

Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem.

Von **H. Schlichting** in Friedrichshafen a. B.

I. Einleitung. Durch zahlreiche neuere Untersuchungen [1, 2, 3, 4, 5, 6]¹ können die Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömungen in glatten Rohren, Kanälen und längs glatter Platten vom experimentellen Standpunkt aus als befriedigend geklärt gelten. Es wurden dabei für die Geschwindigkeitsverteilung und den Widerstand universelle Gesetze gefunden, mit deren Hilfe man die turbulente Strömung an glatten Wänden für alle praktisch in Frage kommenden Geschwindigkeiten und Abmessungen weitgehend beherrscht.

Auch für die turbulente Strömung in rauhen Rohren, Kanälen und längs rauher Platten, die für die Technik wichtiger ist als die an glatten Wänden, gibt es schon seit längerer Zeit umfangreiche Versuchsergebnisse, für deren systematische Zusammenfassung jedoch erst vor kurzem einige universelle Gesetzmäßigkeiten gefunden wurden.

Wegen der erheblichen Wichtigkeit des Rauigkeitsproblems für die Technik ist es dringend erforderlich, weitere Versuchsergebnisse über den Rauigkeitswiderstand zu sammeln. Im folgenden soll nun ein neues experimentelles Verfahren gezeigt werden, mit Hilfe dessen man unter Benutzung der bisher gefundenen universellen Gesetze in recht einfacher Weise Rauigkeitsversuche durchführen und ihre Ergebnisse auf die in der Technik vorliegenden Verhältnisse übertragen kann.

Bei der Darstellung der universellen Geschwindigkeitsverteilung an glatter und rauher Wand hat sich die Einführung einer dimensionslosen Geschwindigkeit $\varphi = u/v_*$ und eines dimensionslosen Wandabstandes $\eta = yv_*/\nu$ als sehr zweckmäßig erwiesen [2]. Dabei bedeutet u die Geschwindigkeit, y den Wandabstand und $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ eine aus der Wandschubspannung τ gebildete rechnerische Geschwindigkeit, die „Schubspannungsgeschwindigkeit“ ($\rho =$ Dichte, $\nu =$ kinematische Zähigkeit).

Die umfangreichen Versuchsergebnisse von **J. Nikuradse** [6] über die Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren haben gezeigt, daß die so gebildete dimensionslose Geschwindigkeit eine universelle Funktion des dimensionslosen Wandabstandes ist, $\varphi = \varphi(\eta)$, und zwar ergibt sich eine Gerade bei Auftragung von φ über $\log \eta$:

$$\text{oder } \left. \begin{aligned} \varphi &= A + B \log \eta = 5,5 + 5,75 \log \eta \\ \frac{u}{v_*} &= 5,5 + 5,75 \log \frac{y v_*}{\nu} \end{aligned} \right\} \text{ (glatt).} \quad (1)$$

Theoretische Überlegungen [3] zeigen, daß dieses Geradliniengesetz dann zu erwarten ist, wenn der Einfluß der Zähigkeit auf den Turbulenzmechanismus verschwindet. Es ist deshalb anzunehmen, daß das Gesetz (1) bis zu beliebig hohen, im Versuch nicht mehr erreichbaren Reynoldsschen Zahlen gültig bleibt. Das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz (1) ist ein sog. Wandgesetz, d. h. die Geschwindigkeit in der Nähe einer Wand ist außer von Zähigkeit und Dichte nur abhängig vom Wandabstand und von der Schubspannung an dieser Wand, aber sie wird nicht beeinflußt von den Vorgängen in größerer Entfernung von der betrachteten Stelle,

¹ Die Zahlen in eckigen Klammern [] verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

z. B. im Rohr oder Kanal nicht von den Verhältnissen an der anderen Wand. (Von dieser Tatsache macht man wesentlich Gebrauch bei der Umrechnung von Rohr- und Kanalversuchen auf die geschleppte Platte.) Das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gestattet deshalb umgekehrt auch, bei bekannten u , y , ρ , ν die Ermittlung der Wandschubspannung τ , was wir uns bei der Durchführung der Rauheitsversuche zunutze machen werden.

Mit dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz in engem Zusammenhang steht bekanntlich das Widerstandsgesetz. Für dieses wurde im Anschluß an (1) gefunden:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (\text{glatt}). \quad (2)$$

Dabei bedeutet $\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2d}{\rho u^2}$ die Widerstandszahl und $Re = \frac{u d}{\nu}$ die Reynoldssche Zahl. Dieses Widerstandsgesetz ist ebenso allgemeingültig wie das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz (1), es gilt also ebenfalls bis zu den beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen.

Trägt man die Beziehung $\varphi = f(\log \eta)$ auch für rauhe Rohre auf, so ergibt sich nach den Messungen von **Nikuradse** [10] an mit Sand künstlich rau gemachten Rohren für jede relative Rauigkeit k/r (k = Rauigkeitshöhe, r = Rohrdurchmesser) und jede Reynoldssche Zahl ebenfalls eine Gerade für die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung. Dabei zeigt sich insbesondere, daß alle Geraden zueinander parallel sind, und für die Neigung der Geraden ergibt sich der gleiche Wert $B = 5,75$ wie beim glatten Rohr. Wegen $\frac{y v_*}{\nu} = \frac{y}{k} \frac{v_* k}{\nu}$ kann man deshalb das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für rauhe Rohre auch in der Form schreiben:

$$\varphi = A + 5,75 \log \frac{y}{k}, \quad A = A \left(\frac{v_* k}{\nu} \right) \quad (\text{rauh}). \quad (3)$$

Nach den Messungen von **Nikuradse** hängt die Größe A nur ab von der mit der Rauigkeitshöhe k und der Schubspannungsgeschwindigkeit v_* gebildeten Reynoldsschen Zahl der Rauigkeit $\frac{v_* k}{\nu}$. Im Anschluß an (3) ergibt sich als universelles Widerstandsgesetz für rauhe Wand:

$$\lambda = \left(2 \log \frac{r}{k} + a \right)^{-2} \quad (\text{rauh}); \quad (4)$$

dabei hängt die Größe a ebenfalls von $\frac{v_* k}{\nu}$ ab.

Das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz (3) und das Widerstandsgesetz (4) für rauhe Wand wurden eingehend untersucht von **Nikuradse**, der sich die Aufgabe gestellt hatte, eine bestimmte einfache Rauigkeit in einem sehr großen Bereiche von Reynoldsschen Zahlen zu untersuchen. Als Rauigkeit wurde Sand von den Korngrößen $k_s = 0,8; 0,4; 0,2$ und $0,1$ mm gewählt¹, der auf der Innenseite von verschiedenen weiten Messingrohren ($d = 2,5; 5; 10$ cm) mit Japanlack so dicht wie möglich aufgeklebt wurde. Die größte relative Rauigkeit war also $r/k_s = 15$ und die kleinste $r/k_s = 500$. Die im Bereich $Re = 10^3$ bis 10^6 gefundene Abhängigkeit der Widerstandszahl λ von der Reynoldsschen Zahl $Re = u d / \nu$ und der relativen Rauigkeit r/k_s , nämlich $\lambda = f(Re, r/k_s)$, ist in Abb. 1 wiedergegeben. Es zeigt sich, daß man für das Widerstandsgesetz drei verschiedene Bereiche zu unterscheiden hat, die sich folgendermaßen kennzeichnen lassen:

Im Bereich I (kleine Reynoldssche Zahlen) ist der Widerstand des rauhen Rohres der gleiche wie der des glatten Rohres. Es liegen die Rauigkeitserhebungen völlig innerhalb der sehr dünnen laminaren Schicht, die auch bei turbulenter Strömung in unmittelbarer Wandnähe immer vorhanden ist (laminar sublayer).

¹ k_s wurde gemessen durch die Maschenweite des Siebes, mit dem der Sand ausgesiebt wurde.

Im Bereich II (Übergangsbereich) findet ein Anwachsen der Widerstandszahl mit wachsender Reynoldsscher Zahl statt. Die Dicke der Laminarschicht ist von der gleichen Größenordnung wie die Rauigkeitshöhe, so daß mit wachsender Reynoldsscher Zahl (d. h. mit abnehmender Dicke der Laminarschicht) immer mehr Rauigkeitserhebungen hervortreten und dadurch der Widerstand stark anwächst.

Im Bereich III ist die Widerstandszahl unabhängig von der Reynoldsschen Zahl (quadratisches Widerstandsgesetz) und nur noch abhängig von der relativen Rauigkeit. Es ragen jetzt alle Rauigkeiten aus der Laminarschicht hervor, man hat die sog. ausgebildete Rauigkeitsströmung. Für λ gilt die einfache Formel:

$$\lambda = \left(1,74 + 2 \log \frac{r}{k_s} \right)^{-2}. \quad (5)$$

Auch das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz (3) wird im Bereich III besonders einfach, indem auch A unabhängig von $\frac{v_* k}{\nu}$ ist. Insbesondere ist für die Nikuradsesche Sandrauigkeit in diesem Bereich $A = A_s = 8,48$.

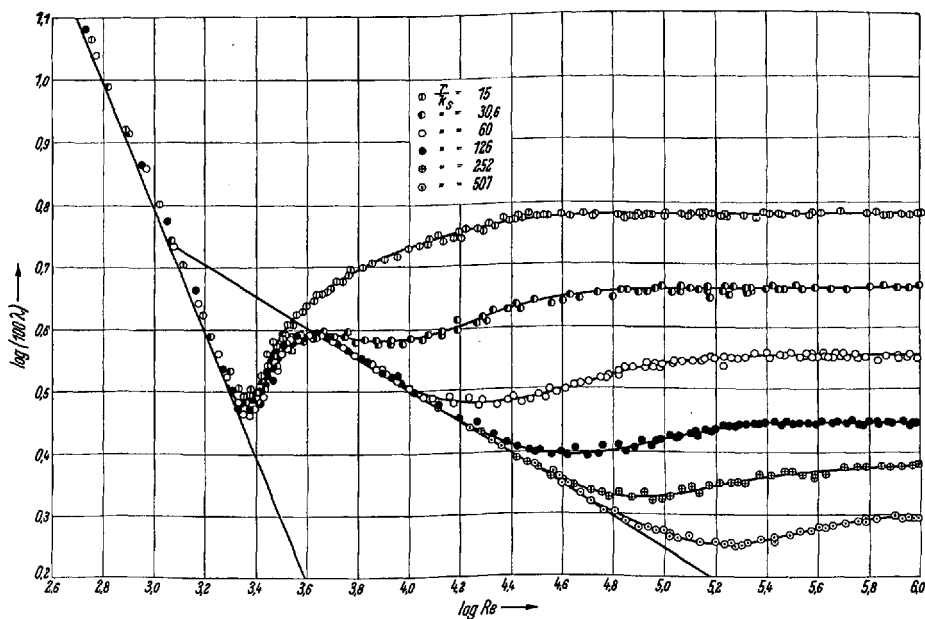


Abb. 1. Die Widerstandszahl $\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2d_h}{\rho u^2}$ rauher Röhre in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $Re = \frac{u d}{\nu}$ und der relativen Rauigkeit r/k_s für Sandrauigkeit (nach Nikuradse).

Die Unterscheidung dieser drei Bereiche gilt nicht nur für die Sandrauigkeit, sondern auch für viele andere technische Rauigkeiten. Am wichtigsten dürfte durchweg der Bereich III der ausgebildeten Rauigkeitsströmung sein, und mit diesem werden wir uns im folgenden vor allem beschäftigen.

Die soeben dargelegten universellen Gesetzmäßigkeiten für glatte und rauhe Wand setzen uns nun in Stand, Rauigkeitsversuche in einer sehr einfachen Weise durchzuführen, wie es in folgendem geschildert wird. Man könnte daran denken, eine „Normalrauigkeit“ als Einheit zu schaffen und jede beliebige Rauigkeit auf diese Normalrauigkeit zu beziehen. Die Festlegung einer Normalrauigkeit ist natürlich sehr willkürlich und müßte nach Gesichtspunkten der Zweckmäßigkeit geschehen. Wir wollen darauf nicht näher eingehen.

Die Anforderungen der Praxis an die Rauigkeitsforschung werden jedoch auch dann völlig erfüllt, wenn man, ohne sich auf eine bestimmte Normalrauigkeit festgelegt zu haben, für jede technisch wichtige Rauigkeit den Widerstand angeben

kann, und zwar sowohl den Rohr- oder Kanalwiderstand als auch den Widerstand bei geschleppter Platte in der unbegrenzten Strömung. Das letztere ist für die Schiffbautechnik von grundlegender Bedeutung. In beiden Fällen ist es erforderlich, daß man ohne weiteres auf andere Rohrdurchmesser und Kanalhöhen bzw. Plattenlängen umrechnen kann. Theoretisch müßte es möglich sein, bei gegebener geometrischer Gestalt der Rauigkeit ihren Widerstand vorzuberechnen; jedoch wird dies wohl kaum jemals mit der erforderlichen Genauigkeit gelingen. Es ist deshalb um so wichtiger, eine einfache Versuchseinrichtung zu besitzen, mit der man ohne großen experimentellen Aufwand jede in der Praxis vorkommende Rauigkeit sozusagen auf Bestellung untersuchen kann. Eine solche ist in Göttingen in Form eines rechteckigen Kanals mit drei glatten und einer auswechselbaren rauhen Wand entwickelt worden. Für die Schiffbautechnik ist diese Einrichtung besonders wertvoll dadurch, daß aus den Messungen in diesem Kanal durch eine einfache Umrechnung der Widerstand bei geschleppter Platte sich sofort angeben läßt. Dadurch lassen sich für viele Fälle die meist sehr kostspieligen und mit einem großen experimentellen Aufwand verbundenen Plattenschleppversuche ersparen.

Um die Eigenschaften des neuen Verfahrens grundsätzlich zu klären und gleichzeitig weitere Ergebnisse über den Mechanismus der Rauigkeitsströmung zu erhalten, haben wir eine Reihe von regelmäßigen, geometrisch einfachen Rauigkeiten untersucht.

Bei den Nikuradseschen Versuchen war die Rauigkeit gekennzeichnet durch nur einen Parameter, die Rauigkeitshöhe $k = k_s =$ Sandkorngroße. Bei der Mannigfaltigkeit der in der Praxis vorkommenden Rauigkeiten wird man jedoch meist nicht mit einem einzigen Rauigkeitsparameter auskommen, sondern man wird mindestens einen zweiten, etwa die Rauigkeitsdichte, also die Anzahl der Rauigkeiten je Flächeneinheit, hinzunehmen müssen (bei den Nikuradseschen Versuchen hatte die Rauigkeitsdichte immer einen festen Wert nahe am Höchstwert). Es besteht also das Bedürfnis, zu untersuchen, wie bei gleicher geometrischer Form der Rauigkeitswiderstand von der Rauigkeitsdichte abhängt. Unsere folgenden Untersuchungen geben gleichzeitig einen Beitrag zu dieser Frage.

I. Experimenteller Teil.

2. Beschreibung der Versuchsanlage. Die Versuche wurden mit der in Abb. 2, 3 und 4 dargestellten Versuchsanlage durchgeführt. Es ist dies im wesentlichen die gleiche Anlage, die früher von Nikuradse bei seinen Messungen an glatten und rauhen Rohren benutzt wurde. Eine genaue Beschreibung der ganzen Meßeinrichtung ist in dem VDI-Forschungsheft 356 [6] enthalten, so daß wir nur auf die Unterschiede unserer Versuchseinrichtung gegenüber der früheren einzugehen brauchen.

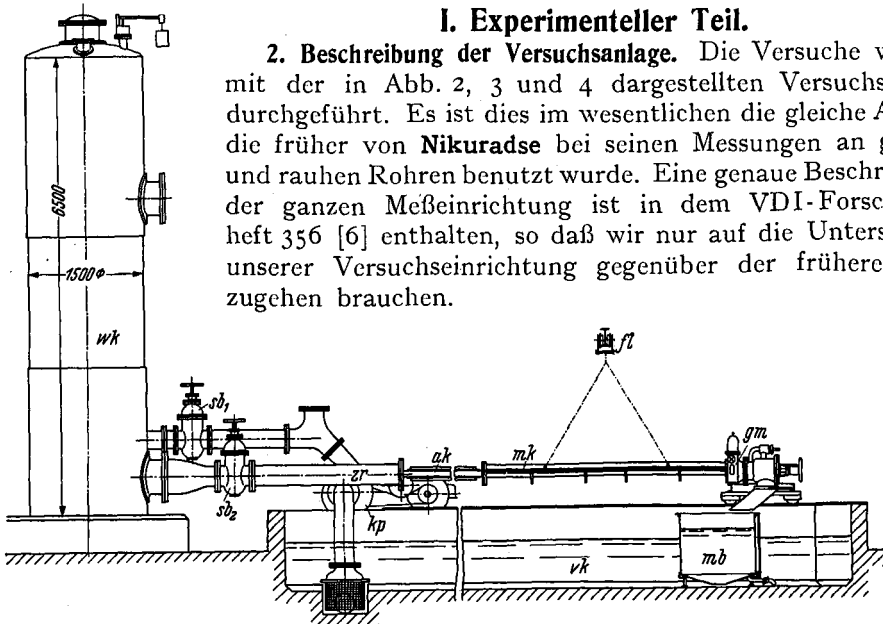


Abb. 2. Die gesamte Versuchsanlage für Rauigkeitsmessungen. wk = Wasserkessel; zk = Zuleitungsrohr; ak = Anlaufkanal; mk = Meßkanal; gm = Geschwindigkeitsmeßapparat; kp = Kreiselpumpe; vk = Vorratskanal; mb = Meßbottich; fl = Flaschenzug; sb_1 = Schieber zwischen Pumpe und Kessel; sb_2 = Schieber zwischen Kessel und Zuleitungsrohr.

Durch eine Kreiselpumpe *kp* wird das Wasser aus dem Vorratskanal *vk* in den Wasserkessel *wk* befördert. Aus diesem gelangt es durch das Zuleitungsrohr *zr* und den Anlaufkanal *ak* in den Meßkanal *mk* und durch den Geschwindigkeitsmeßapparat *gm* wieder in den Vorratskanal *vk* zurück.

Der Meßkanal ist in Abb. 4 genauer dargestellt. Er besteht aus zwei gleichlangen Teilstücken von je 3,20 m Länge, die mit Flanschen aneinander geschraubt sind.

Beide Kanäle haben den gleichen Querschnitt von 4,0 cm auf 17,0 cm. Der vordere Kanal dient als Anlaufstrecke, während der hintere Kanal die eigentliche Meßstrecke darstellt. Die Wände des vorderen Kanals sind glatt. Dieser Anlaufkanal, der ursprünglich als Meßkanal dienen sollte, ist aus U-Eisen und Eisenblechen zusammengeschweißt. Doch erwies sich diese Herstellungsweise als zu ungenau, da es für die Erzielung einwandfreier Meßergebnisse erforderlich ist, daß die Kanalhöhle längs des ganzen Kanals mit etwa $\frac{1}{10}$ mm Toleranz unveränderlich ist (vgl. S. 10). Der zweite Kanal wurde deshalb als Gußstück (Stahlguß) hergestellt. Er besteht aus zwei Teilen: 1. einem rechteckigen, offenen Gerinne mit glatten Wänden und seitlich eingelassenen Nuten, in welche die Versuchsplatte von oben her eingelegt wird; 2. einem Deckel,

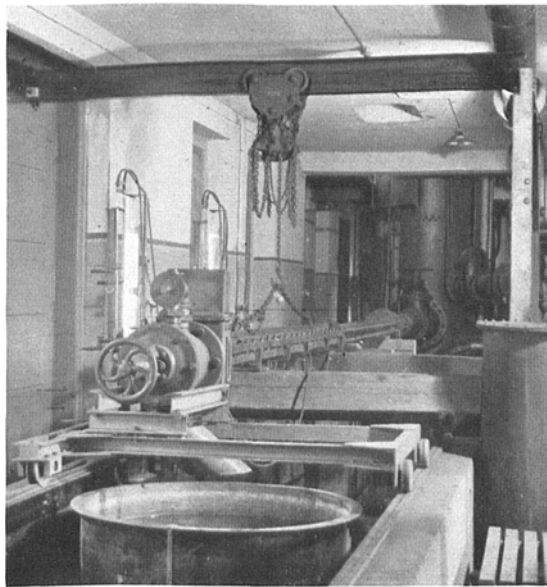


Abb. 3. Versuchsanlage für Rauigkeitsmessungen.

der auf die eingelegte Versuchsplatte gelegt und mit der unteren Kanalhälfte fest verschraubt wird (Abb. 4). Zur Erzielung einer genügenden Dichtung ist zwischen Deckel

und Versuchsplatte eine mit Mennige bestrichene Leinwandpackung gelegt. Durch gute Bearbeitung der Wände und der seitlichen Längsnuten der unteren Kanalhälfte ist die nötige Gleichmäßigkeit der Kanalhöhe längs der ganzen Kanallänge erreicht worden. Zum Schutz gegen Rost und zur Erzielung einer guten Glätte der Wand ist der Kanal von innen mit Inertol gestrichen und mit feinem Sandpapier glatt gerieben worden.

Etwaige noch verbliebene sehr kleine Rauigkeiten der glatten Wand gehen jedoch nicht als Fehler in die Meßergebnisse ein, sondern werden bei dem auf S. 12f. beschriebenen Auswertungsverfahren automatisch berücksichtigt. Die so bearbeitete Wand erwies sich jedoch praktisch als hydraulisch glatt.

An der glatten Wand besitzt der Kanal in 8 Querschnitten in je 40 cm Abstand Meßstellen zur Abnahme des statischen Druckes. Es liegen in jedem Querschnitt drei Anbohrungen, um etwaige kleine Fehlanzeigen der einzelnen Meßstelle durch Mittelwertbildung ausgleichen zu können. In jedem Meßquerschnitt für den statischen Druck besitzt der Kanal seitliche Fenster, durch die die Strömung beobachtet werden

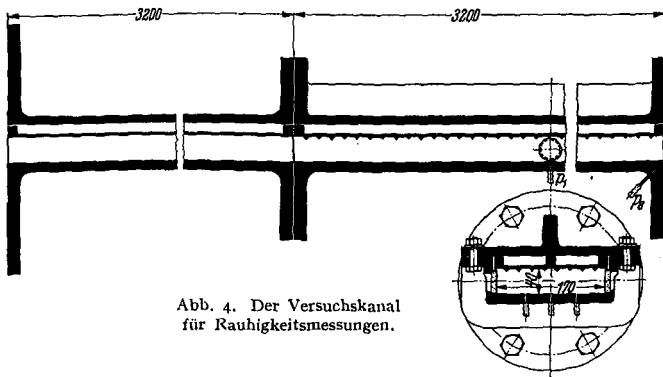


Abb. 4. Der Versuchskanal für Rauigkeitsmessungen.

Abb. 6. Ausschnitte aus den untersuchten rauhen Platten.
 d = Durchmesser der Rauigkeit; D = mittlerer Abstand der Rauigkeiten;
 k = Rauigkeitshöhe; k_s = äquivalente Sandrauigkeit.

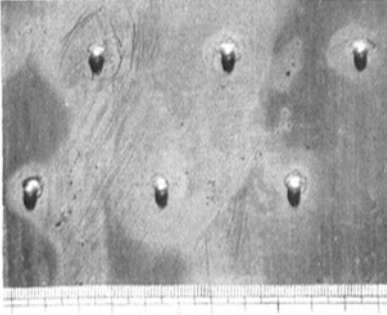


Abb. 6a. Kugeln, Platte XII.
 $d = 0,41$ cm; $k = 0,41$ cm;
 $D = 4,0$ cm; $k_s = 0,093$ cm.

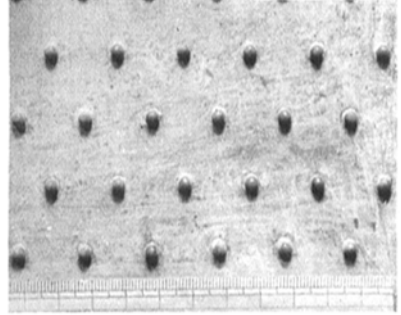


Abb. 6b. Kugeln, Platte III.
 $d = 0,41$ cm; $k = 0,41$ cm;
 $D = 2,0$ cm; $k_s = 0,344$ cm.

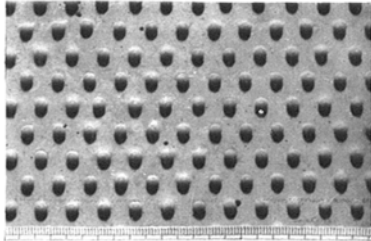


Abb. 6c. Kugeln, Platte I.
 $d = 0,41$ cm; $k = 0,41$ cm;
 $D = 1,0$ cm; $k_s = 1,26$ cm.

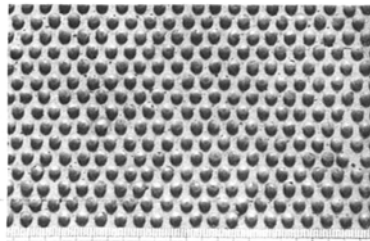


Abb. 6d. Kugeln, Platte II.
 $d = 0,41$ cm; $k = 0,41$ cm;
 $D = 0,6$ cm; $k_s = 1,56$ cm.

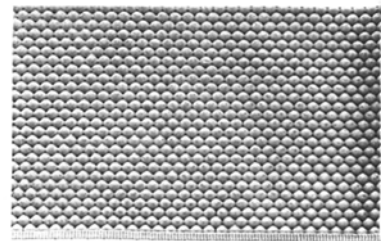


Abb. 6e. Kugeln, Platte V.
 $d = 0,41$ cm; $k = 0,41$ cm;
 dichteste Packung; $k_s = 0,257$ cm.

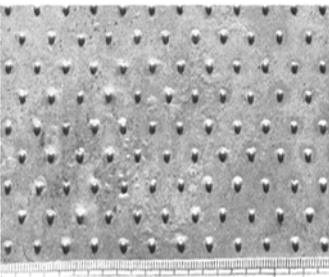


Abb. 6f. Kugeln, Platte VI.
 $d = 0,21$ cm; $k = 0,21$ cm;
 $D = 1,0$ cm; $k_s = 0,172$ cm.

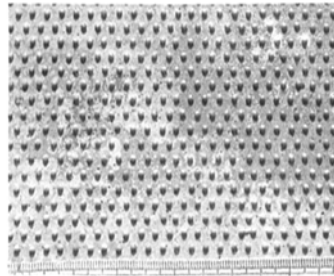


Abb. 6g. Kugeln, Platte IV.
 $d = 0,21$ cm; $k = 0,21$ cm;
 $D = 0,5$ cm; $k_s = 0,759$ cm.



Abb. 6h. Kalotten, Platte XIII.
 $k = 0,8$ cm; $k = 0,26$ cm;
 $D = 4,0$ cm; $k_s = 0,031$ cm.

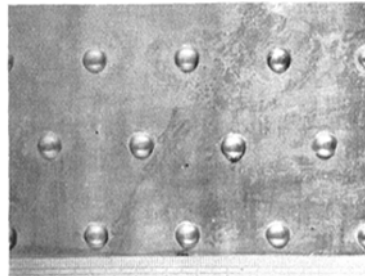


Abb. 6i. Kalotten, Platte XIV.
 $d = 0,8$ cm; $k = 0,26$ cm;
 $D = 3,0$ cm; $k_s = 0,049$ cm.

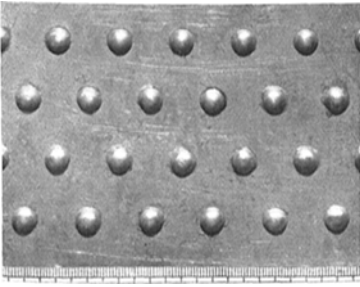


Abb. 6k. Kalotten, Platte XV.
 $d = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,26 \text{ cm}$;
 $D = 2,0 \text{ cm}$; $k_s = 0,149 \text{ cm}$.

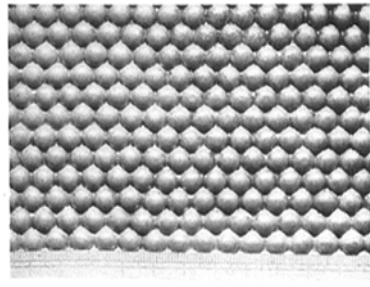


Abb. 6l. Kalotten, Platte XIX.
 $d = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,26 \text{ cm}$;
 dichteste Packung; $k_s = 0,365 \text{ cm}$.

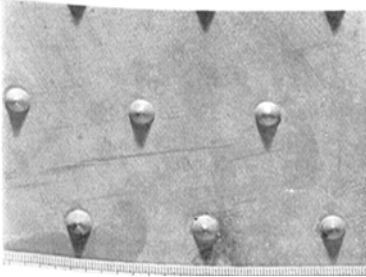


Abb. 6m. Kegel, Platte XXIII.
 $d = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,375 \text{ cm}$;
 $D = 4,0 \text{ cm}$; $k_s = 0,059 \text{ cm}$.

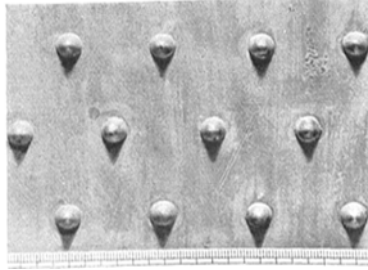


Abb. 6n. Kegel, Platte XXIV.
 $d = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,375 \text{ cm}$;
 $D = 3,0 \text{ cm}$; $k_s = 0,164 \text{ cm}$.

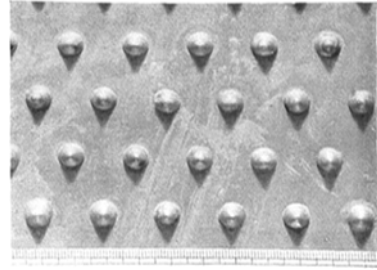


Abb. 6o. Kegel, Platte XXV.
 $d = 1,8 \text{ cm}$; $k = 0,375 \text{ cm}$;
 $D = 2,0 \text{ cm}$; $k_s = 0,374 \text{ cm}$.



Abb. 6p. „Kurzze“ Winkel, Platte XVI.
 $c = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,30 \text{ cm}$;
 $D = 4,0 \text{ cm}$; $k_s = 0,291 \text{ cm}$.

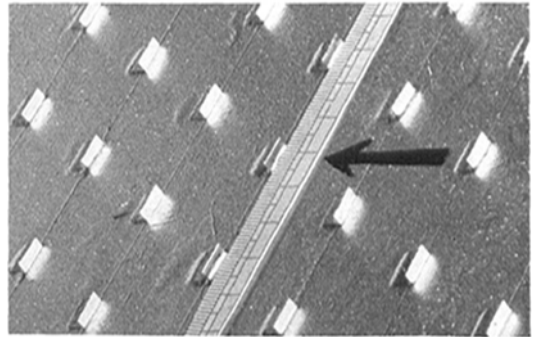


Abb. 6q. „Kurzze“ Winkel, Platte XVIII.
 $c = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,30 \text{ cm}$;
 $D = 3,0 \text{ cm}$; $k_s = 0,618 \text{ cm}$.



Abb. 6r. „Kurzze“ Winkel, Platte XVII.
 $c = 0,8 \text{ cm}$; $k = 0,30 \text{ cm}$;
 $D = 2,0 \text{ cm}$; $k_s = 1,47 \text{ cm}$.

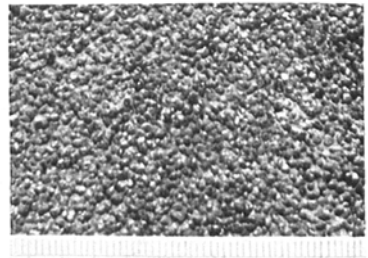


Abb. 6s. Hamburger Sand, Korngröße.
 $k = 0,135 \text{ cm}$; $k_s = 0,222 \text{ cm}$.

kann. Ferner kann an jedem Meßquerschnitt ein Pitotrohr durch eine Bohrung in der glatten Wand eingeführt werden, um die Geschwindigkeitsverteilung in verschiedenen Querschnitten des Kanals messen zu können. Mit Hilfe eines oberhalb des Kanals an der Decke des Versuchsraumes angebrachten Flaschenzuges kann der Deckel nach Lösen der Schrauben bequem abgehoben und die Versuchsplatte leicht ausgewechselt werden.

3. Herstellung der Rauigkeiten. Die Versuchsplatten, die mit den zu untersuchenden Rauigkeiten besetzt werden, sind in ihren Abmessungen so gewählt, daß sie genau in den Kanal hineinpassen. Die Länge beträgt 320 cm, die Breite 17,8 cm, wovon an jeder Seite ein Streifen von 5 mm glatt bleiben muß zur Auflagerung in den seitlichen Längsnuten. Die Platten sind aus 5 mm dickem Eisenblech mit aufgesetzten Quadrateisen von 15 mm hergestellt, so daß die gesamte Plattendicke 20 mm beträgt. Es ist darauf zu achten, daß die Platten sehr gut eben sind.

Ein Verzeichnis sämtlicher untersuchten rauhen Platten ist in Tabelle 1 zusammengestellt, und ein Ausschnitt aus jeder Platte ist in Abb. 6 wiedergegeben. Es sind

Tabelle 1. Die Abmessungen der Rauigkeitselemente h, k', d, c , das Rauigkeitsmuster $D, D/d$, die Rauigkeitsdichte $F_r/F, F_1/F$ und die mittlere Kanalhöhe b bei sämtlichen Versuchsplatten.

d } b = mittlere Höhe des rauhen Kanals;
 D } F = Plattenfläche;
 k } s. Abb. 5 F_r = Projektion der Rauigkeiten auf die Ebene senkrecht zur Strömungs-
 k' } richtung;
 c } F_1 = Fläche der glatten Zwischenräume zwischen den Rauigkeiten.

Art der Rauigkeit	Platten Nr.	d cm	D cm	$\frac{D}{d}$	h cm	c $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kz. Winkel} \\ \text{lg. Winkel} \end{array} \right.$ cm k' Kegel	b cm	$\frac{F_r}{F}$	$\frac{F_1}{F}$
Kugeln	XII	0,41	4	9,75	0,41	—	3,99	0,00785	0,992
Kugeln	XIIa	1,0	10	10	1,0	—	—	0,00785	0,992 ¹
Kugeln	III	0,41	2	4,88	0,41	—	3,99	0,0314	0,969
Kugeln	I	0,41	1	2,44	0,41	—	3,96	0,126	0,874
Kugeln	II	0,41	0,6	1,46	0,41	—	3,88	0,349	0,651
Kugeln	V	0,41	dichteste Packung		0,41	—	3,68	0,907	0,093
Kugeln	VI	0,21	1	4,86	0,21	—	3,99	0,0314	0,969
Kugeln	IV	0,21	0,5	2,43	0,21	—	3,97	0,126	0,874
Kalotten . . .	XIII	0,8	4	5	0,26	—	3,99	0,0087	0,969
Kalotten . . .	XIV	0,8	3	3,75	0,26	—	3,99	0,0155	0,944
Kalotten . . .	XV	0,8	2	2,5	0,26	—	3,98	0,0348	0,874
Kalotten . . .	XIX	0,8	dichteste Packung		0,26	—	3,85	0,251	0,093
Kegel	XXIII	0,8	4	5	0,375	0,425	3,99	0,0106	0,969
Kegel	XXIV	0,8	3	3,75	0,375	0,425	3,98	0,0189	0,944
Kegel	XXV	0,8	2	2,5	0,375	0,425	3,95	0,0425	0,874
Kurze Winkel .	XVI	—	4	—	0,30	0,8	4,0	0,0151	0,998
Kurze Winkel .	XVIII	—	3	—	0,30	0,8	4,0	0,0269	0,996
Kurze Winkel .	XVII	—	2	—	0,30	0,8	3,99	0,0605	0,994
Lange Winkel .	XX	—	6	—	0,32	17	3,90	0,0538	0,995
Lange Winkel .	XXI	—	4	—	0,31	17	3,96	0,0776	0,992
Lange Winkel .	XXII	—	2	—	0,30	17	3,96	0,152	0,985
Hamburger Sand	IX	—	—	—	0,135	—	3,87	—	—

¹ Platte XIIa nur im großen Windkanal gemessen.

sechs Gruppen von Rauigkeiten, jede bei mehreren Rauigkeitsdichten, untersucht worden; die Abmessungen und die Anordnung der Rauigkeitselemente gehen aus Abb. 5 hervor:

- I. Kugeln, Durchmesser $d = 0,41$ cm,
- II. Kugeln, Durchmesser $d = 0,21$ cm,
- III. Kalotten,
- IV. Kegel,
- V. „kurze“ Winkel,
- VI. „lange“ Winkel

und außerdem eine Platte mit „Hamburger Sand“ von der mittleren Korngröße $k = 1,35$ mm. Es ist derselbe Sand, den **G. Kempf** [17] 1932 bei der Herstellung von rauhen Platten für Schleppversuche benutzt hatte. Als Sandrauigkeit wurde ferner bei den Vorversuchen der gleiche Sand verwendet, den **Nikuradse** bei seinen Rohrversuchen benutzt hatte. Die Herstellung der Sandplatten geschah in der Weise, daß die gut geglättete Versuchsplatte mit Inertol bespritzt und gleich darauf mit Sand überschüttet wurde. Die untere Sandschicht klebt am Inertol fest. Nach Abschütten des überflüssigen Sandes mußte die Platte einen Tag trocknen und wurde darauf noch einmal mit Inertol überspritzt. Nach abermaligem Trocknen sitzt dann die Sandschicht so fest auf der Platte, daß sie vom strömenden Wasser nicht losgerissen wird.

Die übrigen Rauigkeiten wurden sämtlich auf die Platten aufgelötet. Dazu wurden die Platten zunächst mit einer dünnen Zinnschicht überzogen. Das Auflöten geschah bei der Kugel-, Kalotten- und Kegelrauigkeit, außer bei der dichtesten Packung, mit Schablonen aus Aluminiumblech. Die kurzen und langen Winkel und die dichteste Packung von Kugel- und Kalottenrauigkeit wurden ohne Schablone aufgelötet. Die Kugeln konnten als Ausschlußkugeln von einer Kugellagerfabrik bezogen werden; sie wurden vor dem Auflöten dünn verzinnt. Die Kalotten wurden aus 0,3 mm starkem Weißblech und die Kegel aus ebenso starkem Messingblech gestanzt. Die Winkel wurden aus 0,3 mm starkem Weißblech gebogen.

Mit Ausnahme der Platte mit den langen Winkeln wurden die Rauigkeiten bei allen Platten nach dem in Abb. 5 angegebenen Muster verteilt. Der Abstand je zweier Rauigkeitselemente der gleichen Querreihe ist der gleiche wie der Abstand der Querreihen voneinander. Je zwei aufeinanderfolgende Querreihen sind um den halben Abstand gegeneinander versetzt, so daß die Rauigkeitselemente „auf Lücke“ stehen.

4. Vorversuche. Bei den ersten Versuchen war nur der vordere der beiden in Abb. 2 angegebenen Kanäle vorhanden. Die Druckabfallmessungen mit Anbohrungen und auch mit statischen Sonden, die zunächst bei beidseitig glatter Wand durchgeführt wurden, ergaben einen sehr unregelmäßigen Verlauf des Druckes längs des Kanals. Es wurde sehr bald erkannt, daß die Ursache hierfür die Ungleichmäßigkeit des Querschnitts an den verschiedenen Stellen des Kanals ist. Bei dem verhältnismäßig großen Querschnitt und infolgedessen kleinen Druckabfall machen sich schon recht

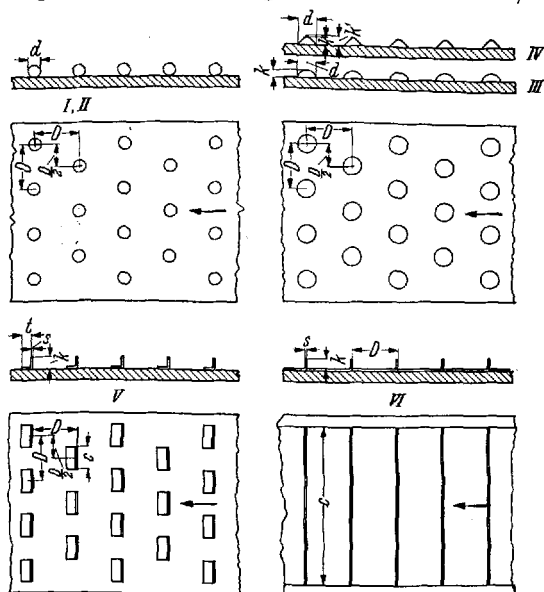


Abb. 5. Die Abmessungen der Rauigkeitselemente und das Muster der Rauigkeitsverteilung (vgl. Tabelle 1). I, II = Kugeln, $k = 0,41$ und $0,21$ cm; III = Kalotten, $k = 0,26$ cm; IV = Kegel, $k = 0,375$ cm; V = „kurze Winkel“, $k = 0,30$ cm; VI = „lange Winkel“, $k = 0,30; 0,31; 0,32$ cm.

kleine Querschnittsschwankungen für die Messung des Druckabfalls sehr störend bemerkbar, wie man aus der folgenden Abschätzung erkennt.

Die mittlere Durchflußgeschwindigkeit beträgt höchstens etwa $\bar{u} = 8$ m/sec, der hydraulische Durchmesser $d_h = \frac{4 \text{ Querschnitt}}{\text{benetzter Umfang}} = 6,48$ cm, die kinematische Zähigkeit $\nu = 0,012$ cm²/sec, also die Reynoldssche Zahl $Re = \bar{u}d/\nu = 4,3 \cdot 10^5$. Bei dieser Reynoldsschen Zahl ist der Widerstandskoeffizient des glatten Rohres $\lambda = \frac{d}{d} \frac{d_h}{q} = 0,018$, wo q den Staudruck der mittleren Geschwindigkeit bedeutet. Der Reibungsdruckabfall zwischen zwei Meßstellen, die im Abstand von $l = 40$ cm liegen, beträgt also

$$\Delta p = l \frac{d p}{d x} = \lambda \frac{l}{d_h} q = 0,11 q.$$

Ändert sich nun die Kanalhöhe b zwischen den beiden Meßstellen um Δb , während die Breite konstant bleibt, so beträgt die hierdurch verursachte Druckdifferenz nach dem Bernoullischen Gesetz

$$\Delta p' = \rho u \Delta u = \rho u^2 \frac{\Delta b}{b} = 2 \frac{\Delta b}{b} q.$$

Fordern wir nun, daß der Fehler einer einzelnen Druckabfallmessung zwischen zwei benachbarten Meßstellen nicht größer als 2% sein soll, so muß also

$$\frac{\Delta p'}{\Delta p} < 0,02$$

sein oder

$$2 \frac{\Delta b}{b} < 0,0022, \quad \Delta b < 0,0011 b$$

oder endlich mit $b = 4$ cm

$$\Delta b < 0,0044 \text{ cm} \approx \frac{1}{20} \text{ mm}.$$

Die Kanalhöhe muß also mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{20}$ mm längs des ganzen Kanals konstant sein, wenn man einwandfreie Messung des

statischen Druckes erreichen will. Diese Genauigkeit konnte bei dem zuerst hergestellten geschweißten Kanal nicht erreicht werden. Es wurde deshalb der schon erwähnte zweite Kanal aus Stahlguß hergestellt. Bei diesem wurde durch sehr sorgfältiges Bearbeiten der Wände diese Genauigkeit erreicht, so daß bei diesem Kanal der gemessene Druckabfall einwandfrei war.

Bei den Vorversuchen wurde überdies geprüft, ob am Ende des ersten Kanals der Anlauf beendet ist. An der rauhen Wand ist der Anlauf früher beendet als an der glatten, und es zeigte sich, daß bei kleiner Rauigkeitshöhe der Anlauf am Ende des ersten Kanals noch nicht mit Sicherheit als beendet angesehen werden kann. Deswegen konnte nach Herstellung des zweiten Kanals der erste als willkommenes Anlaufstück dienen. Diese Anordnung wurde für alle weiteren Versuche beibehalten. Durch Vorversuche wurde weiter noch geklärt, ob es für die Messung des Druckabfalls und der Geschwindigkeitsverteilung im zweiten Kanal einen Unterschied bringt, wenn man im ersten Kanal zwei glatte Wände oder eine glatte und eine rauhe Wand hat. Da dies nicht der Fall war, wurden für alle Hauptversuche zwei glatte Wände im Anlaufkanal beibehalten.

Ferner wurde bei den Vorversuchen der Druckabfall im Meßkanal bei beidseitig glatter Wand gemessen. Es ergab sich ein auf den hydraulischen Durchmesser bezogener Widerstandskoeffizient λ , der in befriedigender Übereinstimmung mit dem Widerstandsgesetz glatter Rohre steht.

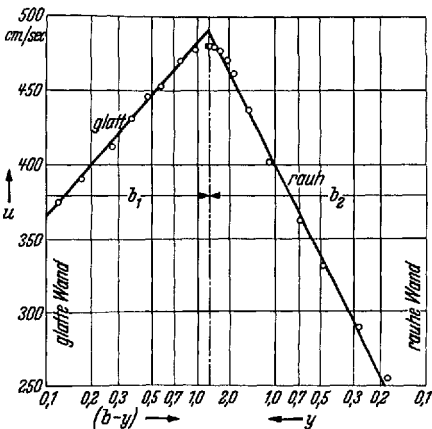


Abb. 7. Die unsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung im Kanal mit glatter und rauher Wand. Rauigkeit: Hamburger Sand, $k = 0,135$ cm.

Weiter wurde durch Vorversuche in einem sehr kleinen Kanal von rechteckigem Querschnitt (1,05 cm auf 5 cm) mit einer rauhen und einer glatten Wand geklärt, ob die Geschwindigkeitsprofile an der rauhen und an der glatten Wand sich gegenseitig beeinflussen. Für das unter Ziffer 7 beschriebene Auswertungsverfahren ist nämlich angenommen, daß die Reibungsschichten an der glatten und rauhen Wand sich unabhängig voneinander ausbilden und dieselben sind wie in einem allseitig glatten bzw. allseitig rauhen Kanal. Dies kann man in einfacher Weise dadurch prüfen, daß man die Geschwindigkeit an beiden Wänden über dem Logarithmus des jeweiligen Wandabstandes aufträgt. Da sowohl bei glatter wie bei rauher Wand nach dem universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz die Geschwindigkeit proportional dem Logarithmus des Wandabstandes ist, muß sich in dieser Auftragung eine dreieckige Geschwindigkeitsverteilung ergeben. Abb. 7 zeigt, daß dies recht gut erfüllt ist.

Ferner wurde vor Beginn der Hauptversuche ein Isotachenbild im Austrittsquerschnitt des Meßkanals aufgenommen, das in Abb. 8 wiedergegeben ist. Das Seitenverhältnis 4,25:1 des Rechtecks erwies sich als groß genug, um im mittleren Teil des Querschnitts mit genügender Genauigkeit eine ebene Strömung zu erhalten, eine notwendige Voraussetzung für das zugrunde gelegte Auswertungsverfahren.

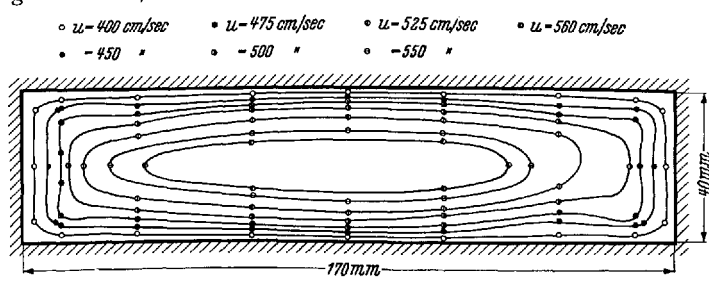


Abb. 8. Isotachenbild im Austrittsquerschnitt des Meßkanals bei beidseitig glatter Wand.

5. Versuchsdurchführung. Bei den Hauptversuchen wurde für jede Platte bei mindestens fünf verschiedenen Geschwindigkeiten 1. das Geschwindigkeitsprofil parallel zu den kurzen Rechteckseiten in der Mitte des Austrittsquerschnitts, 2. der Druckabfall durch Anbohrungen, 3. die Temperatur und 4. die Durchflußmenge gemessen. Bei der Messung der Geschwindigkeitsverteilung wurde der Gesamtdruck des Pitotrohres gegen den statischen Druck im Austrittsquerschnitt geschaltet, so daß unmittelbar der Staudruck gemessen wurde. Bei den Druckabfallmessungen wurden jedesmal sämtliche möglichen Kombinationen $p_2 - p_3, p_2 - p_4, \dots, p_2 - p_7, p_3 - p_4, \dots, p_6 - p_7$ gemessen, um durch Mittelwertbildung kleine Ungenauigkeiten der einzelnen Druckmessung ausgleichen zu können. Die Meßstelle p_1 wurde durchweg fortgelassen, da hier die Strömung noch nicht voll ausgebildet ist. Am Ende der Platten war die Anordnung der Rauigkeiten so, daß die letzte Reihe der Rauigkeiten unmittelbar mit der Plattenkante abschloß. Das Pitotrohr bewegte sich in einer Ebene $\frac{1}{2}$ mm hinter der Plattenkante. Die Profile wurden, wo dies möglich war, in der Mitte der Lücke zwischen zwei Längsreihen der Rauigkeiten gemessen. Jedoch wurde auch jedesmal ein Profil in der Mitte hinter einer Rauigkeit gemessen. Bei den meisten Platten waren beide Profile nur in unmittelbarer Wandnähe verschieden. Nur bei Platte XII (Kugeln von $d = 4$ mm im Abstand $D = 40$ mm) traten besondere Erscheinungen bei den Geschwindigkeitsprofilen auf, auf die wir später noch näher eingehen werden.

Bei den Hauptversuchen wurde, um die Drehzahl des Motors zeitlich konstant zu halten, teilweise mit dem im VDI-Forschungsheft 356 beschriebenen automatischen Regler gearbeitet, teilweise ohne diesen Regler. Im letzteren Fall wurde zur Überwachung der zeitlichen Gleichmäßigkeit der Durchflußgeschwindigkeit zwischen je zwei Meßpunkten der Druckabfall längs des Kanals mit einem zweiten Manometer kontrolliert und eventuell die Drossel des Geschwindigkeitsmeßapparates etwas nachgedreht.

II. Auswertung des Versuchsmaterials.

6. Allgemeine Erwägungen. Es ist das Ziel unserer Versuche, für jede der untersuchten Rauigkeiten eine charakteristische Zahl anzugeben, mit deren Hilfe man den Widerstand der gleichen Rauigkeit bei anderen Reynoldsschen Zahlen $Re = \bar{u} d_h/\nu$ und anderen relativen Rauigkeiten k/r_h als den gemessenen kennt ($r_h =$ hydraulischer Halbmesser). Es bedeutet k irgendein zweckmäßiges Maß für die Rauigkeitshöhe, als das bei regelmäßigen Rauigkeiten am besten die größte Rauigkeitshöhe gewählt wird.

Da man in der Sandrauigkeit (Korngröße k_s) eine Rauigkeit besitzt, für welche die Widerstandsverhältnisse in einem weiten Bereich von Reynoldsschen Zahlen und relativen Rauigkeiten bekannt sind, erschien es uns zweckmäßig, unsere Versuche so auszuwerten, daß wir Anschluß bekommen an die Nikuradsesche Sandrauigkeit, ohne daß damit gesagt werden soll, daß die Sandrauigkeit eine geeignete „Normalrauigkeit“ ist. Gegen die Sandrauigkeit als Normalrauigkeit spricht die Tatsache, daß sie nicht einwandfrei reproduzierbar ist. Nimmt man nämlich statt des von **Nikuradse** benutzten Japanlackes ein anderes Bindemittel zum Aufkleben und wählt man die Trockenzeiten etwas anders, so erhält man eine andere Dichte der Sandkörner und damit einen anderen Widerstand.

Diese Tatsache ist für unser Auswertungsverfahren belanglos, da wir nur die Formel für die Abhängigkeit der Widerstandszahl von $Re = u d_h/\nu$ und k_s/r_h übernehmen, dagegen keine Vergleichswerte über die Rauigkeitsdichte und die absolute Rauigkeitshöhe. Die Ergebnisse der Widerstandsmessung von **Nikuradse** sind in Abb. I wiedergegeben, wo λ als Funktion von $u d/\nu$ und k_s/r dargestellt ist für einen sehr großen Bereich von Reynoldsschen Zahlen und relativen Rauigkeiten: $10^3 \leq Re \leq 10^6$; $507 \geq r/k_s \geq 15$. Die Funktion $\lambda = f(Re, k_s/r)$ wird besonders einfach im Bereich I (vgl. Ziffer 1) der hydraulisch glatten Strömung und im Bereich III der voll ausgebildeten Rauigkeitsströmung. Im Bereich I fällt die Abhängigkeit von k/r ganz fort und es gilt einfach das Widerstandsgesetz (2) des glatten Rohres, für das

Nikuradse die Näherungsformel angegeben hat:

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}} \tag{2a}$$

Im Bereich III des quadratischen Widerstandsgesetzes läßt sich die Abhängigkeit von der relativen Rauigkeit nach **v. Kármán** [3], **Prandtl** und **Nikuradse** [2, 10] durch die schon in Ziffer I angegebene einfache Formel darstellen

$$\lambda = \left(1,74 + 2 \log \frac{r_h}{k_s} \right)^{-2} \tag{5}$$

die in Abb. 9 aufgezeichnet ist. Dabei bedeutet r_h den hydraulischen Radius = $\frac{2 \text{ Querschnitt}}{\text{benetzter Umfang}}$.

Im Übergangsbereich II, wo λ sowohl von Re wie von r/k abhängt, fehlt bisher eine analytische Formel für λ .

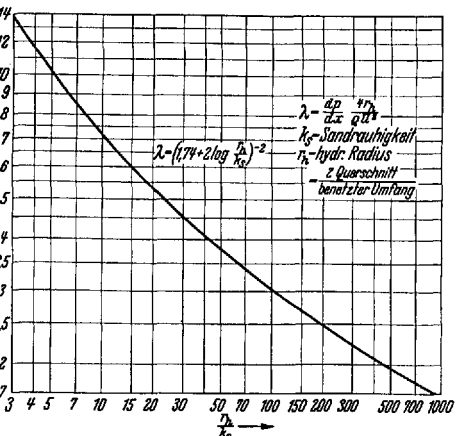


Abb. 9. Die Widerstandszahl λ für voll ausgebildete Rauigkeitsströmung bei Sandrauigkeit in Abhängigkeit von der relativen Rauigkeit $\frac{r_h}{k_s}$.

Für die Praxis bei weitem am wichtigsten ist der Bereich III mit dem quadratischen Widerstandsgesetz, der bei nicht allzu kleiner Rauigkeitshöhe und einigermaßen großer Reynoldsscher Zahl immer vorliegt. In diesem Bereich sind die Verhältnisse glücklicherweise besonders einfach. Nach den Nikuradseschen Messungen mit Sandrauigkeit herrscht ausgebildete Rauigkeitsströmung für

$$\frac{v_* k_s}{\nu} > 70 \quad \text{oder} \quad \frac{u \cdot d_h}{\nu} > \frac{198}{\sqrt{\lambda}} \frac{d_h}{k_s}$$

Bei unseren eigenen Messungen ist die relative Rauigkeit k/r_h und die Reynoldsche Zahl $Re = d_h \bar{u}/\nu$ immer so groß, daß durchweg quadratisches Widerstandsgesetz herrscht.

7. Erläuterung des Auswertungsverfahrens. Unsere Aufgabe, für jede von uns untersuchte Rauigkeit den Widerstand bei gleicher geometrischer Rauigkeitsstruktur, aber anderer relativer Rauigkeit anzugeben, also die Umrechnung auf Rohre und Kanäle von anderem Durchmesser bzw. Querschnitt, ist, wenn wir uns auf das quadratische Widerstandsgesetz beschränken, gelöst, wenn für jede Rauigkeit die „äquivalente Sandrauigkeit“ k_s angegeben wird; das ist diejenige Korngröße der Nikuradeschen Sandrauigkeit, die den gleichen Widerstand hat wie die untersuchte Rauigkeit. Dieser äquivalenten Sandrauigkeit ist keine besondere physikalische Bedeutung beizumessen, sie ist vielmehr eine Rechengröße, mit deren Hilfe man nach (5) für die untersuchte Rauigkeit die Umrechnung von λ auf andere relative Rauigkeiten sofort beherrscht. Statt k_s genügt auch die Angabe der dimensionslosen Zahl

$$\alpha = \frac{k_s}{k},$$

wenn k die wirkliche Höhe (etwa größte Höhe) der betreffenden Rauigkeit bedeutet.

Ein Beispiel möge diese einfache Umrechnung von beliebigen Rauigkeiten auf Sandrauigkeit erläutern. Wir wählen die Messungen von **Hopf** [7] und **Fromm** [8] an drei verschiedenen Rauigkeiten: Drahtnetz, Waffellech I, Sägeprofil. Die Messungen wurden bei verschiedener Kanalhöhe, also bei verschiedener relativer Rauigkeit durchgeführt. Die Abhängigkeit von λ als Funktion von r_h/k muß sich, soweit ausgebildete Rauigkeitsströmung vorlag, bei Auftragung von $1/\sqrt{\lambda}$ über $\log r/k$ durch eine Gerade mit der Neigung 2 darstellen lassen:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a + 2 \log \frac{r}{k}. \tag{3}$$

Dies ist in befriedigender Weise erfüllt und gibt für die Konstante a die in Tabelle 2 angegebenen Werte. Durch Vergleich von Gleichung (5) mit Gleichung (3) erhält man für den Umrechnungskoeffizienten auf Sandrauigkeit $\alpha = k_s/k$:

$$2 \log \alpha = 1,74 - a.$$

Die danach berechneten α - und k_s -Werte sind ebenfalls in Tabelle 2 angegeben.

In dieser Weise kann man im Bereich des quadratischen Widerstandsgesetzes jede Rauigkeit auf Sandrauigkeit umrechnen, wenn die Widerstandszahl als Funktion der relativen Rauigkeit bekannt ist.

Für die Bestimmung der äquivalenten Sandrauigkeit k_s einer beliebigen Rauigkeit ist es jedoch nicht erforderlich, für jede Rauigkeit Messungen bei verschiedenen

relativen Rauigkeiten durchzuführen, sondern es genügt eine Messung bei einer einzigen relativen Rauigkeit, wie aus dem Folgenden sofort ersichtlich wird. Dadurch wird der experimentelle Aufwand sehr erheblich vermindert.

Bei unseren Versuchen im rechteckigen Kanal mit glatter und rauher Wand ist die Bestimmung von k_s dadurch etwas verwickelt, daß wir aus Druckabfallmessungen zunächst nur den Widerstand des ganzen Kanals kennen, der sich additiv aus dem Widerstand von rauher und glatter Wand zusammensetzt. Wir brauchen also noch eine weitere Angabe über den Widerstand der glatten Wand, um den allein interessierenden

Tabelle 2. Umrechnung der Messungen von **Hopf** und **Fromm** auf äquivalente Sandrauigkeit.

k = Rauigkeitshöhe; $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \frac{r_h}{k}$; k_s = äquivalente Sandrauigkeit; $\alpha = \frac{k_s}{k}$.

Art der Rauigkeit	k cm	a	α	k_s cm
Drahtnetz . . .	0,0115	0,96	2,46	0,028
Waffellech I . .	0,0427	1,36	1,52	0,065
Sägeprofil . . .	0,15	1,48	1,34	0,201

Widerstand der rauhen Wand errechnen zu können. Den Widerstand der glatten Wand erhält man, wie sogleich näher erläutert wird, mit Hilfe des oben angegebenen universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes aus dem in der Nähe der glatten Wand gemessenen Geschwindigkeitsprofil.

Bedeutet τ_r und τ_g die Schubspannung an der rauhen und an der glatten Wand, so ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Wandschubspannung und Druckgefälle $d p/d x$ als erste Bestimmungsgleichung für die Unbekannten τ_r und τ_g

$$\tau_r + \tau_g = b \frac{d p}{d x}, \tag{6}$$

wo b die Kanalhöhe bedeutet. Das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für die Reibungsschicht an einer glatten und an einer rauhen Wand lautet nach **Prandtl** (vgl. Ziffer 1)

$$\frac{u}{v_{*g}} = 5,5 + 5,75 \log \frac{v_{*g} y}{\nu} \quad (\text{glatte Wand}), \tag{7}$$

$$\frac{u}{v_{*r}} = A + 5,75 \log \frac{y}{k} \quad (\text{rauhe Wand}). \tag{8}$$

Dabei bedeuten v_{*g} und v_{*r} die Schubspannungsgeschwindigkeiten an der glatten bzw. rauhen Wand, nämlich

$$v_{*g} = \sqrt{\frac{\tau_g}{\rho}}, \quad v_{*r} = \sqrt{\frac{\tau_r}{\rho}}.$$

A ist eine für die betreffende Rauigkeit charakteristische Rauigkeitsfunktion, die für die ausgebildete Rauigkeitsströmung konstant ist und für den Übergangsbereich von der Rauigkeitskennzahl $\frac{v_{*r} k}{\nu}$ abhängt. Für Sand ist nach den Versuchen von **Nikuradse** bei ausgebildeter Rauigkeitsströmung:

$$A_s = 8,48.$$

Das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für Sandrauigkeit bei voll ausgebildeter Rauigkeitsströmung lautet demnach:

$$\frac{u}{v_{*r}} = 8,48 + 5,75 \log \frac{y}{k_s}. \tag{8a}$$

Das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für die glatte Wand (7) benutzen wir jetzt, um aus dem gemessenen Geschwindigkeitsprofil die Schubspannung an der glatten Wand τ_g zu bestimmen. Trägt man die gemessenen Geschwindigkeiten über dem Logarithmus des Abstandes von der glatten Wand auf, so ergibt sich eine Gerade

$$u = m_g + n_g \log y, \tag{7a}$$

deren Neigung n_g sofort τ_g ergibt. Durch Vergleich von (7) und (7a) hat man

$$n_g = 5,75 v_{*g}$$

oder

$$v_{*g} = \sqrt{\frac{\tau_g}{\rho}} = \frac{n_g}{5,75}. \tag{9}$$

Die Neigung des Profils an der glatten Wand kann mit guter Genauigkeit graphisch ermittelt werden. Bei dieser Bestimmung von v_{*g} wird angenommen, daß die Reibungsschichten an der glatten und rauhen Wand sich nicht gegenseitig beeinflussen, sondern sich genau so ausbilden wie im symmetrischen Kanal. Daß dies erfüllt ist, wurde durch Vorversuche geklärt (Abb. 7).

Statt mit den Schubspannungen rechnen wir lieber mit den Schubspannungsgeschwindigkeiten. Gleichung (6) nimmt dann die Form an

$$v_{*r}^2 + v_{*g}^2 = \frac{b}{\rho} \frac{d p}{d x} \tag{6a}$$

oder

$$v_{*r} = \sqrt{\frac{b}{\rho} \frac{d p}{d x} - v_{*g}^2} = \sqrt{\frac{b}{\rho} \frac{d p}{d x} - \left(\frac{n_g}{5,75}\right)^2}. \tag{10}$$

Dies ist ein erster Weg zur Bestimmung der Unbekannten v_{*r} , den wir bei der Auswertung unserer Messungen zugrunde gelegt haben.

Bevor wir dazu übergehen, aus v_{*r} den Koeffizienten $\alpha = k_s/k$ für die Umrechnung auf äquivalente Sandrauigkeit zu bestimmen, wollen wir noch ein zweites und drittes Verfahren zur Bestimmung von v_{*r} angeben, die von dem eben dargelegten ersten Verfahren unabhängig sind und deshalb als Kontrolle benutzt werden können.

Wie wir mit Hilfe des universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes für glatte Wand (7) die Schubspannung v_{*g} bestimmt haben, können wir ganz analog das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für rauhe Wand (8) zur Bestimmung von v_{*r} benutzen. Trägt man die gemessene Geschwindigkeit über dem Logarithmus des Abstandes $b - y$ von der rauhen Wand auf, so ergibt sich ebenfalls eine Gerade

$$u = m_r + n_r \log(b - y),$$

aus deren Neigung n_r man durch Vergleich mit (8) findet

$$v_{*r_2} = \frac{n_r}{5,75}. \quad (11)$$

Die Neigung n_r läßt sich ebenfalls graphisch sehr einfach ermitteln. Wir haben für unsere sämtlichen Messungen sowohl v_{*r_1} nach (10) wie auch v_{*r_2} nach (11) ermittelt; beide Werte müssen miteinander übereinstimmen.

Es zeigte sich, daß in systematischer Weise v_{*r_2} sich meist etwas größer ergab als v_{*r_1} (etwa 5%). Dies läßt sich in folgender Weise verstehen. Schon bei den Messungen von **Nikuradse** in glatten und rauhen Rohren ergab sich, daß die gemessenen Geschwindigkeitsprofile in den mehr in der Rohrmitte gelegenen Teilen meist eine geringe systematische Abweichung von dem universellen Gesetz (7) bzw. (8) zeigen (vgl. VDI-Forschungsheft 356, Abb. 24 und VDI-Forschungsheft 361, Abb. 14). Die meisten gemessenen Profile verlaufen etwas steiler als die Gerade mit der Neigung 5,75. Wir hätten bei der Ermittlung von v_{*g} nach (9) und v_{*r} nach (11) eigentlich statt 5,75 eine etwas größere Zahl, die aber unbekannt ist, zu nehmen. Unsere ermittelten Werte v_{*g} und v_{*r_2} sind also systematisch etwas zu groß. v_{*r_1} wird deshalb nach (10) etwas zu klein gefunden. Unsere Erfahrung, daß v_{*r_2} meist etwas größer ist als v_{*r_1} , wird also auf diese Weise erklärt. Der wirkliche Wert von v_{*r} liegt also zwischen v_{*r_1} und v_{*r_2} . Wir haben als solchen deshalb den Mittelwert von v_{*r_1} und v_{*r_2} gewählt

$$v_{*r} = \frac{1}{2} (v_{*r_1} + v_{*r_2}) \quad (12)$$

und dürften damit der Wirklichkeit sehr nahe kommen.

Ein dritter Weg zur Bestimmung von v_{*r} ist schließlich noch durch die Lage des Maximums des unsymmetrischen Geschwindigkeitsprofils gegeben. Bedeutet b_1 und b_2 den Abstand dieses Maximums von der glatten bzw. rauhen Wand ($b_1 + b_2 = b$), so gilt, da in der ausgebildeten turbulenten Strömung die Schubspannung eine lineare Funktion des Wandabstandes ist und im Geschwindigkeitsmaximum $\tau = 0$ ist,

$$\frac{v_g}{v_r} = \frac{b_1}{b_2}$$

oder

$$v_{*r} = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} v_{*g}.$$

Hat man v_{*g} aus dem universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz bestimmt, so kann man aus dieser Gleichung v_{*r} berechnen. Wir haben diese dritte Möglichkeit zur Berechnung von v_{*r} bei der Auswertung unserer Messungen nicht herangezogen, sondern nur als eine gelegentliche Kontrolle benutzt.

Wir kommen jetzt zur Umrechnung unserer Rauigkeiten auf die Nikuradsesche Sandrauigkeit. Dazu bestimmen wir für jede Rauigkeit die Konstante A des universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes¹. Es ist nach (8)

$$A = \frac{u}{v_{*r}} - 5,75 \log \frac{y}{k}, \quad (13)$$

¹ Diese ist identisch mit der von **Prandtl** [2] benutzten Funktion $\chi \left(\frac{v_* k}{\nu} \right)$.

Tabelle 3.

U = Maximalgeschwindigkeit, \bar{u} = mittlere Geschwindigkeit des Profils an der rauhen Wand, $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ = Druckgefälle, ν = kinematische Zähigkeit, ρ = Dichte, b_1 = Abstand des Geschwindigkeitsmaximums von der glatten Wand, b_2 = Abstand des Geschwindigkeitsmaximums von der rauhen Wand, $v_{*g} = \sqrt{\frac{\tau_g}{\rho}}$ = Schubspannungsgeschwindigkeit an der glatten Wand, $v_{*r} = \sqrt{\frac{\tau_r}{\rho}}$ = Schubspannungsgeschwindigkeit an der rauhen Wand, τ_g = Schubspannung an der glatten Wand, τ_r = Schubspannung an der rauhen Wand, $Re = \frac{U b}{\nu}$ = Reynoldssche Zahl, $\frac{v_{*r} k}{\nu}$ = Rauigkeitskennzahl.

Platten Nr.	Profil Nr.	U cm/sec	\bar{u} cm/sec	$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ cm/sec ²	ν cm ² /sec	b_1 cm	b_2 cm	v_{*r} cm/sec	v_{*g} cm/sec	$\frac{v_{*r}}{u}$	$\frac{U b}{\nu} \cdot 10^{-3}$	$\frac{v_{*r} k}{\nu} \cdot 10^{-2}$	A
Kugelrauigkeit: $k = 0,41$ cm													
XII	1	321	280	148	0,0117	1,51	2,48	19,4	14,1	0,073	109	6,80	12,16
	2	385	339	204	0,0116	1,49	2,50	23,3	16,2	0,069	132	8,24	12,21
	3	476	419	302	0,0116	1,49	2,50	28,8	18,8	0,069	164	10,2	12,19
	4	547	480	393	0,0115	1,52	2,47	33,1	21,7	0,068	190	11,8	12,22
	5	650	569	546	0,0115	1,52	2,47	39,4	27,0	0,067	224	14,0	12,14
III	1	316	270	185	0,0117	1,06	2,93	23,5	15,1	0,086	108	8,34	8,91
	2	391	333	274	0,0113	1,16	2,83	29,1	17,1	0,086	122	10,5	8,95
	3	500	424	441	0,0114	1,27	2,72	37,2	22,4	0,087	175	13,4	8,94
	4	568	481	566	0,0112	1,26	2,73	42,2	24,5	0,088	202	15,5	8,93
	5	704	588	856	0,0113	1,42	2,57	52,3	29,9	0,090	249	19,0	8,93
	6	816	686	1145	0,0114	1,26	2,73	60,4	34,3	0,085	285	21,7	8,91
I	1	310	248	278	0,0115	0,91	3,05	29,6	13,1	0,124	107	10,6	5,68
	2	384	306	412	0,0116	0,96	3,00	36,6	15,3	0,122	131	12,95	5,69
	3	508	403	708	0,0120	1,01	2,95	48,5	22,6	0,120	168	16,6	5,66
	4	566	450	870	0,0116	1,01	2,95	54,0	25,4	0,118	218	19,1	5,68
	5	658	523	1165	0,0116	0,96	3,00	62,8	28,0	0,119	225	22,2	5,68
	6	778	626	1622	0,0118	0,96	3,00	74,2	33,1	0,116	261	25,9	5,70
II	1	313	240	260	0,0114	0,98	2,90	31,4	13,7	0,130	107	11,3	5,20
	2	384	297	403	0,0115	0,90	2,98	38,7	15,7	0,129	130	13,8	5,18
	3	500	384	696	0,0116	0,90	2,98	50,2	20,2	0,132	167	17,8	5,13
	4	568	438	908	0,0117	0,88	3,00	57,0	23,7	0,131	187	20,0	5,14
	5	646	499	1184	0,0113	0,90	2,98	65,0	26,3	0,128	222	23,6	5,14
	6	746	572	1585	0,0112	0,92	2,96	75,0	29,2	0,128	258	27,5	5,11
V	1	311	259	186	0,0116	1,16	2,52	22,2	14,8	0,087	86	7,85	9,61
	2	385	322	284	0,0115	1,16	2,52	27,5	17,7	0,085	123	9,81	9,69
	3	498	417	473	0,0114	1,16	2,52	35,6	22,9	0,084	161	12,8	9,64
	4	585	489	648	0,0113	1,16	2,52	41,8	26,2	0,086	190	15,2	9,64
	5	662	554	833	0,0114	1,16	2,52	47,3	29,8	0,085	214	17,0	9,67
	6	809	678	1247	0,0113	1,16	2,52	57,8	35,5	0,085	263	21,0	9,63
Kugelrauigkeit: $d = k = 0,21$ cm													
VI	1	316	269	154	0,0116	1,36	2,63	20,8	13,9	0,077	109	3,76	8,96
	2	390	333	234	0,0116	1,36	2,63	25,7	17,6	0,075	134	4,65	9,02
	3	491	419	365	0,0116	1,35	2,64	32,4	20,2	0,077	169	5,86	8,99
	4	566	481	480	0,0114	1,35	2,64	37,3	22,8	0,078	198	6,87	8,97
	5	664	567	656	0,0114	1,35	2,64	43,8	27,7	0,078	232	8,07	8,99
	6	806	660	966	0,0118	1,35	2,64	53,2	33,2	0,082	273	9,46	8,95
IV	1	325	261	242	0,0120	1,06	2,91	27,7	13,6	0,108	108	4,85	5,24
	2	396	319	348	0,0121	1,07	2,90	33,8	18,1	0,105	130	5,87	5,31
	3	572	459	704	0,0122	1,11	2,86	48,8	22,6	0,107	186	8,40	5,32
	4	646	514	888	0,0125	1,11	2,86	55,1	25,9	0,107	205	9,26	5,25
	5	751	606	1196	0,0121	1,01	2,96	64,1	30,1	0,105	246	11,1	5,24

Tabelle 3 (Fortsetzung).

Platten Nr.	Profil Nr.	U cm/sec	\bar{u} cm/sec	$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ cm/sec ²	ν cm ² /sec	b_1 cm	b_2 cm	v_{*r} cm/sec	v_{*g} cm/sec	$\frac{v_{*r}}{\bar{u}}$	$\frac{U b_1}{\nu} \cdot 10^{-3}$	$\frac{v_{*r} k}{\nu} \cdot 10^{-2}$	A
Kalottenrauigkeit: $k = 0,26$ cm													
XIII	1	314	279	124	0,0110	1,61	2,38	16,4	14,5	0,061	114	3,89	13,80
	2	389	345	177	0,0110	1,66	2,33	20,3	17,8	0,059	141	4,82	13,85
	3	495	438	278	0,0112	1,76	2,23	25,9	20,7	0,060	176	6,02	13,86
	4	574	508	367	0,0112	1,62	2,37	30,0	23,5	0,060	220	6,98	13,78
	5	648	573	462	0,0112	1,63	2,36	33,8	28,2	0,058	231	7,88	13,77
	6	830	735	750	0,0110	1,79	2,20	43,3	37,1	0,057	301	10,3	13,91
XIV	1	380	334	181	0,0113	1,56	2,43	20,9	17,8	0,063	134	4,83	12,76
	2	497	431	298	0,0114	1,62	2,37	27,3	21,6	0,065	174	6,26	12,62
	3	572	498	390	0,0116	1,62	2,37	31,5	23,8	0,064	197	7,08	12,67
	4	700	609	570	0,0114	1,57	2,42	38,5	32,0	0,062	246	8,82	12,70
	5	834	730	800	0,0114	1,62	2,37	45,9	38,4	0,059	292	10,5	12,75
XV	1	382	328	223	0,0113	1,54	2,44	25,0	16,5	0,078	135	5,77	9,85
	2	502	428	375	0,0118	1,52	2,46	32,8	20,4	0,078	169	7,58	9,77
	3	564	483	472	0,0118	1,58	2,40	36,9	23,8	0,075	190	8,16	9,86
	4	687	592	695	0,0117	1,62	2,36	45,0	30,3	0,073	244	10,0	9,94
	5	817	710	977	0,0114	1,61	2,37	53,4	34,8	0,074	284	12,3	10,04
XIX	1	316	264	198	0,0114	1,17	2,68	23,8	14,1	0,091	105	5,46	7,68
	2	386	319	294	0,0113	1,27	2,58	29,2	17,4	0,091	132	6,74	7,66
	3	480	401	452	0,0116	1,17	2,68	36,2	20,4	0,090	159	8,16	7,66
	4	563	471	620	0,0117	1,17	2,68	42,5	26,6	0,088	184	9,49	7,66
	5	671	553	880	0,0115	1,25	2,60	50,6	28,5	0,093	224	11,5	7,62
	6	818	673	1305	0,0112	1,27	2,58	61,8	34,5	0,092	281	14,4	7,58
Kegellrauigkeit: $k = 0,375$ cm													
XXIII	1	321	281	130	0,0110	1,56	2,43	18,2	14,4	0,064	116	6,21	13,07
	2	386	335	185	0,0109	1,70	2,29	21,9	16,7	0,066	141	7,54	13,08
	3	488	427	291	0,0109	1,64	2,35	27,7	21,2	0,064	178	9,54	13,10
	4	574	497	403	0,0108	1,72	2,27	32,6	24,6	0,067	212	11,3	13,04
	5	668	578	542	0,0106	1,74	2,25	38,0	27,6	0,067	252	13,4	13,08
XXIV	1	307	260	147	0,0108	1,49	2,49	20,1	13,4	0,081	113	6,99	10,52
	2	384	326	218	0,0108	1,49	2,49	25,2	16,4	0,081	143	8,74	10,50
	3	495	423	350	0,0107	1,48	2,50	32,5	20,5	0,077	184	11,4	10,59
	4	567	485	452	0,0108	1,49	2,49	37,2	24,0	0,075	207	12,9	10,59
	5	662	564	605	0,0106	1,52	2,46	43,4	28,0	0,074	248	15,4	10,56
	6	890	756	1076	0,0109	1,50	2,48	58,4	36,2	0,076	325	20,1	10,54
XXV	1	310	257	176	0,0107	1,33	2,62	23,4	12,2	0,096	115	8,19	8,41
	2	388	324	267	0,0107	1,32	2,63	29,2	16,9	0,090	144	10,3	8,48
	3	476	397	401	0,0106	1,36	2,59	35,9	20,7	0,089	172	12,7	8,51
	4	564	470	562	0,0107	1,35	2,60	42,5	23,3	0,091	208	14,9	8,50
	5	668	555	788	0,0106	1,42	2,53	50,4	27,7	0,089	249	17,8	8,54
	6	787	660	1086	0,0105	1,30	2,65	59,3	32,0	0,089	296	21,2	8,54
Rauigkeit „Kurze Winkel“: $k = 0,30$ cm													
XVI	1	318	267	175	0,0112	1,52	2,48	23,1	12,5	0,089	113	6,24	8,54
	2	389	328	254	0,0112	1,46	2,54	28,2	15,5	0,088	139	7,62	8,52
	3	497	422	415	0,0110	1,40	2,60	36,1	19,3	0,086	181	9,91	8,54
	4	566	482	534	0,0110	1,40	2,60	41,1	23,0	0,083	206	11,3	8,58
	5	666	563	737	0,0111	1,46	2,54	48,4	27,5	0,085	240	13,2	8,57
	6	789	671	1030	0,0108	1,46	2,54	57,2	32,9	0,084	259	16,0	8,64

Tabelle 3 (Fortsetzung).

Platten Nr.	Profil Nr.	U cm/sec	\bar{u} cm/sec	$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ cm/sec ²	ν cm ² /sec	b_1 cm	b_2 cm	v_{*r} cm/sec	v_{*g} cm/sec	$\frac{v_{*r}}{\bar{u}}$	$\frac{U}{\nu} \cdot 10^{-3}$	$\frac{v_{*r} k}{\nu} \cdot 10^{-2}$
XVIII	1	380	310	300	0,0114	1,24	2,76	31,6	14,6	0,102	133	8,38
	2	498	411	514	0,0117	1,21	2,79	41,4	18,4	0,100	170	10,7
	3	562	463	654	0,0116	1,21	2,79	46,8	20,0	0,102	194	12,2
	4	666	547	921	0,0116	1,21	2,79	55,4	23,8	0,102	230	14,4
	5	796	661	1310	0,0114	1,22	2,78	66,2	31,3	0,100	279	17,5
XVII	1	313	239	301	0,0111	1,07	2,92	31,6	13,1	0,138	113	8,60
	2	385	296	440	0,0113	1,07	2,92	38,9	16,0	0,138	136	10,4
	3	501	400	722	0,0116	1,11	2,88	50,6	18,4	0,123	172	13,2
	4	567	451	925	0,0116	1,11	2,88	57,3	21,6	0,124	195	14,9
	5	674	527	1292	0,0111	1,11	2,88	68,1	28,4	0,127	242	18,5
	6	773	616	1693	0,0113	1,01	2,98	78,1	31,2	0,124	272	20,9
Rauhigkeit: „Lange Winkel“: $k = 0,32$ cm												
XX	1	316	240	334	0,0116	0,72	3,18	32,9	10,8	0,134	106	9,16
	2	388	291	500	0,0117	0,80	3,10	40,4	12,2	0,140	126	11,1
	3	515	399	865	0,0120	0,72	3,18	53,6	13,9	0,133	167	14,4
	4	578	445	1092	0,0120	0,74	3,16	60,2	20,1	0,135	188	16,2
	5	658	498	1408	0,0117	0,75	3,15	68,5	21,6	0,142	220	18,9
$k = 0,31$ cm												
XXI	1	313	214	450	0,0117	0,66	3,30	38,8	11,3	0,192	106	10,3
	2	388	270	648	0,0117	0,62	3,34	48,1	13,3	0,182	131	12,7
	3	488	348	975	0,0117	0,58	3,38	60,6	15,6	0,172	165	16,1
	4	566	413	1281	0,0116	0,63	3,33	70,3	17,9	0,167	193	18,8
	5	722	529	2022	0,0114	0,68	3,28	89,7	28,4	0,162	250	24,4
$k = 0,30$ cm												
XXII	1	315	214	392	0,0109	0,69	3,27	38,7	9,8	0,182	115	10,8
	2	394	270	605	0,0108	0,67	3,29	48,4	12,3	0,180	145	13,6
	3	484	339	920	0,0112	0,59	3,37	59,0	14,4	0,171	171	16,0
	4	567	389	1270	0,0112	0,65	3,31	69,6	16,1	0,179	200	18,8
	5	666	456	1740	0,0108	0,64	3,32	81,8	19,7	0,180	244	22,9
	6	749	512	2200	0,0110	0,64	3,32	92,0	24,0	0,180	270	25,3
Sandrauhigkeit, Hamburger Sand: $k = 0,135$ cm												
IX	1	319	270	181	0,0116	1,25	2,62	22,0	14,5	0,083	106	2,56
	2	420	354	297	0,0118	1,22	2,65	29,0	19,1	0,081	138	3,32
	3	501	423	416	0,0120	1,19	2,68	34,6	21,9	0,080	162	3,89
	4	564	472	516	0,0116	1,28	2,59	38,9	23,3	0,083	188	4,53
	5	654	546	692	0,0119	1,18	2,69	45,1	28,1	0,082	212	5,12
	6	763	639	933	0,0121	1,16	2,71	52,6	31,3	0,082	244	5,86

wo k die größte Höhe der betreffenden Rauigkeit bedeuten mag. Die Zahlenwerte von k sind in Tabelle 1 angegeben. Setzt man in (13) $k = k_s/\alpha$ ein, so findet man durch Vergleich von (13) und (8a) für α

$$5,75 \log \alpha = 8,48 - A, \quad (14)$$

womit also die Bestimmung des Umrechnungsfaktors α auf die Bestimmung der Konstanten A des universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes zurückgeführt ist.

Wir haben bei der Auswertung unserer Versuchsergebnisse für jedes Geschwindigkeitsprofil durch numerische Rechnung nach (13) einen mittleren Wert von A berechnet, wobei für v_{*r} der oben abgeleitete Mittelwert von v_{*r_1} und v_{*r_2} zugrunde gelegt wurde. Bei unseren verhältnismäßig großen relativen Rauigkeiten lag fast durchweg voll ausgebildete Rauigkeitsströmung vor. Dies erkennt man daraus, daß die A -Werte

der einzelnen Profile einer rauhen Platte nur wenig verschieden sind (vgl. Tab. 3). Aus diesen wurde dann nochmals ein Mittelwert von A für die gesamten Messungen mit einer Platte gebildet (Tab. 4) und mit diesem A -Wert wurde der Umrechnungskoeffizient α ermittelt.

Bei der Auswertung der Messungen ist noch eine besondere Überlegung über die Messung des Abstandes von der rauhen Wand erforderlich. Er soll so definiert werden, daß er gleich dem Abstand einer gedachten glatten Wand ist, welche die rauhe Wand so ersetzt, daß das Flüssigkeitsvolumen dasselbe bleibt. Das Volumen des Kanals bei beidseitig glatter Wand ist genau bekannt (Querschnitt = 4,00 cm auf 17,00 cm. Da das Volumen der Rauigkeiten rechnerisch ermittelt werden kann, ist damit auch der mittlere Querschnitt und damit die mittlere Kanalhöhe bei glatter und rauher Wand bekannt. Diese mittleren Kanalhöhen bei den einzelnen Rauigkeiten sind in Tabelle I angegeben.

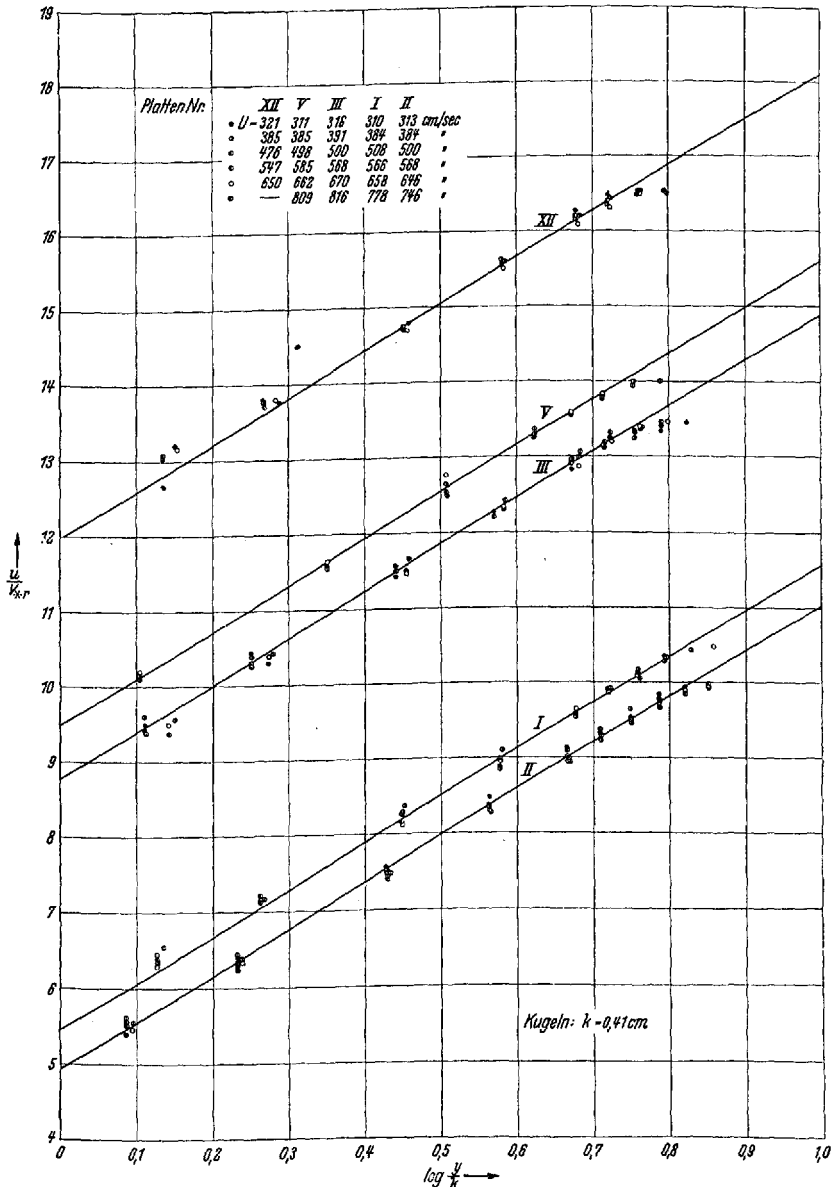


Abb. 10. Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung für die Kugelrauigkeit, $d = k = 0,41 \text{ cm}$.

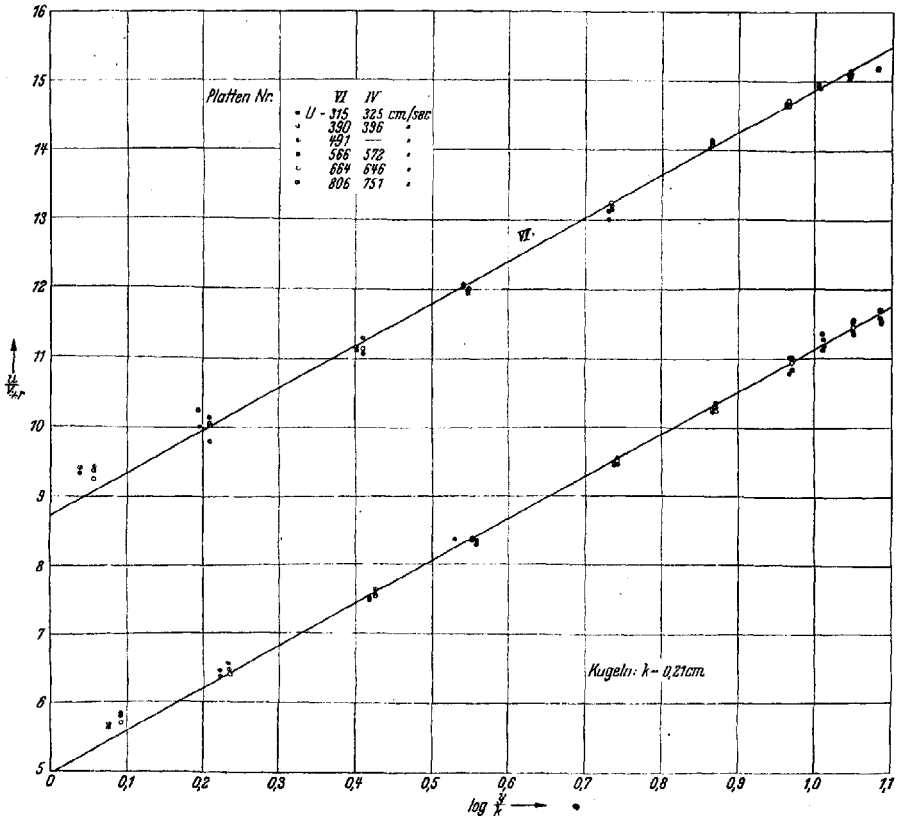


Abb. 11. Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung für die Kugelrauhigkeit, $d = k = 0,21\text{cm}$.

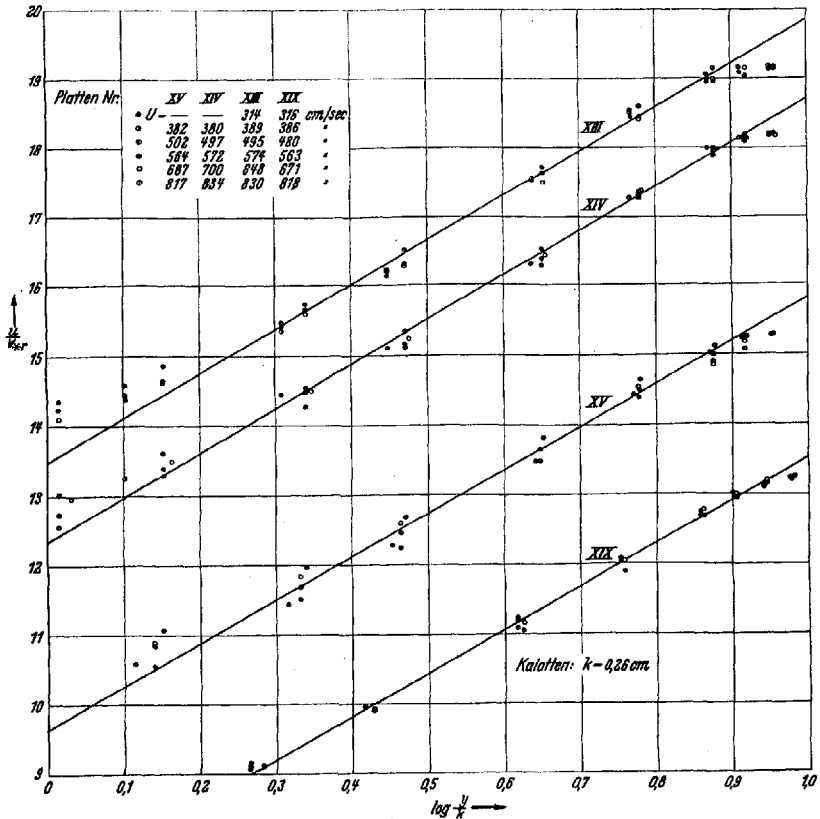


Abb. 12. Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung für die Kalottenrauhigkeit, $k = 0,26\text{cm}$.

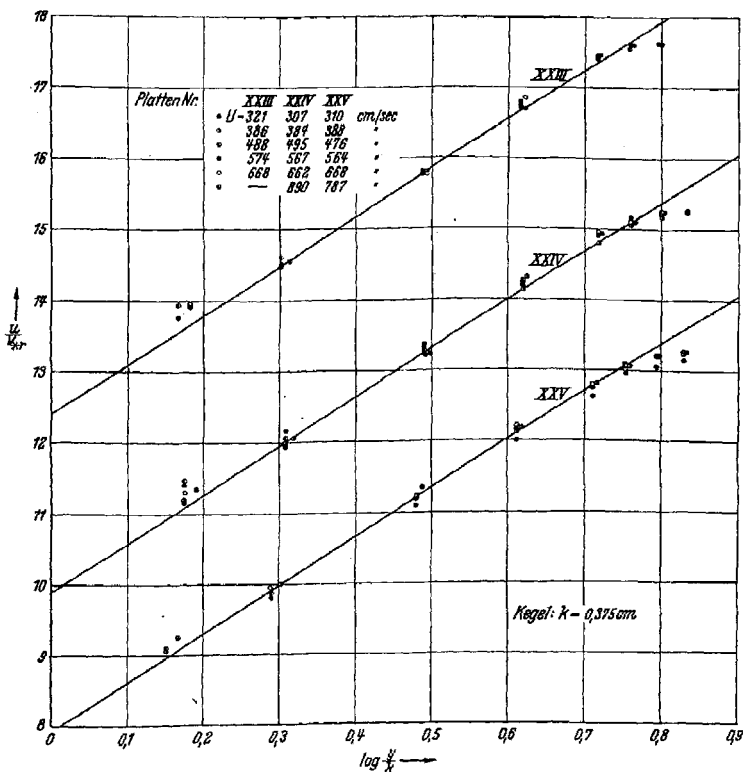


Abb. 13. Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung für die Kegelrauhigkeit, $k = 0,375 \text{ cm}$.

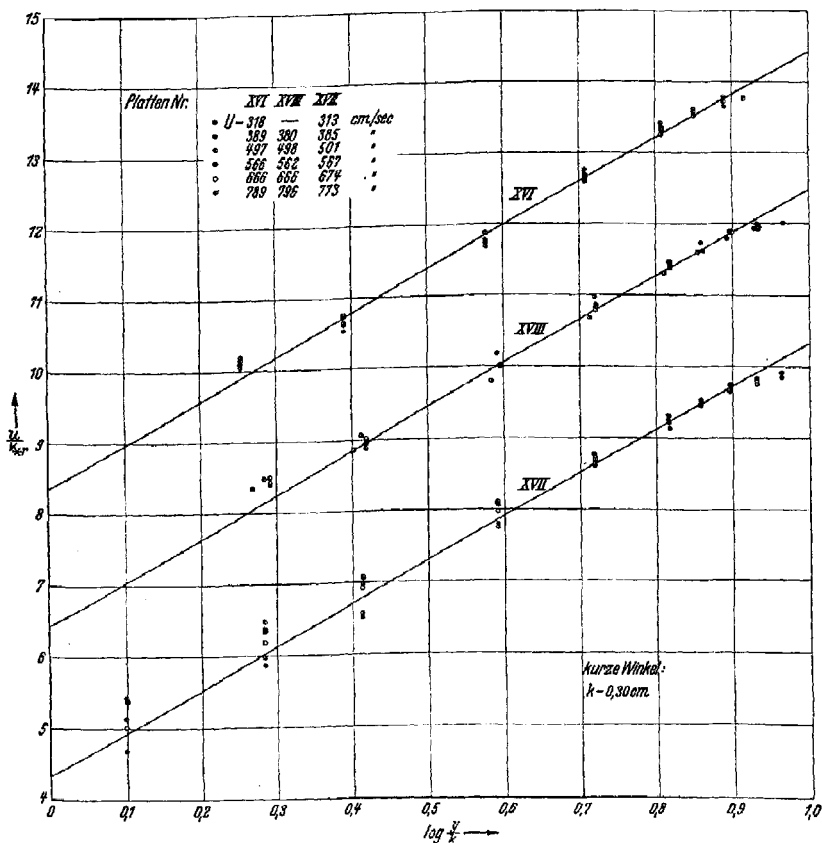


Abb. 14. Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung für die Rauigkeit „kurze Winkel“, $k = 0,30 \text{ cm}$.

8. Die Versuchsergebnisse. Unsere sämtlichen Versuchsergebnisse sind in Abb. 10 bis 15 und Tabelle 3 zusammengestellt. Die gemessenen Geschwindigkeitsprofile sind nach dem oben beschriebenen Verfahren ausgewertet worden. In Abb. 10 bis 15 sind für die einzelnen Arten von Rauigkeiten (Kugeln, Kalotten, Kegel, kurze und lange Winkel) die Auftragungen nach dem universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für rauhe Wand wiedergegeben. (u/v_{*r} über $\log y/k$). Sämtliche bei der gleichen Platte gemessenen Profile müssen in eine Gerade zusammenfallen, soweit das quadratische Widerstandsgesetz vorliegt. Dies ist mit befriedigender Genauigkeit erfüllt. Jeder rauhen Platte entspricht eine solche Gerade, und die Parallelität sämtlicher Geraden, die ebenfalls vom universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz verlangt wird, ist erfüllt. Die Neigung dieser Geraden ist im Mittel etwas größer als die Neigung 5,75 beim universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz. Diese Tatsache und ihre Berücksichtigung bei der Auswertung wurde schon oben diskutiert. Wenn bei unserer Auftragung die einzelnen Profile nicht so gut mit der Geraden der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung zusammenfallen wie bei den Nikuradseschen Messungen mit Sandrauigkeit, so ist zu beachten, daß bei uns das Verhältnis von Rauigkeitshöhe zu Kanalhöhe bzw. Rohrdurchmesser beträchtlich größer ist (etwa $1/8$ gegenüber $1/15$ bis $1/500$). Dadurch zeigen unsere Profile, vor allem in Wandnähe, etwas größere Streuungen gegenüber der universellen Geraden, da sich hier der Einfluß der einzelnen Rauigkeit noch stark geltend macht.

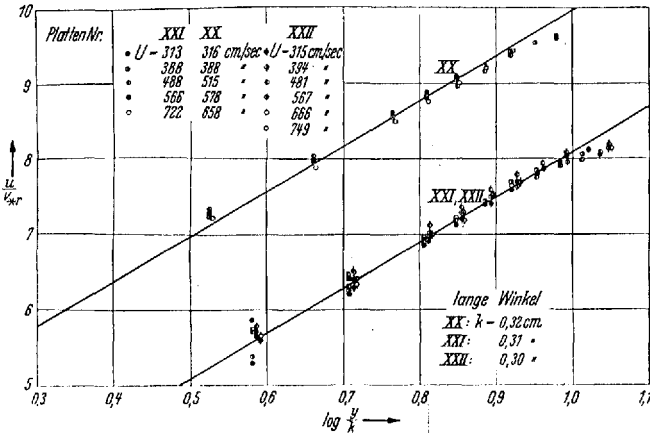


Abb. 15. Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung für die Rauigkeit „lange Winkel“; $k = 0,32, = 0,31, = 0,30$ cm.

Wenn bei unserer Auftragung die einzelnen Profile nicht so gut mit der Geraden der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung zusammenfallen wie bei den Nikuradseschen Messungen mit Sandrauigkeit, so ist zu beachten, daß bei uns das Verhältnis von Rauigkeitshöhe zu Kanalhöhe bzw. Rohrdurchmesser beträchtlich größer ist (etwa $1/8$ gegenüber $1/15$ bis $1/500$). Dadurch zeigen unsere Profile, vor allem in Wandnähe, etwas größere Streuungen gegenüber der universellen Geraden, da sich hier der Einfluß der einzelnen Rauigkeit noch stark geltend macht.

Die Ergebnisse der Auswertung sind für die Geschwindigkeitsreihen der sämtlichen rauhen Platten in Tabelle 3 und 4 angegeben. Tabelle 3 gibt für jedes Profil die

Tabelle 4. $A = \frac{u}{v_{*r}} - 5,75 \log \frac{y}{k}$, $k_s =$ äquivalente Sandrauigkeit, $\alpha = k_s/k$, $5,75 \log \alpha = 8,48 - A$.

Platten Nr.	$\frac{v_{*r}}{u}$	A	k_s cm	$\frac{k_s}{k} = \alpha$	Platten Nr.	$\frac{v_{*r}}{u}$	A	k_s cm	$\frac{k_s}{k} = \alpha$
Kugelrauigkeit: $k = 0,41$ cm					Kegelrauigkeit: $k = 0,375$ cm				
XII	0,0689	12,2	0,093	0,227	XXIII	0,0652	13,1	0,059	0,159
III	0,0881	8,92	0,344	0,838	XXIV	0,0754	10,6	0,164	0,437
I	0,120	5,68	1,26	3,07	XXV	0,0894	8,49	0,374	0,996
II	0,131	5,15	1,56	3,81	Rauigkeit: Kurze Winkel: $k = 0,30$ cm				
V	0,0854	9,65	0,257	0,626	XVI	0,0856	8,56	0,291	0,965
Kugelrauigkeit: $k = 0,21$ cm					XVIII	0,101	6,67	0,618	2,05
VI	0,0779	8,98	0,172	0,819	XVII	0,124	4,53	1,47	4,86
IV	0,106	5,27	0,759	3,61	Rauigkeit: Lange Winkel: $k = 0,323$ cm, $0,310$ cm, $0,303$ cm				
Kalottenrauigkeit: $k = 0,26$ cm					XX	0,137	4,17	1,81	5,61
XIII	0,0590	13,8	0,031	0,118	XXI	0,167	2,28	3,70	11,9
XIV	0,0631	12,7	0,049	0,186	XXII	0,179	2,33	3,56	11,75
XV	0,0763	9,89	0,149	0,571	Sandrauigkeit: $k = 0,135$ cm				
XIX	0,0909	7,64	0,365	1,40	IX	0,0820	7,22	0,222	1,64

Maximalgeschwindigkeit U , die mittlere Geschwindigkeit des Profils an der rauhen Wand \bar{u} , die kinematische Zähigkeit ν , die Breiten b_1 und b_2 des glatten und rauhen Profils, die Reynoldssche Zahl $U b/\nu$, die Rauigkeitskennzahl $v_*/k/\nu$ und die Rauigkeitsfunktion A . Tabelle 4 gibt für die einzelnen rauhen Platten die dimensionslose Wandschubspannung v_*/\bar{u} , die äquivalente Sandrauigkeit k_s , ferner $\alpha = k_s/k$ und den Mittelwert von A für jede Platte. Von den gemessenen Sandplatten ist nur die mit dem Hamburger Sand angegeben, da die mit dem Göttinger Sand nur als Vorversuche zu betrachten sind, die ausgeführt wurden, um den Anschluß an die Nikuradeschen Rohrmessungen mit Sand zu bekommen. Dieser Anschluß wurde mit befriedigender Genauigkeit erreicht. Die nach unserer Methode für Platten mit der

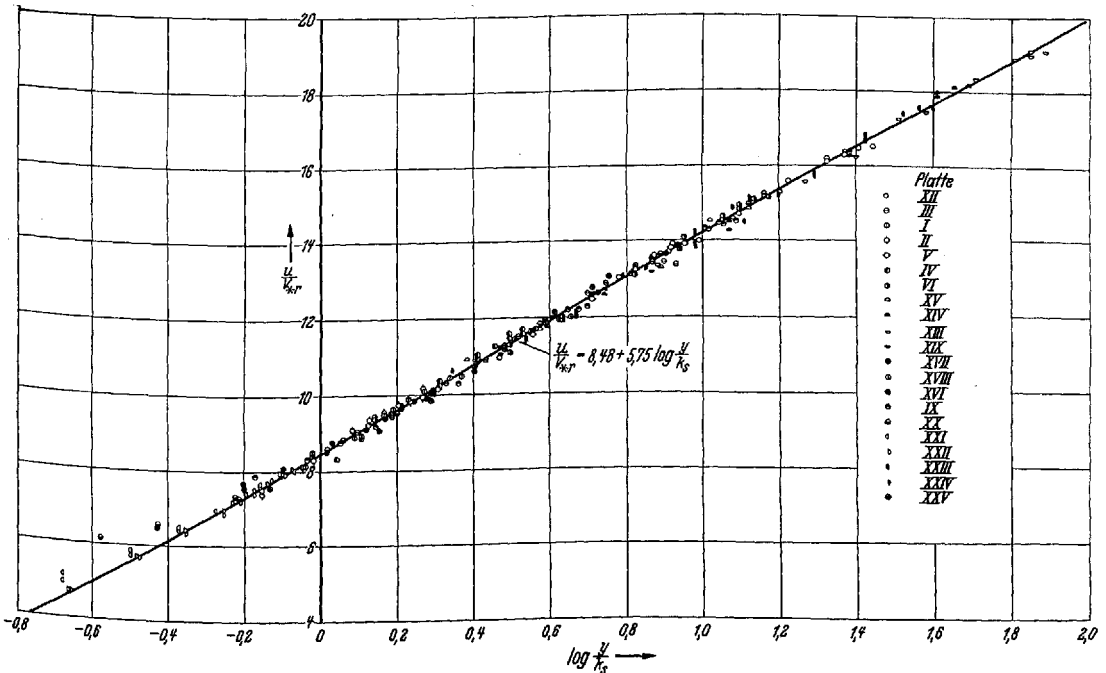


Abb. 16. Die universelle Geschwindigkeitsverteilung für sämtliche 21 rauhe Platten bezogen auf äquivalente Sandrauigkeit $\frac{u}{v_*r}$ als Funktion von $\log \frac{y}{k_s}$.

Nikuradeschen Sandrauigkeit gefundenen λ -Werte stimmen bis auf 1–2% mit den Nikuradeschen überein.

Für die Praxis am wichtigsten von den sämtlichen Ergebnissen unserer Auswertung ist die Größe k_s , die äquivalente Sandrauigkeit, die nach (5) und Abb. 9 die Umrechnung auf andere Kanal- und Rohrdurchmesser und auf die geschleppte Platte (vgl. den folgenden Abschnitt) ermöglicht. Nach den Messungen bei Sandrauigkeit herrscht ausgebildete Rauigkeitsströmung für $v_* k_s/\nu > 70$. Etwa dieselbe Grenze hat man vermutlich auch für andere Rauigkeiten anzunehmen. Jedenfalls liegen unsere Messungen fast durchweg im Bereich der ausgebildeten Rauigkeitsströmung, da nach Tabelle 3 A nahezu unabhängig ist von der Reynoldsschen Zahl. Bei der Umrechnung auf andere Kanalhöhen und Rohrdurchmesser ist übrigens auf die Grenze $v_* k_s/\nu > 70$ zu achten. Beim Rohr ist $v_* = \bar{u} \sqrt{\lambda}/2,83$ und ausgebildete Rauigkeitsströmung liegt also vor, wenn

$$\frac{\bar{u} k_s}{\nu} \sqrt{\lambda} > 198.$$

Besonders seltsame Erscheinungen, deren Ursache noch nicht aufgeklärt werden konnte, traten bei den Geschwindigkeitsprofilen von Platte XII auf (Kugeln $d = 4$ mm, $D = 40$ mm). Wir kommen darauf in Ziffer 10 noch zurück. In Abb. 16 ist für

sämtliche 21 Profile die dimensionslose Geschwindigkeit u/v_{*r} über $\log(y/k_s)$ aufgetragen. Sämtliche Profile fallen gut in die universelle Gerade

$$\frac{u}{v_{*r}} = 8,48 + 5,75 \log \frac{y}{k_s},$$

die für die Bestimmung von k_s zugrunde gelegt wurde. Die Streuung ist durchweg sehr gering, d. h. bei allen untersuchten Platten ist das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gut erfüllt. Nur für sehr kleine Werte von y/k_s ergeben sich systematische Abweichungen.

Von besonderem Interesse ist nun die Abhängigkeit des Widerstandes rauher Platten von der Rauheitsdichte bei gleichbleibender Elementarrauhigkeit und gleichem Verteilungsmuster. In Abb. 17

ist für sämtliche gemessenen Rauheiten (v_{*r}/u) über F_r/F aufgetragen. F_r bedeutet die gesamte Projektionsfläche sämtlicher Rauheiten auf eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung und F die Fläche der beströmten Platte. $F_r/F = 0$ bedeutet also die glatte Platte. Mit wachsendem F_r/F nimmt der Widerstand zunächst durchweg zu, was ja erwartet werden muß. Bei der Kugelrauhigkeit tritt der größte Widerstand jedoch nicht bei dichtester Besetzung auf, sondern bei etwa $F_r/F = 0,4$, wenn also rund 40% der Gesamfläche mit Kugeln bedeckt sind. Auch dies ist verständlich, da ja bei weitläufiger Verteilung der Kugeldurchmesser, bei sehr dichter Packung jedoch wegen der Abdeckung jeder Kugel durch die vorausgehenden nur der Kugelhalmesser oder noch weniger als wirksame Rauheitshöhe in Frage kommt. Sowohl die dichteste Kugelbesetzung als auch die dichteste Kalottenbesetzung haben weniger Widerstand als eine Sandrauhigkeit, deren Korngröße gleich dem Kugeldurchmesser bzw. gleich der Kalottenhöhe ist.

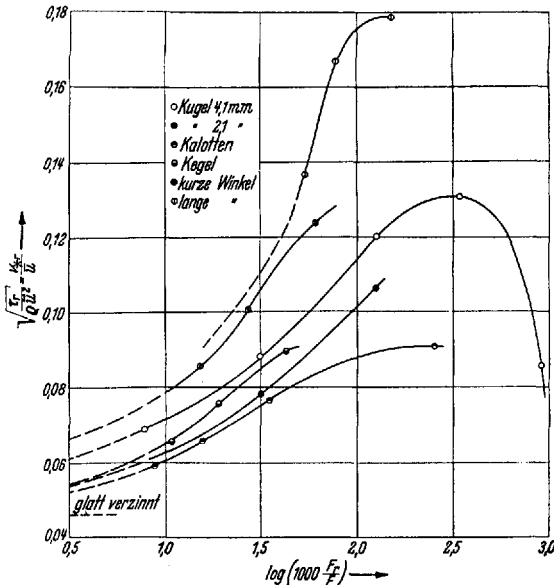


Abb. 17. Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Rauheitsdichte $\frac{F_r}{F}$; $\sqrt{\frac{F_r}{F} \frac{\tau_w}{\rho u_*^2}}$ als Funktion von $\frac{F_r}{F}$ für Kugel-, Kalotten-, Kegel- und Winkelrauhigkeit.

Für beide ist $k_s/k < 1$ nach Tabelle 4. Bei der „regelmäßigen“ Kugel- und Kalottenrauhigkeit ist also offenbar die wirksame Rauheitshöhe geringer als bei der „unregelmäßigen“ Sandrauhigkeit.

Auch für die Rauheit „lange Winkel“ lassen unsere Messungen einen Höchstwert des Widerstandes erkennen, der etwa bei $F_r/F = 0,1$ zu liegen scheint.

Um noch einen besseren Einblick in die Abhängigkeit des Widerstandes von der Rauheitsdichte zu erhalten, bilden wir in folgender Weise einen Widerstandskoeffizienten der einzelnen Elementarrauhigkeit. Es bedeute W_r den reinen Rauheitswiderstand der rauhen Platte, der als Differenz des Gesamtwiderstandes W der rauhen Platte und des Widerstandes W_g der zwischen den Rauheiten vorhandenen glatten Fläche erhalten wird:

$$W_r = W - W_g. \tag{15}$$

Ferner sei u_k die Geschwindigkeit im Wandabstand $y = k$, der gleich der Rauheitshöhe ist. Wir bilden dann den Widerstandskoeffizienten

$$C_f = \frac{2 W_r}{\rho u_k^2 F_r}, \tag{16}$$

wo F_r , die schon oben eingeführte Projektionsfläche sämtlicher Rauigkeiten auf die Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung bedeutet (vgl. Sadron [18]).

Die Geschwindigkeit u_k läßt sich bei bekannter Wandschubspannung $\tau_r = \rho v_{*r}^2$ aus dem universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz (8) berechnen. Mit $u = U$ für $y = b_2$ folgt aus (8)

$$\frac{U - u}{v_{*r}} = - 5,75 \log \frac{y}{b_2} = - 2,5 \ln \frac{y}{b_2} \tag{17}$$

und daraus für die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} des Profils an der rauhen Wand durch Integration zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = b_2$

$$U - \bar{u} = 2,5 v_{*r}.$$

Subtrahiert man davon die Gleichung

$$U - u_k = - 2,5 v_{*r} \ln \frac{k}{b_2},$$

so kommt

$$u_k - \bar{u} = 2,5 v_{*r} \left(1 + \ln \frac{k}{b_2} \right)$$

oder

$$\frac{u_k}{\bar{u}} = 1 - 2,5 \frac{v_{*r}}{\bar{u}} \left(\ln \frac{b_2}{k} - 1 \right). \tag{18}$$

Für den Widerstand W_r gilt nach (15)

$$W_r = F \rho v_{*r}^2 - F_1 \rho v_{*s}^2$$

Tabelle 5. $\frac{F_r}{F}$ = Rauigkeitsdichte, C_f = Widerstandskoeffizient der Elementarrauhigkeit [vgl. Gl. (19)], u_k = Geschwindigkeit im Wandabstand $y = k$ [vgl. Gl. (18)], $c_{w\infty}$ = Widerstandskoeffizient in der unbegrenzten Strömung.

Art der Rauigkeit	Platten Nr.	$\frac{F_r}{F}$	$\frac{\tau_r}{\rho \bar{u}^2}$	C_f	$\frac{u_k}{\bar{u}}$
Kugeln $d = 0,41$ cm	XII	0,00785	0,00474	0,908	0,862
Kugeln $d = 0,41$ cm	III	0,0314	0,00775	0,569	0,804
Kugeln $d = 0,41$ cm	I	0,126	0,0145	0,405	0,704
Kugeln $d = 0,41$ cm	II	0,349	0,0172	0,195	0,678
Kugeln $d = 0,41$ cm	V	0,907	0,00730	0,023	0,826
Kugeln $d = 0,21$ cm	VI	0,0314	0,00606	0,520	0,702
Kugeln $d = 0,21$ cm	IV	0,126	0,0112	0,498	0,570
Kalotten	XIII	0,0087	0,00348	0,480	0,826
Kalotten	XIV	0,0155	0,00398	0,469	0,799
Kalotten	XV	0,0348	0,00582	0,388	0,767
Kalotten	XIX	0,251	0,00825	0,102	0,702
Kegel	XXIII	0,0106	0,00425	0,552	0,865
Kegel	XXIV	0,0189	0,00569	0,561	0,832
Kegel	XXV	0,0425	0,00799	0,463	0,790
Kurze Winkel	XVI	0,0151	0,00732	1,20	0,757
Kurze Winkel	XVIII	0,0269	0,0102	1,24	0,691
Kurze Winkel	XVII	0,0605	0,0154	1,19	0,607
Lange Winkel	XX	0,0538	0,0188	1,95	0,563
Lange Winkel	XXI	0,0776	0,0279	3,62	0,428
Lange Winkel	XXII	0,152	0,0321	2,54	0,378
Sand	IX	—	0,00672	—	0,594

Kugel, $Re = 2 \cdot 10^4$; $c_{w\infty} = 0,47$.
 Rechteckplatte, Seitenverhältnis $l/b = 8/3$; $c_{w\infty} = 1,17$.
 Rechteckplatte, Seitenverhältnis $l/b = \infty$; $c_{w\infty} = 2,01$.

oder

$$\frac{W_r}{\rho u^2} = F \left(\frac{v_{*r}}{u} \right)^2 - F_1 \left(\frac{v'_{*g}}{u} \right)^2$$

oder

$$C_f = \frac{2W_r}{\rho u_k^2 F_r} = 2 \frac{F}{F_r} \left(\frac{u}{u_k} \right)^2 \left[\left(\frac{v_{*r}}{u} \right)^2 - \frac{F_1}{F} \left(\frac{v'_{*g}}{u} \right)^2 \right]. \tag{19}$$

Dabei bedeutet $\tau' = \rho v'_{*g}{}^2$ die Schubspannung in den glatten Zwischenräumen und F_1 die Fläche der glatten Zwischenräume an der rauhen Wand.

Da u/u_k nach (18) bekannt ist, haben wir hiermit den Widerstandskoeffizienten C_f durch unsere gemessenen Größen ausgedrückt. Dabei hängt v'_{*g}/u noch etwas ab von der Reynoldsschen Zahl, und zwar nimmt es mit wachsender Reynoldsscher Zahl ab. Da das zweite Glied in der Klammer meist klein ist gegen das erste, haben wir für v'_{*g}/u der Einfachheit halber einen mittleren Wert gesetzt, den wir durch Messung mit einer glatt verzinneten Platte erhielten, nämlich

$$\frac{v'_{*g}}{u} = 0,0461.$$

Die Werte von $\frac{u_k}{u}$ und die damit nach Gl. (19) berechneten Werte von C_f sind in Tabelle 5 angegeben und in Abb. 18 als Funktion von F_r/F aufgetragen. Bei der Kalotten-, Kegel- und Winkelrauigkeit ist C_f bei kleinen Werten der Rauigkeitsdichte konstant, der Widerstand der einzelnen Rauigkeit ist also nur durch Beeinflussung von u_k abhängig von der Rauigkeitsdichte.

Bei größeren Rauigkeitsdichten fallen die C_f -Kurven mit wachsendem F_r/F ab. Die Vorgänge an den einzelnen Rauigkeiten beeinflussen

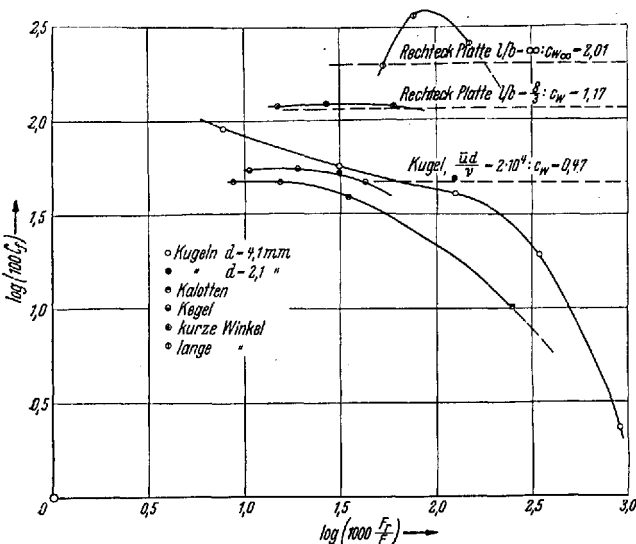


Abb. 18. Der Widerstandskoeffizient des Rauigkeitselementes

$$C_f = \frac{2W_r}{\rho u_k^2 F_r} \text{ als Funktion der Rauigkeitsdichte } \frac{F_r}{F}.$$

sich jetzt gegenseitig auch über den Einfluß auf u_k hinaus, die effektive Rauigkeitshöhe wird kleiner bei gleichbleibender absoluter Rauigkeitshöhe.

Die C_f -Kurve für die 4,1-mm-Kugeln fällt auch bei den kleinsten gemessenen Rauigkeitsdichten schon schwach ab, d. h. also, daß bei der Kugelrauigkeit eine gegenseitige Beeinflussung der Vorgänge an den einzelnen Rauigkeiten schon bei kleinerer Rauigkeitsdichte eintritt als bei den anderen von uns untersuchten Rauigkeiten. Die beiden Platten mit den 2,1-mm-Kugeln fallen einigermaßen in die Kurve der 4,1-mm-Kugeln, was wegen der geometrischen Ähnlichkeit der Rauigkeitselemente erwartet werden muß.

Eine Sonderstellung nehmen die drei Platten mit den langen Winkeln ein, wo sich zunächst ein Ansteigen und dann ein Abfallen von C_f mit zunehmender Rauigkeit ergibt. Messungen mit dieser gleichen Rauigkeit hat früher schon Treer [19] durchgeführt; bei seinen Messungen war $F_r/F = 0,5; 0,63; 1,0$, also wesentlich größer als bei uns. In Übereinstimmung mit uns findet er bei diesen großen Rauigkeitsdichten eine Abnahme des Widerstandes mit zunehmender Rauigkeitsdichte.

Schließlich können wir den Widerstandskoeffizienten C_f der Rauigkeitselemente in der Grenzschicht noch vergleichen mit dem gewöhnlichen Widerstandskoeffizienten in der unbegrenzten Strömung c_w .

Für quer angeströmte rechteckige Platten von den Seitenverhältnissen $l/b = \infty$ und $8/3$ (entsprechend unseren Platten mit langen und kurzen Winkeln) ist $c_w = 2,01$ bzw. $1,17$ unabhängig von der Reynoldsschen Zahl. Für Kugeln ist bei $Re = \bar{u}d/\nu = 2 \cdot 10^4$, was etwa die Reynoldssche Zahl unserer Kugelrauigkeit ist, $c_w = 0,47$. Diese Werte sind in Abb. 18 eingetragen, und es zeigt sich, daß sie recht gut mit den C_f -Werten bei kleiner Rauigkeitsdichte übereinstimmen. Es folgt also hieraus, daß bei kleiner Rauigkeitsdichte der Widerstand eines Rauigkeitselementes in der Reibungsschicht etwa derselbe ist wie in der unbegrenzten Strömung bei einer Anströmungsgeschwindigkeit, die gleich der Geschwindigkeit im Wandabstand $y = k$ in der Reibungsschicht ist.

Für unsere übrigen Rauigkeiten können wir diesen Vergleich zur Zeit leider nicht anstellen, da für diese c_w noch nicht bekannt ist.

Tabelle 6. Die Koeffizienten des Gesamt- und örtlichen Widerstandes c_f und c'_f und die Reibungsschichtdicke δ/k_s am Plattenende als Funktion der relativen Rauigkeit l/k_s bei ausgebildeter Rauigkeitsströmung.
 l = Plattenlänge, k_s = Sandrauigkeit, δ = Reibungsschichtdicke, c'_f = örtlicher Widerstandskoeffizient, c_f = Gesamtwiderstandskoeffizient.

9. Übertragung auf die geschleppte Platte. Der Gesamtwiderstand eines Schiffes setzt sich bekanntlich zusammen aus Oberflächenreibungs-
 widerstand, Ablösungswiderstand und Wellenwiderstand, von denen der erstere in vielen Fällen den weitaus größten Teil ausmacht. Der Reibungswiderstand ist sehr stark abhängig von der Rauigkeit der Schiffswand. Die Widerstandserhöhung infolge von Rauigkeit kann bis zu 50% des gesamten Reibungswider-

z	$l/k_s = G(z)$	$F(z)$	$c'_f \cdot 10^3$	$c_f \cdot 10^3$	δ/k_s
$3 \cdot 10^2$	$1,615 \cdot 10^2$	1,150	9,84	14,3	$1,00 \cdot 10^1$
$5 \cdot 10^2$	$3,140 \cdot 10^2$	1,832	8,28	11,7	$1,67 \cdot 10^1$
$7 \cdot 10^2$	$4,832 \cdot 10^2$	2,490	7,46	10,3	$2,33 \cdot 10^1$
10^3	$7,519 \cdot 10^2$	3,453	6,71	9,18	$3,33 \cdot 10^1$
$2 \cdot 10^3$	$1,766 \cdot 10^3$	6,490	5,54	7,35	$6,67 \cdot 10^1$
$3 \cdot 10^3$	$2,878 \cdot 10^3$	9,407	4,99	6,54	$1,00 \cdot 10^2$
$5 \cdot 10^3$	$5,270 \cdot 10^3$	$1,593 \cdot 10^1$	4,41	5,70	$1,67 \cdot 10^2$
$7 \cdot 10^3$	$7,841 \cdot 10^3$	$2,048 \cdot 10^1$	4,08	5,22	$2,33 \cdot 10^2$
10^4	$1,195 \cdot 10^4$	$2,843 \cdot 10^1$	3,77	4,76	$3,33 \cdot 10^2$
$2 \cdot 10^4$	$2,660 \cdot 10^4$	$5,390 \cdot 10^1$	3,26	4,05	$6,67 \cdot 10^2$
$3 \cdot 10^4$	$4,230 \cdot 10^4$	$7,845 \cdot 10^1$	3,01	3,71	$1,00 \cdot 10^3$
$5 \cdot 10^4$	$7,564 \cdot 10^4$	$1,260 \cdot 10^2$	2,73	3,33	$1,67 \cdot 10^3$
$7 \cdot 10^4$	$1,106 \cdot 10^5$	$1,722 \cdot 10^2$	2,57	3,11	$2,33 \cdot 10^3$
10^5	$1,654 \cdot 10^5$	$2,400 \cdot 10^2$	2,41	2,90	$3,33 \cdot 10^3$
$2 \cdot 10^5$	$3,581 \cdot 10^5$	$4,581 \cdot 10^2$	2,15	2,56	$6,67 \cdot 10^3$
$3 \cdot 10^5$	$3,611 \cdot 10^5$	$6,693 \cdot 10^2$	2,01	2,39	$1,00 \cdot 10^4$
$5 \cdot 10^5$	$9,888 \cdot 10^5$	$1,080 \cdot 10^3$	1,86	2,18	$1,67 \cdot 10^4$

standes betragen. Die Schiffbautechnik ist deshalb an dem Rauigkeitsproblem vor allem dadurch interessiert, daß sie den Widerstand tangentiell angeströmter rauher Platten zu kennen wünscht.

Während beim Rohr und Kanal das Verhältnis von Rauigkeitshöhe k zu Reibungsschichtdicke δ auf der ganzen Länge konstant ist, sind die Vorgänge in der Reibungsschicht bei der geschleppten Platte dadurch verwickelt, daß die Reibungsschichtdicke von vorn nach hinten zunimmt, und also das für den Widerstand ausschlaggebende Verhältnis von k/δ von vorn nach hinten abnimmt. Nach Überwindung eines laminaren Anlaufstückes ist vorn an einer rauhen Platte k/δ immer verhältnismäßig groß, so daß dort ausgebildete Rauigkeitsströmung herrscht. Weiter hinten schließt sich dann, wenn die Platte lang genug ist und die Rauigkeiten klein genug sind, der Übergangsbereich an und an diesen möglicherweise noch der Bereich der hydraulisch glatten Strömung.

Prandtl und v. Kármán haben 1927 und 1932 [13, 14] bzw. 1921 und 1930 [12, 4] für die glatte Platte gezeigt, wie man aus den Gesetzen der Strömung im glatten Rohr rein rechnerisch in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung das Widerstandsgesetz der glatten Platte ableiten kann. Der gleiche Gedankengang ist dann später unter Zugrundelegung der Nikuradschen Messungen in Rohren mit Sandrauigkeit

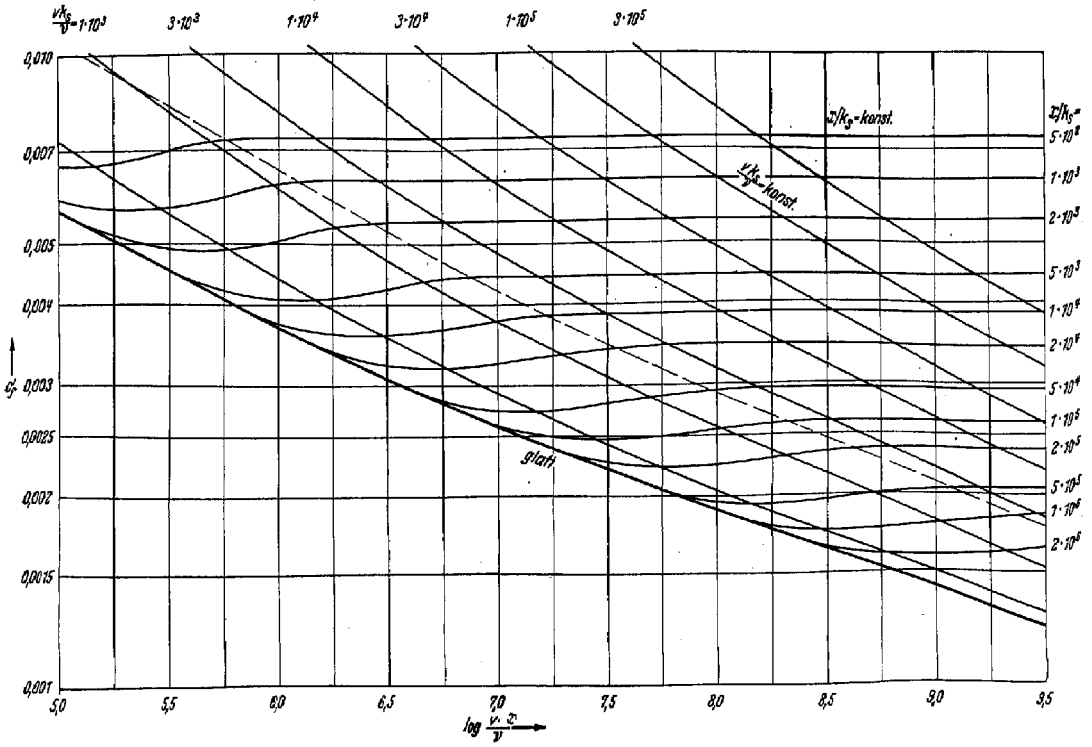


Abb. 19. Der örtliche Widerstandskoeffizient $c_f = \frac{2 \tau_w}{\rho v^2}$ für raue Sandplatten in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\frac{v_l}{\nu}$ und der relativen Rauigkeit k_s/k_s^* (k_s^* = Sandrauigkeit).

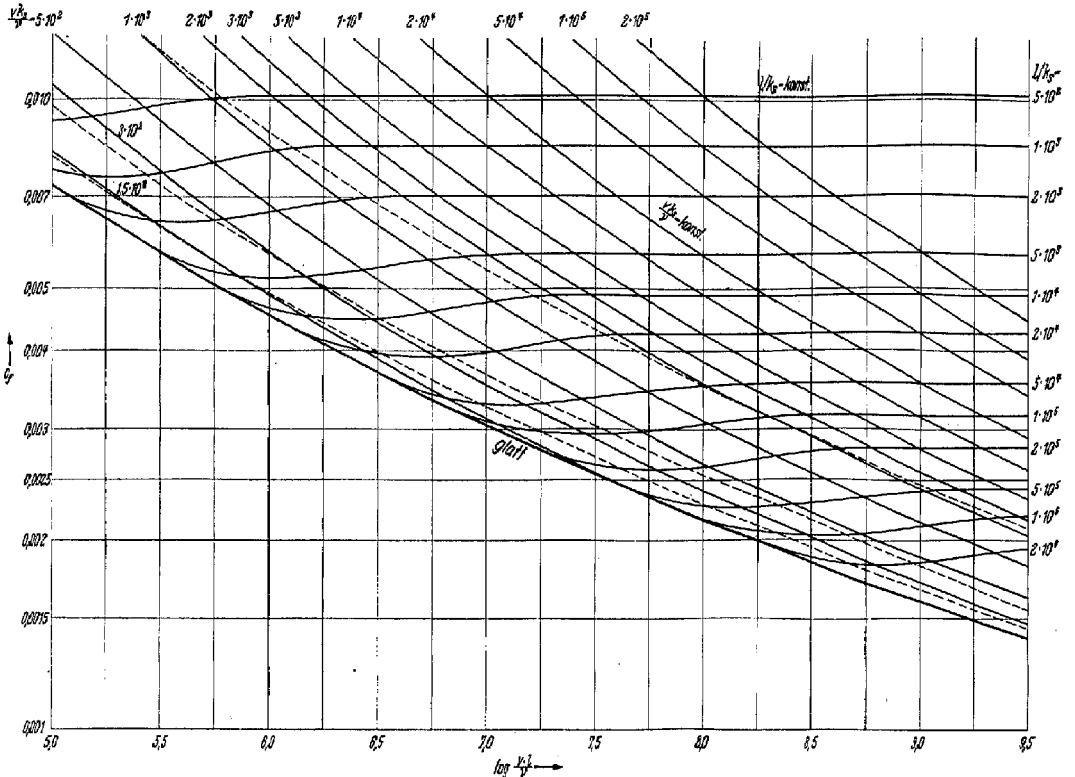


Abb. 20. Der Gesamtwiderstandskoeffizient $c_f = \frac{2 W}{\rho v^2 F}$ für raue Sandplatten in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\frac{v_l}{\nu}$ und der relativen Rauigkeit k_s/k_s^* (k_s^* = Sandrauigkeit).

von Prandtl und vom Verfasser auf die rauhe Platte übertragen worden [15, 16]. Diese Umrechnungen sind ermöglicht worden durch die Auffindung der in (7) und (8) angegebenen universellen Gesetze für turbulente Strömung im glatten und rauhen Rohr. Die Zuverlässigkeit dieser Umrechnung und ihre Extrapolation über den Versuchsbereich hinaus ist durch den universellen Charakter dieser Gesetze durchaus gesichert. Wegen der Einzelheiten der Gedankengänge muß auf die betreffenden Arbeiten verwiesen werden.

Die auf diese Weise erhaltenen Diagramme für den örtlichen Widerstandskoeffizienten $c'_j = \frac{2\tau}{\rho v^2}$ und den Gesamtwiderstandskoeffizienten $c_f = \frac{2W}{\rho v^2 b l}$ der rauhen Sandplatte in Abhängigkeit von Reynoldsscher Zahl $R = v \cdot l/\nu$ und relativer Rauigkeit l/k_s (Abb. 19 und 20) sind in der unter [16] zitierten Arbeit schon früher angegeben worden. Dabei ist angenommen, daß von der Vorderkante an turbulente Strömung herrscht. Durch das in Wirklichkeit immer vorhandene laminare Anlaufstück wird der Gesamtwiderstand etwas erniedrigt. Doch ist dies bei einigermaßen langen Platten praktisch belanglos.

Am einfachsten sind die Verhältnisse wieder in dem Bereich der ausgebildeten Rauigkeitsströmung, wo die Widerstandszahlen nur von der relativen Rauigkeit abhängen. Das genaue Widerstandsgesetz ist aber auch hier noch so verwickelt, daß es sich nicht in expliziter Form, sondern nur durch eine Parameterdarstellung (Parameter z) angeben läßt, nämlich:

$$l = k_s G(z), \quad W = \rho v^2 b k_s F(z). \quad (20)$$

(b = Plattenbreite.)

Die Funktionen $G(z)$ und $F(z)$ sind in Tabelle 6 angegeben. Für den praktischen Gebrauch ist es jedoch bequemer, für das Widerstandsgesetz einfache Interpolationsformeln zu besitzen. Wir haben für den örtlichen und Gesamtwiderstandskoeffizienten c'_j und c_f solche ermittelt, durch welche die genauen Formeln mit befriedigender Annäherung wiedergegeben werden. Sie lauten

$$\left. \begin{aligned} c'_j &= \left(2,87 + 1,58 \log \frac{l}{k_s} \right)^{-2,5}, \\ c_f &= \left(1,89 + 1,62 \log \frac{l}{k_s} \right)^{-2,5} \end{aligned} \right\} \quad (21 a, b)$$

und haben Gültigkeit für $2 \cdot 10^2 \leq l/k_s \leq 10^6$. Die Werte von c'_j und c_f sind in Abb. 21 als Funktion von l/k_s aufgetragen. Die entsprechenden Formeln für die glatte Platte lauten:

$$\left. \begin{aligned} c'_j &= (2 \log R - 0,65)^{-2,3}, \\ c_f &= 0,455 (\log R)^{-2,58} \end{aligned} \right\} \quad (10^6 \leq R \leq 10^9). \quad (22 a, b)$$

Die Gleichungen (21) treten bei der rauhen Platte an Stelle der Gleichung (5) für das Rohr. Hiernach kann man für jede Rauigkeit, deren äquivalente Sandrauigkeit k_s bekannt ist, den örtlichen und Gesamtplattenwiderstandskoeffizienten sofort angeben. Wir geben ein Zahlenbeispiel:

Schiffslänge: $l = 150$ m, Fahrgeschwindigkeit $v = 12$ Knoten/Stunde = 6,17 m/sec, kinematische Zähigkeit des Wassers bei $t = 15^\circ\text{C}$: $\nu = 0,0114$ cm/sec, Reynoldssche Zahl: $R = vl/\nu = 8,12 \cdot 10^8$.

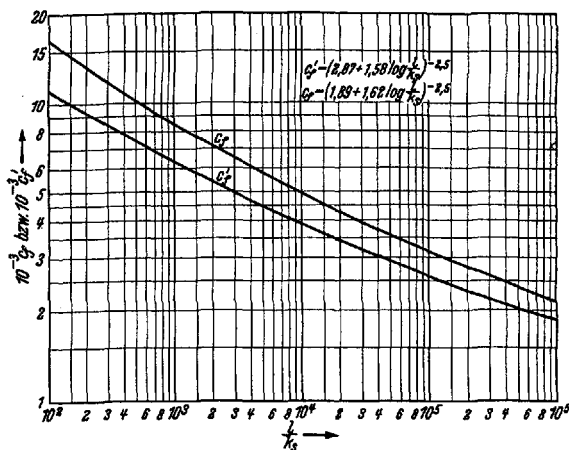


Abb. 21. Die Koeffizienten des Gesamt- und örtlichen Widerstandes c_f und c'_j für ausgebildete Rauigkeitsströmung (quadratisches Widerstandsgesetz) als Funktion der relativen Rauigkeit

$$\frac{l}{k_s} \left(c'_j = \frac{2\tau}{\rho v^2}, \quad c_f = \frac{2W}{\rho v^2 F} \right).$$

Das glatte Schiff hat als Koeffizienten des Gesamtwiderstandes nach (22)

$$\text{glatt: } c_f = 1,62 \cdot 10^{-3}.$$

Wir nehmen jetzt an, daß das Schiff auf der ganzen Länge eine Rauigkeit von der Art unserer Kalotten (Platte XIII) besitzt, die etwa Nietköpfen entsprechen; Höhe $k = 2,6$ mm, Durchmesser $d = 8$ mm, Abstand $D = 40$ mm. Das von uns bestimmte k_s ist (Tabelle 5)

$$k_s = 0,031 \text{ cm.}$$

Damit errechnet sich nach unserer Gleichung (21b) mit $l/k_s = 4,84 \cdot 10^5$

$$\text{rauh: } c_f = 2,43 \cdot 10^{-3},$$

also 50% Widerstandserhöhung gegenüber der glatten Platte. Dieser Betrag ist sehr groß, aber die von uns angenommene Rauigkeit ist auch beträchtlich.

Um zu sehen, in welchem Maße die einzelnen Teile des Schiffes zum Gesamtwiderstand beitragen, geben wir noch die Teilwiderstände W_1 für das erste und W_{10} für das letzte Zehntel der ganzen Schiffslänge an. Bedeutet $W = W_1 + W_2 + \dots + W_{10}$ den Widerstand des ganzen Schiffes, so findet man nach unserer Formel (21b)

$$\frac{W_1}{W} = \frac{1}{10} \frac{c_f \left(\frac{l}{10} \right)}{c_f(l)} = 0,149,$$

$$\frac{W_{10}}{W} = \frac{c_f(l) - \frac{9}{10} c_f \left(\frac{9}{10} l \right)}{c_f(l)} = 0,081.$$

Auf das erste Zehntel kommt demnach 14,9% und auf das letzte nur 8,1% des Gesamtwiderstandes; daraus erkennt man, daß die gleiche Rauigkeit in der Nähe des Bugs bedeutend schädlicher ist als am Heck.

Unsere Formeln (21) gelten zunächst nur, wenn längs des ganzen Schiffes mit gleicher Rauigkeitshöhe gerechnet werden kann. In der Praxis kommt zuweilen auch die Aufgabe vor, den Widerstand einer Platte anzugeben, die aus verschiedenen Bereichen mit verschiedenen Rauigkeiten besteht. Auch dies kann mit unseren Formeln ohne weiteres geschehen, wobei jedoch beim Übergang von einer zur anderen Rauigkeit eine besondere Überlegung erforderlich ist, die hier kurz angegeben sei.

Wir betrachten eine Platte, die vorn auf einem Stück l_1 die Rauigkeit k_s , und daran anschließend auf eine Strecke l_2 die Rauigkeit k_{s_2} besitze. Der Widerstand des ersten Stückes kann dann nach Formel (21b) wie gewöhnlich berechnet werden. Bei der Berechnung des Widerstandes des zweiten Stückes kann nun aber nicht $x = l_1$ als Anfangskoordinate genommen werden, sondern es muß mit einem von l_1 verschiedenen $x = l'_1$ gerechnet werden. Da an der Übergangsstelle zwischen den beiden Rauigkeiten sich der Impuls des Grenzschichtprofils stetig ändert, bestimmt sich l'_1 aus der Bedingung

$$[W(l'_1)]_{k_{s_2}} = [W(l_1)]_{k_s}, \quad (23)$$

d. h. l'_1 ist derjenige (fiktive) Abstand von der Vorderkante, bei welchem bei der Rauigkeit k_{s_2} der gleiche Impulsverlust der Reibungsschicht vorhanden wäre wie bei der Rauigkeit k_s im Abstand l_1 . Zur Bestimmung von l'_1 müssen wir auf die Parameterdarstellung (20) des Widerstandsgesetzes zurückgreifen. Danach ist

$$\frac{l_1}{k_s} = G(z_1), \quad \frac{l'_1}{k_{s_2}} = G(z'_1).$$

Die erste Gleichung gibt den Parameter z_1 am Ende des ersten Plattenteils. Der Zusammenhang zwischen z_1 und z'_1 folgt aus (23), nämlich

$$W_1 = \rho v^2 b k_s F(z_1) = \rho v^2 b k_{s_2} (F z'_1),$$

also

$$F(z'_1) = \frac{k_{s_1}}{k_{s_2}} F(z_1). \quad (24)$$

Danach läßt sich z'_1 aus z_1 berechnen, und damit auch l'_1 . Der Parameter z_2 am Ende des zweiten Plattenteils folgt dann aus

$$\frac{l'_1 + l_2}{k_{s_2}} = G(z_2).$$

Der Widerstand des zweiten Plattenteils ist

$$W_2 = \rho v^2 b k_{s_2} [F(z_2) - F(z'_1)]$$

und damit der Widerstand der ganzen Platte

$$W_1 + W_2 = \rho v^2 b k_{s_2} F(z_2).$$

Wir geben auch hierfür ein Zahlenbeispiel: Das vorhin betrachtete Schiff von 150 m Länge habe auf den ersten 50 m eine dreifach erhöhte Rauigkeit von $k_s = 0,093$ cm, also

$$l_1 = 50 \text{ m}, \quad k_{s_1} = 0,093 \text{ cm}, \quad l_2 = 100 \text{ m}, \quad k_{s_2} = 0,031 \text{ cm}.$$

Aus $l_1/k_{s_1} = G(z_1) = 5,38 \cdot 10^4$ folgt nach (21 b):

$$c_f(l_1) = 3,53 \cdot 10^{-3}.$$

Aus der Tabelle für $G(z)$ und $F(z)$ findet man durch Interpolation der Reihe nach

$$z_1 = 3,72 \cdot 10^4 : F(z_1) = 95,5;$$

nach (24) kommt

$$F(z'_1) = 286,5, \quad z'_1 = 1,22 \cdot 10^5,$$

$$G(z'_1) = \frac{l'_1}{k_{s_2}} = 2,06 \cdot 10^5, \quad l'_1 = 63,9 \text{ m},$$

$$\frac{l'_1 + l_2}{k_{s_2}} = 5,29 \cdot 10^5 = G(z_2) : z_2 = 2,86 \cdot 10^5,$$

$$F(z_2) = 641, \quad c_f(l_1 + l_2) = 2 \frac{k_{s_2} F(z_2)}{l_1 + l_2} = 2,64 \cdot 10^{-3}.$$

Die Widerstandserhöhung durch die größere Rauigkeit auf dem ersten Schiffsdrittel beträgt also 9%.

Die hier für eine Platte mit zwei verschiedenen Rauigkeiten durchgeführte Rechnung läßt sich natürlich ohne weiteres auf drei und mehr Rauigkeiten ausdehnen.

Damit sind jetzt alle nötigen Angaben vorhanden, um für jede rauhe Schiffswand, deren „äquivalente Sandrauigkeit“ k_s durch einen Versuch in unserem Kanal ermittelt worden ist, die erforderlichen Widerstandsrechnungen durchführen zu können.

Mit unserer Versuchseinrichtung, deren Entwicklung jetzt als beendet angesehen werden darf, kann jede technische Rauigkeit, insbesondere auch jede Schiffsrauigkeit, untersucht werden. Man hat nach dem oben angegebenen Verfahren nur jedesmal die Rauigkeitsfunktion $A = A\left(\frac{v_* k}{v}\right)$ zu ermitteln. Im Bereich des quadratischen Widerstandsgesetzes ($A = \text{konst.}$, unabhängig von $\frac{v_* k}{v}$) kann man dann mit Hilfe der „äquivalenten Sandrauigkeit“ k_s nach den Formeln (5) und (21 a, b) sowohl auf andere Rohre und Kanäle als auch auf die geschleppte Platte umrechnen. Damit lassen sich die experimentell oft sehr schwierigen Plattenschleppversuche zur Bestimmung des Schiffreibwiderstandes, soweit sie das quadratische Widerstandsgesetz betreffen, durch die viel einfachere Messung in unserem Kanal ersetzen.

Für den Übergangsbereich, wo die Rauigkeitsfunktion A noch von $\frac{v_* k}{v}$ abhängt, ist die Umrechnung auf andere Rohre und Kanäle und auf die geschleppte Platte nur dann möglich, wenn man den genauen Verlauf der Rauigkeitsfunktion $A = A\left(\frac{v_* k}{v}\right)$ kennt. Dieser hängt vermutlich noch von der Art der Rauigkeit ab. Es ist nötig, hierüber noch eingehende Untersuchungen anzustellen.

10. Die Geschwindigkeitsverteilung bei Platte XII. Bei der Ausmessung des Geschwindigkeitsfeldes in der Nähe der rauhen Wand von Platte XII (Kugeldurchmesser = 4 mm, Abstand = 40 mm, vgl. Abb. 6a) wurde eine eigentümliche Erscheinung festgestellt, die so sehr allen bisherigen Anschauungen über turbulente Geschwindigkeits-

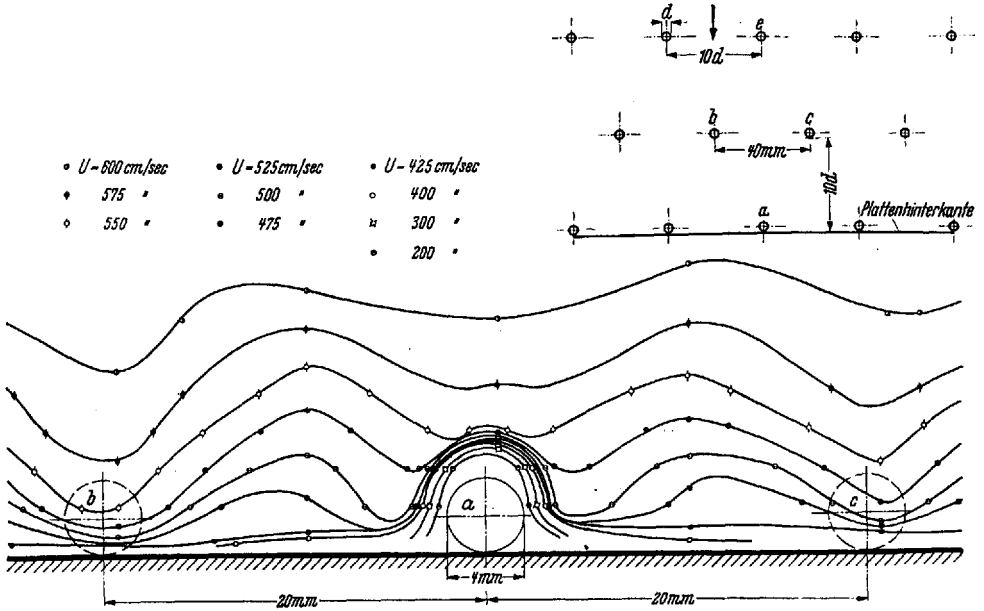


Abb. 22. Isotachenbild unmittelbar hinter der letzten Kugelreihe (Platte XII).

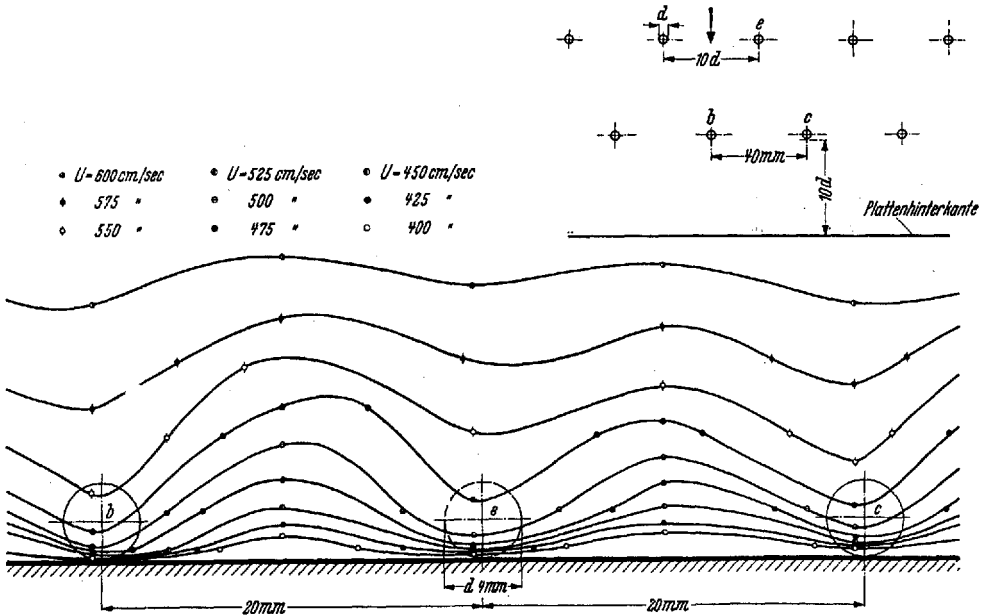


Abb. 23. Isotachenbild im Abstand $10d = 4,0$ cm hinter der letzten Kugelreihe (Platte XII).

verteilungen zuwiderläuft, daß sie hier kurz mitgeteilt werden möge. In Abb. 22, 23 sind zwei Isotachenbilder für zwei Ebenen senkrecht zur rauhen Platte dargestellt. Abb. 22 ist unmittelbar und Abb. 23 40 mm hinter der letzten Kugelreihe gemessen. In Abb. 22 erzeugt natürlich die unmittelbar vor dem Pitotrohr liegende Kugel a große Geschwindigkeitsverluste. Aus beiden Isotachenbildern geht im übrigen jedoch klar hervor, daß die kleinsten Geschwindigkeiten in den freien Lücken herrschen,

in denen auf der ganzen Plattenlänge keine Kugeln vorhanden sind, und die größten Geschwindigkeiten hinter den Kugelreihen, wo man eigentlich eine stärkere Abbremsung erwarten sollte. In Abb. 23 z. B. erzeugen die 4 cm von der Meßebene entfernten Kugeln *b* und *c* und die 8 cm entfernte Kugel *e* deutlich Übergeschwindigkeiten, ebenso die Kugeln *b* und *c* in Abb. 22. Die Windschattenwirkung der Kugelreihen ist also sozusagen negativ. Diese Erscheinung wurde nur bei dieser einen Platte mit dem größten Kugelabstand beobachtet. Sie läßt deutlich erkennen, daß die von der einzelnen Kugel erzeugte Störung so stark ist, daß sie bis zur benachbarten hinübergreift, daß also die Vorgänge an den einzelnen Kugeln, selbst bei dem verhältnismäßig großen Abstand $D/d = 10$, sich noch gegenseitig beeinflussen. Dies kam auch in dem Widerstandskoeffizienten C_f der Elementarrauhigkeit zum Ausdruck (Abb. 18).

Um nachzuprüfen, ob diese Erscheinung vielleicht mit dem begrenzten Strömungsquerschnitt des Kanals zusammenhängt und durch Rückwirkungen von der gegenüberliegenden Wand verursacht wird, wurde die gleiche Rauigkeit geometrisch ähnlich vergrößert (Kugeldurchmesser = 10 mm, Abstand = 100 mm) und als 150 cm lange Platte im großen Göttinger Windkanal (2,25 m Strahldurchmesser) untersucht. Es trat diese Erscheinung hier in genau gleicher Weise auf. Damit ist also gezeigt, daß sie nicht in der Begrenztheit des Strömungsquerschnitts ihre Ursache hat, sondern ein reines Reibungsschichtphänomen ist. Eine befriedigende Erklärung für diese Erscheinung hat bisher nicht gefunden werden können. Vielleicht sind verwickelte Sekundärströmungen dabei im Spiel. Jedenfalls deutet sie darauf hin, daß die turbulenten Vermischungsvorgänge hinter Hindernissen in der Nähe von Wänden in mancher Beziehung sehr verschieden sind von denen hinter Hindernissen im freien Strom.

11. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird, aufbauend auf die universellen turbulenten Geschwindigkeitsverteilungsgesetze für glatte und raue Wände, ein neues experimentelles Verfahren angegeben, nach welchem Rauigkeitsversuche, insbesondere auch Messungen von Schiffsrauigkeiten, sehr viel einfacher durchgeführt werden können, als bisher. Um die Eigenschaften des Verfahrens grundsätzlich zu klären und gleichzeitig weitere Erkenntnisse über den Rauigkeitswiderstand zu sammeln, sind systematische Messungen mit einer Reihe von geometrisch einfachen, regelmäßigen Rauigkeiten durchgeführt worden. Die untersuchten Rauigkeiten wurden als auswechselbare ebene Platte in einen Kanal von rechteckigem Querschnitt eingebaut. Die übrigen drei Seitenwände des Kanals waren immer glatt. Es wurden 21 verschiedene raue Platten untersucht. Als Rauigkeitselemente wurden gewählt: Kugeln von 0,41 und 0,21 cm Durchmesser, Kalotten, Kegel, „kurze“ und „lange“ Winkel. Die Rauigkeitshöhe h betrug 2 bis 4 mm. Das Muster, nach welchem die Rauigkeiten auf der Platte verteilt waren, war für sämtliche Platten gleich, während die Rauigkeitsdichte bei jeder Rauigkeitsart variiert wurde.

Für jede raue Platte wurde bei etwa sechs verschiedenen Geschwindigkeiten die unsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung im Austrittsquerschnitt des Kanals und der Druckabfall durch Anbohrungen in der rauhen Wand gemessen. Durch Versuche wurde festgestellt, daß die Geschwindigkeitsprofile an der rauhen und glatten Wand sich nicht gegenseitig beeinflussen, sondern daß sich jedes so ausbildet wie bei allseitig rauhem bzw. glattem Kanal. Aus der gemessenen unsymmetrischen Geschwindigkeitsverteilung kann deshalb mit Hilfe des universellen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes für glatte Wand die Schubspannung an der glatten Wand τ_g ermittelt werden. Die gesuchte Schubspannung an der rauhen Wand τ_r folgt dann aus $\tau_r + \tau_g = \frac{b}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx}$ (b = Kanalhöhe). Bei fast allen untersuchten Rauigkeiten und Geschwindigkeiten lag das quadratische Widerstandsgesetz vor, bei dem die Widerstandszahl unabhängig ist von der Reynoldsschen Zahl. Um die Meßergebnisse in bequemer Weise auf Kanäle und Rohre von anderem hydraulischen Halbmesser r_h und auf die geschleppte Platte umrechnen zu können, wurde im Anschluß an die

Versuche von **J. Nikuradse** mit Sandrauhigkeit für jede unserer untersuchten Rauigkeiten die „äquivalente Sandrauhigkeit“ k_s ermittelt, das ist diejenige Korngröße der Nikuradeschen Sandrauhigkeit, die den gleichen Widerstand hat.

Außer von der relativen Rauigkeit r_h/k hängt der Widerstand noch von einem zweiten Rauigkeitsparameter ab, der Rauigkeitsdichte F_r/F ($F_r =$ gesamte Projektion senkrecht zur Strömungsrichtung der auf der Fläche F vorhandenen Rauigkeiten). Bei der Ermittlung der Abhängigkeit des Widerstandes von der Rauigkeitsdichte F_r/F wurde festgestellt, daß der größte Widerstand nicht bei der größten, sondern bei einer beträchtlich geringeren Rauigkeitsdichte vorliegt. Ferner wurde für jede raue Platte der Widerstandskoeffizient der Elementarrauhigkeit C_f ermittelt, bezogen auf die Geschwindigkeit u_k im Wandabstand $y = k$, der definiert wurde durch die Gleichung $C_f = \frac{2W_r}{\rho u_k^2 F_r}$. Dabei bedeutet W_r den reinen Rauigkeitswiderstand

der rauhen Wand (nach Abzug des Widerstandes der glatten Zwischenräume). Es zeigte sich, daß bei nahezu allen untersuchten Rauigkeitsarten C_f bei kleinen Rauigkeitsdichten F_r/F unabhängig von F_r/F ist und bei großen Rauigkeitsdichten stark abfällt. Die Widerstandszahl C_f der Elementarrauhigkeit stimmt nahezu überein mit der Widerstandszahl in der unbegrenzten Strömung bei der gleichen Reynoldsschen Zahl.

Für jede Rauigkeit, deren äquivalente Sandrauhigkeit k_s in der angegebenen Weise ermittelt wurde, kann die Umrechnung auf den Widerstand der geschleppten Platte ohne weiteres ausgeführt werden mit Hilfe der Diagramme, die **L. Prandtl** und **H. Schlichting** in einer früheren Arbeit über das Widerstandsgesetz rauher Platten angegeben haben. Für das Gebiet des quadratischen Widerstandsgesetzes werden für den örtlichen und den Gesamtwiderstandskoeffizienten der geschleppten Platte einfache Interpolationsformeln angegeben.

(Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.)

Schrifttumverzeichnis.

1. **L. Prandtl**, Über die ausgebildete Turbulenz. Verh. 2. internat. Kongr. techn. Mech., S. 62. Zürich 1927.
2. **L. Prandtl**, Z. VDI 77 (1933) S. 105.
3. **Th. v. Kármán**, Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Verh. d. 3. internat. Kongr. techn. Mech. Stockholm 1930.
4. **Th. v. Kármán**, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse 1930, S. 58.
5. **J. Nikuradse**, Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 281. Berlin 1926.
6. **J. Nikuradse**, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 356. Berlin 1932.
7. **L. Hopf**, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 329.
8. **K. Fromm**, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 339.
9. **W. Fritsch**, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928) S. 199.
10. **J. Nikuradse**, Strömungsgesetze in rauhen Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 361. Berlin 1933.
11. **G. Kempf**, Weitere Reibungsergebnisse an ebenen glatten und rauhen Flächen. Hydro-mechanische Probleme des Schiffsantriebs, S. 87. Hamburg 1932.
12. **Th. v. Kármán**, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921) S. 233.
13. **L. Prandtl**, Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen, III. Lief. S. 1 (1927).
14. **L. Prandtl**, Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. Ergebnisse Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen, IV. Lief. S. 18 (1932).
15. **L. Prandtl**, Reibungswiderstand. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, S. 87. Hamburg 1932.
16. **L. Prandtl** u. **H. Schlichting**, Werft Reed. Hafen 1934, S. 1.
17. **G. Kempf**, Werft Reed. Hafen 1929, S. 234 u. 247.
18. **Ch. Sadron**, C. R. Acad. Sci. Paris 200 (1935) S. 292.
19. **M. F. Treer**, Physik. Z. XXX (1929) S. 539.
20. **L. Prandtl**, Abriß der Strömungslehre, S. 139. Braunschweig 1931.

(Eingegangen am 30. September 1935.)