Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali - Anno 16°, Fascicolo 1°

ASPETTI DINAMICI DI LEGGI FINANZIARIE SCINDIBILI

MICHELE MULAZZANI
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Versione definitiva pervenuta il 14/12/93

Vengono studiate le proprietà delle intensità istantanee di interesse di leggi finanziarie scindibili non necessariamente omogenee $f(x,s,t)$. Esse risultano dipendenti dal montante e dal tempo finale secondo il modello $\bar{\rho}(f(x,s,t),t)$. Ciò porta ad ottenere una naturale corrispondenza fra leggi finanziarie scindibili ed equazioni differenziali ordinarie. Si esaminano in dettaglio i casi particolari di leggi uniformi, leggi omogenee e leggi uniformi-omogenee, individuando la forma delle equazioni differenziali ad esse associate. Si estendono infine i risultati a leggi finanziarie del tipo $g(x,\bar{t},s,t)$, che dipendono anche dalla variabile istante decisionale $\bar{t}$.

1. Introduzione

Lo studio delle leggi finanziarie "alla Cantelli" (si veda [9] per una esauriente carrellata sull'argomento) è stato condotto per lungo tempo nell'ipotesi di omogeneità e cioè di proporzionalità fra montante e capitale. In questa ottica la descrizione delle leggi finanziarie avviene mediante funzioni positive a due variabili $\phi(s,t)$. Sotto opportune ipotesi di regolarità della ϕ, si definisce la funzione intensità istantanea di interesse $\rho(s,t)$ mediante la

$$\rho(s,t) = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)}{\phi(s,t)}, \tag{1}$$

che può essere facilmente invertita nella

$$\phi(s,t) = \exp\left(\int_s^t \rho(s,u)du\right). \tag{2}$$

La proprietà di scindibilità è tradotta dalla cosiddetta equazione di Cantelli

$$\phi(s,v)\phi(v,t) = \phi(s,t), \quad \forall s,v,t. \tag{3}$$

Derivando la (3) si ottiene la nota condizione necessaria e sufficiente di scindibilità ([6]):

$$\rho(s,t) = \rho(v,t), \quad \forall s,v,t, \tag{4}$$

che indica come l'intensità istantanea di interesse di leggi scindibili sia indipendente dalla data d'impiego del capitale. Ciò equivale all'esistenza di una funzione $\tilde{\rho}$ tale che $\rho(s,t) = \tilde{\rho}(t)$; per cui la (1) diventa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t) = \phi(s,t)\tilde{\rho}(t) \tag{5}$$

che è di immediata integrazione. In definitiva, ogni legge finanziaria scindibile "regolare" ϕ può dedursi, tramite la (5), da una opportuna funzione $\tilde{\rho}$. Viceversa, ogni funzione $\tilde{\rho}$ integrabile genera, mediante detta relazione, una legge finanziaria scindibile.

In tempi più recenti è stato affrontato lo studio delle leggi finanziarie svincolate dall'ipotesi di omogeneità ([8], [10], [11], [12], [13], [14], [15]), utilizzando a tal scopo funzioni $f(x,s,t)$ dipendenti anche dal capitale x. I citati lavori vertono sostanzialmente sulla ricerca delle funzioni f soddisfacenti ad un sistema di equazioni funzionali, le quali traducono gli assiomi assunti per definire le leggi finanziarie.

Questa nota è invece rivolta ad aspetti più preminentemente dinamici delle leggi finanziarie non omogenee, che nel prosieguo chiameremo "generali". In particolare si esaminano le proprietà dell'intensità istantanea di interesse $\rho(x,s,t)$ di leggi scindibili, rilevando che essa debba dipendere esplicitamente solo dal montante e dal tempo finale e quindi essere della forma $\rho(x,s,t) = \tilde{\rho}(f(x,s,t),t)$. Ciò permette di interpretare ogni legge scindibile (sufficientemente regolare) f come famiglia di soluzioni, al variare del dato iniziale, di una equazione differenziale della forma $U'(t) = F(U(t),t)$. Quest'ultima verrà indicata come "equazione generatrice" della legge f e sarà, di volta in volta, del tipo autonomo, lineare e lineare a coefficienti costanti nei casi particolari di leggi rispettivamente uniformi, omogenee ed uniformi-omogenne. Nel capitolo conclusivo si estendono i risultati alle cosiddette leggi finanziarie "alla Insolera" ([2]) non omogenee, che sono modellate da funzioni del tipo $g(x,\bar{t},s,t)$, ove $\bar{t}$ rappresenta il tempo di riferimento (istante contrattuale) in cui vengono fissate le condizioni finanziarie (vedi [5]).

2. Leggi finanziarie generali

La descrizione assiomatica delle leggi finanziarie adottata in questa prima parte del lavoro riprende, con lievi modifiche, quella proposta da P. Manca in [14]. Nel seguito adotteremo le usuali notazioni $\mathbf{R}^+ = [0,+\infty[$ ed $\mathbf{R}^{++} = \mathbf{R}^+ - \{0\}$.

DEFINIZIONE. Sia $J \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo reale; per *legge finanziaria* su J intendiamo una qualunque funzione $f : \mathbf{R}^+ \times J \times J \to \mathbf{R}^+$ che gode delle seguenti proprietà:

(P1) $x' < x'' \Rightarrow f(x',s,t) < f(x'',s,t), \quad \forall s,t \in J;$

(P2) $f(0,s,t) = 0, \quad \forall s,t \in J;$

(P3) $f(x,t,t) = x, \quad \forall \in \mathbf{R}^+, \quad \forall t \in J.$

La legge f si dice *scindibile* se soddisfa all'equazione funzionale:

$$f(f(x,s,v),v,t) = f(x,s,t), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+, \quad \forall s,v,t \in J. \tag{3'}$$

OSSERVAZIONE 1. L'importo $f(x,s,t)$ rappresenta il valore in t del capitale x disponibile in s. Gli assiomi precedenti, cui la funzione f deve soddisfare, traducono determinate ipotesi sulla struttura del mercato: assenza di costi di transazione (legata alla condizione a scadenza), operatori che agiscono come massimizzatori di profitto (correlata con la proprietà di monotonia rispetto al capitale), impossibilità di effettuare arbitraggi (tradotta dall'equazione di scindibilità). In [14] erano previste anche delle proprietà di monotonia rispetto ai tempi: f crescente rispetto a t e decrescente rispetto ad s. Nella presente analisi si è ritenuto di non considerare tali restrizioni (a proposito di questa scelta si veda [3] e [5], pag. 44); difatti se si fa riferimento per esempio al valore reale del capitale è ragionevole pensare anche ad un suo andamento oscillatorio nel tempo. Si noti peraltro che la non monotonia rispetto ai tempi non violi il principio di non-arbitraggio.

OSSERVAZIONE 2. La funzione f rappresenta sia operazioni di sconto che di capitalizzazione a seconda che $s \geq t$ oppure $s \leq t$. La (3′) per $s = t$ equivale alla proprietà

$$f(x,s,v) = y \Leftrightarrow f(y,v,s) = x,$$

che è detta talvolta "proprietà di simmetria" ([15]). Essa permette di interpretare la f come una legge che regola lo scambio fra importi disponibili in tempi diversi.

Se la funzione f risulta di classe C^1 rispetto alla terza variabile (cioè le funzioni $f(x,s,\cdot)$ sono di classe C^1), è possibile definire la funzione *intensità istantanea di interesse* (che d'ora in poi chiameremo semplicemente "intensità di interesse") ρ : $\mathbf{R}^+ \times J \times J \to \mathbf{R}$ ponendo

$$\rho(x,s,t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial t}(x,s,t)}{f(x,s,t)} & \text{se} \quad x > 0. \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \tag{1'}$$

Tale espressione ha senso in quanto la (P1) assicura che $f(x,s,t) > 0$ quando $x > 0$. Essa è equivalente alla

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,s,t) = f(x,s,t)\rho(x,s,t), \tag{1''}$$

che è integrabile e fornisce il legame inverso della (1′):

$$f(x,s,t) = x\exp(\int_s^t \rho(x,s,u)du). \tag{2'}$$

Nel seguito considereremo, salvo esplicito avviso contrario, solo leggi finanziarie dotate della regolarità indicata sopra, per cui esisterà sempre la funzione intensità di interesse.

La seguente proposizione fornisce una condizione necessaria e sufficiente di scindibilità.

TEOREMA 1. *Sia f una legge finanziaria su J e sia ρ la sua funzione intensità di interesse. Allora f è scindibile se e solo se:*

$$\rho(x,s,t) = \rho(f(x,s,v),v,t), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+, \quad \forall s,v,t \in J. \qquad (4')$$

Dimostrazione. Sia f scindibile e si ponga $\delta(x,s,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s,t)$. Allora $\delta(x,s,t) = \delta(f(x,s,v),v,t)$ poiché

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,s,t+h) - f(x,s,t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(f(x,s,v),v,t+h) - f(f(x,s,v),v,t)}{h}.$$

Se $x > 0$ ottengo l'eguaglianza $\rho\,(x,s,t) = \frac{\delta(x,s,t)}{f(x,s,t)} = \frac{\delta(f(x,s,v),v,t)}{f(f(x,s,v),v,t)} = \rho\,(f(x,s,v),v,t)$. Se invece $x = 0$ allora $f(x,s,t) = 0$ e la (4′) discende immediatamente dalla definizione di ρ. Viceversa supponiamo che valga la (4′). Si fissino arbitrariamente $x \in \mathbf{R}^+, s, v \in J$ e si definiscano $\alpha, \beta : J \to \mathbf{R}^+$ ponendo $\alpha(t) = f(x,s,t)$ e $\beta(t) = f(f(x,s,v),v,t)$. Basterà dimostrare che $\alpha = \beta$. Innanzitutto si ricava $\alpha(v) = \beta(v) = f(x,s,v)$; inoltre dalla (1″) si ottiene $\alpha'(t) = f(x,s,t)\rho(x,s,t) = \alpha(t)\rho(x,s,t)$ e $\beta'(t) = f(f(x,s,v),v,t)\rho(f(x,s,v),v,t) = \beta(t)\rho(x,s,t)$. Per cui, chiamando $\gamma(t) = \rho(x,s,t)$, ho che le funzioni α e β sono entrambe soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \psi'(t) & = \psi(t)\gamma(t) \\ \psi(v) & = f(x,s,v). \end{cases}$ Essendo una equazione differenziale lineare con γ continua, essa ammette soluzione unica su tutto l'intervallo J e quindi $\alpha = \beta$. ∎

OSSERVAZIONE 3. Utilizzando la (2′) l'espressione precedente diventa

$$\rho(x,s,t) = \rho(x \exp(\int_s^v \rho(x,s,u)du),v,t), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+, \quad \forall s,v,t \in J, \qquad (4'')$$

che è l'equivalente della (4) per il caso in esame di leggi finanziarie generali.

COROLLARIO 2. *Siano f e ρ come nel teorema precedente. Allora esiste una funzione $\tilde{\rho} : \mathbf{R}^+ \times J \to \mathbf{R}$ tale che*

$$\rho(x,s,t) = \tilde{\rho}(f(x,s,t),t), \quad \forall (x,s,t) \in \mathbf{R}^+ \times J \times J. \qquad (4''')$$

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{\rho}(z,t) = \rho(z,t,t), \forall z \in \mathbf{R}^+$ e $\forall t \in J$. La tesi deriva immediatamente dalla (4′) ponendo $v = t$. ∎

La (4‴) rappresenta un forte vincolo che restringe notevolmente la classe delle funzioni che possono essere l'intensità di interesse di una legge scindibile. Come si vede la dipendenza dal capitale e dal tempo iniziale non è esplicita, mentre vi è una dipendenza esplicita dal montante e dal tempo finale.

Sia $F : \mathbf{R}^+ \times J \to \mathbf{R}^+$ la funzione $F(z,t) = z\tilde{\rho}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(z,t,t)$. Allora, per (1″) e (4‴), la legge scindibile f soddisfa l'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,s,t) = F(f(x,s,t),t), \quad \forall (x,s,t) \in \mathbf{R}^+ \times J \times J. \qquad (5')$$

Consideriamo ora la famiglia di funzioni $\{U_{x,s} : J \to \mathbf{R}^+ | x \in \mathbf{R}^+, s \in J\}$ definite da $U_{x,s}(t) = f(x,s,t)$. Si ottiene subito $U_{x,s}(s) = f(x,s,s) = x$, per ogni $x \in \mathbf{R}^+$ e per ogni $s \in J$. La (5′) può quindi scriversi come famiglia di problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} U'_{x,s}(t) & = F(U_{x,s}(t),t) \\ U_{x,s}(s) & = x \end{cases}, \qquad (5'')$$

al variare del dato iniziale (s,x) in $J \times \mathbf{R}^+$. La seguente proposizione riassume quanto esposto.

TEOREMA 3. *Sia $f(x,s,t)$ una legge finanziaria scindibile su J. Allora, per ogni $(x,s) \in \mathbf{R}^+ \times J$, la funzione $U_{x,s} : J \to \mathbf{R}^+$ definita dalla $U_{x,s}(t) = f(x,s,t)$ è soluzione del problema di Cauchy: $\begin{cases} \psi'(t) & = F(\psi(t),t) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$, dove $F : \mathbf{R}^+ \times J \to \mathbf{R}$ è la funzione $F(z,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(z,t,t)$.* ∎

Ogni legge finanziaria scindibile f può essere quindi interpretata come famiglia di soluzioni, al variare del dato iniziale, di una opportuna equazione differenziale ordinaria del tipo $\psi'(t) = F(\psi(t),t)$, che chiameremo *equazione generatrice* della legge f. Viceversa, non è detto che ogni equazione di tal tipo possa generare una legge finanziaria scindibile. Una condizione necessaria imposta dal teorema precedente è che essa deve ammettere soluzione su tutto l'intervallo J, qualunque sia il dato iniziale $(s,x) \in J \times \mathbf{R}^+$. La seguente proposizione porge una importante condizione sufficiente.

TEOREMA 4. *Sia $F : \mathbf{R}^+ \times J \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $F(0,t) = 0$, per ogni $t \in J$, e che il problema di Cauchy $\begin{cases} \psi'(t) & = F(\psi(t),t) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$ abbia una unica soluzione $U_{x,s}$ nell'intervallo J, per ogni $(s,x) \in J \times \mathbf{R}^+$. Allora la funzione $f : \mathbf{R}^+ \times J \times J \to \mathbf{R}^+$ definita da $f(x,s,t) = U_{x,s}(t)$ è una legge finanziaria scindibile in J.*

Dimostrazione. Verifichiamo successivamente le proprietà (P1), (P2), (P3) e (3′).

a) Sia $x' < x''$, allora deve essere $U_{x',s}(t) < U_{x'',s}(t) \quad \forall s,t \in J$. Altrimenti, per la continuità delle U, esisterebbe un $w \in J$ tale che $U_{x',s}(w) = U_{x'',s}(w) = y$ ed allora $U_{x',s}$ e $U_{x'',s}$ sarebbero due soluzioni del problema $\begin{cases} \psi'(t) & = F(\psi(t),t) \\ \psi(w) & = y \end{cases}$ che differiscono in s, violando perciò l'ipotesi di unicità della soluzione. Quindi otteniamo la diseguaglianza: $f(x',s,t) = U_{x',s}(t) < U_{x'',s}(t) = f(x'',s,t), \forall s,t \in J$.

b) Essendo $U_{0,s}(t) \equiv 0$ soluzione del problema $\begin{cases} \psi'(t) & = F(\psi(t),t) \\ \psi(s) & = 0 \end{cases}$, abbiamo $f(0,s,t) = U_{0,s}(t) = 0, \forall s,t \in J$.
c) Si ha $f(x,t,t) = U_{x,t}(t) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $\forall t \in J$.
d) Si considerino le funzioni $\psi_1 = U_{x,s}$ e $\psi_2 = U_{U_{x,s}(v),v}$; è $\psi_2(v) = U_{x,s}(v) = \psi_1(v)$ e quindi, per l'unicità delle soluzioni, deve essere $\psi_1 = \psi_2$. Da ciò otteniamo $f(f(x,s,v),v,t) = U_{U_{x,s}(v),v}(t) = \psi_2(t) = \psi_1(t) = U_{x,s}(t) = f(x,s,t)$ e quindi la legge è scindibile. ∎

OSSERVAZIONE 4. Le proprietà richieste dal Teorema 4 alla funzione F non sono molto impegnative, esistendo condizioni sufficienti abbastanza comode. Per esempio (vedi [4]) basta che la F sia continua su $\mathbf{R}^+ \times J$ ed uniformemente Lipschitziana rispetto alla prima variabile su ogni dominio $\mathbf{R}^+ \times [a,b]$, con $[a,b] \subseteq J$. Cioè esiste un $M \in \mathbf{R}$ tale che $|F(Z_1,t) - F(Z_2,t)| \leq M|Z_1 - Z_2|, \forall t \in [a,b]$ e $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbf{R}^+$.

3. Casi particolari

In questo capitolo si studiano i vari casi di leggi uniformi, di leggi omogenee e di leggi uniformi-omogenee; individuando la particolare struttura delle equazioni che le generano.

3.A *Leggi Uniformi*

Se f è una legge finanziaria uniforme su J allora deve essere $f(x,s,t) = f(x,s+h,t+h)$, per ogni h tale che $s+h, t+h \in J$. In tal caso si ha $U_{x,s}(t) = U_{x,s+h}(t+h)$ e, derivando rispetto a t, $U'_{x,s}(t) = U'_{x,s+h}(t+h)$. Per cui $F(U_{x,s}(t),t) = F(U_{x,s+h}(t+h),t+h) = F(U_{x,s}(t),t+h)$ e perciò la F non dipende dal secondo argomento. Potremo quindi scrivere $F(z,t) = G(z)$, dove G è una opportuna funzione su $\mathbf{R}^+$ tale che $G(0) = 0$. Il problema di Cauchy diventa in tal caso $\begin{cases} \psi'(t) & = G(\psi(t)) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$; e quindi è una equazione differenziale autonoma.

Se la G è Lipschitziana il problema ammette soluzione unica su tutto l'intervallo J per ogni valore del dato iniziale, ed essa si può determinare come segue.

Sia $W = \{z \in \mathbf{R}^+ | G(z) = 0\}$, allora W è un chiuso non vuoto di $\mathbf{R}^+$ in quanto G è continua e $0 \in W$. Perciò il suo complementare $A = \mathbf{R}^+ - W$ è un aperto di $\mathbf{R}^{++}$ ed è quindi unione finita o numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti: $A = \bigcup_{k \in K}(V_k)$ con K insieme di indici. Si scelga ora, per ogni $k \in K$, un arbitrario $z_k \in V_k$ (se V_k è limitato possiamo prendere per esempio il suo punto medio). Allora la funzione $H_k : V_k \to \mathbf{R}$ definita da $H_k(s) = \int_{z_k}^{s} \frac{1}{G(\sigma)} d\sigma$ risulta essere strettamente monotona e, per via della Lipschitzianità di G, biunivoca (di fatto è un diffeomorfismo). Ciò premesso, abbiamo che quando $x \in W$ il problema di Cauchy ammette la soluzione banale $\psi(t) = x$, per ogni $t \in J$. Quando invece

$x \notin W$ possiamo scrivere $\int_s^t \frac{\psi'(\tau)}{G(\psi(\tau))} d\tau = t - s$ e, ponendo $\sigma = \psi(t)$, abbiamo $\int_x^{\psi(t)} \frac{1}{G(\sigma)} d\sigma = t - s$. Sia ora $k \in K$ tale che $x \in V_k$; integrando otteniamo subito $H_k(\psi(t)) = H_k(x)+t-s$ e, essendo H_k invertibile, abbiamo la soluzione del problema: $\psi(t) = H_k^{-1}(H_k(x) + t - s)$.

La corrispondente legge finanziaria uniforme scindibile è quindi:

$$f(x,s,t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in W \\ H_k^{-1}(H_k(x) + t - s) & \text{se } x \in V_k \end{cases} \tag{6}$$

Da un risultato contenuto in [7], ove si caratterizzano le funzioni differenziabili che verificano l'equazione della traslazione, si deduce che la (6) rappresenta di fatto la totalità delle leggi scindibili uniformi. La stessa formula di rappresentazione è valida se si sostituisce l'ipotesi di differenziabilità con quella di continuità ([16]); le funzioni H_k risultano essere in tal caso solo degli omeomorfismi.

È da notare che su [13] (pag. 203, [15′]) P. Manca ha ottenuto, per diversa via, una espressione sostanzialmente analoga, ma limitata al caso di un solo indice.

Per quel che riguarda l'intensità di interesse del caso uniforme abbiamo $\rho(x,s,t) = \frac{G(f(x,s,t))}{f(x,s,t)}$ e quindi essa non dipende esplicitamente dal tempo ma solo dal montante.

3.B *Leggi omogenee*

Vediamo ora come la nota caratterizzazione delle leggi omogenee possa ricavarsi come caso particolare della trattazione generale svolta in precedenza.

Se f è una legge finanziaria omogenea allora deve essere $f(x,s,t) = x\phi(s,t)$, per una opportuna funzione $\phi : J \times J \to \mathbf{R}^{++}$. Ovviamente se f è derivabile rispetto a t anche ϕ lo sarà e si ha $\frac{\partial f}{\partial t}(x,s,t) = x\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)$. Per cui, ponendo $\tilde{\rho}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,t)$, si ottiene $F(z,t) = z\tilde{\rho}(t)$. La funzione F risulta quindi essere omogenea di grado uno rispetto alla prima variabile. In tal caso la continuità della funzione $\tilde{\rho}$ in J risulta essere una condizione sufficiente per il rispetto delle ipotesi del Teorema 3.

L'associato problema di Cauchy è $\begin{cases} \psi'(t) & = \tilde{\rho}(t)\psi(t) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$; perciò l'equazione generatrice è lineare. Con una facile integrazione si ottiene la formula risolutiva

$$f(x,s,t) = \psi(t) = x \exp\left(\int_s^t \tilde{\rho}(\tau) d\tau\right). \tag{7}$$

Si osservi come questa formula di rappresentazione valga anche nella ipotesi che f si solo assolutamente continua rispetto alla terza variabile.

L'intensità di interesse risulta $\rho(x,s,t) = \tilde{\rho}(t)$ e quindi, come noto, dipende solo dal tempo finale.

3.C *Leggi uniformi-omogenee*

In tal caso la F deve essere necessariamente indipendente dal tempo ed omogenea di grado uno rispetto al capitale; per cui avremo $F(z,t) = cz$ con $c \in \mathbf{R}$. Il problema di Cauchy diventa in tal caso $\begin{cases} \psi'(t) & = c\psi(t) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$ e cioè una equazione lineare a coefficienti costanti. La corrispondente legge finanziaria scindibile uniforme omogenea è la ben nota

$$f(x,s,t) = x\exp(c(t-s)), \tag{8}$$

che è valida anche in ipotesi molto più deboli sulla f, come per esempio la misurabilità o la locale limitatezza.

La funzione intensità di interesse risulta stavolta costante: $\rho(x,s,t) = c$.

3.D *Riepilogo leggi-equazioni generatrici*

Nei vari casi esaminati abbiamo quindi le seguenti strutture per l'equazione generatrice di leggi finanziari scindibili:

(a) legge generale $\longrightarrow$ equazione generale: $\boxed{\psi' = F(\psi,t)}$;

(b) legge uniforme $\longrightarrow$ equazione autonoma: $\boxed{\psi' = G(\psi)}$;

(c) legge omogenea $\longrightarrow$ equazione lineare: $\boxed{\psi' = \tilde{\rho}(t)\psi}$;

(d) legge unif.-omog. $\longrightarrow$ equazione lineare a coeff. cost.: $\boxed{\psi' = c\psi}$.

ESEMPIO. *È possibile ottenere ampie classi di leggi scindibili dando una particolare struttura alla funzione F, in modo che risulti agevole l'integrazione della equazione differenziale. In particolare consideriamo il caso in F sia separabile rispetto alle variabili: $F(z,t) = G(z)\theta(t)$, con $G(0) = 0$. Allora, se G è Lipschitziana e θ è continua, il relativo problema di Cauchy* $\begin{cases} \psi'(t) & = G(\psi(t))\theta(t) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$ *ammette soluzione unica su tutto l'intervallo J, per ogni valore del dato iniziale; inoltre essa è esprimibile in forma chiusa. Procedendo infatti in maniera del tutto analoga a quanto fatto nella parte dedicata alle leggi uniformi del Capitolo 3, si ottiene la legge scindibile:*

$$f(x,s,t) = \begin{cases} H_k^{-1}(H_k(x) + \int_s^t \theta(\tau)d\tau) & \text{se } x \in V_k \\ x & \text{se } x \in W \end{cases} \tag{9}$$

Tale risultato estende al caso non uniforme, in maniera naturale, la formula (6) di rappresentazione delle leggi uniformi.

4. Estensione a leggi finanziarie "alla Insolera"

I risultati dei precedenti capitoli possono essere estesi alle cosiddette leggi finanziarie "alla Insolera" (vedi [2]), che nel seguito chiameremo I-finanziarie, nelle quali è presente una ulteriore variabile $\bar{t}$. Essa indica un'epoca di riferimento nella quale vengono fissate le condizioni finanziarie, ovviamente per tempi non precedenti. A tal proposito definiamo, per ogni $\bar{t} \in J$, l'insieme $J_{\bar{t}} = \{t \in J | t \geq \bar{t}\}$.

Una legge I-finanziaria su J è quindi una funzione $g : \mathbf{R}^+ \times D \rightarrow \mathbf{R}^+$, dove $D = \{(\bar{t}, s, t) \in J^3 | \bar{t} \leq s, \bar{t} \leq t\}$. Gli assiomi visti al Capitolo 2 diventano in tal caso:

(P1′) $x' < x'' \Rightarrow g(x', \bar{t}, s, t) < g(x'', \bar{t}, s, t), \quad \forall(\bar{t}, s, t) \in D;$

(P2′) $g(0, \bar{t}, s, t) = 0, \quad \forall(\bar{t}, s, t) \in D;$

(P3′) $g(x, \bar{t}, t, t) = x, \quad \forall \bar{t} \in J, \quad \forall t \in J_{\bar{t}}.$

L'ammontare di $g(x, \bar{t}, s, t)$ rappresenta il valore al tempo t, pattuito in $\bar{t}$, di un capitale di importo x disponibile al tempo s. Se poniamo, per ogni $\bar{t} \in J$, $f_{\bar{t}}(x, s, t) = g(x, \bar{t}, s, t)$ otteniamo una legge finanziaria su $J_{\bar{t}}$ secondo la definizione data dal Capitolo 2. Le leggi I-finanziarie possono considerarsi quindi come famiglie di leggi finanziarie "alla Cantelli". La condizione che esprime l'assenza di arbitraggi (ipotesi di coerenza della legge) in $\bar{t}$ diventa la seguente:

$$g(g(x, \bar{t}, \bar{t}, v), \bar{t}, v, t) = g(x, \bar{t}, \bar{t}, t), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+, \quad \forall v, t \geq \bar{t}. \tag{10}$$

Tale equazione, considerata anche in [1], rappresenta l'estensione al caso non omogeneo dell'analoga condizione introdotta per leggi omogenee in [5] e [2]. Quest'ultimo chiama "scindibilità in $\bar{t}$" tale condizione e definisce "scindibile in J" una legge che è scindibile in ogni istante di tempo $\bar{t} \in J$; perciò anche in questa sede manterremo la stessa locuzione:

DEFINIZIONE. Diremo che una legge I-finanziaria g è *scindibile in* $\bar{t}$ se verifica la (10). Diremo poi che è *scindibile in* J se verifica la (10) per ogni $\bar{t} \in J$.

La seguente proposizione estende al caso non omogeneo un risultato ottenuto in [2].

PROPOSIZIONE 5. *Una legge I-finanziaria su J è scindibile in $\bar{t} \in J$ se e solo se*

$$g(g(x, \bar{t}, s, v), \bar{t}, v, t) = g(x, \bar{t}, s, t), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+, \quad \forall s, v, t \geq \bar{t}. \tag{10′}$$

Dimostrazione. Evidentemente la (10′) implica la (10); proviamo ora il viceversa. Sia $h_{s,t}(x) = g(x, \bar{t}, s, t), \forall x \in \mathbf{R}^+$ e $\forall s, t \in J_{\bar{t}}$. La (10), scritta in termini di funzioni h, diventa: $h_{v,t} \circ h_{\bar{t},v} = h_{\bar{t},t}$. Se $t = \bar{t}$ abbiamo, per via della proprietà (P3′), $h_{v,\bar{t}} \circ h_{\bar{t},v} = h_{\bar{t},\bar{t}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^+}$; quindi le $h_{\bar{t},v}$ sono tutte invertibili e $h_{v,\bar{t}} = h^{-1}_{\bar{t},v}$. Per cui si può scrivere $h_{v,t} = h_{\bar{t},t} \circ h^{-1}_{\bar{t},v}$. Otteniamo infine la (10′) nel seguente modo:

$g(g(x,\bar{t},s,v),\bar{t},v,t) = h_{v,t} \circ h_{s,v}(x) = h_{\bar{t},t} \circ h_{\bar{t},v}^{-1} \circ h_{\bar{t},v} \circ h_{\bar{t},s}^{-1}(x) = h_{\bar{t},t} \circ h_{\bar{t},s}^{-1}(x) = h_{s,t}(x) = g(x,\bar{t},s,t)$. ∎

OSSERVAZIONE 5. La (10′) si traduce nella $f_{\bar{t}}(f_{\bar{t}}(x,s,v),v,t) = f_{\bar{t}}(x,s,t)$, per ogni $x \in \mathbf{R}^+$ e per ogni $s,v,t \in J_{\bar{t}}$. Questo prova che una legge I-finanziaria scindibile in $\bar{t}$ equivale ad una legge finanziaria scindibile su $J_{\bar{t}}$, ed una legge I-finanziaria scindibile in J equivale ad una famiglia di leggi finanziarie $f_{\bar{t}}$ scindibili su $J_{\bar{t}}$, al variare di $\bar{t} \in J$. Ciò ci permette di estendere i risultati visti in precedenza.

Ovviamente l'intensità di interesse si definisce con la:

$$\varrho(x,\bar{t},s,t) = \frac{\frac{\partial g}{\partial t}(x,\bar{t},s,t)}{g(x,\bar{t},s,t)}. \tag{11}$$

Poniamo inoltre $\bar{U}_{x,\bar{t},s}(t) = g(x,\bar{t},s,t)$ e $\tilde{D} = \{(\bar{t},t) \in J \times J | \bar{t} \leq t\}$.

I seguenti risultati sono la traduzione alle leggi I-finanziarie scindibili di quanto esposto ai precedenti capitoli.

PROPOSIZIONE 6. *Sia g una legge I-finanziaria scindibile in J; allora:*

(a) *esiste una funzione* $\varrho : \mathbf{R}^+ \times \tilde{D} \to \mathbf{R}$ *tale che*

$$\varrho(x,\bar{t},s,t) = \tilde{\varrho}(g(x,\bar{t},s,t),\bar{t},t), \quad \forall(x,\bar{t},s,t) \in \mathbf{R}^+ \times D;$$

(b) *la funzione* $\bar{U}_{x,\bar{t},s}$ *è soluzione su* $J_{\bar{t}}$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \psi'(t) & = G_{\bar{t}}(\psi(t),t) \\ \psi(s) & = x \end{cases}$$

dove $G_{\bar{t}}(z,t) = \frac{\partial g}{\partial t}(x,\bar{t},t,t)$. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] BECCACECE F., *Sulla scindibilità per leggi di tre variabili*, Studi di Matematica Finanziaria Attuariale, Istituto di Metodi Quantitativi, Università Bocconi, 8, 1991.

[2] CACCIAFESTA F., *Una luce nuova su una vecchia storia: la scindibilità di Cantelli-Insolera e la struttura a termine dei tassi di interesse*, Rivista AMASES, Anno 13, Fascicolo 1-2, 1990, 65-72.

[3] CACCIAFESTA R., *Sul concetto di scindibilità e sul processo di capitalizzazione semplice*, Studi in onore di F. Giaccardi, 1972, 761-780.

[4] CECCONI J. P., STAMPACCHIA G., *Analisi Matematica, 2. Funzioni di più variabili*, Liguori Editore, Napoli, 1983.

[5] DE FELICE M., MORICONI F., *La teoria dell'immunizzazione finanziaria. Modelli e strategie*, Il Mulino, Bologna, 1991.

[6] DELL'AGNOLA C. A., *Intorno alle leggi scindibili di capitalizzazione*, G.I.I.A., 1931, 199-202.

[7] FÖRG-ROB W., *On differentiable solutions of the translation equation*, Selected topics in functional equations, (Graz, 1986) Ber. N.287, 18 pp., Ber. Math.-Statist. Sekt. Forschungsgesellsch. Joanneum, Forschungzentrum Graz, Graz, 1988, 285-296.

[8] GOSIO C., *Sulla subadditività delle leggi finanziarie scomponibili*, G.I.I.A. Anno XLIV, 1981, 25-33.

[9] GUERRAGGIO A., *Le equazioni funzionali nei fondamenti della matematica finanziari*, Rivista AMASES, Anno 9, Fascicolo 1, 1986, 33-52.

[10] LISEI G., *Su un'equazione funzionale collegata alla scindibilità delle leggi finanziarie*, G.I.I.A., Anno XLII, 1979, 19-24.

[11] LISEI G., *Ancora su un'equazione funzionale collegata alla scindibilità delle leggi finanziarie*, G.I.I.A., Anno XLIV, 1981, 1-5.

[12] LISEI G., *On the functional equation* $\phi(x,y,z) = \phi(\phi(x,y,t),t,z)$, Rivista AMASES, Anno 11, Fascicolo 1-2, 1988, 3-9.

[13] MANCA P., *Equazioni funzionali e leggi di interesse finnaziario*, G.I.I.A., Anno XXXII n.2, 1969, 196-205.

[14] MANCA P., *Funzioni di utilità e leggi finanziarie*, G.I.I.A., Anno XLI, 1978, 49-57.

[15] OTTAVIANI M., *Leggi finanziarie scindibili*, G.I.I.A., 1981, 1-9.

[16] SIBIRSKY K. S., *Introduction to topological dynamics*, Leyden, Noordhoff Internat. Publ., 1975.

On dynamical aspects of financial laws

SUMMARY

We study the properties of the interest rates of the so-called "scindibili" financial laws (not necessarily homogeneous) $f(x,s,t)$. They explicity depend on the value of f and t only, according to the form $\tilde{\rho}(f(x,s,t),t)$. This suggests a natural correspondence between such financial laws and ordinary differential equations.

The particular cases of uniform laws, homogeneous laws and uniform-homogeneous laws are examined and the structure of the associated differential equations are obtained.

The previous results are extended to the financial laws of type $g(x,\bar{t},s,t)$ which also depend on a decisional time $\bar{t}$.