

Ein Gegenstück zum Meissnerschen Verfahren der graphischen Analysis.

Von R. Grammel in Stuttgart.

(Ernst Meissner — † 17. März 1939 — zum Gedächtnis.)

1. Einleitung. Im Jahre 1913 hat **E. Meissner** ein sehr geistreiches graphisches Verfahren entwickelt, das zur Differentiation und Integration von Funktionen, zur Integration von Differentialgleichungen, zur Bildung ganzer rationaler Funktionen, zur Fourieranalyse periodischer Funktionen u. a. m. benützt werden kann¹. Dieses Verfahren ist, obwohl mit ihm schöne Erfolge bei der Untersuchung der Resonanz von Schwingungen mit Reibung und bei anderen, praktisch wichtigen Problemen erzielt worden sind, in der technischen Praxis viel weniger bekannt, als es verdienen würde. Vielleicht liegt dies daran, daß das Verfahren von einer etwas ungewohnten Art der Funktionsdarstellung ausgeht: während man sonst Funktionen meistens in der Weise graphisch darstellt, daß man jedem Funktionselement einen Punkt zuordnet, der Funktion also die Linienfolge dieser Punkte, so wird beim Meissnerschen Verfahren jedem Funktionselement eine Gerade zugeordnet, der Funktion also die von diesen Geraden umhüllte Kurve.

Das Verfahren, das ich im folgenden mitteile, geht von einer einfachen (bis jetzt anscheinend unbeachtet gebliebenen) Erkenntnis der Punktgeometrie aus, die das duale Gegenstück der liniengeometrischen Grundlage des Meissnerschen Verfahrens bildet. Im weiteren Verlauf schlägt dann allerdings das folgende Verfahren einen ganz anderen Weg ein als das Meissnersche und hat daher auch andere Ziele als jenes. Als Hauptanwendungsgebiete, auf denen es anderen Verfahren wohl überlegen sein wird, seien genannt die Auswertung uneigentlicher Integrale und insbesondere die Integration von (linearen oder nichtlinearen) Differentialgleichungen höherer Ordnung und von Systemen solcher.

2. Das Polarbild einer Funktion und seine Orthopolare. Wir wollen eine gegebene oder gesuchte Funktion $p(\vartheta)$ in der Weise graphisch darstellen, daß wir jedem Funktionselement (p, ϑ) einen Punkt in der Ebene zuordnen, und zwar den Punkt P mit den Polarkoordinaten $1/p, \vartheta$, dessen Entfernung OP von einem festen Pol O also gleich $1/p$, und dessen Azimut, von einer festen Polachse OA aus im Gegenzeigersinn positiv gezählt, gleich ϑ ist (Abb. 1). Für negative Werte von p wird verabredet, daß ihr reziproker Wert $1/|p|$ in entgegengesetzter Richtung als für positive p aufgetragen werden soll (d. h. unter dem Azimut $\vartheta + \pi$).

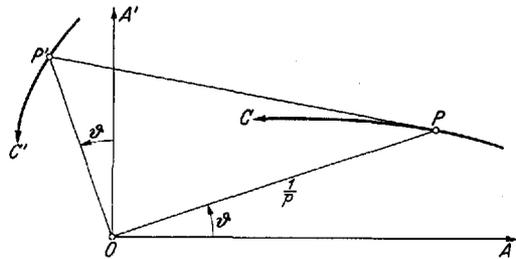


Abb. 1. Polarbild C von $p(\vartheta)$ und Orthopolare C' .

Führt man dies für den ganzen in Betracht kommenden Bereich der Funktion $p(\vartheta)$ aus, so entsteht eine Punktfolge (bei stetigen Funktionen eine stetige Kurve) C , welche mit wachsendem Argument ϑ in bestimmter Richtung durchlaufen wird. Wir nennen diese Punktfolge (Kurve) C das Polarbild der Funktion $p(\vartheta)$. Diese Darstellung einer Funktion bildet die Grundlage für das folgende Verfahren.

Aus dem Polarbild C leiten wir nun eine weitere Punktfolge (Kurve) C' her, indem wir in jedem Punkt P die (zunächst als existierend und eindeutig vorausgesetzte)

¹ **E. Meissner**, Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. Zürich 1932.

Tangente an C legen und diese zum Schnitt bringen mit dem Fahrstrahl, dessen Azimut ϑ von einer gegen OA um einen Rechten im Gegenzeigersinn gedrehten Polachse OA' gezählt ist. Der Schnittpunkt P' (Abb. 1) durchläuft ebenfalls eine Punktfolge (Kurve) C' , und diese nennen wir die Orthopolare von C . Die Strecke OP' soll dabei positiv gerechnet werden, falls P' auf dem Fahrstrahl ϑ selbst liegt, dagegen negativ, falls P' auf seiner rückwärtigen Verlängerung (d. h. auf dem Fahrstrahl vom Azimut $\vartheta + \pi$) liegt.

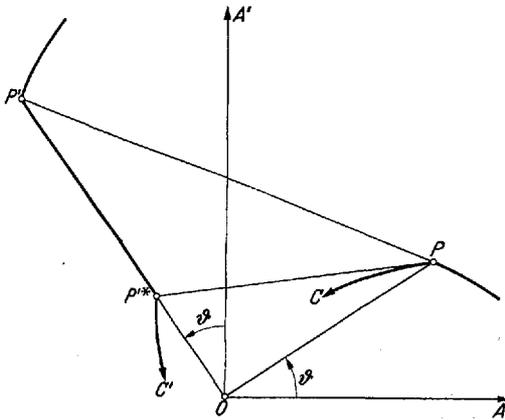


Abb. 2. Orthopolare eines Knicks des Polarbildes.

Hat die Kurve C einen Knick in P (Abb. 2), so ist diese Konstruktion dahin zu verstehen, daß als Orthopolarenbild von P diejenige Strecke $P'P^*$ auf dem Orthopolarenfahrstrahl ϑ gilt, die auf ihm durch die beiden Knicktangenten ausgeschnitten wird. (Noch allgemeinere Singularitäten kommen bei praktischen Aufgaben kaum vor; auch für sie ließe sich ohne Schwierigkeit eine sinngemäße Deutung der Konstruktion angeben.)

Für die Orthopolare gilt der folgende Satz, der das ganze Verfahren beherrschen wird:

Die Orthopolare C' des Polarbildes C einer Funktion $p(\vartheta)$ ist das Polarbild ihrer Ableitung $p'(\vartheta)$.

Zum Beweis dieses Satzes fällt man (Abb. 3) von dem zu P konsekutiven Punkt P^* von C das Lot P^*D auf OP und hat dann

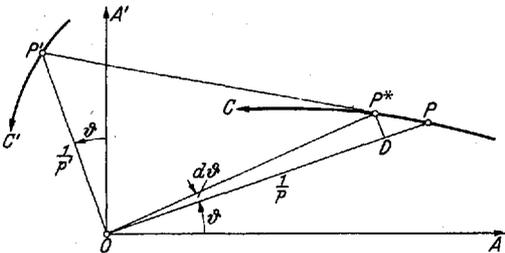


Abb. 3. Orthopolare als Polarbild von $p'(\vartheta)$.

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{DP^*}{DP} = \frac{\frac{1}{p} d\vartheta}{-d\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{p}{p'} = \frac{1/p'}{1/p}$$

Weil $OP = 1/p$ ist, so ist also in der Tat $OP' = 1/p'$.

Wendet man die Konstruktion, die vom Polarbild C zur Orthopolaren führte, auf die Orthopolare an, so entsteht aus ihr die zweite Orthopolare C'' des Polarbildes C (Abb. 4), und diese ist, wie man in gleicher Weise zeigt, das Polarbild der zweiten Ableitung $p''(\vartheta)$ der Funktion $p(\vartheta)$; die zugehörige Polachse OA'' ist gegen OA um zwei Rechte im Gegenzeigersinn gedreht. So fortfahrend erhält man den allgemeinen Satz:

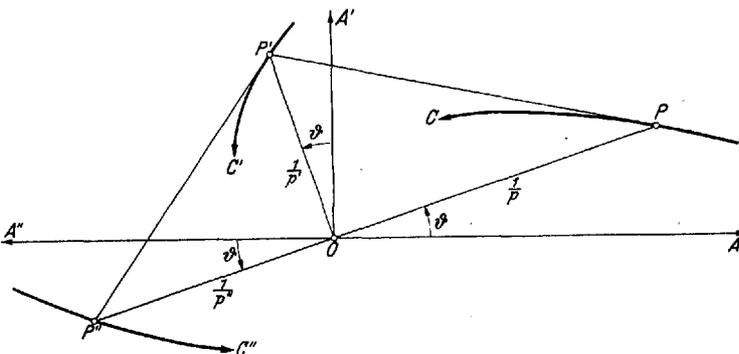


Abb. 4. Polarbild C , erste Orthopolare C' , zweite Orthopolare C'' .

Die n -te Orthopolare $C^{(n)}$ des Polarbildes C einer Funktion $p(\vartheta)$ ist das Polarbild ihrer n -ten Ableitung $p^{(n)}(\vartheta)$.

Die Polachse $OA^{(n)}$ von $C^{(n)}$ ist gegen die Polachse OA um n Rechte im Gegenzeigersinn gedreht.

Die Polachse $OA^{(n)}$ von $C^{(n)}$ ist gegen die Polachse OA um n Rechte im Gegenzeigersinn gedreht.

In Abb. 5 bis 13 sind die Polarbilder einiger Funktionen wiedergegeben. Das Polarbild einer Konstanten ist ein Kreis um den Pol O ; die Polarbilder der harmonischen Funktionen $a \cos \vartheta$, $a \sin \vartheta$ und allgemein $a \cos(\vartheta - \alpha)$ sind Gerade, die der Funktionen $a/\cos \vartheta$, $a/\sin \vartheta$ und allgemein $a/\cos(\vartheta - \alpha)$ sind Kreise durch den Pol O ; die Polarbilder der Potenzen ϑ^n sind Spiralen um den Pol O .

Beim Entwerfen des Polarbildes einer Funktion kann es mitunter große Vereinfachung bringen, wenn man eine neue unabhängige Veränderliche einführt, wie das Beispiel der Funktion $\cos c\vartheta$ zeigt, die durch eine (für $c \neq 1$ krummlinige) Kurve mit den Asymptoten $\vartheta = \pm \pi/2c$ dargestellt wird, wogegen die aus ihr mit $\vartheta' = c\vartheta$ hervorgehende Funktion $\cos \vartheta'$ als Polarbild eine Gerade hatte.

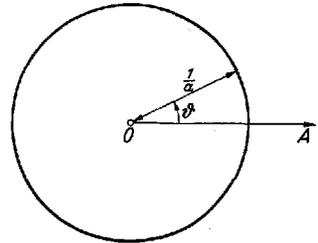


Abb. 5. Polarbild von $p \equiv a$.

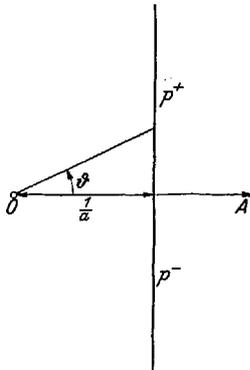


Abb. 6. Polarbild von $p \equiv a \cos \vartheta$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$).

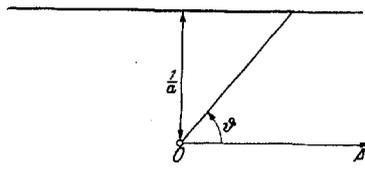


Abb. 7. Polarbild von $p \equiv a \sin \vartheta$.

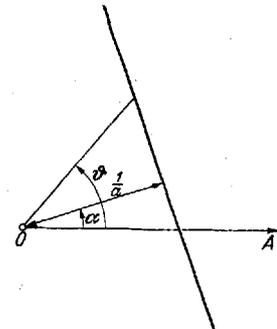


Abb. 8. Polarbild von $p \equiv a \cos(\vartheta - \alpha)$.

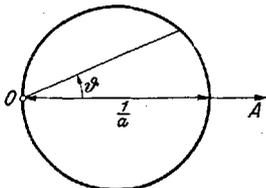


Abb. 9. Polarbild von $p \equiv a/\cos \vartheta$.

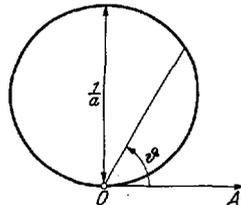


Abb. 10. Polarbild von $p \equiv a/\sin \vartheta$.

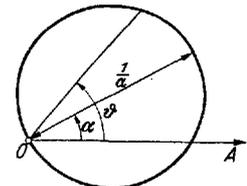


Abb. 11. Polarbild von $p \equiv a/\cos(\vartheta - \alpha)$.

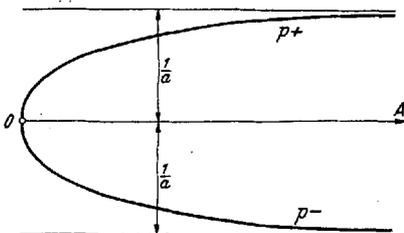


Abb. 12. Polarbild von $p \equiv a \operatorname{tg} \vartheta$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$).

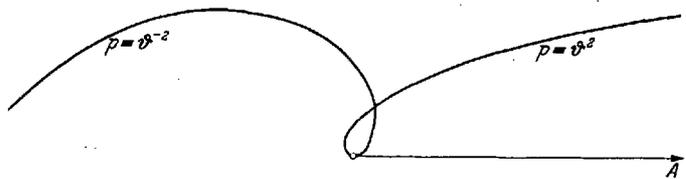


Abb. 13. Polarbilder von $p \equiv \vartheta^2$ und $p \equiv \vartheta^{-2}$.

Da $\vartheta = \pi/2$ den rechten Winkel vorstellt, so ist es zweckmäßig, das ursprüngliche (möglichst schon dimensionslos gemachte) Argument x der darzustellenden Funktion mit dem Azimut ϑ zu verknüpfen durch eine Transformation von der Form

$$x = \frac{2m}{\pi} 10^n \vartheta, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2m} 10^{-n} x \quad (m, n \text{ ganzzahlig}) \quad (1)$$

und Hunderterteilung des rechten Winkels zu benutzen. Dann entspricht einem rechten Winkel ein Bereich von $m \cdot 10^n$ Einheiten von x . Bei Neunzigerteilung wird man besser

$$x = \frac{2m}{\pi} 90^n \vartheta, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2m} 90^{-n} x \quad (m, n \text{ ganzzahlig}) \quad (2)$$

setzen.

Ferner ist es zweckmäßig, solche Zweige des Polarbildes, auf denen $p < 0$ ist, besonders zu bezeichnen, damit man weiß, daß für diese Zweige der Betrag $1/|p|$ auf dem Azimut $\vartheta + \pi$ abzugreifen ist. (In Abb. 6 und 12 ist dies beispielsweise für das Intervall $0 \leq \vartheta \leq \pi$ angedeutet.)

Den etwaigen Nullstellen der Funktion $p(\vartheta)$ entsprechen Asymptoten ihres Polarbildes. Es bereitet i. a. keine Schwierigkeiten, mit diesen Asymptoten graphisch zu arbeiten. Will man sie vermeiden, so ersetzt man die Funktion p durch $p = p^* + a$, wo die additive Konstante a so gewählt ist, daß die Funktion p^* in dem betrachteten Bereich womöglich keine Nullstelle mehr hat.

Den Nullstellen der Ableitung $p'(\vartheta)$ entsprechen Asymptoten der Orthopolare, und zwar bei denjenigen Azimuten ϑ , für die im Polarbild der Fahrstrahl senkrecht auf der Tangente steht. Entsprechendes gilt für die Nullstellen der höheren Ableitungen und die Asymptoten der höheren Orthopolaren.

[Legt man das kartesische Achsenkreuz OA, OA' (Abb. 1) zugrunde, so hat in der Sprache der Plücker'schen Liniengeometrie — wo die Linienkoordinaten u, v als die negativen reziproken Achsenabschnitte der Geraden (u, v) definiert sind — der Punkt P die Gleichung

$$P(\vartheta) \equiv u \cos \vartheta + v \sin \vartheta + p(\vartheta) = 0.$$

Die Tangente der Kurve C im Punkt P wird in der Liniengeometrie erhalten als die Verbindungsgerade des Punktes $P(\vartheta)$ mit dem Punkt

$$\frac{dP}{d\vartheta} \equiv -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta + p'(\vartheta) = 0.$$

Da man aber hierfür auch

$$P'(\vartheta) \equiv \frac{dP}{d\vartheta} \equiv u \cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) + v \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) + p'(\vartheta) = 0$$

schreiben kann, so ist dies gerade der Punkt P' der Orthopolare, womit der grundlegende Satz unseres Verfahrens erneut bewiesen ist.

Das duale Gegenstück des Punktes $P(\vartheta)$ ist in kartesischen Koordinaten x, y die Gerade

$$G(\vartheta) \equiv x \cos \vartheta + y \sin \vartheta + p(\vartheta) = 0,$$

und diese wird beim Meissnerschen Verfahren als das Bild des Funktionselementes (p, ϑ) definiert. Unserem Polarbild C als Kurve der Punkte P entspricht dual das Meissnersche Linienbild als Einhüllende der Geraden $G(\vartheta)$; unserer Orthopolaren C' als Kurve der Punkte P' entspricht dual die Meissnersche Evolute des Linienbildes.]

3. Differentiation und Integration. Dem Differentiationsprozeß entspricht nach Ziff. 2 der Übergang vom Polarbild zu seiner Orthopolaren, dem Integrationsprozeß der umgekehrte Übergang von der Orthopolaren zum Polarbild.

Man differenziert also die Funktion $p(\vartheta)$ nach ϑ dadurch graphisch, daß man ihr Polarbild zeichnet, daraus die Orthopolare konstruiert und zuletzt zu deren Fahrstrahlängen (etwa mit dem Rechenschieber oder mit einer Kehrwerttafel) die Kehrwerte nimmt. Gegenüber der graphischen Differentiation in kartesischen Koordinaten kostet natürlich das Zeichnen des Polarbildes und das Bilden des Kehrwertes ein Mehr an Zeit; dafür ist aber der eigentliche Differentiationsprozeß, d. h. der Übergang vom Polarbild zur Orthopolaren offensichtlich einfacher, als in kartesischen Koordinaten ϑ, p der Übergang von der Kurve $p(\vartheta)$ zu ihrer Differentialkurve. (Stünde Polarkoordinatenpapier mit Kehrwertmaßstab auf den Fahrstrahlen zur Verfügung, so wäre die graphische Differentiation mit Polarbild und Orthopolare derjenigen mit kartesischen Koordinaten in der Regel durchaus überlegen.)

Man kann das ungenaue Anlegen von Tangenten vermeiden, indem man (ähnlich wie schon bei der graphischen Differentiation in kartesischen Koordinaten¹) die Aus-

¹ Vgl. R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, S. 92—112, 2. Aufl., Leipzig u. Wien 1924.

gangskurve C durch ein ihr eingeschriebenes Polygon ersetzt (Abb. 14). Die Sehne P_1P_2 des Polarbildes C ist gemäß Abb. 8 das Polarbild einer Funktion $a \cos(\vartheta - \alpha)$, ihre Ableitung $-a \sin(\vartheta - \alpha) \equiv a \cos(\vartheta - \alpha + \frac{\pi}{2})$ ist also ein Stück derselben Geraden, der auch die Sehne P_1P_2 selbst angehört, und zwar offenbar dasjenige Stück Q_1Q_2 , das zwischen den beiden auf OP_1 und OP_2 senkrechten Fahrstrahlen liegt. Der Drehung der Sekante in P_2 aus der Richtung P_1P_2 in die Richtung P_2P_3 entspricht gemäß Abb. 2 die Strecke $Q_2Q_2^*$, die auf dem Fahrstrahl OQ_2 durch die Sekanten P_1P_2 und P_2P_3 ausgeschnitten wird. GleichermäÙe entspricht der Sehne P_2P_3 die Strecke $Q_2^*Q_3$, und so fort. Die Orthopolare des Polygons $P_1P_2P_3$ ist also die Treppenkurve $Q_1Q_2Q_2^*Q_3\dots$. Der Grenzübergang vom Polygon zur gegebenen Kurve C des Polarbildes der zu differenzierenden Funktion liefert als gesuchte Orthopolare C' eine Kurve, die die „Treppe“ irgendwie ausmittelt. Bei nicht zu großen Intervallen P_1P_2, P_2P_3 wird es immer genau genug sein, die gesuchte Orthopolare C' in der Weise vollends aus der Treppenkurve herzustellen, daß man deren Strecken $Q_1Q_2, Q_2Q_2^*, Q_2^*Q_3$ je halbiert und die Halbierungspunkte durch eine glatte Kurve verbindet. (Man könnte diese Vorschrift leicht durch eine genauere ersetzen, die aber wesentlich umständlicher wäre und kaum lohnen würde, weshalb wir sie unterdrücken.) Abb. 14 zeigt die ganze Konstruktion; zu zeichnen sind dabei nur die ausgezogenen Strecken und Kurven, wogegen die gestrichelten Strecken in Wirklichkeit nur durch das Anlegen des Zeichenlineals zu markieren (oder schon auf dem Papier vorhanden) sind.

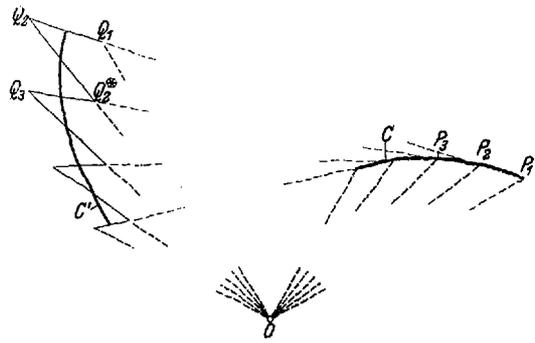


Abb. 14. Graphische Differentiation.

Man erkennt ohne weiteres, daß sich diese graphische Differentiation umkehren läßt und dann von dem Polarbild C' einer Funktion $q(\vartheta)$ zu deren — durch einen vorgeschriebenen Punkt P_1 gehenden — Integralkurve C führt, also zum Polarbild der Funktion $p = \int q d\vartheta$ (mit entsprechend vorgeschriebenem Anfangswert). Abb. 15 zeigt die Konstruktion (wobei die gestrichelten Linien wieder gar nicht wirklich zu zeichnen sind): Man unterteilt die gegebene Kurve C' in einzelne Stücke Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots , markiert die zugehörigen Fahrstrahlen Q_iO sowie die gegen diese um einen Rechten im Uhrzeigersinn gedrehten Fahrstrahlen, deren erster den vorgeschriebenen Anfangspunkt P_1 der Integralkurve trägt. Dann verbindet man den Halbierungspunkt q_1 von Q_1Q_2 mit dem Punkt P_1 und erhält so die Sehne P_1P_2 der gesuchten Integralkurve, wobei P_2 auf dem zweiten Fahrstrahl OP_2 liegt. Weiter verbindet man den Halbierungspunkt q_2 von Q_2Q_3 mit P_2 und hat damit die Sehne P_2P_3 der Integralkurve. So fortfahrend bekommt man das Polygon $P_1P_2P_3\dots$, dem zuletzt nur noch die gesuchte Integralkurve umzuschreiben ist (in Abb. 15 der Deutlichkeit halber nicht durchgeführt).

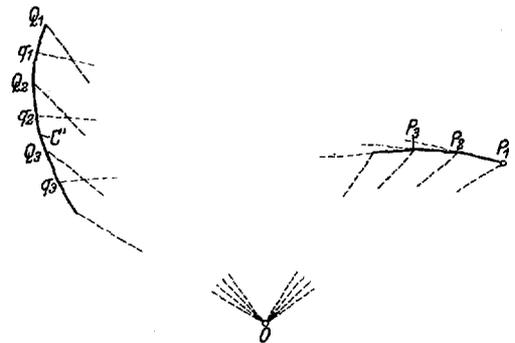


Abb. 15. Graphische Integration; Sehnenmethode.

Falls der eine oder andere von zwei Punkten Q_i, Q_{i+1} über das Zeichenblatt hinaus oder gar ins Unendliche fällt, so daß der Halbierungspunkt q_i nicht zugänglich ist

oder gar seinen Sinn verliert, so ersetzt man den Strahl $P_i q_i$ am besten durch die (stets leicht zu konstruierende) Halbierungslinie des Winkels $Q_i P_i Q_{i+1}$.

Man kann dieser Sehnenmethode eine zweite Methode zur Seite stellen, bei welcher die gesuchte Integralkurve durch ihre Tangenten nebst den Berührungspunkten approximiert wird. Abb. 16 zeigt die Ausführung. Nachdem die zu den Unterteilungspunkten $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ der Ausgangskurve C' sowie die zu den Bogenmittelpunkten

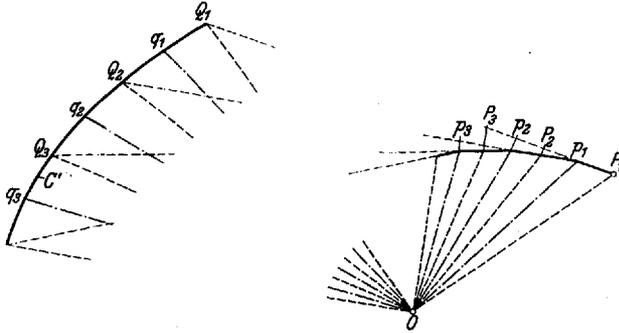


Abb. 16. Graphische Integration; Tangentenmethode.

gehörigen Fahrstrahlen nebst den gegen sie um einen Rechten im Uhrzeigersinn gedrehten Fahrstrahlen markiert sind, verbindet man Q_1 mit dem vorgeschriebenen Anfangspunkt P_1 der gesuchten Integralkurve und P_1 ihr Berührungspunkt. Ist ferner p_1 derjenige Punkt dieser Tangente, für den $Op_1 \perp Oq_1$ steht, so ist ebenso $Q_2 p_1$ Tangente der gesuchten Integralkurve, und zwar mit demjenigen Punkt P_2 als Berührungspunkt, für den $Op_2 \perp OQ_2$ steht. Ist weiter p_2 derjenige Punkt der Tangente $Q_2 p_1$, für den $Op_2 \perp Oq_2$ steht, so ist $Q_3 p_2$ die nächste Tangente der Integralkurve mit dem Berührungspunkt P_3 , für den $Op_3 \perp OQ_3$ steht. So fortfahrend erhält man ein Polygon $P_1 p_1 p_2 p_3 \dots$, dem die Integralkurve vollends in der Weise einzuschreiben ist, daß sie das Polygon in den Punkten P_1, P_2, P_3, \dots berührt. Die Begründung für die Richtigkeit dieser Konstruktion leuchtet wohl unmittelbar ein (und für die Wahl der Punkte q_1, q_2, q_3, \dots könnte man auch hier wieder leicht genauere, aber umständlichere und kaum lohnende Vorschriften aufstellen). Man sieht, daß diese Tangentenmethode etwas mehr Zeichenarbeit erfordert als die Sehnenmethode; dafür liefert sie aber auch die Berührungspunkte.

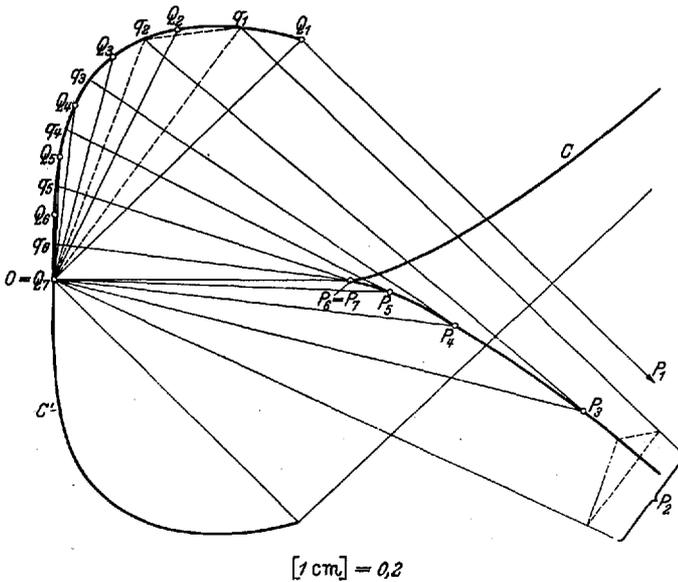


Abb. 17. Polarkurve der Funktion $q(\vartheta) \equiv -\vartheta^{-1/3}$ nebst Konstruktion ihrer Integralkurve und Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\pi/4}^{\vartheta} q \, d\vartheta$.

ihres Polarbildes fallen, so kann man mit dieser Methode — im Gegensatz zu allen anderen graphischen Integrationsmethoden — insbesondere auch uneigentliche Integrale ohne weiteres rein graphisch auswerten. In Abb. 17 ist dies an einem Beispiel gezeigt, und zwar an einem solchen, das auch leicht eine rechnerische Nachprüfung zuläßt, nämlich an der Funktion $q(\vartheta) \equiv -\vartheta^{-1/3}$. Aus der Polarkurve C' der Funktion q im Intervall $-\pi/4 \leq \vartheta \leq +\pi/4$ ist dort die Integralkurve C des (für $\vartheta = -\pi/4$ verschwindenden, für $\vartheta = 0$ uneigentlich werdenden) Integrals $p \equiv \int_{-\pi/4}^{\vartheta} q \, d\vartheta$

konstruiert. Die Konstruktion verläuft im einzelnen folgendermaßen: Man nimmt auf C' die Punkte Q_1 bis Q_7 in (abgesehen von Q_1Q_2) ungefähr gleichen Abständen an, sowie die (abgeschätzten) Bogenmitten q_1 bis q_6 . Weil voraussetzungsgemäß $p=0$ für $\vartheta=-\pi/4$ sein soll, so liegt der dem Punkt Q_1 entsprechende Punkt P_1 der Integralkurve im Unendlichen des unter dem Azimut $\vartheta=-\pi/4$ durch Q_1 gezogenen Fahrstrahls, der zugleich Asymptote der gesuchten Integralkurve ist. Gemäß der vorhin entwickelten Sehnenmethode zieht man eine Parallele hierzu durch q_1 , sodann Q_2O und dazu die Normale, die jene Parallele in dem Punkte P_2 der gesuchten Integralkurve trifft, und verbindet P_2 mit q_2 . (Weil der Punkt P_2 in unserer Zeichnung unzugänglich ist, so benützt man zur Auffindung von q_2P_2 eine der bekannten Hilfskonstruktionen, etwa das Dreieck q_1q_2O , zu welchem an noch zugänglicher Stelle ein dazu ähnliches und ähnlich gelegenes Dreieck gezeichnet wird, wie in Abb. 17 gestrichelt angedeutet. Man erkennt zugleich auch, daß man die beiden ersten Punkte Q_1 und Q_2 ziemlich weit auseinanderliegend wählen durfte, ohne der Genauigkeit der Integralkurve Abbruch zu tun.) Weiter zieht man Q_3O und senkrecht dazu OP_3 , wo P_3 auf q_2P_2 liegt, ferner Q_4O und senkrecht dazu OP_4 , wo P_4 auf q_3P_3 liegt, und so fort bis P_7 , wobei innerhalb der Zeichengenauigkeit P_7 mit P_8 zusammenfällt (weil der Bogen Q_6Q_7 vom Fahrstrahl $\vartheta=0$ der Kurve C' nicht mehr zu unterscheiden ist). Dann stellt der Kehrwert der Strecke OP_7 den Wert des uneigentlichen Integrals $p(0) \equiv \int_{-\pi/4}^0 q d\vartheta$ dar. Die Tatsache, daß P_6 und P_7 recht genau zusammenfallen, läßt vermuten, daß der gesuchte Wert recht genau getroffen wird. In der Tat ist abzumessen $OP_7=0,782$, also $p(0)=1,279$, wogegen sich berechnet

$$p(0) \equiv - \int_{-\pi/4}^0 \vartheta^{-1/3} d\vartheta = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2/3} = 1,277.$$

In Abb. 17 ist die Fortsetzung der Integralkurve für das Intervall $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$ ohne Konstruktion hinzugefügt. Der endlichbleibende Wert des uneigentlichen Integrals zeigt sich darin, daß die Spitze der Integralkurve vom Nullpunkt O fernliegt. Bei einem uneigentlichen Integral, dessen Wert $\rightarrow \infty$ geht, rückt die Spitze der Integralkurve in den Nullpunkt.

4. Integration von totalen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Am weitesten trägt die Methode wohl bei der graphischen Behandlung von Differentialgleichungen, die von beliebig hoher Ordnung sein dürfen. Die vorgelegte Gleichung sei aufgelöst nach dem Differentialquotienten höchster Ordnung in der Form

$$p^{(n)}(\vartheta) = \left. \begin{aligned} &= F(\vartheta, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und es möge sich um ein Anfangswertproblem handeln, d. h. es sei

$$p = p_0, p' = p'_0, p'' = p''_0, \dots, p^{(n-1)} = p^{(n-1)}_0 \quad \text{für } \vartheta = \vartheta_0 \quad (4)$$

vorgeschrieben. Abb. 18 zeigt (für $n=4$) das Prinzip der Lösung. Man zeichnet n unter sich rechtwinklige Fahrstrahlen mit dem Azimut $\vartheta = \vartheta_0$ gegen ein rechtwinkliges

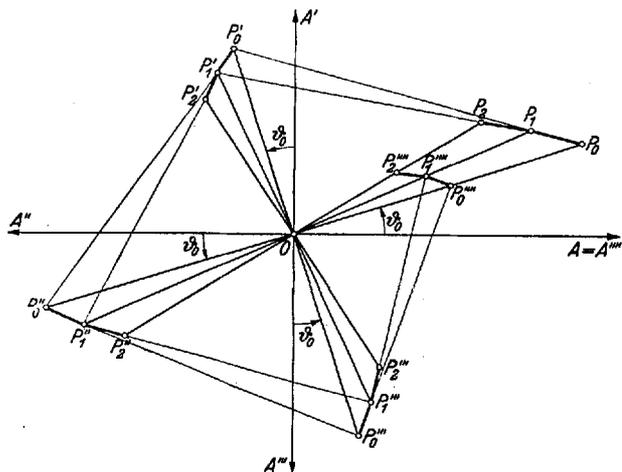


Abb. 18. Das Prinzip der Integration der Differentialgleichung $p^{(n)} = F(\vartheta, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)})$.

Achsenkreuz $O, A A' A'' \dots A^{(n)}$, trägt auf ihnen der Reihe nach von O aus die Kehrwerte von $p_0, p'_0, \dots, p_0^{(n-1)}$ und zuletzt von dem daraus berechneten Wert $p_0^{(n)} = F(\vartheta_0, p_0, p'_0, \dots, p_0^{(n-1)})$ auf bis zu den Punkten $P_0, P'_0, \dots, P_0^{(n-1)}, P_0^{(n)}$ und zieht den Polygonzug $P_0^{(n)} P_0^{(n-1)} \dots P'_0 P_0$. Alsdann dreht man alle Fahrstrahlen um den gleichen (unendlich kleinen) Winkel weiter bis zum Azimut ϑ_1 , markiert ihre Schnittpunkte $P_1, P'_1, \dots, P_1^{(n-1)}$ mit den Polygonseiten $P_0 P_0', P_0' P_0'', \dots, P_0^{(n-1)} P_0^{(n)}$, berechnet aus den Kehrwerten $p_1, p'_1, \dots, p_1^{(n-1)}$ der Strecken $OP_1, OP'_1, \dots, OP_1^{(n-1)}$ den Wert $p_1^{(n)} = F(\vartheta_1, p_1, p'_1, \dots, p_1^{(n-1)})$, trägt den Kehrwert hiervon als Strecke $OP_1^{(n)}$ auf dem letzten Fahrstrahl auf und zieht den Polygonzug $P_1^{(n)} P_1^{(n-1)} \dots P'_1 P_1$. In gleicher Weise schreitet man von diesem Polygonzug zu den nächsten Punkten $P_2, P'_2, \dots, P_2^{(n-1)}$

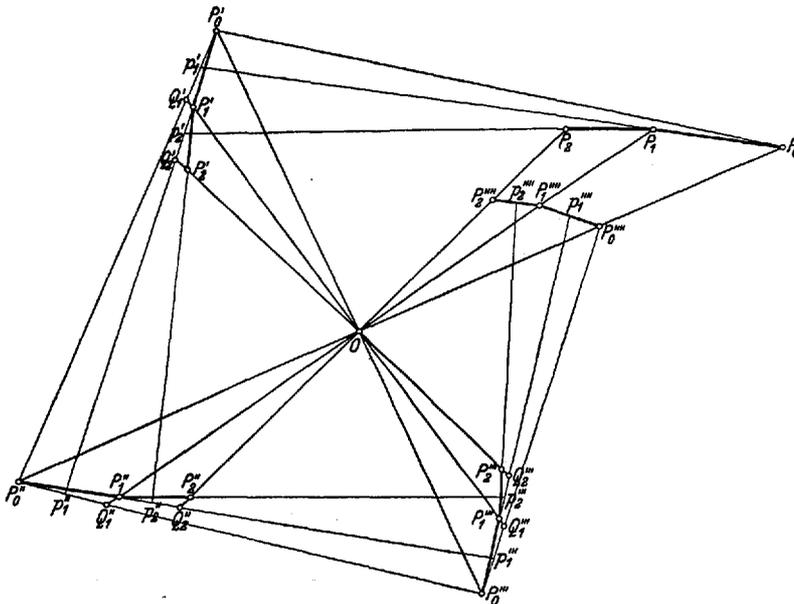


Abb. 19. Schema der Integration der Differentialgleichung $p'''' = F(\vartheta, p, p', p'', p''')$ nach der Sehnensmethode.

und $P_2^{(n)}$ fort, usw. Dann stellt offensichtlich die Punktfolge (Kurve) $P_0 P_1 P_2 \dots$ das Polarbild der gesuchten Lösung $p(\vartheta)$ der Differentialgleichung dar [ebenso die Punktfolge $P'_0 P'_1 P'_2 \dots$ das Polarbild von $p'(\vartheta)$, die Punktfolge $P''_0 P''_1 P''_2 \dots$ dasjenige von $p''(\vartheta)$ usw.].

Bei der wirklichen Durchführung wird man natürlich wieder die Sehnen- oder die Tangentenmethode benutzen, wie dies Abb. 19 schematisch für die Sehnenmethode (und $n=4$) zeigt. Nachdem der Polygonzug $P_0 P'_0 \dots P_0^{(n-1)} P_0^{(n)}$ gezeichnet ist, auf dem das weitergedrehte Fahrstrahlkreuz die jetzt mit $Q'_1, Q''_1, \dots, Q_1^{(n-1)}$ bezeichneten Punkte liefert, markiert man die Mittelpunkte $p'_1, p''_1, \dots, p_1^{(n-1)}$ der Strecken $P'_0 Q'_1, P''_0 Q''_1, \dots, P_0^{(n-1)} Q_1^{(n-1)}$ und zieht $p'_1 P_0, p''_1 P'_0, \dots, p_1^{(n-1)} P_0^{(n-2)}$, womit die Schnittpunkte $P_1, P'_1, \dots, P_1^{(n-2)}$ mit dem gedrehten Fahrstrahlkreuz gefunden sind. Um auch $P_1^{(n-1)}$ zu finden, berechnet man die Lage des Punktes $P_1^{(n)}$ in erster Näherung aus $P_1, P'_1, \dots, P_1^{(n-2)}$ und $Q_1^{(n-1)}$ (statt $P_1^{(n-1)}$) und verbindet die Mitte $p_1^{(n)}$ von $P_0^{(n)} P_1^{(n)}$ mit $P_0^{(n-1)}$. Dies liefert $P_1^{(n)}$ in erster Näherung. Nun berechnet man $P_1^{(n)}$ in zweiter Näherung aus $P_1, P'_1, \dots, P_1^{(n-2)}$ und der gefundenen ersten Näherung von $P_1^{(n-1)}$ und wiederholt, wenn nötig, mit dem verbesserten Punkt $P_1^{(n)}$ die Konstruktion bis zu einer zweiten Näherung von $P_1^{(n-1)}$, usw. In der Regel wird schon die erste Näherung völlig ausreichen. [Wenn sich die Punkte $Q_1^{(i)}$ und $P_1^{(i)}$ für irgendeinen Zeiger $i(=1, 2, \dots, n-1)$ sehr erheblich unterscheiden, so daß $p_1^{(i)}$ merklich verschieden vom Mittelpunkt der Strecke $P_0^{(i)} P_1^{(i)}$ ist, so wird man natürlich nachträglich die Konstruktion verbessern, indem man statt des ungenauen Punktes $p_1^{(i)}$ den Mittelpunkt

von $P_0^{(i)} P_1^{(i)}$ verwendet, und nachprüfen, ob dies einen merklichen Einfluß auf die Berechnung des Punktes $P_1^{(n)}$ ausübt.] In Abb. 19 ist ganz entsprechend auch noch der nächste Schritt gezeichnet, der zu den Punkten $P_2, P_2', \dots, P_2^{(n)}$ führt. Das so gefundene Polygon $P_0 P_1 P_2 \dots$ besteht dann aus lauter Sehnen der Polarlinie der Funktion $p(\vartheta)$, die damit graphisch ermittelt ist; die weiteren Polygone $P_0' P_1' P_2' \dots; P_0'' P_1'' P_2'' \dots$ usw. sind die Sehnen der Polarlinien von $p'(\vartheta), p''(\vartheta)$ usw.

Man kann vom zweiten Schritt an auch so vorgehen, daß man (anstatt in erster Näherung mit $Q_2^{(n-1)}$ statt $P_2^{(n-1)}$ zu rechnen) den Punkt $p_2^{(n)}$ schätzungsweise annimmt, etwa in der Verlängerung von $P_0^{(n)} P_1^{(n)}$ und etwa mit $P_1^{(n)} p_2^{(n)} = p_1^{(n)} P_1^{(n)}$, dann der Reihe nach $p_2^{(n)} P_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)} P_1^{(n-2)}, \dots, p_2' P_1$ zieht und mit den damit gefundenen Punkten $P_2^{(n-1)}, P_2^{(n-2)}, \dots, P_2$ den Punkt $P_2^{(n)}$ berechnet und nachprüft, ob $p_2^{(n)}$ der Mittelpunkt von $P_1^{(n)} P_2^{(n)}$ ist. Wenn nicht, so wiederholt man die Konstruktion und die Rechnung mit dem verbesserten Punkt $p_2^{(n)}$, usw. In manchen Fällen führt die so definierte Iteration sogar rascher zum Ziel als die vorige.

Falls einzelne Punkte über das Blatt hinaus oder ins Unendliche fallen, so nimmt man, wie schon oben erörtert, statt der Verbindungslinie mit dem etwa unzugänglich gewordenen Halbierungspunkt $p_k^{(i)}$ die entsprechende Winkelhalbierende. Noch genauer ist es, wenn man an solchen Stellen nach der Tangentenmethode (statt nach der Sehnenmethode) verfährt, bei der man im Grunde genommen die Halbierungspunkte (q_i in Abb. 16) gar nicht braucht (sondern durch die nahezu auf den Winkelhalbierungslinien liegenden Punkte p_i in Abb. 16 ersetzen kann).

5. Beispiele. Als erstes Beispiel wählen wir die Bestimmung der Hängekurve eines Kabels, das zwischen der Spannweite $2l$ sein eigenes Gewicht q_1 (je Längeneinheit des Kabels) sowie eine zusätzliche Hängelast q_2 (je Längeneinheit der waagerechten Projektion) bei einer waagerechten Kabelzugkomponente H tragen soll. In einem (x, y) -System mit waagerechter x -Achse und lotrechter y -Achse lautet die Differentialgleichung der Hängekurve

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = q_2 + q_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (5)$$

Sie geht mit

$$x = \frac{2}{\pi} l \vartheta, \quad y = \frac{2}{\pi} l p, \quad \alpha = \frac{2}{\pi} \frac{q_2 l}{H}, \quad \beta = \frac{2}{\pi} \frac{q_1 l}{H} \quad (6)$$

in die dimensionslose Form

$$\frac{d^2 p}{d\vartheta^2} = \alpha + \beta \sqrt{1 + \left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)^2} \quad (7)$$

über, die wir für $\alpha = \beta = 0,5$ behandeln wollen. Wir haben es also mit der Differentialgleichung

$$2p'' = 1 + \sqrt{1 + p'^2} \quad (8)$$

zu tun und schreiben für die Seilmitte $x=0$ vor

$$y = \frac{2}{\pi} l, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für } x=0 \quad (9)$$

(d. h. waagerechten Verlauf in der Höhe $y = \frac{2}{\pi} l$), somit

$$p = 1, \quad p' = 0 \quad \text{für } \vartheta = 0. \quad (10)$$

In Abb. 20 ist die graphische Integration mit sämtlichen Konstruktionslinien wiedergegeben, ausgenommen die Hilfslinien zur Erfassung der unzugänglichen Punkte P_0', Q_1 und P_1' . Für die beiden ersten Intervalle ist die Tangentenmethode benützt (da die Halbierungspunkte p_1' und p_2' unzugänglich sind). Die Bezeichnung der einzelnen Punkte ist durchweg nach dem Muster der schematischen Abb. 19 gewählt, so daß die Konstruktion sich von selbst erklärt. Rechts oben in Abb. 20 ist in den Koordinaten x/l und y/l die rechte Hälfte der gefundenen Hängekurve maßstäblich

dargestellt. (Sie liegt, wie zu erwarten, zwischen der Parabel und der Kettenlinie, die man mit lotrechten Achsen durch den tiefsten und höchsten Punkt der gefundenen

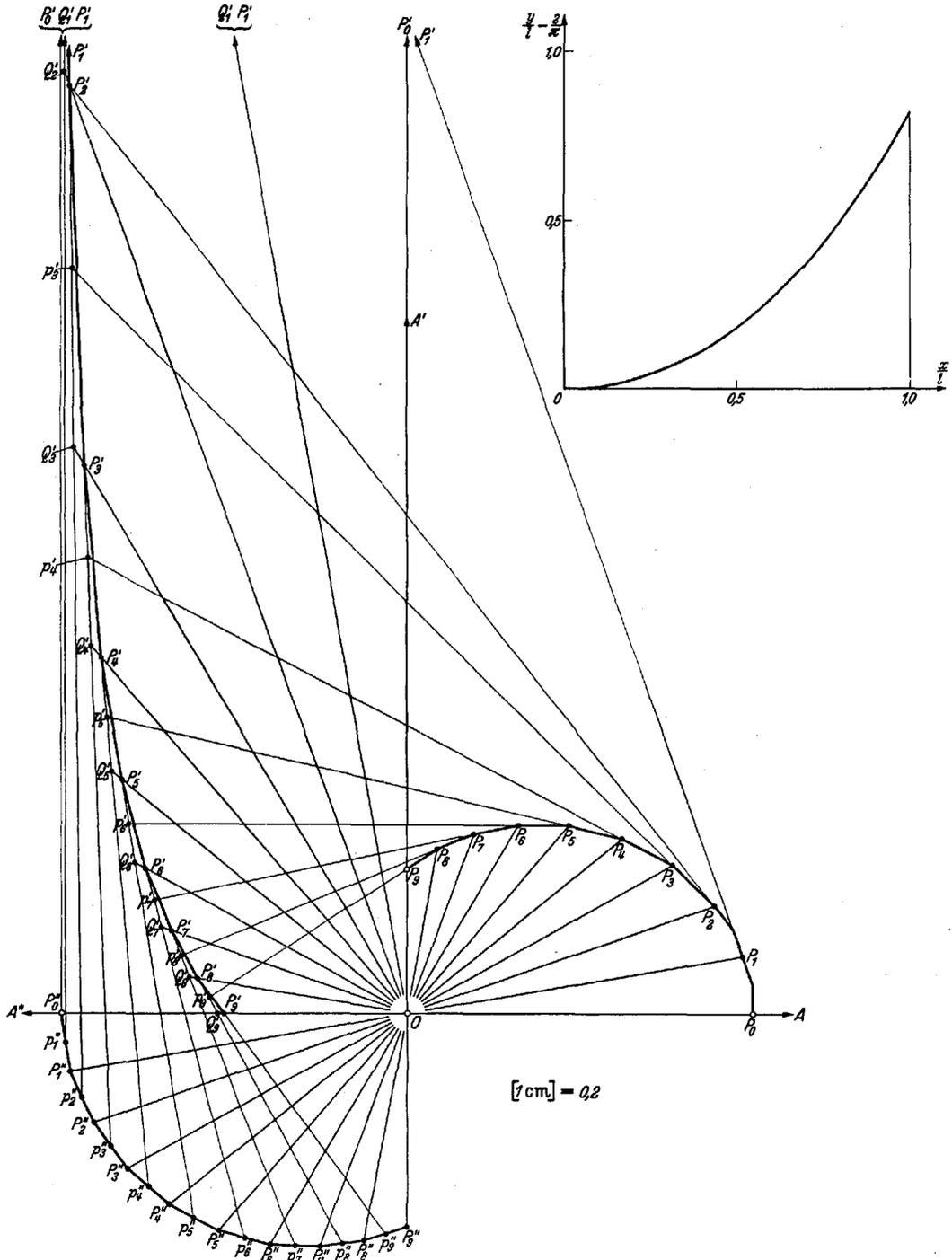


Abb. 20. Integration der Hängekurve $2 p' = 1 + \sqrt{1 + p'^2}$.

Kurve legen könnte.) Bei den Punkten P_i' genügte in diesem Beispiel stets die zweite Näherung (schon die erste lag nirgends um mehr als 0,3 mm von der zweiten ent-

fernt und ist in Abb. 20 nirgends besonders markiert). Die ganze Konstruktion erfordert einschließlich der nötigen Zwischenrechnungen (mit Rechenschieber) nicht viel mehr als eine Arbeitsstunde.

Das zweite Beispiel¹ betrifft eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit zweiseitigen Randbedingungen, wie sie bei der Biegung rotierender Dampfturbinenscheiben beliebig vorgegebenen Profils unter dem Einfluß von Axialkräften und Randmomenten auftritt. Die Durchbiegung z der Mittelebene gehorcht hierbei der Gleichung²

$$z''' + a(r)z'' + b(r)z' + c(r)z = 0; \tag{11}$$

dabei bedeuten Striche Ableitungen nach dem (von der Drehachse aus gerechneten) Fahrstrahl r , und a, b, c sind bekannte Funktionen von r , nämlich

$$\left. \begin{aligned} a(r) &\equiv \frac{1}{r} \left(1 + 3r \frac{y'}{y} \right); \\ b(r) &\equiv \frac{3}{m r} \frac{y'}{y} - \frac{1}{r^2} - 12 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{\sigma_r}{y^2}, \\ c(r) &\equiv 12 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{\tau_m}{y^2}, \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

und zwar ist $m (= 10/3)$ die Querdehnungszahl, $E (= 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2)$ der Elastizitätsmodul, $y(r)$ das Scheibenprofil, $\sigma_r(r)$ die Fliehkraftspannung und $\tau_m(r)$ die (mittlere) axiale Schubspannung des Querschnitts r . Das gewählte Profil $y(r)$ sowie die zu $\omega = 100 \pi \text{ sek}^{-1}$ (entsprechend 3000 Uml/min) gehörige (durch eine Voraufgabe bestimmte) Fliehkraftspannung σ_r ist in Abb. 21 links oben angegeben, ebenso die Schubspannung τ_m (die sich aus Dampfkraft K_d , Dampfüberdruck und Scheibenprofil elementar ergibt). Die Randbedingungen sind

$$\left. \begin{aligned} z = 0, \quad z' = 0 & \quad \text{für Innenrand } r = r_0, \\ z'' + \frac{z'}{m r} = 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{\sigma_{ra}^b}{y} \equiv B & \quad \text{für Außenrand } r = r_a; \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

dabei ist σ_{ra}^b die Biegespannung am Außenrand (die sich aus den in Abb. 21 links eingetragenen Größen a_s, a_d, e, K_d und F , wo F die Fliehkraft der Beschauelung ist, ebenfalls elementar ergibt).

Man kann die Lösung von (11) mit zwei noch offenen Beiwerten A_0, A_1 ansetzen zu

$$z = A_0 + A_1 z_1 + \bar{z}, \tag{14}$$

wobei z_1 ein Integral der verkürzten Gleichung (11) [mit $c(r) = 0$] und \bar{z} ein Integral der unverkürzten Gleichung (11) ist, und zwar sollen z_1 und \bar{z} solche Integrale sein, die mit willkürlichen Anfangswerten $z_1(r_0), \bar{z}(r_0), z_1'(r_0), \bar{z}'(r_0)$, jedoch $z_1'(r_0) = \bar{z}'(r_0) = 0$ gebildet sind. In der Tat liefern dann die erste und dritte der Randbedingungen (13) in der Form

$$\left. \begin{aligned} A_0 + A_1 z_1(r_0) + \bar{z}(r_0) &= 0 \\ A_1 \left[z_1'(r_a) + \frac{z_1(r_a)}{m r_a} \right] + \left[\bar{z}'(r_a) + \frac{\bar{z}(r_a)}{m r_a} \right] &= B \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

zwei Gleichungen zur Bestimmung von A_0 und A_1 , während die zweite Randbedingung (13) von selbst erfüllt ist. Die Aufgabe ist demnach als gelöst anzusehen, sobald man den Verlauf der Lösungen z_1 und \bar{z} und insbesondere die Werte $z_1'(r_a), z_1''(r_a), \bar{z}'(r_a), \bar{z}''(r_a)$ gefunden hat.

Um dies mit der neuen Methode durchzuführen, benützt man die dimensionslosen Veränderlichen und Koeffizienten

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \frac{r}{r_a}, \quad \rho = \frac{z}{z_0}, \quad \alpha \equiv \frac{2 r_a}{\pi} a(r), \quad \beta \equiv \left(\frac{2 r_a}{\pi} \right)^2 b(r), \quad \gamma \equiv \left(\frac{2 r_a}{\pi} \right)^3 \frac{c(r)}{z_0}, \tag{16}$$

¹ Bei der Durchführung dieses und der folgenden Beispiele hat mich Herr H. Kauderer in sehr wirksamer Weise unterstützt.

² Vgl. C. B. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik, S. 683f. Berlin 1939.

worin z_0 eine geeignete Länge ist, und hat dann statt (11)

$$p''' + \alpha p'' + \beta p' + \gamma = 0; \tag{17}$$

hier bedeuten Striche nun Ableitungen nach ϑ . Zum Innenrand $r=r_0$ gehört (wenn wir in Neugrad rechnen) das Argument $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} \frac{r_0}{r_a} (=20^\circ)$, zum Außenrand $r=r_a$ das Argument $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} (=100^\circ)$. Löst man (15) nach A_0 und A_1 auf und bildet damit nach (14) die allein wichtige Durchbiegung $z(r_a)$ des Außenrandes, so findet man, wenn man alles in p umschreibt,

$$\left. \begin{aligned} z(r_a) &= z_0 \{ \bar{p}(\vartheta_1) - \bar{p}(\vartheta_0) + A_1 [p_1(\vartheta_1) - p_1(\vartheta_0)] \} \\ \text{mit} \quad A_1 &= \frac{\frac{4 r_a^2}{\pi^2 z_0} B - [\bar{p}''(\vartheta_1) + \frac{2}{\pi m} \bar{p}'(\vartheta_1)]}{p_1''(\vartheta_1) + \frac{2}{\pi m} p_1'(\vartheta_1)}. \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

In Abb. 21 ist mit $z_0 = 1$ mm und den graphisch gegebenen Koeffizienten $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ sowie den Anfangswerten $p(\vartheta_0) = 0,500$, $\bar{p}'(\vartheta_0) = 0$, $\bar{p}''(\vartheta_0) = 0,100$ die Lösung der unverkürzten Gleichung (17) nach dem Sehnenverfahren durchgezeichnet; das Ergebnis ist $\bar{p}(\vartheta_1) = 1,250$, $\bar{p}'(\vartheta_1) = 2,597$, $\bar{p}''(\vartheta_1) = 4,717$. In gleicher Weise ist — hier nicht wiedergegeben — die verkürzte Gleichung (17) mit den Anfangswerten $p_1(\vartheta_0) = 0,500$, $p_1'(\vartheta_0) = 0$, $p_1''(\vartheta_0) = 0,100$ gelöst, wobei sich $p_1(\vartheta_1) = 1,358$, $p_1'(\vartheta_1) = 2,976$, $p_1''(\vartheta_1) = 5,556$ ergab. Setzt man die gefundenen und die gegebenen Werte in (18) ein, so kommt als Randdurchbiegung der Scheibe

$$z(r_a) = (0,0196 + 0,401 \cdot 10^{-3} \sigma_{ra}^b) \text{ mm} \quad [\sigma_{ra}^b \text{ in kg/cm}^2].$$

Das erste Glied stellt den (ziemlich geringen) Einfluß der Schubspannungen dar, das zweite den der Biegespannung σ_{ra}^b am Rand. Da diese bei einer solchen Scheibe recht wohl 300 kg/cm^2 betragen kann, so hat man also Durchbiegungen von rund $0,14 \text{ mm}$ zu erwarten.

Das dritte Beispiel soll zeigen, wie man die allgemeine Lösung des Problems der biegesteifen rotationssymmetrisch gestalteten und belasteten Schale mit dieser Methode verhältnismäßig schnell finden kann. Es ist bekannt, daß man das Problem beherrscht, sobald je vier linear unabhängige Integrale zweier Differentialgleichungen vierter Ordnung hergestellt sind¹. Für Schalen mit unveränderlicher Wandstärke h lautet die erste dieser beiden Differentialgleichungen

$$L^* L^*(U) + f(\vartheta) \frac{dU}{d\vartheta} + [\mu^2 + g(\vartheta)] U = 0 \tag{19}$$

mit dem Differentialausdruck

$$L^* \equiv a(\vartheta) \frac{d^2}{d\vartheta^2} + b(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} + c(\vartheta), \tag{20}$$

wobei a , b , c , f , g und μ^2 gegebene Funktionen des (als unabhängiger Veränderlichen benützten) Winkels ϑ zwischen der Meridiankurventangente und der Symmetrieachse der Schale sind, nämlich

$$\left. \begin{aligned} a(\vartheta) &\equiv \frac{\varrho_3}{\varrho_2^2}, \quad b(\vartheta) \equiv \frac{1}{\varrho_2} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_3}{\varrho_2^2} \text{ctg } \vartheta, \quad c(\vartheta) \equiv -\frac{\text{ctg}^2 \vartheta}{\varrho_3}, \\ f(\vartheta) &\equiv \frac{2}{m} a(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\varrho_2} \right), \quad g(\vartheta) \equiv \frac{1}{m} \left[a(\vartheta) \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\varrho_2} \right) + b(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\varrho_2} \right) \right], \\ \mu^2 &= \frac{12}{h^2} \frac{m^2 - 1}{m^2} - \frac{1}{m^2 \varrho_3^2}; \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

¹ Vgl. C. B. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik, S. 494f. Berlin 1939.

hierin bedeutet $m (= 10/3)$ die Querdehnungszahl, ρ_2 den Krümmungshalbmesser der Meridiankurve und ρ_3 den Abschnitt auf der Meridiannormale zwischen Meridiankurve und Symmetrieachse. Die zweite Differentialgleichung — für eine Veränderliche χ — geht aus (19) hervor, indem man f und g durch $-f$ und $-g$ ersetzt, und für veränderliche Wandstärke h wären beide Gleichungen nur wenig umständlicher und könnten ebenfalls ganz nach dem folgenden Muster behandelt werden. Aus den acht Integralen U und χ und ihren Ableitungen $dU/d\vartheta$ und $d\chi/d\vartheta$ (nebst gewissen in der Regel leicht — eventuell ebenfalls mit dieser Methode — zu findenden Partikulärlösungen der nichthomogenen Gleichungen für U und χ) sowie aus den vorgeschriebenen Randbedingungen folgen alle Spannungen in bekannter, elementarer Weise, so daß es genügt, die Herleitung eines dieser Integrale zu zeigen.

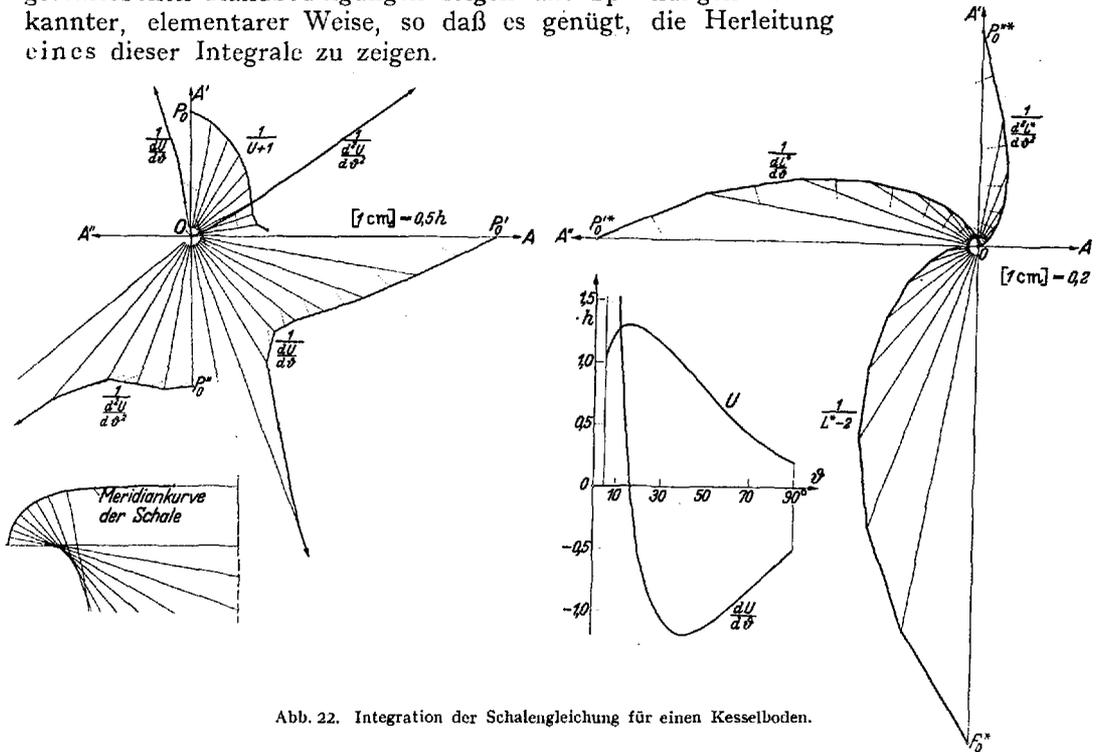


Abb. 22. Integration der Schalengleichung für einen Kesselboden.

Dies ist in Abb. 22 für den dort links unten im Meridianschnitt angegebenen Kesselboden geschehen. Der Boden ist gestaltet nach der Vorschrift, daß durchweg $\rho_2:\rho_3 = 1:5$ und daß $\rho_2 = 4h$ für $\vartheta = 90^\circ$ sein soll. Die Differentialgleichung vierter Ordnung (19) ist zerlegt in die zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$L^*(U) = a \frac{d^2U}{d\vartheta^2} + b \frac{dU}{d\vartheta} + cU, \tag{22}$$

$$\frac{d^2L^*}{d\vartheta^2} = -\frac{1}{a} \left[b \frac{dL^*}{d\vartheta} + cL^* + f \frac{dU}{d\vartheta} + (\mu^2 + g)U \right], \tag{23}$$

welche ein gekoppeltes System bilden, zu dessen Lösung eine U - und eine L^* -Ebene nebeneinander verwendet werden. Die Konstruktion ist in leicht verständlicher Weise mit $\vartheta = 90^\circ$ beginnend bis zu $\vartheta = 5^\circ$ durchgeführt (also diesmal im Gegensatz zu bisher von größeren zu kleineren Argumenten ϑ fortschreitend), und zwar mit den Anfangswerten

$$U = 0,2, \quad \frac{dU}{d\vartheta} = -0,5, \quad \frac{d^2U}{d\vartheta^2} = 1,0, \quad \frac{dL^*}{d\vartheta} = 1,0 \quad \text{für } \vartheta = 90^\circ.$$

Es ergab sich dabei als zweckmäßig, statt des Kehrwertes von U den Kehrwert von $U + 1$ aufzutragen und statt des Kehrwertes von L^* denjenigen von $L^* - 2$. Der

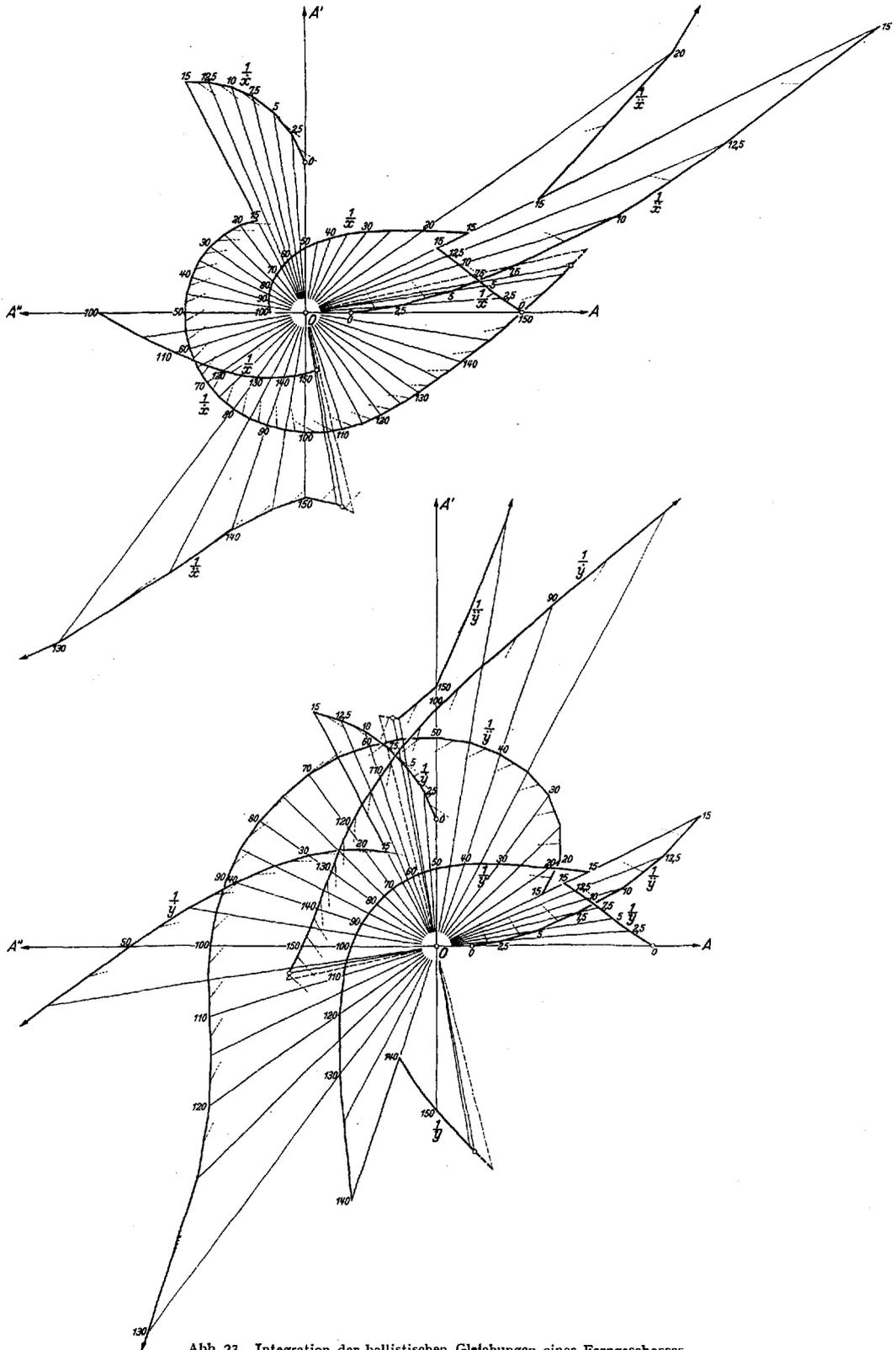


Abb. 23. Integration der ballistischen Gleichungen eines Ferngeschosses.

erste Schritt des Verfahrens geschieht in der Weise, daß für $\vartheta = 90^\circ$ die zu U , $dU/d\vartheta$ und $d^2U/d\vartheta^2$ gehörigen Punkte in der U -Ebene markiert werden, daß ferner aus (22) der zugehörige Wert L^* , aus (23) der zugehörige Wert $d^2L^*/d\vartheta^2$ berechnet wird, und daß dann die zu L^* , $dL^*/d\vartheta$ und $d^2L^*/d\vartheta^2$ gehörigen Punkte in der L^* -Ebene markiert und die beiden entsprechenden Polygonzüge gezeichnet werden. Die Drehung der beiden Achsenkreuze um $\Delta\vartheta = -10^\circ$ liefert — hier wieder mit dem Sehnenverfahren — die erste Näherung der nächsten Werte von U , $dU/d\vartheta$, L^* , $dL^*/d\vartheta$ und daraus zufolge (22) und (23) diejenigen von $d^2U/d\vartheta^2$ und $d^2L^*/d\vartheta^2$ nebst ihrer etwaigen Verbesserung, die man in der früher beschriebenen Weise erhält. Das Endergebnis ist in Gestalt der Kurven $U(\vartheta)$ und $dU/d\vartheta$ in Abb. 22 über einer Abszisse ϑ dargestellt.

Das vierte Beispiel betrifft ebenfalls ein gekoppeltes System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, nämlich die Ermittlung der Bahn und Geschwindigkeit eines Ferngeschosses. Am geeignetsten erweisen sich hier die Differentialgleichungen der Bewegung in kartesischen Koordinaten mit waagerechter x - und lotrechter y -Achse, also

$$\ddot{x} = -w(y, v) \frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = -w(y, v) \frac{\dot{y}}{v} - g(y). \tag{24}$$

Dabei bedeuten die Punkte Ableitungen nach der Zeit; g ist die (von der Höhe y nur schwach abhängige) Schwerebeschleunigung und $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ die Geschwindigkeit. Der auf die Masseneinheit bezogene Luftwiderstand w ist mit der Geschwindigkeit v , dem Kaliber $2R$, dem Geschossgewicht G , den Luftdichten δ_0 und δ_y für $y=0$ und y verbunden durch die Formel

$$w = \frac{R^2 \pi}{G \delta_0} g(y) \delta_y v^2 K(v), \tag{25}$$

wobei $K(v)$ eine bekannte Funktion von v bedeutet¹. Die Luftdichte δ_y ist als Funktion der Höhe ebenfalls bekannt.

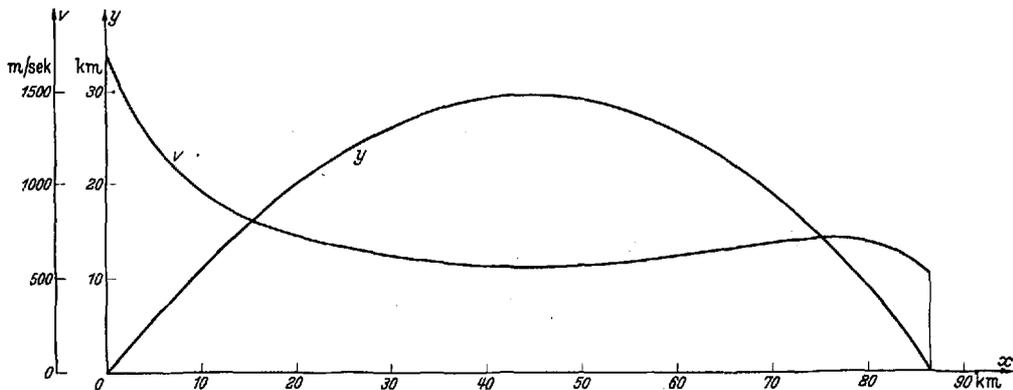


Abb. 24. Schußbahn und Geschwindigkeit.

Im vorliegenden Fall ist ein Ferngeschosß vom Kaliber $2R = 21$ cm und vom Gewicht $G = 120$ kg gewählt und als Anfangsgeschwindigkeit bei der Elevation $\varphi = 50^\circ$ der Wert $v_0 = 1700$ m/sec. Abb. 23 zeigt die graphische Integration des Systems (24) in einer x - und einer y -Ebene. Die Längeneinheit beträgt 50 km, die Zeiteinheit $(100/\pi)$ sek; die den einzelnen Punkten beige-schriebenen Ziffern bedeuten die Zeiten in sek. Als Schrittlängen sind anfänglich 2,5 sek, später 5 sek genommen,

¹ Vgl. C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Bd. 1, S. 60, 5. Aufl., Berlin 1925. Aus bestimmten Gründen sind die dort angegebenen Werte hier noch mit 0,7 multipliziert.

und es ist bei der Konstruktion wiederholt davon Gebrauch gemacht, daß man zu x und y nach Belieben additive Festwerte hinzufügen darf; auch hat es sich als zweckmäßig erwiesen, bei der 15. Sekunde den Maßstab im Verhältnis 5:2 zu ändern. Im einzelnen bedarf die Konstruktion keiner weiteren Erklärung, da sie — nach dem Sehnungsverfahren — in der früher geschilderten Weise durchgeführt ist. Die Genauigkeit reicht praktisch völlig aus, weil ja doch die nicht erfaßbaren Störungen infolge atmosphärischer Einflüsse (Wind usw.) weit größer sind als die Ungenauigkeiten der Zeichnung (die natürlich im Original viel größer durchgeführt worden ist).

Das Ergebnis zeigt Abb. 24. Die Schußhöhe beträgt 29,6 km, die Schußweite 86,35 km, die Schußzeit 155,75 sek. Die ebenfalls über x aufgetragene Geschwindigkeit v läßt erkennen, daß das Geschöß beim Aufsteigen in der Troposphäre rasch abgebremst wird, dann aber seine Geschwindigkeit von rund 600 ÷ 700 m/sek in der Stratosphäre außerordentlich lang beibehält. Dies erklärt die große Schußweite. In der Stratosphäre unterscheidet sich die Schußbahn nicht merklich von einer Parabel.

(Eingegangen am 22. Juli 1939.)

Ausbildung eines Wirbels an der Kante einer Platte¹.

Von Leo Anton in Berlin-Grünau.

1. Einleitung. Bewegt man eine Platte aus der Ruhe heraus quer zu ihrer Breite durch eine ruhende Flüssigkeit, so bildet sich bei Beginn der Bewegung an jeder Kante ein kleiner Wirbel, der durch stetiges Hinzufließen neuer Flüssigkeitsteile sich vergrößert und in die Strömung hineinwächst. Bei senkrechter Plattenströmung ist zu Beginn der Flüssigkeitsbewegung die Lage der beiden Wirbel symmetrisch. In einem späteren Entwicklungszustand ist sie, wie v. Kármán nachgewiesen hat, labil. Es entstehen sodann am oberen und unteren Plattenende abwechselnd neue Wirbel, die sich hinter der Platte in einer bestimmten Weise gruppieren (Kármánsche Wirbelstraße).

Im folgenden soll der soeben geschilderte Strömungsbeginn für die senkrecht angeströmte Platte, wo also Stromrichtung und Platte einen rechten Winkel miteinander bilden, behandelt werden. Da in diesem Falle die Wirbel spiegelbildlich zueinander liegen, beschränkt sich unsere Untersuchung auf die Ausbildung und das Anwachsen eines Wirbels an einer Plattenkante. Die Platte denken wir uns durch einen plötzlichen Stoß in Bewegung gesetzt und dann gleichförmig, d. h. mit konstanter Geschwindigkeit, weiterbewegt. Für ein mit der Platte mitbewegtes Bewegungssystem soll also die Geschwindigkeit im Unendlichen während des Strömungsverlaufes unveränderlich bleiben. Außerdem möge die Platte seitlich unendlich lang ausgedehnt sein, so daß wir einen ebenen, nicht stationären Strömungsvorgang haben.

Die Lösung des Problems wird wesentlich erleichtert durch Vernachlässigung der Reibung. Dies ist zulässig, da die Reibung der meisten in Frage kommenden Flüssigkeiten sehr klein ist. Wir legen daher eine ideale Flüssigkeit, bei der also die Zähigkeit Null ist, zugrunde und verlangen ferner von ihr, daß sie homogen und unzusammendrückbar ist. In dieser Flüssigkeit ist dann die beschriebene Strömung aufzufassen als eine Potentialströmung mit freien, auf einer Unstetigkeitsfläche, einer sog. Wirbelfläche, verteilten Wirbeln. Das Geschwindigkeitsfeld einer solchen Strömung ist eindeutig bestimmt durch die Geschwindigkeit im Unendlichen und durch die Form und Wirbelbelegung dieser Fläche.

¹ Göttinger Dissertation.