_0 - V \quad (3.06)$$

und

$$\mu_0 = \mu'_0 - V a \equiv a \sigma_0 \quad (3.07)$$

zusammen, so lauten unter den obigen vereinfachenden Annahmen die Bewegungsgleichungen (3.02) und (3.03) bei horizontaler Fahrbahn, wenn Punkte Differentiationen nach der Zeit bedeuten, mit Benützung von (2.19a), (2.21a) und (3.05)

$$m v \dot{\gamma} = \sigma_0 \beta + \sigma' \alpha + \sigma_1 \frac{\dot{\varepsilon}}{v} + k_n v_r^2 \tau, \quad (3.02a)$$

$$\Theta \ddot{\varepsilon} = \mu_0 \beta + \mu' \alpha + \mu_1 \frac{\dot{\varepsilon}}{v} + k_m v_r^2 \tau. \quad (3.03a)$$

<sup>1</sup> G. Goldbeck, Z. VDI 83 (1939) S. 383.

In vielen Fällen wird man den Wagen bei Windstille untersuchen, dann wird  $v_r = v$  und  $\tau = \alpha$ . Mit

$$\sigma = \sigma' + k_n v^2 \quad (3.08)$$

und

$$\mu = \mu' + k_m v^2 \quad (3.09)$$

lauten für diesen Fall die Gleichungen (3.02) und (3.03)

$$m v \dot{\gamma} = \sigma_0 \beta + \sigma \alpha + \sigma_1 \frac{\dot{\varepsilon}}{v}, \quad (3.02b)$$

$$\Theta \ddot{\varepsilon} = \mu_0 \beta + \mu \alpha + \mu_1 \frac{\dot{\varepsilon}}{v}. \quad (3.03b)$$

Die Beziehung (3.04) gestattet, aus ihnen  $\varepsilon$  zu eliminieren. Trennt man dann die Variablen, so erhält man als Hauptgleichungen für die Bewegung des Fahrzeugs bei Windstille mit konstanter Geschwindigkeit:

$$\frac{\sigma_0}{\Theta m v} \left[ \Theta \ddot{\beta} + (a \sigma_1 - \mu_1) \frac{\dot{\beta}}{v} + (a \sigma - \mu) \beta \right] = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\gamma} - \frac{m \mu_1 - \Theta \sigma}{\Theta m v} \dot{\gamma} + \frac{\mu \sigma_1 - \mu_1 \sigma - m v^2 \mu}{\Theta m v^2} \gamma \right], \quad (I)$$

$$\Theta \ddot{\alpha} + (a \sigma_1 - \mu_1) \frac{\dot{\alpha}}{v} + (a \sigma - \mu) \alpha = -\Theta \dot{\gamma} + (\mu_1 - a \sigma_1 + a m v^2) \frac{\dot{\gamma}}{v}, \quad (IIa)$$

$$\frac{-\sigma_0}{\Theta m v^2} \left[ \Theta v \dot{\beta} - (\mu_1 - a \sigma_1 + a m v^2) \beta \right] = \ddot{\alpha} - \frac{m \mu_1 - \Theta \sigma}{\Theta m v} \dot{\alpha} + \frac{\mu \sigma_1 - \mu_1 \sigma - m v^2 \mu}{\Theta m v^2} \alpha. \quad (IIb)$$

Es lassen sich damit zwei Arten von Fragen beantworten. Entweder sucht man aus Gleichung (I) die Bedingung, welche der Lenkeinschlag  $\beta$  erfüllen muß, damit sich der Fahrzeugschwerpunkt auf einer bestimmten Bahn, d. h. mit gegebenem  $\gamma$  bewegt, wobei das Fahrzeug im allgemeinen gemäß Gleichung (IIa) schwimmt; oder man bestimmt die Bahn und den Schwimmwinkel für einen bestimmten Lenkeinschlag, der auch eine Funktion der Zeit sein kann, aus den Gleichungen (I) und (IIb).

**4. Lenkeinschlag für Kreisbahn.** Als erstes Problem sei die Frage nach dem Lenkeinschlag  $\beta$  behandelt, der bei Windstille notwendig ist, damit sich der Fahrzeugschwerpunkt auf einem Kreis mit dem Halbmesser  $R$  bewegt.

Dies erfordert für den Richtungswinkel

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{R} = \text{konst.}, \quad (4.01)$$

wobei  $R$  positiv zu rechnen ist, wenn der Krümmungsmittelpunkt rechts von der Fahrtrichtung liegt. Führt man diese Bedingung in die Differentialgleichung (I) ein, so erhält man

$$\ddot{\beta} + \frac{1}{v \Theta} (a \sigma_1 - \mu_1) \dot{\beta} + \frac{1}{\Theta} (a \sigma - \mu) \beta = \frac{\mu \sigma_1 - \mu_1 \sigma - m v^2 \mu}{R \Theta \sigma_0} \quad (4.02)$$

als Differentialgleichung für den notwendigen Lenkeinschlag  $\beta$ .

Das vollständige Integral der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$\beta_h = B_1 e^{-\Lambda_1 t} + B_2 e^{-\Lambda_2 t} \quad (4.03)$$

mit  $B_1$  und  $B_2$  als Integrationskonstanten und

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2v\Theta} (a \sigma_1 - \mu_1) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \Theta v^2 (a \sigma - \mu)}{(a \sigma_1 - \mu_1)^2}} \right]. \quad (4.04)$$

Da

$$a \sigma_1 - \mu_1 = G a b \left( \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right) \quad (4.05)$$

positiv ist, verschwindet dieses Integral, das den Einfluß der Anfangsbedingungen auf den notwendigen Lenkeinschlag liefert, mit wachsender Zeit nur, solange

$$a \sigma - \mu = G a \left( \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right) + v^2 (a k_n - k_m) > 0 \quad (4.06)$$

ist. Während der von den Bodenkräften herkommende erste Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen stets positiv ist, können die Luftkräfte für  $k_m > a k_n$  einen mit der Zeit anwachsenden Lenkeinschlag erfordern, sobald die Geschwindigkeit den Wert

$$v_k = \sqrt{\frac{G a \left( \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right)}{k_m - a k_n}} \quad (4.07)$$

überschreitet.

Ist die Bedingung (4.06) erfüllt, so nähert sich mit der Zeit der erforderliche Lenkeinschlag einem von den Anfangsbedingungen unabhängigen, anschließend gegebenen Endwert. Wenn dabei  $k_m < a k_n$  ist, so wird dieser Endwert für Geschwindigkeiten über

$$v_p = \sqrt{-\frac{v_k^2}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{\Theta} (a k_n - k_m)} \right]} \quad (4.08a)$$

in einer periodisch abklingenden Funktion erreicht. Ist aber  $a k_n < k_m < a k_n + \Theta/b^2$ , so ist nur im Geschwindigkeitsbereich zwischen  $v_{p1}$  und  $v_{p2}$  ein periodischer Lenkeinschlag notwendig, wobei

$$v_{p1,2} = \sqrt{\frac{v_k^2}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{\Theta} (k_m - a k_n)} \right]} \quad (4.08b)$$

ist. Ist  $k_m = a k_n$ , so wird die Grenze zwischen aperiodischem und periodischem Lenkeinschlag bei

$$v_p = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{G a}{\Theta} \left( \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right)} \quad (4.08c)$$

erreicht. In allen anderen Fällen, in denen die Bedingung (4.06) erfüllt ist, wird der Endwert aperiodisch erreicht. Er ist durch das partikuläre Integral der vollständigen Gleichung (4.02)

$$\beta_e = \frac{\mu \sigma_1 - \mu_1 \sigma - m v^2 \mu}{R \sigma_0 (a \sigma - \mu)} \quad (4.09)$$

gegeben.

Sieht man von den Luftkräften ab, weil sie klein sind oder infolge der Versuchsanordnung (z. B. laufende Straße) wegfallen, so sind die Werte  $\mu$  und  $\sigma$  in (4.09) durch  $\mu'$  und  $\sigma'$  zu ersetzen, und es wird

$$\beta'_e = \frac{1}{1 - \frac{\sigma'}{\sigma_0}} \left[ \frac{a+b}{R} - \frac{m v^2 \mu'}{R(a+b) \sigma'_0 (\sigma' - \sigma'_0)} \right]. \quad (4.09a)$$

Die vom Widerstand der Vorderräder herrührende Seitenkraft  $V\beta$  ist gegenüber  $\sigma'_0\beta$ , der Seitenkraft durch den Lenkeinschlag, zu vernachlässigen, so daß der Ausdruck vor der Klammer im allgemeinen gleich 1 wird. In dem Sonderfall des an den lenkbaren Vorderrädern angetriebenen Wagens jedoch, für den  $V$  große negative Werte annimmt, wird der unter sonst gleichen Umständen notwendige Lenkeinschlag durch den Antrieb wesentlich verkleinert. Beim Bremsen mit Vierradbremzen, wobei große positive Werte  $V$  auftreten, wird er vergrößert. Außer diesen beiden Fällen gibt der Klammersausdruck den Endwert für den Lenkeinschlag. Wie man leicht nachprüfen kann, ist darin der Nenner des zweiten Ausdrucks stets positiv. Die Gleichung (4.09a) zeigt somit, daß das hinterachslastige Fahrzeug ( $a > b$  und damit  $\mu' > 0$ ) unter Einwirkung der Bodenkräfte allein einen kleineren Lenkeinschlag für eine Bahn mit gegebenem Krümmungsradius benötigt als den aus der geometrischen Kurventheorie folgenden Lenkwinkel  $(a+b)/R$ , während es beim vorderachslastigen umgekehrt ist.

Es ist notwendig, neben dem Lenkwinkel auch den Verlauf des Schwimmwinkels  $\alpha$  zu untersuchen, da dieser stets innerhalb gewisser Grenzen bleiben muß. Führt man

zu diesem Zweck die Bahngleichung (4.01) in die Hauptgleichung (IIa) ein, so erhält man als Differentialgleichung des Schwimmwinkels auf einer Kreisbahn

$$\ddot{\alpha} + \frac{1}{v\Theta} (a\sigma_1 - \mu_1) \dot{\alpha} + \frac{1}{\Theta} (a\sigma - \mu) \alpha = \frac{\mu_1 - a\sigma_1 + amv^2}{R\Theta}. \quad (4.10)$$

Die verkürzte Gleichung stimmt mit der verkürzten Gleichung (4.02) für  $\beta$  überein. Somit wächst  $\alpha$  mit der Zeit über alle Grenzen, wenn  $v > v_k$  wird. Ein solcher Fahrzustand sei als instabil bezeichnet. Für  $k_m < ak_n$  ist ein Fahrzeug, das eine Kreisbahn fährt, wegen des imaginären  $v_k$  unbedingt stabil, für  $k_m > ak_n$  nur bedingt, nämlich für  $v < v_k$ . Im stabilen Fahrzustand strebt  $\alpha$  einem Endwert

$$\alpha_e = \frac{\mu_1 - a\sigma_1 + amv^2}{R(a\sigma - \mu)} \quad (4.11)$$

zu. Da dann  $(a\sigma - \mu)$  nach (4.06) positiv ist, hat dieser Endschwimmwinkel für Geschwindigkeiten, die größer als

$$v_s = \sqrt{gb \left[ \bar{c} - \frac{c'Ga}{2(a+b)} \right]} \quad (4.12)$$

sind, dasselbe Vorzeichen wie  $R$ , andernfalls das umgekehrte. Bei  $v_s$  selbst schwimmt das Fahrzeug im Endzustand nicht. Auch dieser Endwert wird unter denselben Bedingungen wie der Lenkeinschlag entweder in einer gedämpften Schwingung oder aperiodisch erreicht.

**5. Stabilität der Geradeausfahrt.** Nachdem sich in Ziff. 4 gezeigt hat, daß unter bestimmten Bedingungen ein Fahrzeug in der Kurve instabil werden kann, soll nunmehr untersucht werden, wie sich ein Fahrzeug verhält, das bei Windstille mit dem Schwimmwinkel  $\alpha_0 = 0$  und dem Lenkeinschlag  $\beta = 0$  unter dem Richtungswinkel  $\gamma_0 = 0$  geradeausfahrend einen Drehstoß erleidet, so daß unmittelbar nach dem Stoß eine kleine Winkelgeschwindigkeit  $d\epsilon/dt = \dot{\epsilon}_0$  auftritt. Der Fahrer soll nicht gegenlenken, so daß infolge der Störung eine Abweichung von der genauen Geradeausfahrt eintritt. Dieser Fall unterscheidet sich hierin von der in Ziff. 4 behandelten Kreisbogenfahrt mit  $R = \infty$ , bei der die verlangte Bahn durch entsprechenden Lenkeinschlag erzwungen wird. Der Schwimmwinkel  $\alpha$  muß der Hauptgleichung (IIb) mit verschwindender linker Seite

$$0 = \ddot{\alpha} - \frac{m\mu_1 - \Theta\sigma}{\Theta m v} \dot{\alpha} + \frac{\mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu}{\Theta m v^2} \alpha \quad (5.01)$$

genügen. Mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{m\mu_1 - \Theta\sigma}{2\Theta m v} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Theta m (\mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu)}{(m\mu_1 - \Theta\sigma)^2}} \right] \quad (5.02)$$

lautet ihre allgemeine Lösung

$$\alpha = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.03)$$

Die beiden Integrationskonstanten  $A_1$  und  $A_2$  bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen. Die eine,  $\alpha_0 = 0$ , wurde oben bereits erwähnt, eine weitere erhält man aus (3.02b) in Verbindung mit (3.04) zu

$$\dot{\alpha}_0 = \dot{\epsilon}_0 - \dot{\gamma}_0 = \dot{\epsilon}_0 \left( 1 - \frac{\sigma_1}{m v^2} \right). \quad (5.04)$$

Hieraus folgt

$$A_1 = -A_2 = \dot{\epsilon}_0 \frac{m v^2 - \sigma_1}{m v^2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (5.05)$$

und es wird

$$\alpha = \dot{\epsilon}_0 \frac{m v^2 - \sigma_1}{m v^2 (\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (5.03a)$$

Da in (5.02) der Ausdruck vor der eckigen Klammer wegen  $\mu_1 < 0$  stets negativ ist, verschwindet der durch den angenommenen Drehstoß bedingte Schwimmwinkel mit der Zeit, sofern

$$f_s = \mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu \quad (5.06)$$



positiv ist, während bei negativem  $f_s$  einer der beiden Werte  $\lambda$  immer positiv ist und somit  $\alpha$  über alle Grenzen wächst. Ersetzt man in (5.06)  $\mu$  und  $\sigma$  durch ihre Werte aus (3.08) und (3.09), so kann man nach Einführung der Abkürzungen

$$f_0 = \frac{[(k_m + m)\mu' + k_n \mu_1]^2 - 4 k_m m (\mu'^2 + \mu_1 \sigma')}{4 k_m m}, \tag{5.07}$$

$$v_0^2 = - \frac{(k_m + m)\mu' + k_n \mu_1}{2 k_m m} \tag{5.08}$$

$f_s$  in die Form

$$f_s - f_0 = - k_m m (v^2 - v_0^2)^2 \tag{5.06a}$$

bringen. Die Funktionen  $f_s(v^2)$  sind im allgemeinen Parabeln mit zur  $f_s$ -Achse parallelen Achsen. Sie gehen auf der Ordinatenachse alle durch den Punkt mit der positiven Ordinate

$$\mu' \sigma_1 - \mu_1 \sigma' = G^2 a b \left[ \bar{c} - \frac{c' G a}{2(a+b)} \right] \left[ \bar{c} - \frac{c' G b}{2(a+b)} \right] \tag{5.09}$$

und sind für  $k_m > 0$  nach unten, für  $k_m < 0$  nach oben offen. Für  $k_m = 0$  artet  $f_s$  in eine Gerade aus, welche die  $v^2$ -Achse im Punkt

$$v_g^2 = \frac{\mu' \sigma_1 - \mu_1 \sigma'}{k_n \mu_1 + m \mu'} \tag{5.10}$$

schneidet. Dieser Punkt liegt für

$$\mu' > -\mu_1 \frac{k_n}{m} \equiv \mu'_v \tag{5.11}$$

auf der positiven, andernfalls auf der negativen Seite dieser Achse.

Die oben eingeführten Werte  $f_0$  und  $v_0^2$  sind die Koordinaten des Scheitels der Parabel. Je nach den Kenngrößen des Wagens nimmt somit die Stabilitätsfunktion

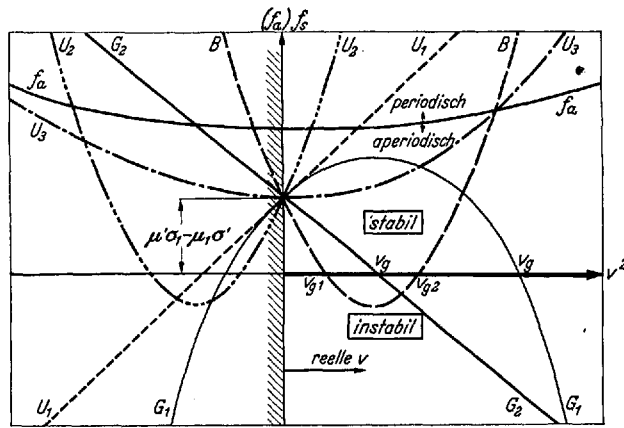


Abb. 5. Formen der Stabilitätsfunktion  $f_s(v^2)$ .

eine der in Abb. 5 skizzierten Formen an. Danach können die Fahrzeuge hinsichtlich ihrer Stabilität in folgende Gruppen eingeteilt werden:

1. Unbedingt stabile Fahrzeuge (Gruppe U). Die Größe  $f_s$  ist entweder stets positiv (Form  $U_3$  unter den Bedingungen  $k_m < 0, f_0 > 0$ ) oder wird erst bei negativen  $v^2$ , d. h. nicht reellen Geschwindigkeiten, negativ (Form  $U_1$  unter den Bedingungen  $k_m = 0, \mu' < \mu'_v$  oder Form  $U_2$  unter den Bedingungen  $k_m < 0, f_0 < 0, v_0^2 < 0$ ).

2. Bedingt stabile Fahrzeuge mit Grenzgeschwindigkeit (Gruppe G). Die Größe  $f_s$  wird oberhalb einer Grenzgeschwindigkeit  $v_g$  negativ (Form  $G_1$  unter der Bedingung  $k_m > 0$  oder Form  $G_2$  unter den Bedingungen  $k_m = 0, \mu' > \mu'_v$ ).

3. Bedingt stabile Fahrzeuge mit Instabilitätsbereich (Gruppe B). Es gibt einen Geschwindigkeitsbereich von  $v_{g1}$  bis  $v_{g2}$ , in dem das Fahrzeug instabil ist, für andere Geschwindigkeiten ist es stabil (Form B unter den Bedingungen  $k_m < 0, f_0 < 0, v_0^2 > 0$ ).

Die Geschwindigkeit  $v_g$ , bei der die Stabilität der bedingt stabilen Fahrzeuge wechselt, erhält man aus  $f_s = 0$  zu

$$v_g^2 = v_0^2 \pm \sqrt{\frac{f_0}{k_m m}} = \frac{1}{2 k_m m} \left[ - (k_m + m)\mu' - k_n \mu_1 \pm \sqrt{[(k_m + m)\mu' + k_n \mu_1]^2 - 4 k_m m (\mu'^2 + \mu_1 \sigma')} \right]. \tag{5.12}$$

Während nach obiger Zusammenstellung  $k_m > 0$  stets die Form  $G_1$  zur Folge hat und  $k_m = 0$  bereits erörtert ist, erfordert der Fall  $k_m < 0$  eine genauere Untersuchung

der Werte  $f_0$  und  $v_0^2$  in ihrer Abhängigkeit von  $k_m$  und  $\mu'$ . Die Funktion  $f_0$  trennt die Form  $U_3$  mit  $f_0 > 0$  von den Formen  $U_2$  und  $B$  mit  $f_0 < 0$ . Die Funktionen  $f_0(k_m)$  stellen Hyperbeln dar, deren einer Ast in Abb. 6a dargestellt ist. Da der Zähler  $f_0$  für  $k_m=0$  und für  $k_m=\pm\infty$  bei nicht verschwindendem  $\mu'$  positiv ist, kann  $f_0$  selbst für negative  $k_m$  nur in einem Bereich positiv werden, dessen Grenzen die Werte

$$k_{m0,u} = \frac{1}{\mu'^2} (m \mu'^2 + 2 m \mu_1 \sigma' - k_n \mu' \mu_1) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\mu'^2 (m \mu' + k_n \mu_1)^2}{(m \mu'^2 + 2 m \mu_1 \sigma' - k_n \mu' \mu_1)^2}} \right] \quad (5.13)$$

sind. Als Nebenbedingung für die Realität dieses Bereiches positiver  $f_0$  muß

$$\mu' < \frac{m \sigma'}{k_n} \equiv \mu'_j \quad (5.14)$$

sein.

Für  $\mu' = 0$  reduziert sich  $f_0$  auf

$$f_0 = \frac{\mu_1^2 k_n^2}{4 k_m m} - \mu_1 \sigma', \quad (5.07 a)$$

eine Hyperbel, welche die Abszisse bei dem negativen Wert

$$k_{m0} = k_{mu} = \frac{k_n^2 \mu_1}{4 m \sigma'} \quad (5.13 a)$$

schnidet und die Ordinatenachse sowie die Gerade  $f_0 = -\mu_1 \sigma'$  zu Asymptoten hat.

Ist  $f_0 < 0$  und voraussetzungs-gemäß  $k_m < 0$ , so entscheidet das Vorzeichen von  $v_0^2$  über die Form der Stabilitätsfunktion.

Die Funktionen  $v_0^2(k_m)$  sind ebenfalls Hyperbeln (Abb. 6b) und wechseln das Vorzeichen von  $v_0^2$  bei

$$k_{mv} = - \frac{k_n \mu_1 + m \mu'}{\mu'}. \quad (5.15)$$

Für  $0 < \mu' < \mu'_j$  wird dieser Wert positiv.

Asymptoten für  $v_0^2(k_m)$  sind die Ordinatenachse und eine Parallele zur Abszisse mit der Ordinate  $v_\infty^2 = -\mu'/2m$ . Damit folgen die in Abb. 6b eingezeichneten Mög-lichkeiten für den Verlauf von  $v_0^2(k_m)$ . Dabei ist noch wesentlich zu wissen, daß für  $\mu' < \mu'_j$  ein negatives  $k_{mv}$  stets zwischen  $k_{m0}$  und  $k_{mu}$  liegt. Setzt man nämlich

$$k_{m0,u} = k_{mv} + \varkappa \quad (5.16)$$

in die Bedingung ein, daß  $f_0$  verschwindet, so erhält man

$$\varkappa = \frac{2m}{\mu'^2} (\mu_1 \sigma' - \mu' \sigma_1) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k_{mv} \mu'^2}{m (\mu' \sigma_1 - \mu_1 \sigma')}} \right]. \quad (5.17)$$

Die Wurzel ist jedoch unter den obigen Voraussetzungen größer als 1. Deshalb wird ein Wert  $\varkappa$  positiv, einer negativ.

Die Abb. 6a und 6b ordnen eindeutig den Kenngrößen des Fahrzeugs die Form der Stabilitätsfunktion zu. Das Ergebnis ist in folgender Tabelle zusammengestellt. Ob zuerst die Grenzbedingung  $\mu'_j$  für  $f_0$  oder  $\mu'_v$  für  $v_0^2$  erreicht wird, hängt von  $k_n$  ab.

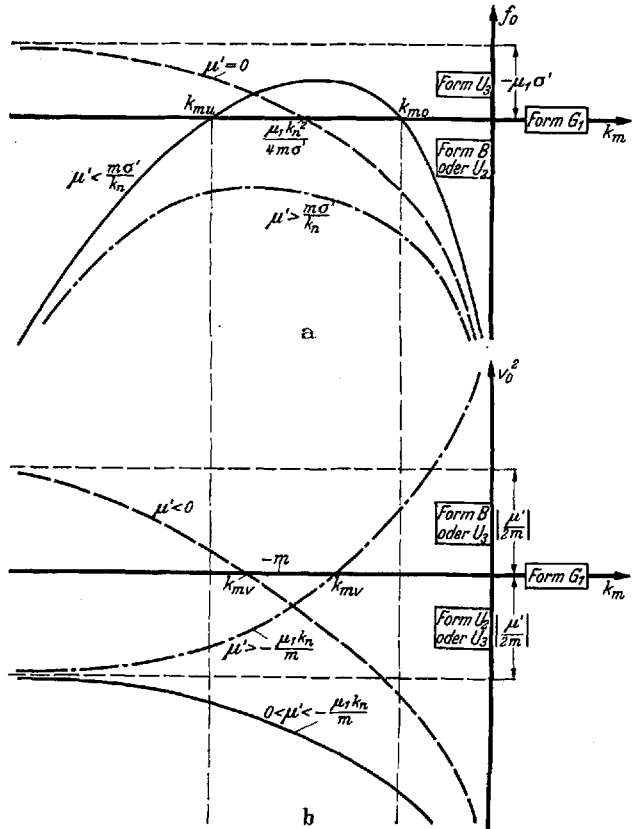


Abb. 6a u. b. Abhängigkeit der Scheitelkoordinaten  $f_0$  und  $v_0^2$  der Stabilitätsfunktion von  $k_m$  und  $\mu'$ .

Gleichzeitig werden beide für

$$k_{ng} \equiv m \sqrt{\frac{\sigma'}{-\mu_1}} = m \sqrt{\frac{\bar{c} - \frac{c'G(a^2 + b^2)}{2(a+b)^2}}{ab \left[ \bar{c} - \frac{c'Gab}{(a+b)^2} \right]}} \quad (5.18)$$

erreicht. Ist  $k_n \geq k_{ng}$ , so ist auch  $\mu'_v \geq \mu'_f$ .

Abhängigkeit der Form der Stabilitätsfunktion  $f_s$  von  $k_m$  und  $\mu'$ .

$k_m \backslash \mu'$	< 0	= 0	> 0			
			< $-\mu_1 k_n/m$		> $-\mu_1 k_n/m$	
			< $m \sigma'/k_n$	> $m \sigma'/k_n$ <sup>1)</sup>	< $m \sigma'/k_n$ <sup>2)</sup>	> $m \sigma'/k_n$
$+\infty \dots 0$	$G_1$	$G_1$	$G_1$	$G_1$	$G_1$	$G_1$
0	$U_1$	$U_1$	$U_1$	$U_1$	$G_2$	$G_2$
$0 \dots k_{m0}$	$U_2$	$U_2$	$U_2$	$U_2$	$B$	$B$
$k_{m0} \dots k_{mv}$	$U_3$	- <sup>3)</sup>	$U_3$	$U_2$	$U_3$	$B$
$k_{mv} \dots k_{mu}$	$U_3$	- <sup>3)</sup>	$U_3$	$U_2$	$U_3$	$U_2$
$k_{mu} \dots -\infty$	$B$	$U_3$	$U_2$	$U_2$	$U_2$	$U_2$

Die Verteilung der oben definierten drei Gruppen in der Tafel läßt sich physikalisch folgendermaßen begründen. Versucht das Luftmoment den Schwimmwinkel zu vergrößern ( $k_m > 0$ ), so wird es auf alle Fälle einmal so groß, daß es den Wagen instabil macht, da es mit  $v^2$  wächst. Der von Luftmomenten um den Schwerpunkt freie Wagen ( $k_m = 0$ ) ist als vorderachslastiger Wagen ( $\mu' < 0$ ) stabil, als hinterachslastiger ( $\mu' > 0$ ) nur bedingt stabil, da die Bodenkräfte ihn bei großen  $\mu'$  herausdrehen. Große Werte  $\mu'$  können auch ein Fahrzeug mit rückdrehendem Luftmoment ( $k_m < 0$ ) instabil machen, allerdings nur in einem gewissen Bereich, da bei großen Geschwindigkeiten schließlich das zurückdrehende Luftmoment überwiegt. Unerwartet ist das Auftreten eines solchen bedingt stabilen Zustandes mit Instabilitätsbereich am linken unteren Ende der Tabelle. Er entsteht dadurch, daß die durch die Nichtproportionalität der Seitenkraft mit dem Raddruck bei einer Drehung des Wagens um die Schwerhochachse entstehende Seitenkraft  $\frac{\sigma_1}{v} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\mu'}{v} \frac{d\varepsilon}{dt}$  die Bahn des Schwerpunktes so stark krümmt, daß die Wagenachse der Bahntangente nicht mehr zu folgen vermag.

Stellt man fest, daß ein gegebener Wagen nur bedingt stabil ist, so muß man die für ihn zulässige Höchstgeschwindigkeit aus (5.12) berechnen, wobei für einen Wagen mit Instabilitätsbereich das negative Vorzeichen vor der Wurzel, das den Wert  $v_{g1}$  in Abb. 5 liefert, maßgebend ist.

Im stabilen Zustand klingt eine Störung am schnellsten im aperiodischen Grenzfall ab. Dieser tritt für

$$f_a = \frac{(\Theta \sigma - m \mu_1)^2}{4 \Theta m} = f_s \quad (5.19)$$

ein. Man kann leicht zeigen, daß auch  $f_a$  biquadratisch in  $v$  ist und bei  $v^2 = 0$  um den positiven Betrag

$$\frac{1}{4 \Theta m} (\Theta \sigma' + m \mu_1)^2 + \mu'^2$$

größer als  $f_s$  ist. Damit ist es ausgeschlossen, ein Fahrzeug so zu bauen, daß für alle Geschwindigkeiten  $f_s = f_a$  ist. Man sollte diese Bedingung aber bei der Normal-

<sup>1)</sup> Tritt nur auf, wenn  $k_n > k_{ng}$  nach Gleichung (5.18).

<sup>2)</sup> Tritt nur auf, wenn  $k_n < k_{ng}$  nach Gleichung (5.18).

<sup>3)</sup>  $k_{m0} = k_{mu}$ , s. Gleichung (5.13a).

geschwindigkeit möglichst erfüllen. In Abb. 5 ist deshalb auch  $f_a$  mit eingetragen. Im Grenzfall sehr großer Geschwindigkeiten führt die Forderung  $f_a = f_s$  auf die Bedingung

$$\frac{\Theta k_n^2}{4 m^2} = -k_m. \tag{5.20}$$

Nachdem das Verhalten des Schwimmwinkels bei einer Störung untersucht ist, tritt die Frage auf, welche Bahn der Fahrzeugschwerpunkt in einem solchen Fall beschreibt, insbesondere ob das Fahrzeug durch die Störung aus seiner ursprünglichen Fahrtrichtung herausgebracht wird, die mit  $\gamma_0 = 0$  angenommen worden war. Setzt man in der Hauptgleichung (I)  $\beta = 0$ , so erhält man

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \dot{\gamma} - \frac{m \mu_1 - \Theta \sigma}{\Theta m v} \dot{\gamma} + \frac{\mu \sigma_1 - \mu_1 \sigma - m v^2 \mu}{\Theta m v^2} \gamma \right). \tag{5.21}$$

Der Ausdruck in der Klammer stimmt mit der rechten Seite der Gleichung (5.01) für den Schwimmwinkel überein. Die Lösung lautet also

$$\gamma = C_0 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5.22}$$

Die drei Integrationskonstanten  $C_v$  bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen, von denen die erste,  $\gamma_0 = 0$ , bereits erwähnt wurde. Die beiden anderen folgen aus (3.02b) und (3.03b), wonach mit einem bestimmten  $\dot{\epsilon}_0$  bei  $\alpha_0 = 0$  für  $\gamma$  Anfangsstörungen von der Größe

$$\dot{\gamma}_0 = \dot{\epsilon}_0 \frac{\sigma_1}{m v^2} \tag{5.23}$$

und

$$\ddot{\gamma}_0 = \dot{\epsilon}_0 \frac{\mu_1}{\Theta v} - \ddot{\alpha}_0 = \dot{\epsilon}_0 \left[ \frac{\mu_1}{\Theta v} - \left( 1 - \frac{\sigma_1}{m v^2} \right) (\lambda_1 + \lambda_2) \right] \tag{5.24}$$

verbunden sind. Man erhält so

$$C_0 = \dot{\epsilon}_0 \frac{\Theta v \sigma}{f_s}, \tag{5.25}$$

während die Werte für  $C_1$  und  $C_2$  unwesentlich sind, da im stabilen Zustand dieser Teil der Lösung mit der Zeit verschwindet.

Aus (5.25) folgt, daß das Fahrzeug durch einen Stoß, der eine Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_0$  hervorruft, auch stets aus seiner ursprünglichen Fahrtrichtung herausgebracht wird. Für  $f_s = 0$  bleibt  $C_0$  nicht mehr endlich; dieser Grenzfall ist also aus diesem Grund dem instabilen Bereich zuzurechnen, womit auch diese oben offen gebliebene Frage erledigt ist.

**6. Zeitlich veränderlicher Lenkeinschlag.** Als Beispiel für die Gruppe von Problemen, bei denen der Lenkeinschlag als Funktion der Zeit gegeben ist und die Bahn des Fahrzeugs gesucht wird, sei die Bewegung bei einem Lenkeinschlag nach Abb. 7 untersucht. Der Lenkvorgang beginnt zur Zeit  $t = 0$ , zu der das Fahrzeug unter dem Richtungswinkel  $\gamma_0 = 0$  störungsfrei ( $\alpha_0 = 0$  und  $\dot{\epsilon}_0 = 0$ ) läuft, mit dem Einschlag und der Lenkgeschwindigkeit Null und endet mit den gleichen Werten zur Zeit  $T$ , nachdem zur Zeit  $\frac{1}{2} T$  der größte Einschlag  $\beta_m$  erreicht wurde. Eine einfache Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, ist mit  $\omega = 2\pi/T$

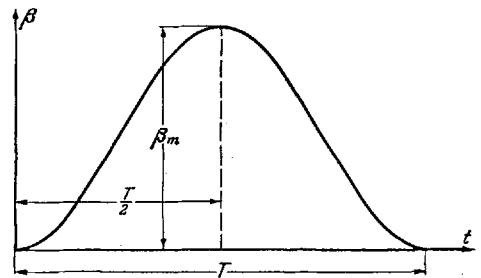


Abb. 7. Angenommener Verlauf des Lenkeinschlages  $\beta$  mit der Zeit  $t$ .

$$\beta = \frac{\beta_m}{2} (1 - \cos \omega t). \tag{6.01}$$

Führt man sie mit ihren Ableitungen in die Hauptgleichungen (I) und (IIb) ein, so lauten mit den Abkürzungen

$$a_0 = \frac{\beta_m \sigma_0 (\mu_1 - a \sigma_1 + a m v^2)}{2 \Theta m v^2 \lambda_1 \lambda_2}, \tag{6.02}$$

$$a_1 = - \frac{\beta_m \sigma_0 [\Theta v \omega^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2) (\mu_1 - a \sigma_1 + a m v^2)]}{2 \Theta m v^2 [\omega^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \omega^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2]}, \tag{6.03}$$

$$a_2 = \frac{\beta_m \sigma_0 \omega [\Theta v (\omega^2 - \lambda_1 \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) (\mu_1 - a \sigma_1 + a m v^2)]}{2 \Theta m v^2 [\omega^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \omega^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2]}, \tag{6.04}$$

$$c = \frac{\beta_m \sigma_0 (a \sigma - \mu)}{2 \Theta m v \lambda_1 \lambda_2}, \tag{6.05}$$

$$c_1 = \frac{\beta_m \sigma_0 [\Theta v \omega^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2) (\mu_1 - a \sigma_1) + v (\lambda_1 + \lambda_2) (\mu - a \sigma)]}{2 \Theta m v^2 [\omega^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \omega^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2]}, \tag{6.06}$$

$$c_2 = \frac{\beta_m \sigma_0 [\Theta v \omega^2 (\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2) + \omega^2 (\lambda_1 + \lambda_2) (a \sigma_1 - \mu_1) + v (\omega^2 - \lambda_1 \lambda_2) (a \sigma - \mu)]}{2 \Theta m v^2 \omega [\omega^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \omega^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2]} \tag{6.07}$$

die vollständigen Lösungen dieser Gleichungen

$$\alpha = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t \tag{6.08}$$

und

$$\gamma = C_0 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + c t. \tag{6.09}$$

Von den fünf Integrationskonstanten  $A$ , und  $C$ , sind drei voneinander unabhängig. Sie bestimmen sich aus den drei Anfangswerten  $\alpha_0$ ,  $\gamma_0$  und  $\dot{\epsilon}_0$ , die beim störungsfreien Einlauf in den Bogen, wie oben angegeben, verschwinden. In diesem Fall wird auch  $\gamma_0$  nach (3.02b) sowie  $\dot{\epsilon}_0$  nach (3.03b) zu Null und somit auch wegen der Hauptgleichung (IIb) und (3.04)  $\ddot{\gamma}_0 = -\ddot{\alpha}_0 = 0$ . Hiermit erhält man

$$A_1 = \frac{\omega a_2 - \lambda_2 (a_0 + a_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{6.10}$$

$$A_2 = \frac{\omega a_2 - \lambda_1 (a_0 + a_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{6.11}$$

$$C_0 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} [c_1 (\omega^2 - \lambda_1 \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) (c + \omega c_2)], \tag{6.12}$$

$$C_1 = \frac{\omega^2 c_1 + \lambda_2 (c + \omega c_2)}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \tag{6.13}$$

$$C_2 = \frac{\omega^2 c_1 + \lambda_1 (c + \omega c_2)}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}. \tag{6.14}$$

Damit läuft nach Beendigung des Lenkvorgangs zur Zeit  $T = 2\pi/\omega$  das Fahrzeug in der Richtung

$$\gamma_c = C_0 + C_1 e^{2\pi \frac{\lambda_1}{\omega}} + C_2 e^{2\pi \frac{\lambda_2}{\omega}} + c_1 + 2\pi \frac{c}{\omega} \tag{6.15}$$

mit einem Schwimmwinkel

$$\alpha_c = A_1 e^{2\pi \frac{\lambda_1}{\omega}} + A_2 e^{2\pi \frac{\lambda_2}{\omega}} + a_0 + a_1. \tag{6.16}$$

Der durch die Anfangswerte bedingte Teil der Lösungen entscheidet wieder über die Stabilität des Fahrzustandes, die in Ziff. 5 behandelt wurde. Die Amplitude des durch den Lenkeinschlag bedingten periodischen Anteils des Schwimmwinkels

$$a_m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{\beta_m \sigma_0}{2 \Theta m v^2} \sqrt{\frac{\Theta^2 v^2 \omega^2 + (\mu_1 - a \sigma_1 + a m v^2)^2}{\omega^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \omega^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2}} \tag{6.17}$$

wird unter sonst gleichen Verhältnissen für eine Lenkfrequenz  $\omega_r$ , die man aus  $d a_m / d (\omega^2) = 0$  erhält, ein Höchstwert. Sie für einen gegebenen Wagen zu bestimmen, ist insofern von Bedeutung, als ein periodischer Lenkeinschlag auch durch Spiel in der Lenkung hervorgerufen werden kann.

**7. Fahrt bei mäßigem Seitenwind.** Während in den bisher behandelten Fällen angenommen wurde, daß Windstille herrscht, soll schließlich ein im wesentlichen geradeausfahrendes Fahrzeug — d. h.  $\gamma$  soll klein bleiben — bei mäßigem Seitenwind untersucht werden. Es wird dabei zur Vereinfachung des Problems angenommen, die Windgeschwindigkeit  $w_q$  sei im Verhältnis zur Fahrgeschwindigkeit so klein, daß man

$$v_r \approx v \quad (7.01a)$$

und

$$\tau \approx \alpha + \frac{w_q}{v} \quad (7.01b)$$

setzen darf. Da nur der Gleichgewichtszustand untersucht werden soll, darf man den Lenkeinschlag  $\beta$  konstant setzen und erhält aus (3.02a), (3.03a) und (3.04) als Differentialgleichung für den Fahrtrichtungswinkel

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\gamma} - \frac{m\mu_1 - \Theta\sigma}{\Theta m v} \dot{\gamma} + \frac{\mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu}{\Theta m v^2} \gamma \right) = \frac{(\mu_0\sigma - \mu\sigma_0)\beta + (k_m\sigma - k_n\mu)v w_q}{\Theta m v}. \quad (7.02)$$

Sie stimmt auf der linken Seite mit der in Ziff. 5 untersuchten überein. Neu hinzu kommt also zu der durch etwaige Anfangsstörungen bedingten Lösung als Einfluß des Seitenwindes auf die Fahrtrichtung

$$\gamma_w = \frac{(\mu_0\sigma - \mu\sigma_0)\beta + (k_m\sigma - k_n\mu)v w_q}{\mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu} v t. \quad (7.03)$$

Soll die Fahrgeschwindigkeit ihre Richtung beibehalten, so muß dieser Ausdruck verschwinden. Dies erfordert einen Lenkeinschlag

$$\beta_w = v w_q \frac{k_m\sigma' - k_n\mu'}{\mu\sigma_0 - \mu_0\sigma}. \quad (7.04)$$

Als Bedingung dafür, daß ein Wagen gegen Seitenwind unempfindlich ist, also keinen zusätzlichen Lenkeinschlag  $\beta_w$  benötigt, um in seiner Fahrtrichtung zu bleiben, folgt somit

$$\frac{k_m}{k_n} = \frac{\mu'}{\sigma'} = \frac{c' G a b (a - b)}{2 \bar{c} (a + b)^2 - c' G (a^2 + b^2)}. \quad (7.05)$$

Ist die Bedingung (7.05) nicht erfüllt, so muß man je nach den Kenngrößen des Wagens bei Seitenwind entweder dem Wind entgegenlenken ( $\beta_w/w_q < 0$ ) oder das Fahrzeug dreht sich so stark in den Wind, daß man es durch einen Lenkeinschlag in Richtung der Windgeschwindigkeit ( $\beta_w/w_q > 0$ ) in seiner Fahrtrichtung halten muß.

Außerdem tritt bei Seitenwind ein Schwimmwinkel auf, welcher der Differentialgleichung

$$\ddot{\alpha} - \frac{m\mu_1 - \Theta\sigma}{\Theta m v} \dot{\alpha} + \frac{\mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu}{\Theta m v^2} \alpha = \frac{[\mu_1\sigma_0 + \mu_0(m v^2 - \sigma_1)]\beta + [k_n\mu_1 + k_m(m v^2 - \sigma_1)]v w_q}{\Theta m v^2} \quad (7.6)$$

gehört. Der Ausdruck auf der rechten Seite zeigt, daß sich das Fahrzeug nach Abklingen etwaiger Störungen auf einen Endschwimmwinkel

$$\alpha_w = \frac{[\mu_1\sigma_0 + \mu_0(m v^2 - \sigma_1)]\beta + [k_n\mu_1 + k_m(m v^2 - \sigma_1)]v w_q}{\mu\sigma_1 - \mu_1\sigma - m v^2 \mu} \quad (7.07)$$

einstellt.

**8. Zusammenfassung.** Auf Grund der Erkenntnis, daß ein gummibereiftes Rad nur dann Seitenkräfte aufnehmen kann, wenn es schräg zur Fahrtrichtung läuft, und daß diese Seitenkräfte dem Raddruck nicht proportional sind, wurde das Verhalten eines mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Kraftfahrzeugs unter Beschränkung auf kleine Schräglaufwinkel untersucht. Es wurden die Gleichungen und je ein Beispiel für die beiden Hauptprobleme angegeben, entweder den für eine gegebene Bahn notwendigen Lenkeinschlag oder die mit einem gegebenen Lenkeinschlag sich ergebende Bahn zu bestimmen. Dabei zeigte sich, daß der Schwimmwinkel des Fahrzeugs nicht

in allen Fahrzuständen klein bleibt, sondern unter gewissen Bedingungen, die erörtert wurden, mit der Zeit über alle Grenzen wächst. Diese Stabilitätsbedingungen unterscheiden sich je nachdem, ob man eine bestimmte Schwerpunktsbahn durch genau bestimmte Lenkbewegungen erzwingt, welche die Rückwirkungen des Schwimmens auf die Schwerpunktsbahn in jedem Augenblick ausgleichen, oder ob man von einem beliebigen Lenkeinschlag ausgeht, wobei die Schwerpunktsbahn durch die Schwimmbewegungen des Fahrzeugs gestört wird, die ihrerseits wieder auf äußere oder Einlaufstörungen zurückzuführen sind. Praktisch sind die Stabilitätsbedingungen dieser zweiten Art von größerer Bedeutung, da man nicht voraussetzen darf, daß der Fahrer jeweils genau der ersten Bedingung entsprechend lenkt.

Schließlich wurde noch berechnet, wie man einem mäßigen Seitenwind entgegensteuern muß, und unter welcher Bedingung das Fahrzeug dagegen unempfindlich ist.

(Eingegangen am 18. Dezember 1939.)

## Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke.

Von K. Federhofer in Graz.

**1. Einleitung.** Das Problem des Knickens von Kreisplatten, die am Außenrande durch einen gleichmäßigen Druck belastet sind, ist für die Platten gleichbleibender Dicke schon vollständig gelöst<sup>1</sup>, und es bietet die Berechnung der Knicklasten für die Vollscheibe bei verschiedenen Lagerungsbedingungen des Außenrandes keine Schwierigkeiten. Nicht so einfach ist aber die Untersuchung des Knickens der Kreisringplatte, die von **E. Meißner**<sup>2</sup> mit Beschränkung auf rotationssymmetrische Knickformen exakt erledigt werden konnte. Die Schwierigkeiten wachsen weiter an, wenn die Voraussetzung gleichbleibender Plattendicke nicht mehr zugelassen wird. In einer kürzlich erschienenen Arbeit von **Fr. A. Willers**<sup>3</sup> sind die Beullasten der einmal abgestuften Kreisplatte (ohne Innenbohrung) bei rotationssymmetrischer Beulfläche und eingespanntem, sowie drehbar gelagertem Plattenrande exakt berechnet worden durch Lösung der transzendenten Knickgleichung. Die Knickung der Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Biegesteifigkeit behandelte **R. Gran Olsson**<sup>4</sup> und gelangt hierbei für verschiedene Lagerungen des Innen- und Außenrandes zu zum Teil sehr einfachen Knickbedingungen. Da aber, wie im weiteren gezeigt werden wird, die dort aufgestellte Differentialgleichung des Problems nicht vollständig ist, so können die Ergebnisse dieser Arbeit nicht als strenge Lösung des Problems gelten. In der Grundgleichung von **Gran Olsson** bleibt die Tatsache unberücksichtigt, daß bei einer am Außenrande radial gedrückten Kreisringplatte die Druckkräfte sich nicht mit konstanter Größe nach dem Inneren der Ringplatte fortpflanzen, wo sie für den Fall eines freien Innenrandes verschwinden müssen. Der gleiche Einwand ist übrigens auch gegen eine frühere Arbeit des gleichen Verfassers<sup>5</sup> zu erheben, die sich mit der axialsymmetrischen Knickung von Kreisringplatten konstanter Dicke beschäftigt. Ein Vergleich mit der vorangeführten Untersuchung von **E. Meißner**, die in einem bei der Korrektur gemachten Zusatz von **Gran Olsson** selbst angeführt wird, läßt erkennen, daß die von ihm benutzte Grundgleichung auf die Veränderlichkeit der

<sup>1</sup> A. Nádai, Z. VDI 59 (1915) S. 169; Elastische Platten, S. 249, Berlin 1925.

<sup>2</sup> E. Meißner, Schweiz. Bauztg. 101 (1933) S. 87.

<sup>3</sup> Fr. A. Willers, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 206.

<sup>4</sup> R. Gran Olsson, Ing.-Arch. 9 (1938) S. 205.

<sup>5</sup> R. Gran Olsson, Ing.-Arch. 8 (1937) S. 449.