

# Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern.

Von F. Wendt in Clausthal.

## I. Einleitung.

Die turbulente Bewegungsform einer Flüssigkeit ist dadurch gekennzeichnet, daß die Geschwindigkeit an jeder Stelle zeitlichen Schwankungen sowohl bezüglich ihrer Richtung als auch ihrer Größe unterworfen ist. Bei der gewöhnlichen Turbulenz, d. h. bei der im Mittel geradlinigen Bewegung einer homogenen Flüssigkeit sind die Querkomponenten, wenn man von der unmittelbaren Wandnähe absieht, allein durch die Schwankungen in der Hauptbewegungsrichtung bedingt. Es gibt aber Strömungen, bei denen gewissermaßen von außen eingeprägte Kräfte die Querbewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen beeinflussen. Die physikalische Natur eines solchen quer zur Hauptrichtung wirkenden Kraftfeldes kann — wenn man einmal von nichtmechanischen Kräften absieht — von zweierlei Art sein. Hat man z. B. die Strömung einer inhomogenen Flüssigkeit, deren Dichte eine Funktion der Höhe ist, in einer horizontalen Richtung im Schwerfeld, so äußern sich die Querkraften als Auftriebskräfte<sup>1</sup>. Nimmt die Dichte mit der Höhe ab, so ist die Schichtung stabil, sie wirkt dem turbulenten Austausch entgegen. Die stabilisierenden Kräfte können dabei so groß werden, daß sie die Turbulenz ganz auslöschen. Eine Zunahme der Dichte mit der Höhe ergibt eine instabile Schichtung und damit verstärkte Turbulenz.

Ähnlich verhält sich die Bewegung einer homogenen Flüssigkeit in gekrümmter Bahn, wobei die Schichtung durch die Zentrifugalkräfte erzeugt wird. In der vorliegenden Arbeit wird der einfachste Fall dieser Art, die ebene Strömung in konzentrischen Kreisen experimentell untersucht. Der erste Versuch einer Theorie für diesen Fall, und zwar für die ausgebildete Turbulenz, stammt von L. Prandtl<sup>2</sup>, der unter Benutzung seines allgemeinen Ansatzes über den sog. Mischungsweg durch eine Energiebetrachtung einen Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen sucht. Im ersten Teil dieser Arbeit wird die ausgebildete Turbulenz untersucht, um die Ergebnisse der Prandtl'schen Arbeit zu prüfen. Der zweite Teil bringt Beobachtungen über kritische Reynoldssche Zahlen, und zwar sowohl für instabile als auch für stabile Schichtung der Flüssigkeit. Diesbezügliche theoretische Arbeiten stammen von G. I. Taylor<sup>3</sup> und H. Schlichting<sup>4</sup>.

## II. Versuchseinrichtung.

Die Flüssigkeit — es wurde, im ersten Teil der Arbeit, reines Wasser verwendet, später auch Wasser-Glyzerinmischungen — befindet sich zwischen zwei konaxialen Zylindern, die unabhängig voneinander jeder mit einer eigenen Drehzahl angetrieben werden können. Der Apparat besteht aus einem Außen- und einem Innenzylinder, die beide auf einer gemeinsamen, in ihrer Mitte durchbohrten Grundplatte festgelötet sind

<sup>1</sup> z. B. Temperaturschichtung strömender Luft, siehe L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc., Lond. 97 (1920) S. 354; Philos. Mag. (6) 49 (1925) S. 81. L. Prandtl, Vortr. a. d. Geb. d. Aerodyn. Aachen 1929, S. 1.

<sup>2</sup> L. Prandtl, a. a. O. S. 4.

<sup>3</sup> G. I. Taylor, Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. 223 (1923) S. 289.

<sup>4</sup> H. Schlichting, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1932 S. 160.

und so ein Gefäß von Kreisringquerschnitt bilden (Abb. 1). In dieses Gefäß tauchen von oben zwei Zylinder ein, von denen der eine  $z_1$  auf der Mittelachse befestigt, der andere  $z_2$  in der aus der Figur ersichtlichen Weise gegenüber  $z_1$  drehbar gelagert ist. Die oberen und die unteren Lager der beiden Zylinder  $Z$  und  $z_1$  sind durch drei auf der Tischplatte befestigte Säulen miteinander zu einem festen Gestell verbunden.  $S$  und  $s$  sind die Antriebsscheiben des äußeren bzw. des inneren Zylinders. Die zu untersuchende Strömung spielt sich in dem Raum zwischen den beiden Zylindern  $Z$  und  $z_2$  ab. In diesem Raum befinden sich die beiden Drucksonden, ein gewöhnliches Pitotrohr zur Messung des Gesamtdrucks vom Durchmesser  $d = 0,8$  mm und eine statische Sonde  $d = 1,2$  mm mit einem Kranz von fünf seitlichen Löchern. Sie sind an zwei diametral liegenden Stellen

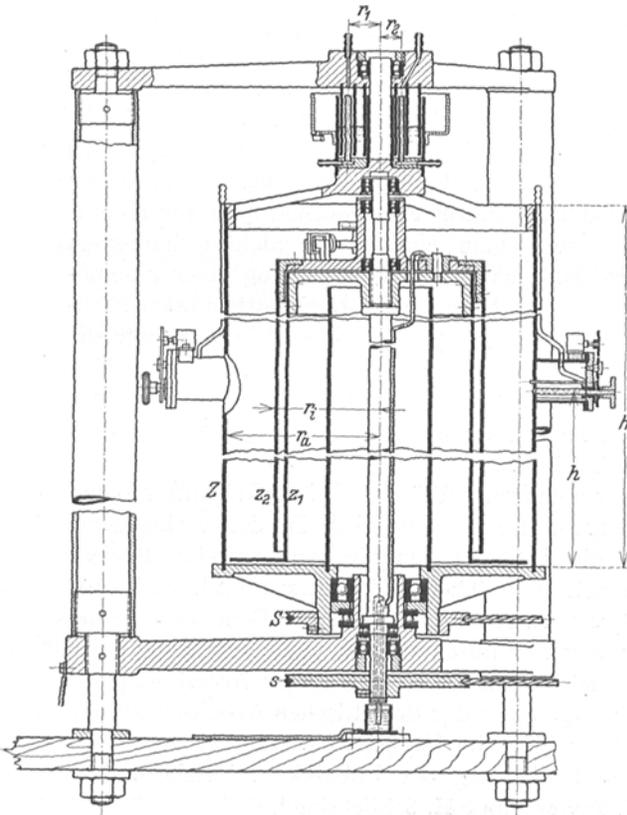


Abb. 1. Schnittzeichnung des Versuchsapparats.

am äußeren Zylinder angebracht etwa in seiner halben Höhe ( $H = 58$  cm,  $h = 25$  cm). Die Verstellung der Sonden geschieht durch eine Schraubenspindel, die von außen her durch ein Handrädchen gedreht wird. Durch eine Zahnradübersetzung werden die Umdrehungen der Spindel auf einen Zähler übertragen, und zwar in der Weise, daß jede volle Umdrehung des Zählers eine radiale Verschiebung der Sonde um 1 mm bedeutet. Außer diesen beiden Sonden ist noch in derselben Höhe, um  $90^\circ$  versetzt, eine Wandanbohrung vorhanden. Von den drei Meßstellen führen Leitungen an der Wand des Außenzylinders entlang senkrecht nach oben. Die zu messenden Drucke werden in einen eisernen Topf weitergeleitet, der bis etwa zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt ist zum Absperrern gegen den äußeren Atmosphärendruck. In das dreiarmlige Stück, welches das obere Lager trägt, sind drei zylindrische Wände luftdicht eingelötet, die in dem Quecksilbertopf zwei Kammern bilden. Von hier aus führen Druckleitungen nach außen zum Manometer. Dieses, ein gewöhnliches U-Rohrmanometer, ist

ebenso wie der Apparat mit Wasser gefüllt und enthält in seinem oberen Teil Luft, so daß die Drucke in cm-Wassersäule gemessen werden. Zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung werden die beiden Sonden an den Quecksilbertopf angeschlossen. Die Verteilung des statischen Druckes erhält man, wenn man Wandanbohrung und statische Sonde gegeneinanderschaltet. Zur Festlegung des Koordinatensystems geht man von einer Stellung aus, bei der die Sonden eine der beiden Zylinderwände gerade berühren. Einer Berührung der Außenwand entspricht z. B. die Koordinate  $r = r_a - \frac{1}{2}d$  ( $d$  Sondendurchmesser).

Die doppelte Ausführung des inneren Zylinders gestattet eine Messung des Drehmomentes, das von dem äußeren Zylinder  $Z$  durch die Flüssigkeit hindurch auf den inneren Zylinder  $z_2$  übertragen wird. Die beiden Zylinder  $z_1$  und  $z_2$  werden durch eine geeichte Feder zu einem Anschlag gezogen. Die Anordnung der Feder ist aus Abb. 2 zu ersehen. Das auf dem Zylinder  $z_2$  befestigte Joch  $J$  trägt ein Schneidenlager zur Auf-

nahme des einen Endes der Feder. Das andere Ende der Feder kann vermittelt einer an dem Ring  $R$  gelagerten, und damit auf  $z_1$  festen Spindel verschoben werden. Die Spindelmutter besitzt eine Marke, deren Stellung auf der darüber befindlichen Skala ein Maß für die Federspannung gibt. Der Ausschlag des Stiftes  $St$  ist durch zwei Platinkontakte begrenzt, die in zwei verschiedenen Stromkreisen liegen (Abb. 3). Es sei der Stromkreis  $i_1$  geschlossen, d. h. die Lampe  $g_1$  brennt. Wird nun das Reibungsmoment

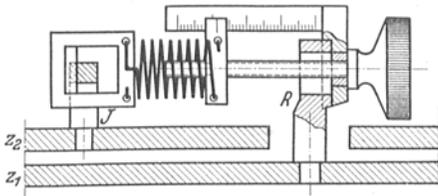


Abb. 2. Federwaage zur Messung des Widerstandes.

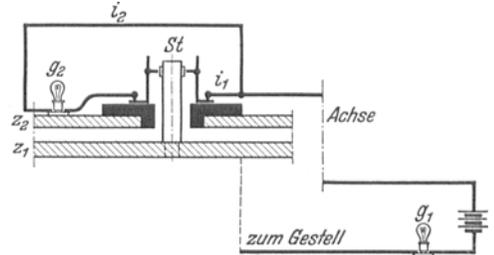


Abb. 3. Schaltschema zur Widerstandsmessung.

der Flüssigkeit bei einer bestimmten Umdrehungszahl des Apparates so groß, daß die beiden Zylinder  $z_1$  und  $z_2$  sich gegeneinander verschieben, so wird der Strom unterbrochen, die Lampe  $g_1$  erlischt. Dann ist das Reibungsmoment gerade gleich dem eingestellten Federmoment. Wird die Drehzahl weiter gesteigert, so wächst damit auch das Reibungsmoment. Der Kontaktstift schlägt auf der gegenüberliegenden Seite an und schließt den Stromkreis  $i_2$ , d. h. beide Lampen  $g_1$  und  $g_2$  leuchten auf. Wegen der

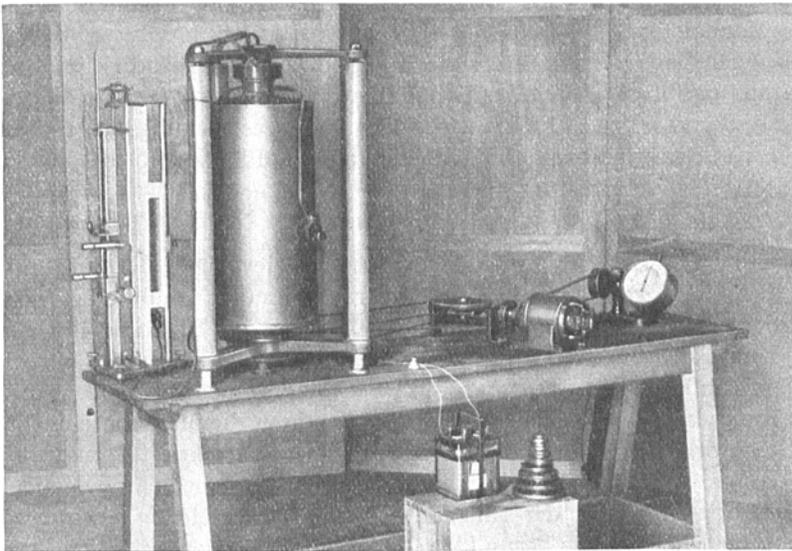


Abb. 4. Gesamtansicht der Versuchseinrichtung.

Hintereinanderschaltung leuchtet  $g_1$  jetzt schwächer als beim anderen Kontakt, so daß man auch ohne Beobachtung von  $g_2$  das Vorzeichen der Gleichgewichtsstörung erkennen kann. — Die Stromzuleitung erfolgt durch die Achse des inneren Zylinders (Abb. 1), die in einen Quecksilbernapf eintaucht, von der übrigen Apparatur isoliert, zu den Platinspitzen. Die Ableitung geht durch das Gestell und das Lager. Zur Messung der Reibungsmomente wurden je nach ihrer Größenordnung verschieden starke Federn benutzt.

Der Antrieb der Zylinder erfolgt durch einen Motor mit Vorgelege (Abb. 4). Für dieses Vorgelege stand ein Satz von zehn Scheiben mit verschiedenen Radien von 8,00

bis 1,33 cm zur Verfügung, so daß das Verhältnis der Drehzahlen des äußeren und des inneren Zylinders stufenweise geändert werden konnte. Für den inneren Zylinder  $z_2$ , der ausgewechselt werden konnte, waren drei verschiedene Zylinder vorgesehen mit den Radien:

$$r_i = 10,00 \text{ cm}; \quad 12,50 \text{ cm}; \quad 13,75 \text{ cm}.$$

Der Radius des äußeren Zylinders war stets

$$r_a = 14,70 \text{ cm}.$$

Es wurde also die Strömung bei folgenden Spaltweiten untersucht:

$$r_a - r_i = 4,70 \text{ cm}; \quad 2,20 \text{ cm}; \quad 0,95 \text{ cm}.$$

Der Apparat war stets bis zu einer Höhe von etwa 40 cm, vom Boden des Gefäßes aus gemessen, mit Flüssigkeit gefüllt.

### III. Versuche.

Bei den Geschwindigkeits- und Druckmessungen war es leider nicht möglich, während der Rotation des Zylinders die Sonden von einem Meßpunkt zum nächsten nachzustellen. Eine für diesen Zweck bestimmte Vorrichtung hielt den bei höheren Tourenzahlen der Zylinder auftretenden Kräften nicht stand. Daher mußte, abgesehen von dem Sonderfall des stillstehenden äußeren Zylinders, nach jeder Einzelmessung der Apparat zum Stillstand gebracht werden. Das Manometer zeigte erst nach mehreren Minuten einen konstanten Endwert an; so lange brauchte die Flüssigkeit, bis sie im Mittel stationär geworden war. Ferner bewirkt der enge Querschnitt der Sonden eine beträchtliche Einstellzeit des Manometers.

Die Messungen liefern zunächst nur die Werte der Geschwindigkeit relativ zu den Sonden. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit für einen nicht mitrotierenden Beobachter als die Summe bzw. Differenz aus der Eigengeschwindigkeit der Sonden und der gemessenen Geschwindigkeit, je nachdem ob die Flüssigkeit die Sonde, oder die Sonde die Flüssigkeit überholt:

$$u = r \omega_a \pm u_{\text{relativ}}$$

( $\omega_a$  Winkelgeschwindigkeit des äußeren Zylinders,  $r$  jeweiliger Radius, auf dem sich die Sonden befinden). Der Drehsinn des äußeren Zylinders muß selbstverständlich so gewählt werden, daß das Pitotrohr mit seiner Öffnung der Richtung der Geschwindigkeit relativ zum Rohr zugekehrt ist. Bei der Messung des statischen Druckes ist der Drehsinn ohne Einfluß, doch wird man ihn zweckmäßig auch hier wie oben wählen, da sonst die Störung durch den eigenen Schaft der Sonde in die Messung eingeht. Die Meßwerte der Geschwindigkeitshöhen sind noch mit einer Korrektur  $I$  zu versehen. Diese ergibt sich daraus, daß die beiden Stellen der Druckabnahme, nämlich die Stellen, an denen der mitrotierende und der ruhende Teil der Druckleitung aneinander grenzen, auf etwas verschiedenen Radien liegen (Abb. 1). Im umlaufenden Teil herrscht ein radiales Druckgefälle, das der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht hält:

$$\frac{d\dot{p}}{dr} = \rho r \omega_a^2$$

( $\rho$  Dichte der Flüssigkeit). Durch Integration ergibt sich als Korrektur  $I$ :

$$\Delta h_I = \frac{\dot{p}_1 - \dot{p}_2}{\rho g} = \frac{1}{g} \frac{\omega_a^2}{2} (r_1^2 - r_2^2)$$

( $g$  Schwerebeschleunigung,  $r_1$  und  $r_2$  Radien der äußeren Druckabnahmestellen).

Der statische Druck wird also stets zu klein gefunden. Diese Korrektur läßt sich auch durch das Experiment finden, nämlich durch die Rotation der beiden Zylinder

mit gleicher Winkelgeschwindigkeit. Bei diesem Betriebszustande gibt die Geschwindigkeitsmessung gerade den Wert dieser Korrektur unabhängig von der Stellung der Sonden. Die Beobachtungswerte sind noch mit einem Fehler behaftet, der von dem Mitschleppen bzw. Aufstauen der Flüssigkeit durch die Sonden herrührt. Er stellt sich allerdings als klein heraus und liegt an der Grenze der Meßgenauigkeit (maximal etwa 2% des Staudruckes). Er ist nur bei den instabilen Profilen, bei denen der äußere Zylinder festgehalten wurde, berücksichtigt worden. Gemessen wird er dadurch, daß man im Manometer Staurohr und Wandanbohrung gegeneinanderschaltet und zweimal abliest: 1. bei herausgezogener dritter Sonde, 2. mit der dritten Sonde auf demselben Radius wie das Staurohr. Die Differenz der beiden Manometerablesungen ergibt die Störung durch die statische Sonde. Die Wirkung der beiden Sonden zusammen wird wegen ihrer ungefähr gleichen geometrischen Gestalt eliminiert durch Anbringen der doppelt so großen Korrektur.

Bei den statischen Druckmessungen ist zu der vom Manometer angezeigten Druckdifferenz zwischen der statischen Sonde und der Wandanbohrung des äußeren Zylinders noch das radiale Druckgefälle infolge der Eigenrotation der Meßstellen hinzuzufügen:

$$\frac{p(r_a) - p(r)}{\rho g} = \frac{r}{g} \frac{\omega_a^2}{2} (r_a^2 - r^2) \pm \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta h_r''$$

( $\Delta p$  gemessene Druckdifferenz). Die Druckverteilungen kann man theoretisch zur Kontrolle der Geschwindigkeitsverteilungen benutzen. An jeder Stelle  $r$  muß erfüllt sein:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{\bar{u}^2}{r}. \quad (1)$$

Jedoch war die Genauigkeit der Druckverteilungsmessungen nicht groß genug, um eine sichere graphische Differentiation zu ermöglichen.

Die Reibungsmomente wurden auf folgende Weise gemessen. Die geeichte Feder wird auf eine bestimmte Spannung eingestellt, der Stromkreis  $i_1$  ist geschlossen (Abb.3). Dann wird nach dem Anfahren die Tourenzahl der Zylinder so lange gesteigert, bis der Kontakt eben unterbrochen ist und der Kontaktstift eine Mittelstellung zwischen den beiden Anschlüssen eingenommen hat. Beide Glühlampen sind dunkel. Es ist hier von Wichtigkeit, daß man nach jeder Änderung der Tourenzahl während der Messung abwartet, bis die Bewegung stationär, d. h. im Mittel stationär geworden ist. Ist z. B.  $n_i$  (Tourenzahl des inneren Zylinders) größer als  $n_a$ , so wird beim Steigern der Tourenzahl im ersten Augenblick das Widerstandsmoment, das in diesem Falle auf den inneren Zylinder verzögernd wirkt, stets zu groß erscheinen, da die Geschwindigkeitsunterschiede in der Nähe der Innenwand anfangs zu groß sind. Es dauert einige Zeit, bis durch die Wirkung der Zähigkeit und des turbulenten Austausches die endgültige Geschwindigkeitsverteilung und damit das endgültige Reibungsmoment hergestellt ist. Bei rotierendem inneren Zylinder gestaltet sich die Messung wesentlich schwieriger als bei ruhendem. Ist man nämlich in der Nähe derjenigen Tourenzahl, deren Reibungsmoment gleich dem eingestellten Federmoment ist, so wird jede kleine Ungleichförmigkeit im Antrieb des inneren Zylinders ein Hin- und Herpendeln des Kontaktstiftes hervorrufen. Erst bei weiterem Anwachsen der Tourenzahl wird er sich fest auf der anderen Seite anlegen. Dies bedeutet ein klares Überwiegen des Reibungsmomentes. Man erhält also statt eines Meßpunktes zu jedem Federmoment ein Drehzahl-Intervall. Durch Verwendung von endlosen Gummiriemen<sup>1</sup> zum Antrieb der Zylinder an Stelle der vorher verwendeten Lederschnur konnte jedoch in jedem Falle die Größe dieses Intervalles klein gehalten werden, bis zu etwa vier Umdrehungen in der Minute. Als Meßpunkt wurde die Mitte dieses Intervalls genommen, die Meßgenauigkeit betrug also im Mittel  $\pm 2$  Umdr./Min.

<sup>1</sup> Die Drehzahlen beider Zylinder wurden stets mit Zähler und Stoppuhr bestimmt.

Die von dem jeweiligen Betriebszustand abhängige Höhe der benetzten Oberfläche des inneren Meßzylinders  $z_2$

$$h = \frac{M}{2 \pi r_i^2 \tau_i} = h_0 + \Delta h$$

( $\tau$  Schubspannung,  $h_0$  Höhe bei  $n_a = n_i = 0$ ) wurde durch mehrere elektrische Kontakte gemessen, die an seinem Umfang in verschiedener Höhe angebracht waren. Ihre Schaltung zeigt Abb. 5. Der Strom wird bei Hebung oder Senkung des Wasserspiegels durch das Wasser selbst geschlossen bzw. unterbrochen. Als Anzeigeelement dient ein Milliampereometer. Für jeden Betriebszustand  $\frac{n_i}{n_a} = \text{konst}$  wurde eine Kurve aufgenommen, die die Höhenkorrektur  $\Delta h$  als Funktion der Tourenzahl  $n_i$  oder  $n_a$  ergab. Die Anzahl der Meßpunkte ist zunächst gleich der Zahl der vorhandenen Kontakte; durch Variieren des  $h_0$  kann sie jedoch vervielfacht werden. Es ergaben sich bei den Spaltweiten 0,95 cm und 2,20 cm für alle Betriebszustände stets positive Werte für  $\Delta h$ , bei  $r_a - r_i = 4,70$  cm stets negative, jedoch vernachlässigbar kleine Werte.

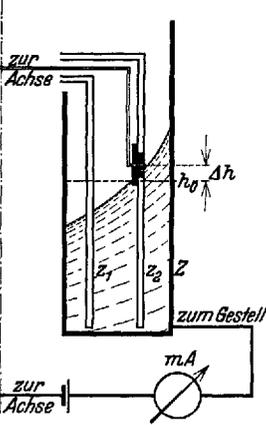


Abb. 5. Messung der Steighöhe der Flüssigkeit.

Die Zweidimensionalität der Strömung wird in der Hauptsache durch die Verhältnisse am Boden des Gefäßes beeinträchtigt<sup>1</sup>. Um festzustellen, wieweit diese Störung in der

Höhe der Sonden noch wirksam ist, wurde das Geschwindigkeitsprofil des Betriebszustandes  $n_i = 0$  mehrfach aufgenommen, das eine Mal (I) mit einem mitrotierenden Gefäßboden ( $\omega = \text{konst} = \omega_a$ ), das andere Mal (II) mit einem ruhenden Boden ( $\omega = \text{konst} = \omega_i = 0$ ), der aus Gründen der Momentenmessung nicht einfach an dem

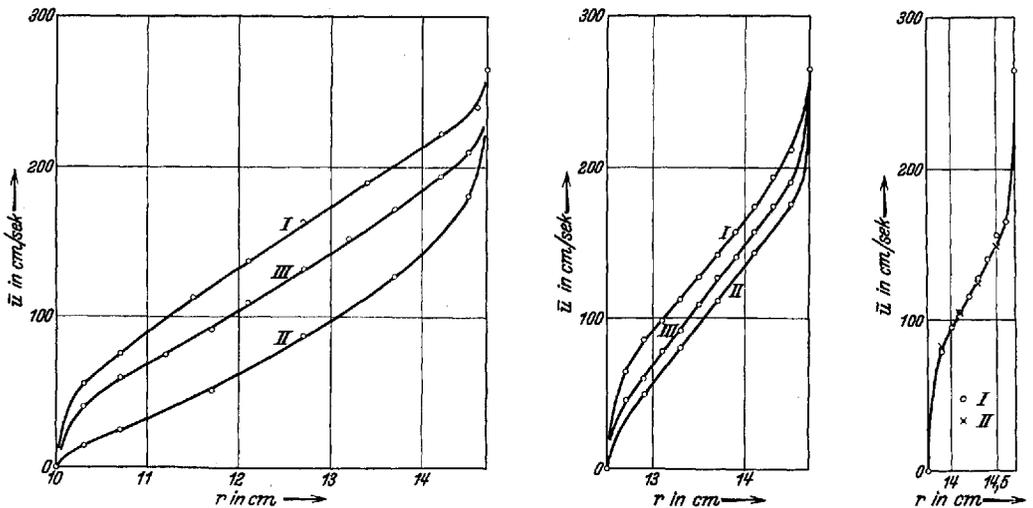


Abb. 6. Einfluß der Bodenstörung auf die Geschwindigkeitsverteilung.

Zylinder  $z_2$ , sondern an  $z_1$  befestigt war (Abb. 1). Das Ergebnis ist für die verschiedenen Spaltweiten aus Abb. 6a, b, c zu ersehen. Die Störung ist bei a und b noch beträchtlich. Um eine einigermaßen gute Annäherung an den Fall der ebenen Strömung zu erzielen, wurde, wie auch bei den späteren Momentenmessungen (s. S. 585), eine von innen her bis zur Spaltmitte reichende Bodenplatte verwendet (Kurve III). Für den instabilen

<sup>1</sup> Das Verhältnis Spaltbreite:Flüssigkeitshöhe war im ungünstigsten Fall etwa 1:9.

Zustand  $n_a = 0$  war auch bei dem weitesten Spalt kein Einfluß der Bodenstörung auf die Geschwindigkeitsverteilung festzustellen. Sogar die Größe des Moments wurde nicht meßbar geändert.

### IV. Meßergebnisse.

**1. Geschwindigkeits- und Druckverteilungen.** Die einzelnen Geschwindigkeitsprofile (zeitlicher Mittelwert der Tangentialgeschwindigkeit  $\bar{u}$  als Funktion des Radius  $r$ ) in Abb. 7a, b, c wurden nach folgendem System erhalten: Zunächst wird die Drehzahl eines Zylinders, z. B. die des äußeren, festgehalten und die des inneren stufenweise geändert, und zwar ausgehend von dem Werte des äußeren bis auf Null abnehmend, dann mit entgegengesetztem Drehsinn wieder bis auf den alten Wert zunehmend. Entsprechend ergeben sich die übrigen Profile, nur mit dem Unterschied, daß die beiden Zylinder ihre Rolle vertauschen.

Tabelle der Drehzahlen

zu Abb. 7a $r_a - r_i = 4,70$ cm				zu Abb. 7b $r_a - r_i = 2,20$ cm				zu Abb. 7c $r_a - r_i = 0,95$ cm			
Nr.	$n_a$	$n_i$	$n_i:n_a$	Nr.	$n_a$	$n_i$	$n_i:n_a$	Nr.	$n_a$	$n_i$	$n_i:n_a$
0	+ 172	+ 172	+ 1,0	0	+ 172	+ 172	+ 1,0	0	+ 172	+ 172	+ 1,0
1	+ 172	+ 125	+ 0,725	1	+ 172	+ 150	+ 0,875	1	+ 172	+ 150	+ 0,875
2	+ 172	+ 86	+ 0,5	2	+ 172	+ 125	+ 0,725	2	+ 172	+ 125	+ 0,725
3	+ 172	+ 54	+ 0,312	3	+ 172	+ 86	+ 0,5	3	+ 172	+ 86	+ 0,5
4	+ 172	+ 29	+ 0,166	4	+ 172	+ 43	+ 0,25	4	+ 172	+ 43	+ 0,25
5	+ 172	+ 0	+ 0,0	5	+ 172	+ 0	+ 0,0	5	+ 172	+ 29	+ 0,166
6	+ 172	- 43	- 0,25	6	+ 172	- 43	- 0,25	6	+ 172	+ 0	+ 0,0
7	+ 172	- 86	- 0,5	7	+ 172	- 86	- 0,5	7	+ 172	- 29	- 0,166
8	+ 172	- 172	- 1,0	8	+ 172	- 172	- 1,0	8	+ 172	- 86	- 0,5
9	+ 86	- 172	- 2,0	9	+ 125	- 172	- 1,376	9	+ 172	- 172	- 1,0
10	+ 43	- 172	- 4,0	10	+ 43	- 172	- 4,0	10	+ 86	- 172	- 2,0
11	+ 0	- 172	$\infty$	11	+ 0	- 172	$\infty$	11	+ 43	- 172	- 4,0
12	- 43	- 172	+ 4,0	12	- 43	- 172	+ 4,0	12	+ 0	- 172	$\infty$
13	- 86	- 172	+ 2,0	13	- 86	- 172	+ 2,0	13	- 53	- 172	+ 3,2
				14	- 125	- 172	+ 1,376	14	- 86	- 172	+ 2,0
								15	- 125	- 172	+ 1,376
								16	- 150	- 172	+ 1,147

Die Messungen zeigen, daß man zwei verschiedene Arten von Profilen zu unterscheiden hat:

1. Die Profile mit sanften Geschwindigkeitsübergängen an den Wänden und einem durch die stabile Zentrifugalkraftschichtung stark behinderten Austausch. Hierzu gehören in erster Linie alle Profile mit von innen nach außen wachsender Geschwindigkeit und gleichem Drehsinn der beiden Zylinder. Abb. 7a und b Nr. 1 bis 5, 7c Nr. 1 bis 6.

2. Die Profile mit sehr flachem Verlauf, einem durch die Instabilität verursachten weitgehenden Ausgleich der Geschwindigkeiten im Innern der Flüssigkeit, dafür aber mit einem sehr ausgesprochenen Geschwindigkeitssprung an der Wand. Das sind vor allem die Profile, bei denen die Geschwindigkeit von innen nach außen abnimmt.

Die Profile mit entgegengesetztem Drehsinn der beiden Zylinder gehören zum Typus 1 oder 2, je nachdem, ob der äußere oder der innere Zylinder schneller rotiert. Teilweise stellen sie auch Zwischenformen dar, z. B. Abb. 7a und b Nr. 6 bis 9.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Profile, die trotz der hohen Reynoldsschen Zahl keine beträchtlichen Abweichungen von der Laminarströmung zeigen. Sie können dazu dienen, ein wichtiges Ergebnis der Prandtl'schen Theorie zu prüfen. Nach ihr gibt es einen Wertebereich einer die Stabilität der Strömung messenden Größe  $\frac{d\bar{u}}{dr} / \frac{\bar{u}}{r}$ , so daß innerhalb dieses Intervalls aus energetischen Gründen Turbulenz nicht möglich ist, also bei noch so hoher Reynoldsscher Zahl eine turbulente Strömung sich nicht erhalten.

kann. Außerhalb dieses Intervalls besteht kein solches Turbulenzverbot, die kritischen Zahlen können endliche Werte haben. Die Grenze des Intervalls ist nach der Seite der Instabilität hin der Wert  $-1$ . Das bedeutet, daß der Drehimpuls unabhängig vom Radius ist ( $\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r} = 0$ ), die Strömung sich also im indifferenten Gleichgewicht befindet. Ist diese Bedingung an jeder Stelle des Spalts erfüllt, so ergibt sich daraus durch Integration der Potentialwirbel  $\bar{u}r = \text{konst.}$

Diese Potentialströmung ist, wie die Messung zeigt, verwirklicht, wenn die obige

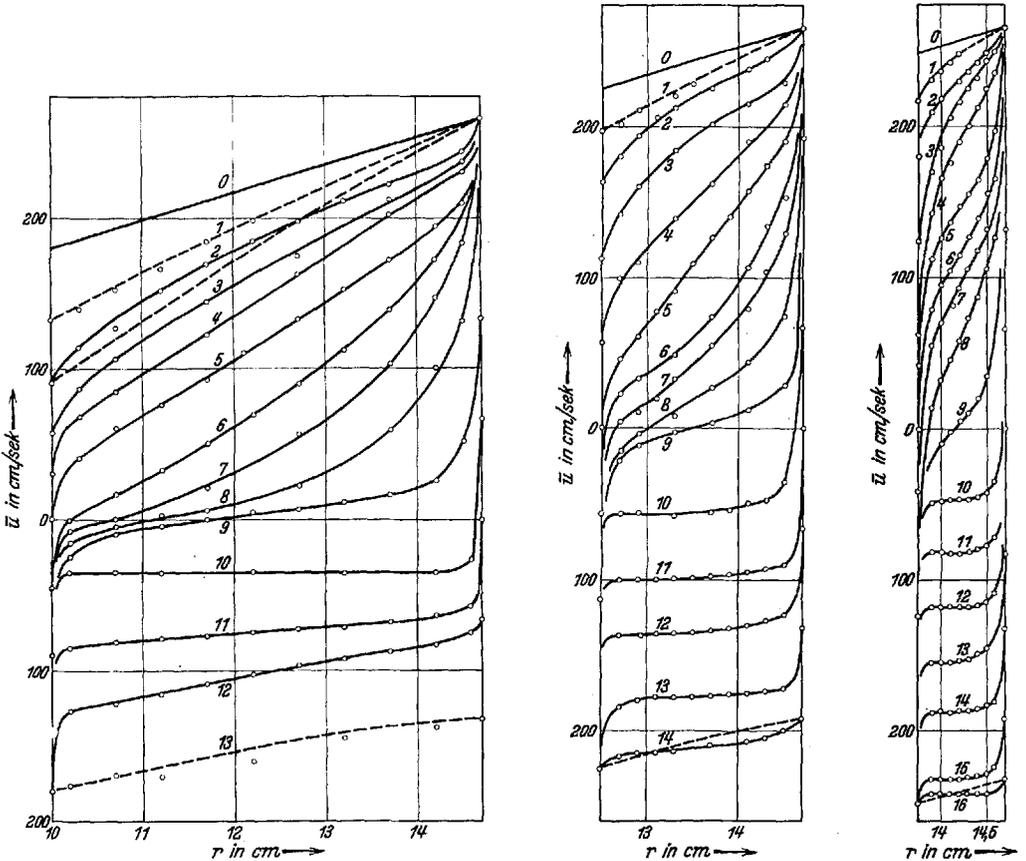


Abb. 7. Geschwindigkeitsverteilungen.

Bedingung an den beiden Wänden erfüllt ist, d. h. die Drehzahlen sich umgekehrt wie die Quadrate der Radien verhalten:

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{r_a^2}{r_i^2} \quad (\text{Abb. 7a Nr. 13, Abb. 7b Nr. 14, Abb. 7c Nr. 16})$$

Das zum Vergleich eingezeichnete Laminarprofil ist in bekannter Weise gegeben durch

$$u = ar + \frac{b}{r}, \tag{2}$$

wo  $a$  und  $b$  durch die Wandgeschwindigkeiten bestimmt sind:

$$a = \frac{u_a r_a - u_i r_i}{r_a^2 - r_i^2}, \quad b = -\frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{u_a}{r_a} - \frac{u_i}{r_i} \right).$$

Für alle turbulenten instabilen Profile sollte nach dieser Theorie an jeder Stelle  $\left(\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r}\right) < 0$

sein, was jedoch nicht zutrifft. Der Drehimpuls ist im Innern nahezu konstant, zeigt stellenweise sogar eine schwache Zunahme nach außen.

Auf der Seite der Stabilität liegt die Turbulenzgrenze nach Prandtl bei  $\frac{d\bar{u}}{dr} / \frac{\bar{u}}{r} = 2$ .

Ist diese Bedingung über den ganzen Spalt erfüllt, so folgt durch Integration  $\frac{\bar{u}}{r^2} = \text{konst.}$

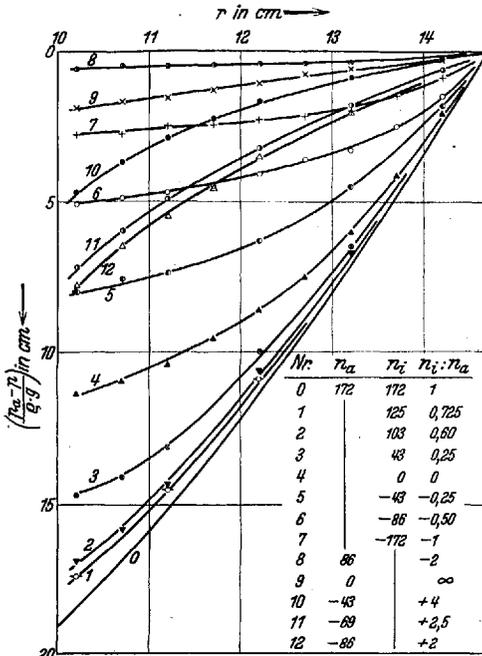


Abb. 8 a.

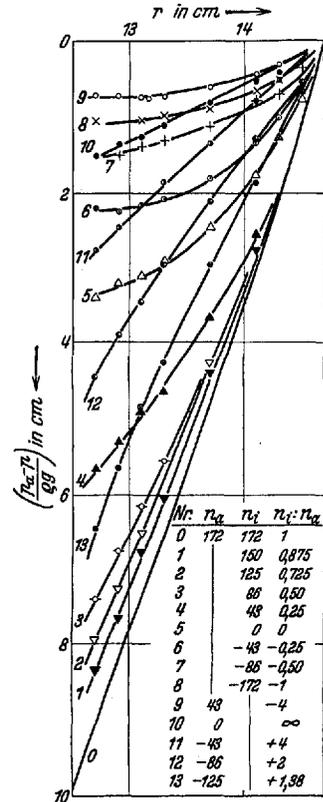


Abb. 8 b.

Abb. 8 a bis c. Druckverteilungen.

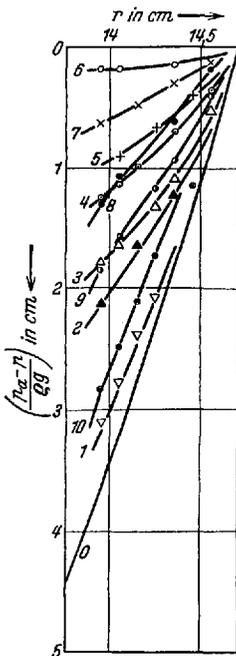


Abb. 8 c.

Nr.	$n_a$	$n_i$	$n_i : n_a$
0	172	172	1
1		125	0,725
2		43	0,25
3		28,5	0,166
4		0	0
5		-28,5	-0,166
6		-172	-1
7	0		$\infty$
8	-54		+3,2
9	-86		+2
10	-125		+1,38

Verhalten sich die Drehzahlen der Zylinder wie ihre Radien, so ist auch im Innern der Flüssigkeit die Strömung überall laminar, Abb. 7 a und b Nr. 1. (Bei dem engsten Spalt konnte aus Gründen der Meßgenauigkeit kein solches Profil mehr beobachtet werden.) Ob wirklich der Wert  $z$  des Stabilitätsgrades und kein größerer Wert die untere Grenze der Turbulenz angibt, wird später bei dem Ansatz für die Schubspannung (S. 588) untersucht.

Abb. 8 a, b, c zeigt einige Druckverteilungen.

**2. Reibungsmomente.** Das Drehmoment  $M$ , das von dem einen Zylinder durch die Flüssigkeit hindurch auf den anderen übertragen wird, ist Oberfläche mal Schubspannung mal Radius, also

$$M = 2 \pi r \cdot h \tau(r) \cdot r.$$

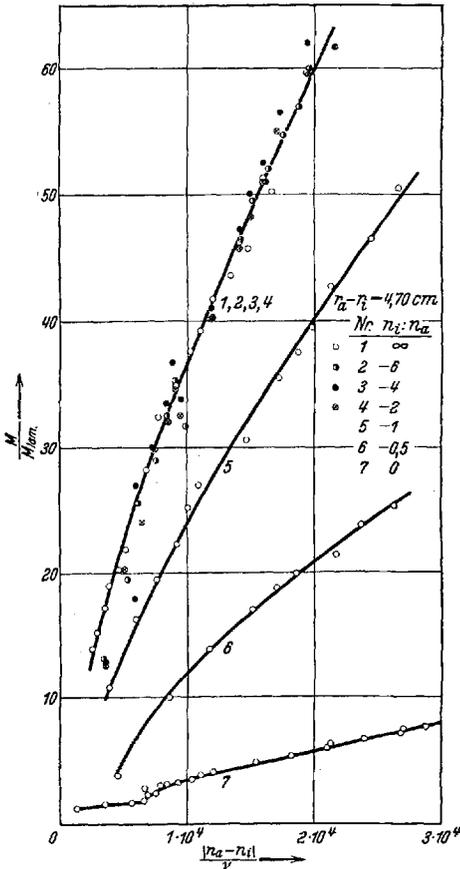


Abb. 9a.

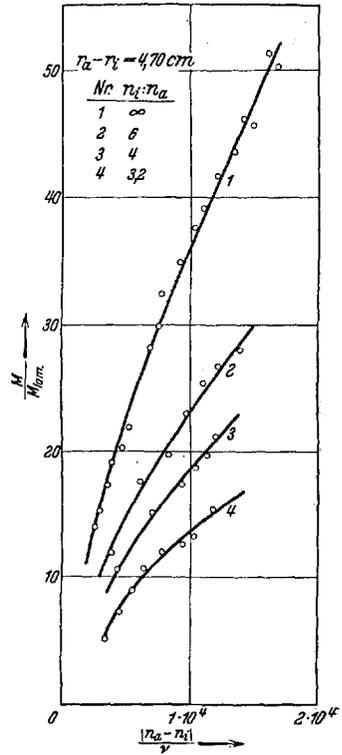


Abb. 9a'.

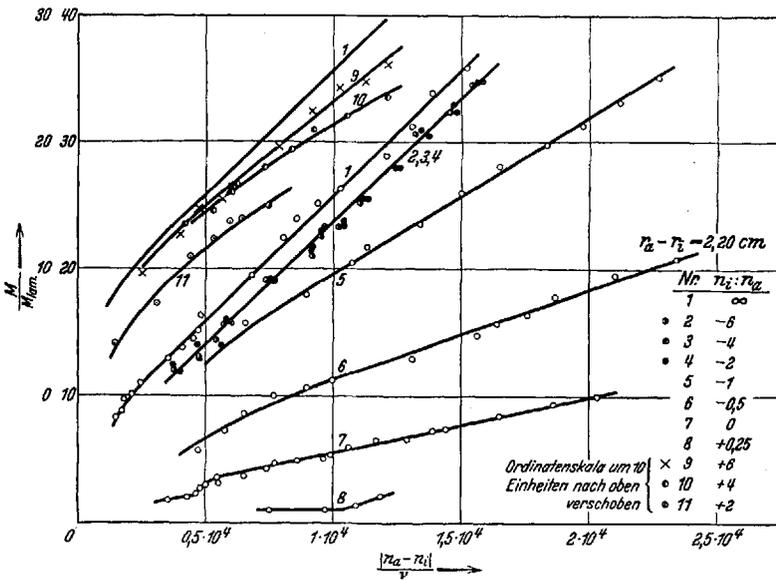


Abb. 9b.

Speziell an der Innenwand gilt

$$M = 2 \pi r_i h \cdot \tau(r_i) \cdot r_i$$

mit demselben Wert von  $M$ , da ja die Strömung, im Mittel wenigstens, stationär sein soll. Und zwar ist  $M$  das Moment der Schubspannung, die auf ein Stück der Oberfläche von der Höhe  $h$  wirkt. Setzt man für  $\tau_i$  den Wert der laminaren Schubspannung ein:

$$\tau_i = \mu \left[ \left( \frac{du}{dr} \right)_{r=r_i} - \frac{u_i}{r_i} \right] \quad (\mu \text{ Zähigkeit}) \quad (3)$$

und berücksichtigt gleichzeitig Formel (2), so ergibt sich das laminare Moment zu

$$M_{lam} = -4 \pi \mu h \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{u_a}{r_a} - \frac{u_i}{r_i} \right) = -\frac{8 \pi^2}{60} \mu h \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} (n_a - n_i). \quad (4)$$

Im folgenden sind alle gemessenen Werte der Momente durch Division mit den auf diese Weise berechneten zugehörigen laminaren Momenten ( $h$  Höhe der benetzten Oberfläche des Meßzylinders  $z_2$ ) dimensionslos gemacht worden. Abb. 9a, b, c, a', bringt die Momente für jede Spaltweite zunächst abhängig von der relativen Winkelgeschwindigkeit der beiden Zylinder  $\frac{|n_a - n_i|}{\nu}$ , wo  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  die kinematische Zähigkeit ist. Längs jeder einzelnen Kurve ist das Verhältnis der Drehzahlen der beiden Zylinder konstant. Aus der für große Abszissen annähernd geradlinigen Form der Kurven kann man auf ein näherungsweise quadratisches<sup>1</sup> Widerstandsgesetz schließen:

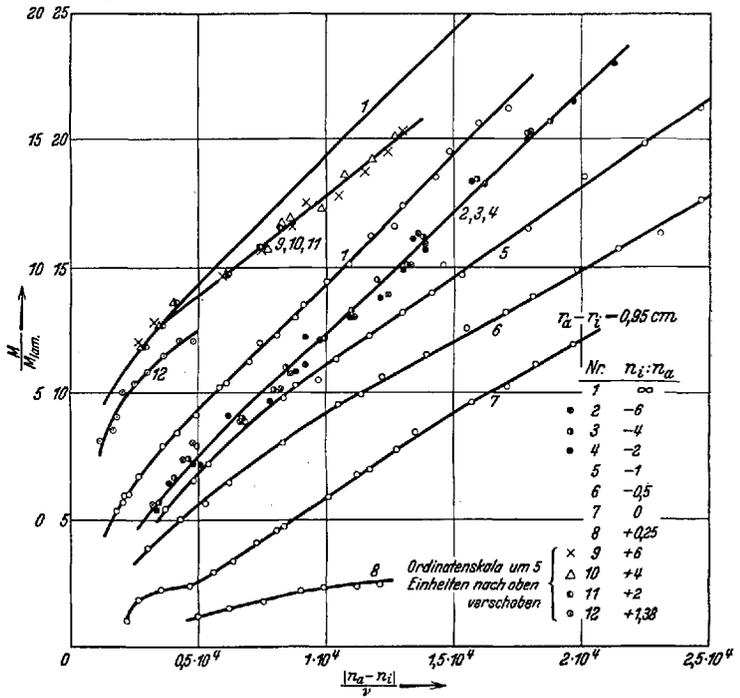


Abb. 9a bis d. Reibungsmomente abhängig von der relativen Drehzahl der beiden Zylinder bei festem Drehzahlverhältnis.

$$M \sim (n_a - n_i)^2 *$$

Abb. 10a, b, c zeigt die Momente in Abhängigkeit von  $n_i/n_a$  als Kurvenscharen mit dem Parameter  $\frac{|n_a - n_i|}{\nu}$ . Für die Abszisse  $\infty$ , d. h.  $n_a = 0$ , sind die Ordinatenwerte am Rande der Figur angemerkt.

Das Gebiet der Laminarströmung liegt um den Abszissenwert  $+ 1$  (Rotation der Flüssigkeit als starrer Körper) herum und reicht bei den einzelnen Spaltweiten verschieden weit nach rechts und nach links. Hier verlaufen definitionsgemäß alle Kurven parallel zur Abszissenachse im Abstand 1. In diesem Gebiet konnten allerdings Meßpunkte wegen der Kleinheit der Momente mit der Wasserfüllung nicht mehr erhalten werden. Die letzten Meßpunkte liegen noch im turbulenten Bereich.

<sup>1</sup> Wegen der Division durch  $M_{lam}$ .

\* Der untersuchte Bereich Reynoldsscher Zahlen wurde für die beiden speziellen Betriebszustände  $n_a = 0$  und  $n_i = 0$  wesentlich ausgedehnt und hierfür auch Widerstandsformeln gefunden (S. 592 u. 593).

In welcher Weise sich der Übergang zu dem Gebiet der Laminarströmung vollzieht, ist damit noch nicht geklärt. Sicher muß die Art des Übergangs und die Größe des laminaren Gebiets von der Reynoldsschen Zahl abhängen. Vielleicht gibt es auch Übergangsprofile, die stückweise laminar und turbulent sind, denn die Turbulenzgrenze ist ja ein Differentialkriterium und gibt keine Aussage über das Gesamtprofil. Der Ansatz für die „scheinbare“ Schubspannung ist eher geeignet für die Untersuchung dieses Kriteriums. Er lautet bei Prandtl

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r} \right) \left| \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r} \right| f(\Theta); \tag{5}$$

dabei ist  $l$  der „Mischungsweg“ und  $\Theta$  der Quotient der beiden Arbeitsleistungen, einerseits der Zentrifugalkräfte, andererseits des turbulenten Austausches:

$$\Theta = \frac{\frac{\bar{u}}{r}}{\frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\bar{u}}{r}} \tag{6}$$

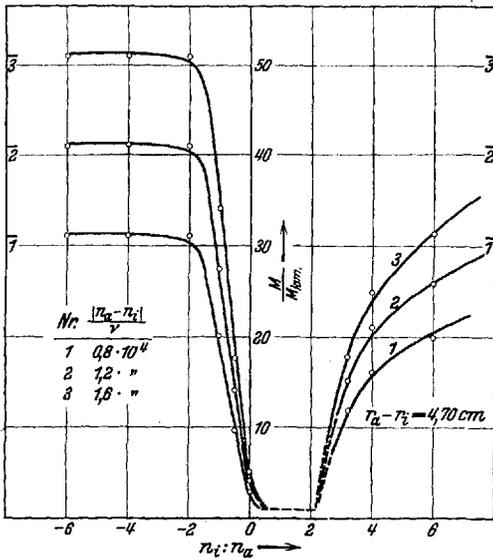


Abb. 10 a.

Abb. 10 a bis c. Reibungsmomente abhängig vom Drehzahlverhältnis.

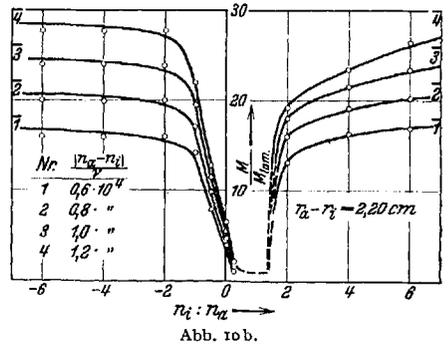


Abb. 10 b.

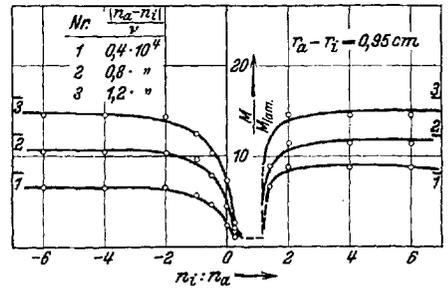


Abb. 10 c.

Die Funktion  $f(\Theta)$  wurde von ihm vermutet in der Form

$$f(\Theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Theta > 1, \\ \sqrt{1 - \Theta} & \text{für } \Theta < 1, \end{cases}$$

wobei dann  $l$  nur von der geometrischen Konfiguration des Gefäßes, d. h. der Spaltweite und dem Radius abhängen sollte.

Im folgenden sind nun für die stabilen Profile Abb. 7 a und b Nr. 2 bis 5, Abb. 7 c Nr. 3 bis 6 aus der obigen Formel die Werte von  $l^2 f(\Theta)$  abhängig vom Radius berechnet worden. Die Verteilung der scheinbaren Schubspannung ergibt sich aus

$$\tau' = \tau_{Gesamt} - \tau_{lam} = \frac{M}{2 \pi r h r} - \mu \left( \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\bar{u}}{r} \right).$$

Bei einem Teil der Profile sind die Werte von  $M$  aus Abb. 10 a, b, c durch Extrapolation entnommen. Die Flüssigkeitshöhe in Abhängigkeit vom Radius erhält man, wenn man die in cm W. S. gemessene statische Druckdifferenz (Abb. 8 a, b, c) auf die

absolut gemessene Steighöhe an der Innenwand (S. 582) bezieht. In Abb. 11a, b, c sind die Werte von  $l^2 f(\Theta)$  sofort in Abhängigkeit von  $\Theta$  mit  $r$  als Parameter aufgetragen. Hängt  $l$  nur von  $r$  ab, so müßten alle diese Kurven bis auf den Faktor  $l^2(r)$  dieselbe Funktion  $f(\Theta)$  darstellen. Auch müßten die  $l^2 f(\Theta)$ -Werte einen beträchtlichen Gang mit

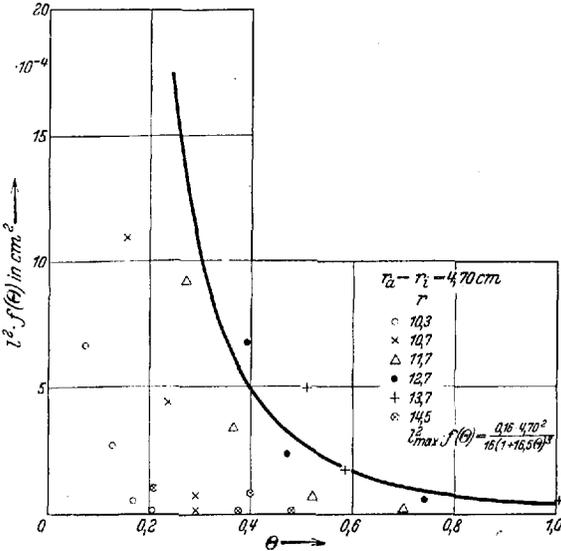


Abb. 11 a

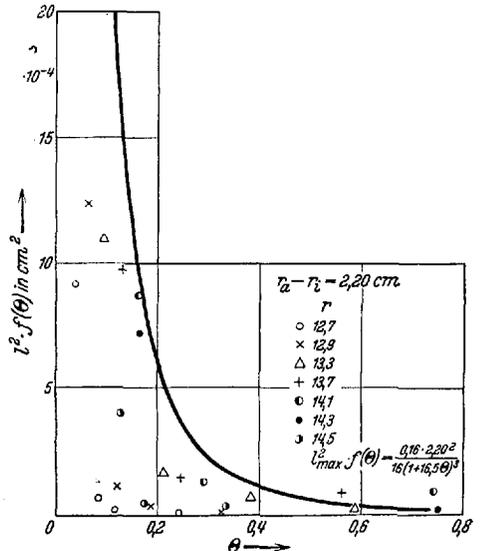


Abb. 11 b.

Abb. 11 a bis c. Mischungsweg und Stabilitätsgrad der Strömung.

der Spaltweite zeigen. (Setzt man für den geraden Kanal etwa  $l = 0,4 y \frac{(h - y)}{h}$ , wobei  $h = r_a - r_i$  ist, so wird  $l_{max} = 0,1 h$ .) Im Gegensatz dazu behalten sie jedoch für alle drei Spaltweiten dieselbe Größenordnung. Es ist also eine Abhängigkeit der  $l$ -Werte von  $\Theta$  anzunehmen, etwa  $l = r \varphi(\Theta)$  oder  $l = h \psi(\Theta)$ . Die Versuchswerte legen eine Darstellung nahe von der Form

$$l^2 f(\Theta) = \frac{A y^2 (h - y)^2}{h^2 (1 + C \Theta)^n} \tag{I}$$

Die Durchführung der Rechnung für den Wert  $y = \frac{h}{2}$  ergibt als einigermaßen brauchbare Werte der drei Konstanten

$$A = 0,16, \quad C = 16,5 \quad n = 3. \tag{Ia}$$

Diese Kurve ist in Abb. 11 a, b, c eingezeichnet.

Bei den instabilen Profilen versagt der obige Ansatz.  $l$  würde unendlich groß, das Moment müßte außerdem sein Vorzeichen im Innern der Flüssigkeit wechseln, was physikalisch sinnlos ist. Aber es werden in diesem Falle sicher auch die Voraussetzungen nicht zutreffen, unter denen die Rechnung durchgeführt wurde.

Der turbulente Austausch ist hier so lebhaft, daß Teilchen mit abweichender Geschwindigkeit bei ihrer Radialbewegung nicht in einer benachbarten Schicht stecken bleiben. Sie werden sich sehr weit von ihrer Ausgangslage entfernen, vielleicht sogar von einer Wand bis zur gegenüberliegenden vordringen, ähnlich wie bei einem sehr stark verdünnten Gase, wo die mittleren freien Weglängen der Moleküle die Größenordnung der Gefäßdimensionen annehmen und die Gase'se ihre Gültigkeit verlieren. Man muß daher unterscheiden

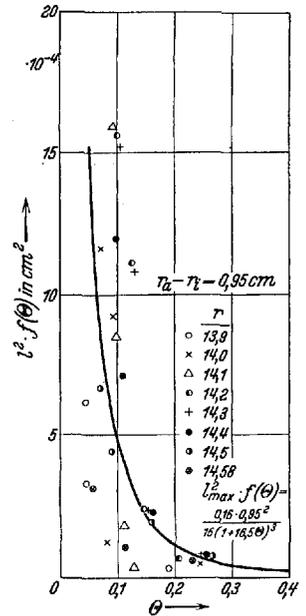


Abb. 11 c.

zwischen einer „schwachen“ Turbulenz mit Wegen, die klein sind gegen die Gefäßabmessungen, und einer „starken“ Turbulenz mit Wegen von der Größenordnung der Gefäßweite. Bei der starken Turbulenz kann natürlich der bisherige Mischungsansatz, der kleine Wege voraussetzt, kein sinnvolles Resultat ergeben.

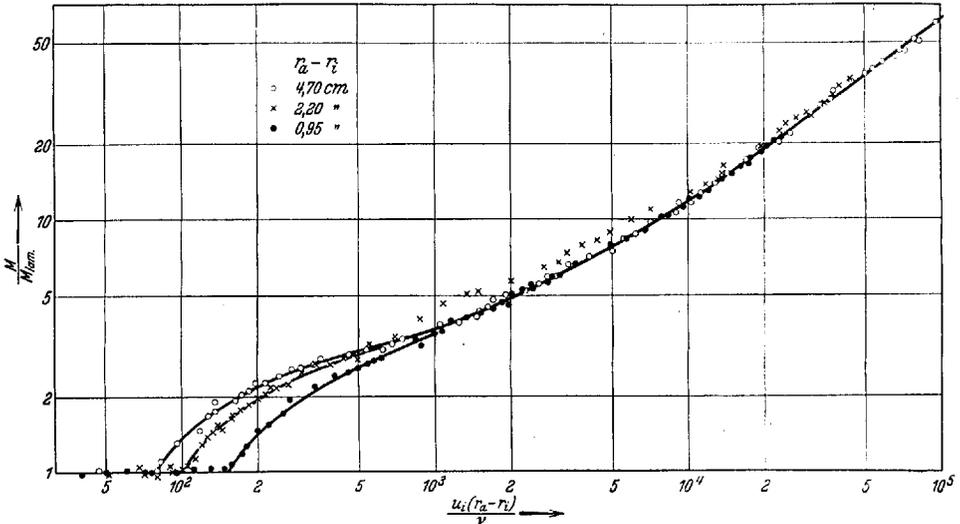


Abb. 12. Reibungsmomente bei der instabilen Strömung  $n_a = 0$ .

**3. Kritische Reynoldssche Zahlen.** Man kann erwarten, daß für genügend kleine Reynoldssche Zahlen stets die nur von der relativen Winkelgeschwindigkeit der beiden

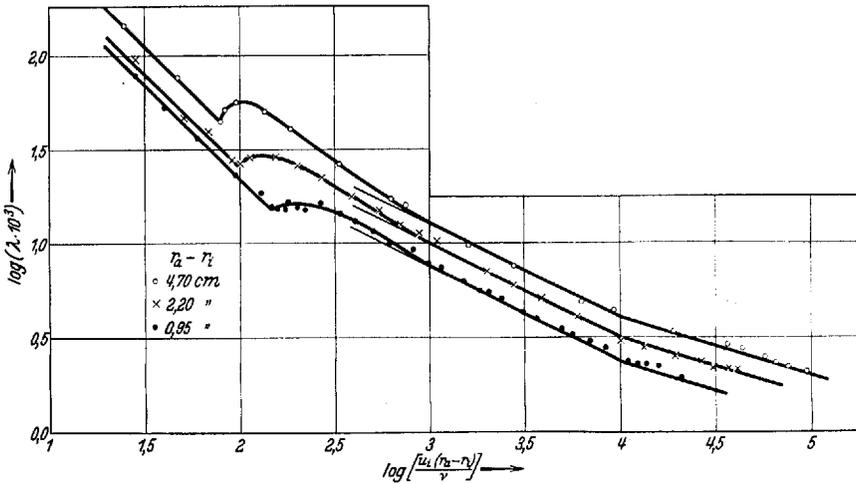


Abb. 13. Widerstandsziffer der instabilen Strömung.

Zylinder abhängige Laminarströmung [s. Formel (4) S. 587] auftreten wird, und daß der Umschlag zur Turbulenz in starkem Maße von der Schichtung der Flüssigkeit durch die Zentrifugalkräfte abhängt. Ist doch in gewissen Fällen die Möglichkeit der Turbulenz überhaupt ausgeschlossen (s. S. 583), d. h.  $R_{kr} = \infty$ .

Durch die Instabilität der Strömung wird die kritische Zahl gegenüber derjenigen der gewöhnlichen geradlinigen Strömung stark herabgesetzt, ein Resultat, zu dem schon

G. J. Taylor in seiner oben zitierten Arbeit<sup>1</sup> gelangte. Für den Sonderfall der Instabilität, bei dem der innere Zylinder rotiert, der äußere ruht, hat L. Prandtl die Taylorsche Rechnung zu einer Näherungsformel zusammengefaßt<sup>2</sup>:

$$R_{kr} = \left[ \frac{u_i (r_a - r_i)}{\nu} \right]_{kr}$$

$$\approx 41,2 \sqrt{\frac{r_m}{r_a - r_i}}, \quad (7)$$

wobei  $r_m$  ein Mittelwert des Radius, z. B.  $r_m = \frac{1}{2}(r_a + r_i)$  ist. Bei Erreichung dieser kritischen Zahl bilden sich in der Flüssigkeit, wie die photographischen Aufnahmen von Taylor zeigen, zunächst ganz regelmäßige, zur Achse symmetrische, stationäre<sup>1</sup> Wirbelanordnungen aus, die dann mit zunehmender Reynoldsscher

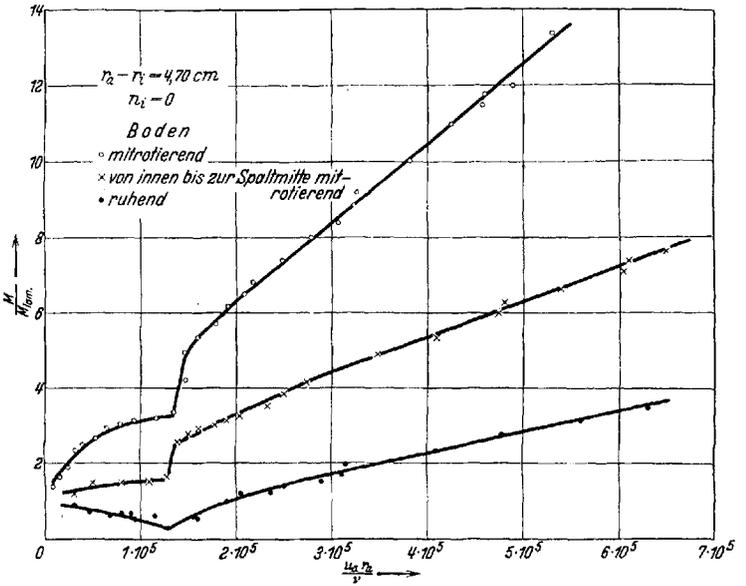


Abb. 14 a.

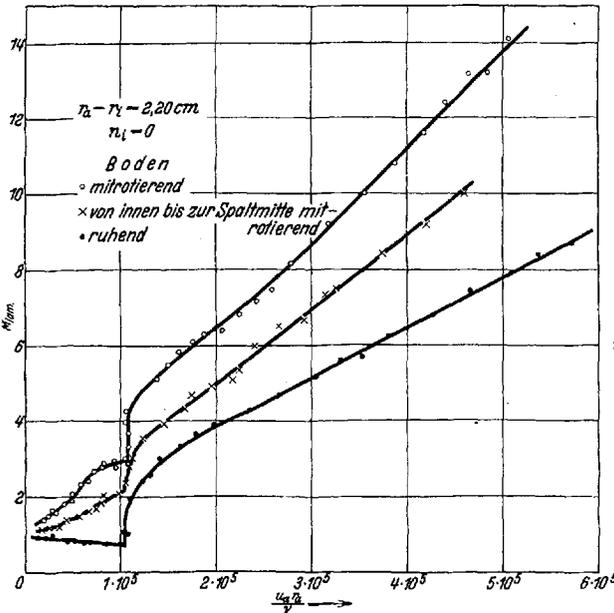


Abb. 14 b.

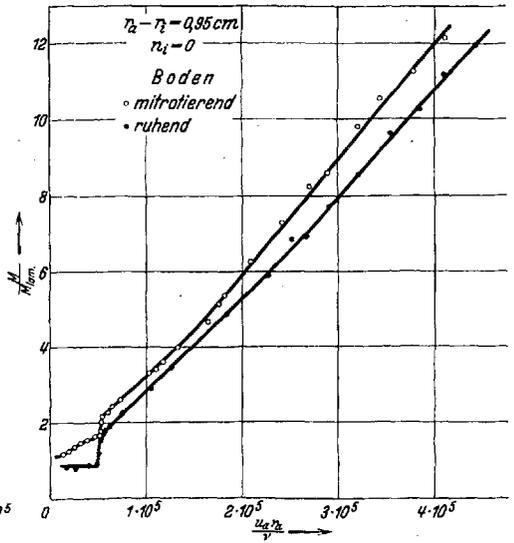


Abb. 14 c.

Abb. 14 a bis c. Reibungsmomente bei ruhendem inneren Zylinder.

Zahl in die ungeordnete Wirbelbewegung der Turbulenz übergehen. Die obige Formel wurde hier noch einmal nachgeprüft. Die dazu benutzte Methode ist die Widerstandsmessung. Das für die Laminarströmung lineare Widerstandsgesetz [s. Formel (4) S. 587] zeigt bei Erreichung der kritischen Zahl einen schroffen Umschlag: Das Reibungsmoment nimmt von da ab

<sup>1</sup> Siehe S. 577, Fußnote 3.

<sup>2</sup> L. Prandtl, Abriß der Strömungslehre, S. 100, Braunschweig 1931.

wesentlich stärker zu als mit der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit. Zur Erzielung meßbarer Geschwindigkeiten und Reibungsmomente des kritischen Bereichs Reynoldsscher Zahlen wurden Glycerin-Wasser-Gemische von wechselnder Zähigkeit zur Füllung der Apparatur verwendet. Die Werte der Zähigkeit lassen sich aus den laminaren Werten der Momente entnehmen, doch wurden sie zur Kontrolle noch mit einem der üblichen Kapillarrisosimeter bestimmt. Abb. 12 zeigt eine gute Übereinstimmung der gemessenen kritischen Zahlen mit Formel (7).

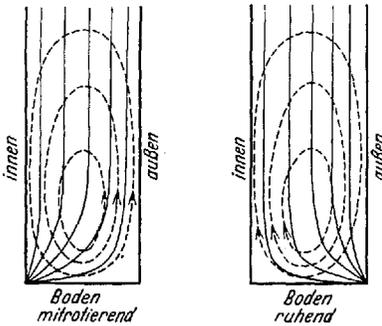


Abb. 15. Schema der Linien gleicher Winkelgeschwindigkeit.

Definiert man eine Widerstandszahl  $\lambda$  durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{\tau_i}{\frac{1}{2} \rho u_i^2}, \tag{8}$$

so lassen sich für  $\lambda$ , wie man aus Abb. 13 ersieht, im turbulenten Bereich brauchbare Näherungsformeln angeben. Es ist

$$\lambda_{lam} = 4 \frac{r_a^2}{(r_a + r_i) r_i} \frac{1}{R} \quad \text{mit} \quad R = \frac{u_i (r_a - r_i)}{\nu}. \tag{II a}$$

Für  $4 \cdot 10^2 < R < 10^4$  gilt näherungsweise

$$\lambda \approx 0,46 \left[ \frac{(r_a - r_i) r_a}{r_i^2} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{R^{0,5}}, \tag{II b}$$

wobei natürlich die untere Grenze i. a. noch von der kritischen Zahl abhängt. Für  $R > 10^4$  wird die Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl geringer:

$$\lambda \approx 0,073 \left[ \frac{(r_a - r_i) r_a}{r_i^2} \right]^{0,25} \frac{1}{R^{0,3}} \quad \text{für} \quad 10^4 < R < \begin{cases} 10^5 & 4,70 \text{ cm} \\ 0,46 \cdot 10^5 & 2,20 \text{ cm.} \\ 0,25 \cdot 10^5 & 1,95 \text{ cm} \end{cases} \tag{II c}$$

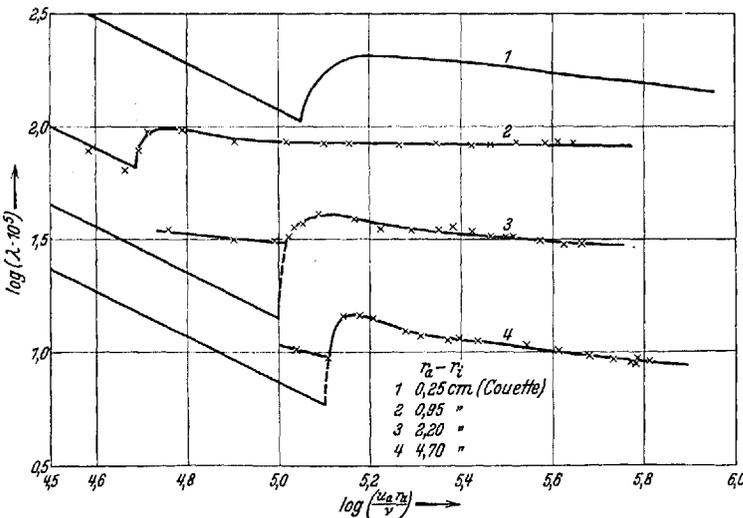


Abb. 16. Widerstandsziffer bei ruhendem inneren Zylinder.

Auch im Falle des stillstehenden Innenzylinders wurden kritische Zahlen beobachtet<sup>1</sup>. Diese liegen wesentlich höher als die dem Einsatz der Taylorwirbel im instabilen Fall entsprechen den Zahlen, was durch die stabilisierende Wirkung der Zentrifugalkraftschichtung erklärt wird. Das Ergebnis bringt Abb. 14a, b, c. Als Abszisse ist eine Reynoldssche Zahl mit der äußeren Wandgeschwindigkeit und dem Außenradius  $R = \frac{u_a r_a}{\nu}$  gewählt. Die für jede Spalt-

weite aufgenommenen drei Kurven, die sich durch verschiedene Bodenbedingungen unterscheiden: a) Boden mitrotierend, b) Boden ruhend, c) mitrotierender Boden, der

<sup>1</sup> Die in der Arbeit von H. Schlichting mitgeteilten, von mir gefundenen Werte müssen als zu klein angesehen werden. Die irrümlicherweise für Turbulenz gehaltene Abweichung von den laminaren Werten des Moments ist eine Folge von Sekundärströmungen, die durch die Bodenstörung verursacht werden (siehe unten).

von innen her bis zur Spaltmitte reicht — zeigen die große Empfindlichkeit dieser Strömung gegenüber solchen Bodenstörungen. Erst für ein Verhältnis Höhe:Spalt = 40:1 wird der Einfluß auf das Moment einigermaßen klein.

Zur Erklärung der Abweichungen von dem laminaren Wert unterhalb der kritischen Zahl kann die nebenstehende schematische Skizze der Linien gleicher Winkelgeschwindigkeit Abb. 15 a, b dienen, deren gegenseitiger Abstand ein Maß für die Schubspannung ist. Sie würde im Falle a) die Werte  $M > M_{lam}$ , im Falle b) auch Werte  $M < M_{lam}$  erklären. Allerdings kommt noch eine Sekundärströmung hinzu. Sie erfährt ihren Antrieb durch ein von oben her den bodennahen Schichten aufgeprägtes radiales Druckgefälle. Daraus ergibt sich im Falle a) eine Ablenkung der Bodenströmung nach außen infolge ihrer größeren Winkelgeschwindigkeit, im Falle b) infolge ihrer zu kleinen Geschwindigkeit eine solche nach innen. Die ganze Sekundärströmung hat — wenn man von der Tangentialkomponente absieht — etwa das Aussehen eines Wirbelrings mit dem Kern in der Nähe des Bodens. Die Folge ist in beiden Fällen zunächst eine erhöhte Durchmischung, also ein vergrößertes Moment. Doch werden durch die Sekundärströmung selbst die Isotachen noch verschoben, und zwar in dem Sinne, daß sie im Falle a) dichter an die Innenwand heran, im Falle b) von der Innenwand weggedrängt werden (mit Ausnahme vielleicht des Gebiets unten links in der Nähe des Bodens, Abb. 15 b).

Bevor näher auf die kritischen Zahlen eingegangen wird, sei noch eine Näherungsformel für den Widerstand angegeben. In Abb. 16 ist die Widerstandsziffer

$$\lambda = \frac{\tau_t}{\frac{1}{2} \rho u_a^2}, \quad (9)$$

$$\left( \lambda_{lam} = 4 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{R} \right), \quad (III a)$$

aufgetragen abhängig von der Reynoldsschen Zahl  $\frac{u_a r_a}{\nu}$ .

Während bei ruhendem äußeren Zylinder die Zähigkeit ganz wesentlich an dem Widerstandsmechanismus beteiligt ist, spielt sie bei ruhendem inneren Zylinder nur noch eine geringe Rolle (wahrscheinlich nur in unmittelbarer Wandnähe wie beim geraden Rohr). Für den asymptotisch von der Reynoldsschen Zahl unabhängigen Wert der Widerstandszahl gilt folgende grobe Formel:

$$\lambda \approx 0,0013 \left\{ 0,04 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^{10} \right\}. \quad (III b)$$

(Der Grenzwert von  $\lambda$  für  $r_a \rightarrow \infty$  ist allerdings nach dieser Formel nicht Null.)

Abb. 17 bringt die kritische Reynoldssche Zahl  $R_{kr} = \left( \frac{u_a r_a}{\nu} \right)_{kr}$  als Funktion von  $\frac{r_a - r_i}{r_a}$ ; ältere Werte von M. M. Couette<sup>1</sup> und A. Mallock<sup>2</sup>, sowie einige einer brieflichen Mitteilung von G. J. Taylor an Prof. Prandtl (März 1930) entnommenen Werte sind mit eingetragen.

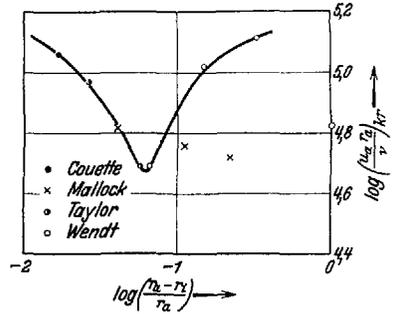


Abb. 17. Kritische Zahlen bei ruhendem inneren Zylinder.

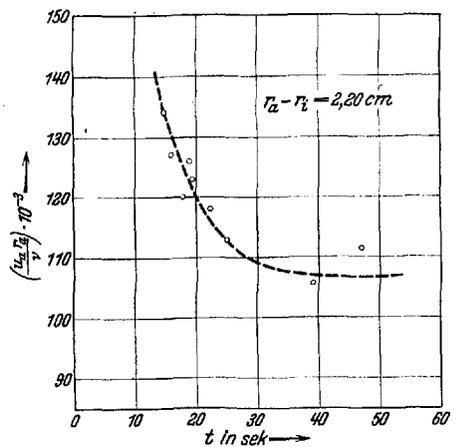


Abb. 18. Zeitlicher Einsatz der Turbulenz abhängig von der Reynoldsschen Zahl.

<sup>1</sup> M. M. Couette, Ann. Chim. Phys. (6) 21 (1890) S. 433.

<sup>2</sup> A. Mallock, Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) 187 (1896) S. 41.

Für die beiden Grenzfälle  $\frac{r_a - r_i}{r_a} = 0$  und  $\frac{r_a - r_i}{r_i} = 1$  liegen theoretische Untersuchungen vor. Die allerdings an das ausgebildete Laminarprofil anknüpfende Rechnung hat für die Strömung zwischen zwei parallelen gegeneinander bewegten Ebenen bei allen Reynoldsschen Zahlen Stabilität ergeben<sup>1</sup>. Das schließt jedoch nicht aus, daß von den Zwischenformen des Profils, die bei der zeitlichen Ausbildung der Strömung durch die Reibung auftreten, ein Übergang zur Turbulenz möglich ist. Tatsächlich führt die theoretische Untersuchung solcher unausgebildeten Profile auf eine Instabilität<sup>2</sup>. Ein Widerspruch besteht allerdings noch zwischen der so gefundenen kritischen Zahl

$$R_{kr} = \left(\frac{u h}{\nu}\right)_{kr} = 19300.$$

und dem durch Extrapolation gefundenen experimentellen Wert

$$\left(\frac{u_a r_a}{\nu}\right)_{kr} \left(\frac{r_a - r_i}{r_a}\right) = \left[\frac{u_a (r_a - r_i)}{\nu}\right]_{kr} \approx 2000 \quad \text{für} \quad \frac{r_a - r_i}{r_a} = 0.$$

( $h$  Abstand der beiden parallelen Ebenen,  $u$  ihre Relativgeschwindigkeit gegeneinander.)

Ebenso ist nach Schlichting<sup>3</sup> für den Fall des verschwindenden Innenzylinders  $\frac{r_a - r_i}{r_a} = 1$  Turbulenz als Anlaufeffekt möglich (doch hier wohl nur als eine vorübergehende Störungsanfächung, die im stationären Endzustand, bei der Rotation der Flüssigkeit als starrer Körper wieder abgeklungen sein muß).

Er erhält als kritische Zahl

$$R_{kr} = \left(\frac{u_a r_a}{\nu}\right)_{kr} = 66000,$$

während die Extrapolation in Abb. 17 auf den Wert

$$R_{kr} \approx 160000$$

führt.

Diese Ergebnisse sind eher miteinander in Einklang zu bringen, wenn man bedenkt, daß bei dem theoretischen Wert erst eine einzige Wellenlänge der „kleinen Störung“ ungedämpft bleibt.

Der zeitliche Einsatz der Turbulenz, abhängig von der Reynoldsschen Zahl, konnte bei dem mittleren Spalt  $h = 2,20$  cm einigermaßen verfolgt werden. Es ergab sich qualitativ der Verlauf der Kurve in Abb. 8 der Schlichtingschen Arbeit, wobei natürlich nur der linke Ast in Frage kommt, da die einmal angefachte Störung hier nicht wieder verschwindet. Es wurde das zu der betreffenden Reynoldsschen Zahl gehörige laminare Moment an der Meßfeder eingestellt und die Zeit vom Beginn der Bewegung an bis zum Ausschlag der Federwaage bestimmt (s. Abb. 18). In diesem Wert ist allerdings auch diejenige Zeit mitenthalten, die der Zylinder braucht, um aus der Ruhe heraus auf die entsprechende Geschwindigkeit zu kommen. Der Umschlag zur Turbulenz erfolgt ziemlich kraß, die Waage schlägt energisch aus.

## V. Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur experimentellen Untersuchung des Einflusses von Fliehkräften auf die Turbulenz. Die Flüssigkeit befindet sich zwischen zwei konaxialen Zylindern, die unabhängig voneinander jeder mit einer eigenen Drehzahl

<sup>1</sup> A. Sommerfeld, Atti IV. Congr. Int. Mathem. Roma 1909. R. v. Mises, Heinrich-Weber-Festschrift (1912) S. 112. L. Hopf, Ann. Physik 44 (1914) S. 1.

<sup>2</sup> H. Schlichting, Ann. Physik 14 (1932) S. 905.

<sup>3</sup> Siehe Fußnote 4 von S. 577.

angetrieben werden können. Im ersten Teil der Arbeit wird die ausgebildete Turbulenz untersucht. Gemessen wurde die Geschwindigkeits- und Druckverteilung quer über den Spalt hinweg sowie das durch die Flüssigkeit hindurch übertragene Drehmoment. Je nach dem Charakter der durch die Fliehkräfte erzeugten Schichtung hat man zwei verschiedene Typen von Geschwindigkeitsprofilen zu unterscheiden: Eine instabile Form mit einem weitgehenden Geschwindigkeitsausgleich im Innern und dafür einem deutlichen Sprung an der Wand und eine stabile Form mit einem starkbehinderten Austausch im Innern und sanften Übergängen an den Wänden. Der von **Prandtl** berechnete Gültigkeitsbereich des Turbulenzverbots<sup>1</sup> erweist sich als richtig. Sein Ansatz für die scheinbare Schubspannung wird dahin modifiziert, daß die Mischungswege außer von den geometrischen Abmessungen auch noch von der Geschwindigkeitsverteilung abhängen. Dieser Ansatz gilt nicht für die durch Instabilität verstärkte Turbulenz. Hier scheinen ganz andere Verhältnisse vorzuliegen, die Mischungswege sind erheblich größer, vielleicht sogar von der Größenordnung der Gefäßabmessungen.

Im zweiten Teil werden die Strömung bei ruhendem äußeren und die bei ruhendem inneren Zylinder näher untersucht. Für den Widerstand werden Näherungsformeln angegeben. Während bei ruhendem äußeren Zylinder die Zähigkeit ganz wesentlich an dem Widerstandsmechanismus beteiligt ist, spielt sie bei ruhendem inneren Zylinder nur noch eine untergeordnete Rolle. Ferner werden mit Hilfe der Widerstandsmethode für diese beiden Fälle kritische Zahlen gewonnen. Die von **G. J. Taylor** aufgestellte Theorie für den Fall des festgehaltenen äußeren Zylinders — eine daraus abgeleitete Näherungsformel stammt von **Prandtl** — konnte nochmals bestätigt werden. Die für den Fall des ruhenden inneren Zylinders gefundenen kritischen Zahlen stehen, wenigstens für große Spaltweiten, im Einklang mit Ergebnissen von **H. Schlichting**, nach denen von einer relativ großen Reynoldsschen Zahl ab Turbulenz als Anlaufeffekt möglich ist.

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 2 von S. 577.

(Eingegangen am 16. September 1933.)