

# Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche<sup>1</sup>.

Von H. Kaden in Siemensstadt.

Übersicht über die hauptsächlichsten Bezeichnungen. Es bedeutet:

- $\Gamma$  die Zirkulation;  
 $\Gamma_0$  die Zirkulation des Spiralkerns;  
 $x, y$  bzw.  $\xi, \eta$  rechtwinklige Koordinaten;  
 $r, \varphi$  Polarkoordinaten;  
 $u, v$  horizontale bzw. vertikale Geschwindigkeitskomponenten;  
 $w$  absoluter Betrag des Geschwindigkeitsvektors;  
 $u_t(r, \varphi)$  Umfangsgeschwindigkeit der Strömung in der Spirale senkrecht zu  $r$ ;  
 $v_n$  Normalkomponente der Geschwindigkeit, mit der sich die Trennungsfläche verschiebt;  
 $v_r$  Radialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit in der Spirale;  
 $t$  die Zeit;  
 $P$  Kraft die auf Wirbelfläche;  
 $\rho$  Dichte der Flüssigkeit;  
 $p$  Flüssigkeitsdruck;  
 $\gamma$  Winkel, den der Radius mit der positiven Tangentenrichtung der Spirale bildet;  
 $\nu$  Exponent in der Gleichung der Spirale;  
 $X_0 = x_0 t^{\frac{2}{3}}$  dasjenige Stück der ungestörten Wirbelfläche, dessen Zirkulation gleich  $\Gamma_0$  ist;  
 $a$  horizontale Entfernung des Spiralenmittelpunktes vom Anfangspunkt der ungestörten Wirbelstrecke;  
 $b$  vertikale Entfernung des Spiralenmittelpunktes von der ungestörten Wirbelstrecke;  
 $U$  Horizontalkomponente der Geschwindigkeit des Spiralenmittelpunktes;  
 $V$  Vertikalkomponente der Geschwindigkeit des Spiralenmittelpunktes;  
 $\sigma = \frac{\Gamma}{2 \sqrt{x}}$  Maß für die Intensität der Wirbelfläche;  
 $\kappa = \frac{\Gamma}{2 \sqrt{r}} = k_1 \pi$   
 $k = (\kappa/\pi)^{\frac{2}{3}}$  } Maß für die Intensität des Wirbelkernes.

## I. Einleitung.

**1. Technische Aufgabe.** Bei Tragflügeln, wie sie als Tragorgane bei Flugzeugen verwendet werden, bildet sich hinter den Flügeln, von deren Hinterkante ausgehend, eine Wirbelschicht, die im Falle verschwindend kleiner Zähigkeit in eine mathematische Unstetigkeitsfläche ausartet. Infolge der Druckverteilung am seitlichen Rande des Flügels erfahren nämlich die über die Saugseite strömenden Teile eine Beschleunigung vom seitlichen Flügelrande weg, die über die Druckseite strömenden nach dem Rande hin. Wenn die Flüssigkeitsteile dann an der Flügelhinterkante wieder zusammentreffen, haben die einen eine Geschwindigkeitskomponente nach innen, die anderen nach außen; an der Grenze hat sich eine Unstetigkeitsfläche gebildet (Abb. 1). Die Tragflügeltheorie befaßt sich sehr eingehend mit dem Strömungsfelde dieser Wirbelschicht und konnte so den Einfluß der Flügelränder auf den Widerstand der Flügel (induzierter

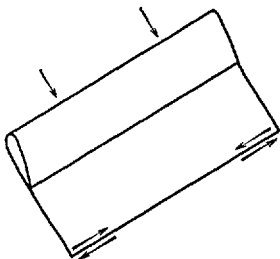


Abb. 1. Unstetigkeitsfläche hinter einem Flügel.

<sup>1</sup> Göttinger Dissertation. Referent: Prof. Dr. A. Betz.

Widerstand) weitgehend und in sehr guter Übereinstimmung mit der Erfahrung aufklären. U. a. konnte gezeigt werden, daß der induzierte Widerstand bei gegebenem Auftrieb dann ein Minimum wird, wenn man den Auftrieb so verteilt, daß die Unstetigkeitsfläche hinter dem Flügel an allen Stellen gleiche Abwärtsgeschwindigkeit besitzt, sich also nicht verformt, sondern eben bleibt.

Eine solche ebene Wirbelfläche ist aber nicht stabil, ihre seitlichen Enden haben das Bestreben, sich einzurollen (Abb. 2, vgl. auch die Kinofaufnahmen Abb. 23). In der einfachsten Form der Tragflügeltheorie wird vorausgesetzt, daß dieser Vorgang des Einrollens sehr langsam vor sich geht, so daß man für die theoretische Behandlung der Strömung in der Umgebung des Flügels die Wirbelfläche als eben ansehen kann. Wenn man den Auftrieb des Flügels hinreichend klein annimmt, so läßt sich diese Voraussetzung erfüllen. Praktisch liegen nun die Verhältnisse so, daß für die meisten Aufgaben, die sich auf die Vorgänge am Flügel selbst beziehen, der Einfluß des Aufwickelns der Unstetigkeitsfläche vernachlässigt werden kann, daß er aber von Bedeutung ist für die Vorgänge etwas hinter dem Flügel, z. B. am Höhenleitwerk der Flugzeuge. Vielleicht noch wichtiger als für die flugtechnischen Aufgaben dürfte die genauere Kenntnis dieses Vorganges für die Anwendung der Tragflügeltheorie im Maschinenbau (Turbinen, Kreiselumpen) sein. Bei den flugtechnischen Aufgaben ist die Voraussetzung der einfachen Tragflügeltheorie, daß die Störungsbewegungen klein gegen die Hauptbewegung sind, wie erwähnt wenigstens einigermaßen erfüllt; bei den maschinentechnischen Aufgaben aber meist gar nicht mehr. Es spielen dann solche Vorgänge wie das Aufwickeln der Unstetigkeitsflächen eine wesentlich größere Rolle als bei den flugtechnischen Aufgaben. Daher hat seit langem ein praktisches Interesse bestanden, einen Einblick in den Vorgang des Aufwickelns zu gewinnen. Die vorliegende Untersuchung soll dieser Aufgabe dienen<sup>1</sup>.

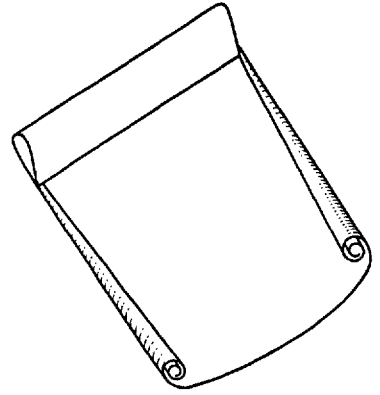


Abb. 2. Aufwicklung der Unstetigkeitsfläche.

**2. Vereinfachung der Aufgabe.** Wir wollen uns darauf beschränken, den Vorgang in seinem ersten Stadium zu verfolgen, in dem das Gebiet der aufgewickelten Fläche noch sehr klein ist gegenüber der Flügelspannweite, so daß wir nur die eine Seite der Fläche zu betrachten brauchen, während die andere ins Unendliche gelegt werden kann.

Weiterhin wollen wir uns den Vorgang so langsam gegenüber der Fluggeschwindigkeit des Flügels vorstellen, daß wir ihn in großer Entfernung vom Flügel verfolgen und außerdem wegen der langsamen Änderung in

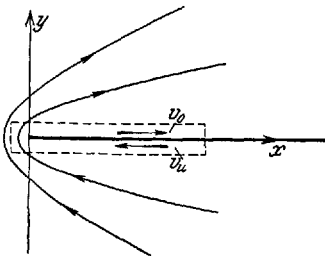


Abb. 3. Strömung um eine ebene einseitig unendliche Unstetigkeitsfläche.



Abb. 4 und 5. Einrollen der Unstetigkeitsfläche am Rande.

der Flugrichtung als eben ansehen können. Wir kommen so zu folgender vereinfachter Aufgabe:

Gegeben ist eine ebene, einseitig sich ins Unendliche erstreckende Unstetigkeitsfläche mit einer solchen Verteilung der Unstetigkeit, wie sie bei der in Abb. 3 dargestellten Strömung um eine derartige Fläche auftritt. Diese Fläche rollt sich nun mit ihrem freien

<sup>1</sup> Sie wurde auf Veranlassung von Herrn Prof. Betz unter seiner Anleitung durchgeführt.

Ende immer mehr ein (Abb. 4 und 5). Es soll der zeitliche Verlauf dieses Vorganges und die Form der aufgerollten Fläche untersucht werden<sup>1</sup>.

Die Strömung um eine starre Fläche nach Abb. 3 ist bekannt. Man kann sie z. B. leicht durch die konforme Abbildung  $\zeta = \sigma \sqrt{z}$  aus der elementaren Parallelströmung längs einer ebenen Wand mit der Geschwindigkeit Eins ( $\zeta$ -Ebene) erhalten. In einem Punkte in der Entfernung  $x$  von dem freien Ende der Fläche ist die Geschwindigkeit über der Fläche

$$v_o = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

und unter der Fläche

$$v_u = -\frac{\sigma}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (2)$$

Der Geschwindigkeitssprung oder, was dasselbe ist, die Zirkulation<sup>2</sup> um die Längeneinheit der Fläche ist

$$v_o - v_u = \Gamma' = \frac{\sigma}{\sqrt{x}}. \quad (3)$$

Daher wird die Zirkulation um das ganze Stück der Fläche vom Anfangspunkt bis zum Punkte  $x$  (Integral über die gestrichelte Linie in Abb. 3)

$$\Gamma = \oint v_s ds = \int_0^x \Gamma' dx = \sigma \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sigma \sqrt{x}. \quad (4)$$

Der Faktor  $\sigma$  ist hierbei ein Maß für die Intensität der Wirbelfläche. Er ist bei den Vorgängen hinter dem Flügel von endlicher Spannweite durch die Abwärtsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche bzw. durch die Größe des Auftriebs des Flügels festgelegt. Bei unendlicher Spannweite, die wir hier voraussetzen, verliert aber dieser Zusammenhang seine Bedeutung, da mit beliebig wachsender Spannweite die Abwärtsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche gegen Null geht.

**3. Ähnlichkeitsgesetze.** Dadurch, daß wir den einen Rand der Unstetigkeitsfläche ins Unendliche verlegten, haben wir für die Behandlung der Aufgabe einen wesentlichen Vorteil erlangt. Da nämlich in dem ganzen Strömungsgebiet keine ausgezeichnete Länge vorkommt und deshalb der Vorgang von jedem Maßstab unabhängig ist, sind die entstehenden Strömungsformen während der Aufwicklung der Trennungsfläche alle einander ähnlich. Der zeitliche Verlauf ist einfach eine stetige ähnliche Vergrößerung einer bestimmten Strömungsfigur. Wegen der Wichtigkeit dieser Erkenntnis für die ganze weitere Behandlung der Aufgabe soll auf diesen Punkt etwas ausführlicher eingegangen werden.

Zunächst ist leicht zu übersehen, daß in der Ausgangsströmung (Abb. 3) eine Ähnlichkeitsbeziehung in sich besteht. In einem Punkte im Abstände  $x$  vom Rande (dem Nullpunkte) herrscht die Geschwindigkeit  $v_1 = \pm \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; gehen wir  $n$  mal so weit, so ist die Geschwindigkeit  $v_2 = \pm \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\sqrt{nx}} = \frac{v_1}{\sqrt{n}}$ . Das heißt, daß das Verhältnis  $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{n}$  nur vom Verhältnis der Entfernungen vom Nullpunkt, nicht aber von der absoluten Größe der Entfernung abhängt. Da dieses für alle Punkte der Unstetigkeitsfläche gilt und diese den einzigen Rand der Strömung bildet, muß dieses Gesetz auch im Innern der Strömung Gültig-

<sup>1</sup> Solche sich aufrollenden Unstetigkeitsflächen treten auch in anderen Fällen auf, z. B. bei der Abströmung hinter einer Kante. Von Prandtl ist bereits der besonders einfache Fall, daß die sich aufrollende Fläche die Form einer logarithmischen Spirale hat, behandelt worden. L. Prandtl, Über die Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit (Kármán-Levi, Civita, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Berlin 1924).

<sup>2</sup> Unter Zirkulation  $\Gamma$  versteht man den Wert des geschlossenen Linienintegrals  $\oint v_s ds$ .

keit haben, weil ja die Geschwindigkeiten im Innern durch die am Rande eindeutig bestimmt sind. Man kann jedoch das Ähnlichkeitsgesetz für das Innere auch direkt ableiten, indem man etwa die Geschwindigkeiten mittels der konformen Abbildung berechnet (Abb. 6):

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{r}}, \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (5)$$

Man sieht hieraus, daß in ähnlich zum Nullpunkt gelegenen Punkten ( $\varphi = \text{konst}$ ) die Geschwindigkeiten mit  $1/\sqrt{r}$  abnehmen und ihre Richtungen konstant sind, d. h. die Ähnlichkeitsbeziehung ist im ganzen Raume erfüllt.

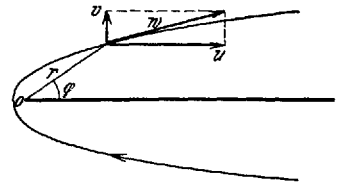


Abb. 6. Geschwindigkeiten beim Umströmen der ebenen Unstetigkeitsfläche.

Denken wir uns nun aus dieser Anfangsströmung zwei ähnliche Gebiete abgetrennt, von denen das eine  $n$ -mal größere Abmessungen besitzt als das andere, und betrachten in jedem die eintretenden Veränderungen. Da in ähnlich gelegenen Punkten auch alle Anfangsgeschwindigkeiten einander proportional sind, so ist auch jede eintretende gegenseitige Verschiebung der Punkte in den beiden Gebieten einander ähnlich; es entstehen also in beiden Gebieten genau ähnliche Formänderungen der Stromlinien. Nur dauert der entsprechende Vorgang in dem großen Gebiet länger als in dem kleinen, da einerseits die Geschwindigkeiten  $1/\sqrt{n}$  mal kleiner und die zurückgelegten Wege  $n$  mal größer sind als in dem kleineren Gebiet. Die Zeit, die erforderlich ist, um in dem großen Gebiet eine ähnliche Formänderung wie im kleinen zu erreichen, ist daher  $n \sqrt{n} = n^{3/2}$  mal länger. Wir erhalten also das Resultat, daß ein Strömungsbild, welches zur Zeit  $t$  vom Beginn der Bewegung an gerechnet auftritt, zur Zeit  $n^{3/2} t$  in  $n$ -fach vergrößertem Maßstabe wieder vorhanden ist. Hieraus ergibt sich, daß sich die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  zu den Maßstäben  $r_1$  und  $r_2$  der ähnlichen Strömungsbilder verhalten wie

$$\frac{t_2}{t_1} = n^{3/2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2} \quad \text{oder} \quad \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{2/3}. \quad (6)$$

Wir können unsere Aufgabe demnach auch so formulieren: Es soll die Form und das Verhalten einer Spirale gefunden werden, welche eine ähnliche Vergrößerung nach obigem Zeitgesetz ausführt. Wir können dabei prinzipiell so vorgehen, daß wir uns die Spirale durch eine feste, mechanisch sich ausdehnende Wand gegeben denken. Für eine beliebig vorgegebene Form derselben läßt sich die Strömung ermitteln. Die zutreffende Gestalt der Spirale ergibt sich dann aus der Bedingung, daß auf beiden Seiten der Spiralfäche keine Druckdifferenzen herrschen dürfen, da sie ja in Wirklichkeit nicht fest ist, sondern nur eine Unstetigkeitsfläche darstellt, welche keine Druckdifferenz aushalten kann.

In den folgenden Rechnungen werden wir nicht von der in Abb. 3 gezeichneten Strömung ausgehen, sondern von der entgegengesetzten, d. h. von einer Strömung, welche die Unstetigkeitsfläche entgegen dem Sinne des Uhrzeigers umströmt. Für die mathematische Darstellung erweist sich diese Festsetzung als zweckmäßiger, weil wir uns jetzt mit der üblichen Darstellung der Spiralen im Einklang befinden. Unsere Trennungsfäche spult sich jetzt nach unten auf.

## II. Verhalten der Spirale im Innern.

**1. Allgemeine Überlegungen.** Wenn wir um den Mittelpunkt der Spirale einen Kreis mit dem Radius  $r$  schlagen, so ist das Linienintegral der Geschwindigkeit über diesen Kreis gleich der Zirkulation  $L$  um das innerhalb des Kreises liegende Stück der Unstetigkeitsfläche. Die mittlere Umfangsgeschwindigkeit  $\bar{u}_t$  ist demnach

$$\bar{u}_t = \frac{\Gamma}{2 \pi r}; \quad (7)$$

die mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Teilchens im Abstände  $r$  ist

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{u}_t}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}.$$

Wäre die Zirkulation in der Spirale so verteilt, daß die mittlere Zirkulation pro Flächeneinheit konstant ist, so wäre  $\bar{\omega} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}$  unabhängig von  $r$ ; die Flüssigkeit würde daher ungefähr mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, d. h. wie ein starrer Körper umlaufen. Da aber die inneren Teile der Spirale von den Teilen der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche stammen, die in der Nähe des Randes derselben sich befanden, wo die Zirkulation pro Längeneinheit  $\Gamma'$  besonders groß war  $\left[ \Gamma' = \frac{\sigma}{\sqrt{x}} \right]$ ; siehe Gleichung (3), so ist von vornherein anzunehmen, daß auch in der Spirale die räumliche Dichte der Zirkulation  $\frac{\Gamma}{2\pi r^2}$  und damit die Winkelgeschwindigkeit im Innern größer ist als außen. Wenn man aber eine Fläche so aufwickelt, daß die Winkelgeschwindigkeit im Innern größer ist als außen, so nimmt die Zahl der Windungen immer mehr zu; die einzelnen Windungen legen sich immer dichter aneinander und nähern sich immer mehr konzentrischen Kreisen. Wir müssen daher erwarten, daß unsere Unstetigkeitsfläche beim Aufwickeln nach dem Mittelpunkt zu immer engere und kreisförmigere Windungen annimmt. Dieses qualitative Verhalten wird auch durch die Beobachtung bestätigt.

Da im Innern keine neuen Unstetigkeiten entstehen, so kann sich die Zirkulation um einen Kreis um den Mittelpunkt mit der Zeit nur ändern, wenn Teile der Unstetigkeitsfläche aus dem Kreise heraus- oder hineinwandern. Ein solcher Transport von Wirbeln der Unstetigkeitsfläche kann nur in dem Maße stattfinden, als radiale Geschwindigkeitskomponenten vorhanden sind. Da aus dem Kreis aus Gründen der Kontinuität ebensoviel Flüssigkeit austreten wie eintreten muß, so ist die mittlere radiale Geschwindigkeitskomponente Null. Der Wirbeltransport kann also nur von lokalen Abweichungen von der mittleren Geschwindigkeit herrühren. Diese Abweichungen werden aber um so kleiner, je enger die Windungen der Spirale liegen und je mehr kreis-symmetrisch sie dadurch werden. Dieses ist, wie wir bereits sahen, um so genauer der Fall, je näher wir an den Mittelpunkt herangehen. Die radialen Geschwindigkeitskomponenten verschwinden daher in der Nähe des Mittelpunktes, und die Zirkulation für einen bestimmten Kreis bleibt zeitlich konstant. Damit bleibt natürlich auch die Umfangsgeschwindigkeit zeitlich unveränderlich. Diese Größen hängen dann nur noch vom Radius ab.

**2. Berechnung in erster Näherung.** Diese Erkenntnis, im Zusammenhange mit der in der Einleitung erwähnten Ähnlichkeitsbeziehung, liefert eine Aussage über die Form der Spirale in der Umgebung des Mittelpunktes. Infolge der engen Windungen in der Nähe des Mittelpunktes ist die Geschwindigkeit auf einem Kreise um den Mittelpunkt konstant. Wir brauchen daher nicht zwischen mittlerer Geschwindigkeit  $\bar{u}_t$  über dem Kreisumfang und der Geschwindigkeit  $u_t$  an irgendeiner Stelle des Kreises unterscheiden. Nach dem Ähnlichkeitsgesetz [Gleichung (6)] verhält sich die Geschwindigkeit  $u_{t_1}$  im Radius  $r_1$  zur Zeit  $t_1$  zu der Geschwindigkeit  $u_{t_2}$  im Radius  $r_2$  zur Zeit  $t_2 = t_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{3}{2}}$  wie

$$\frac{u_{t_1}}{u_{t_2}} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Da die Geschwindigkeiten aber in der Umgebung des Mittelpunktes von der Zeit unabhängig sind, so gilt dieses Verhältnis nicht nur für die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , sondern für alle Zeiten. Wir erhalten daher allgemein

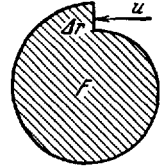
$$u_t = \frac{h_1}{\sqrt{r}}$$

und

$$\Gamma = u_t 2 \pi r = 2 k_1 \pi \sqrt{r} = 2 \kappa \sqrt{r}. \tag{9}$$

Die Verteilung von  $\Gamma$  über den Radius im aufgespulten Zustand ist also ganz analog der ursprünglichen Verteilung ( $\Gamma = 2 \sigma \sqrt{x}$ ). Die Beziehung zwischen  $\kappa$  und  $\sigma$  wird in Kap. IV noch ermittelt werden.

Wir betrachten jetzt eine Windung der Spirale. Bei ihrer ähnlichen Vergrößerung erweitert sich der von ihr und dem radialen Verbindungsstück  $\Delta r$  der Windungsenden eingeschlossene Raum  $F$  (Abb. 7). Da durch die Spiralfäche, die dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet wird, keine Flüssigkeit hindurchtritt, muß die ganze zur Raumvergrößerung nötige Flüssigkeitsmenge  $Q$  durch das radiale Verbindungsstück  $\Delta r$  einströmen. Es besteht demnach die Beziehung



$$Q = u_t \Delta r = \frac{dF}{dt}.$$

(10) Abb. 7. Von einem Spiralenlauf eingeschlossenes Gebiet.

Für nahezu kreisförmige Windungen, wie wir sie in der Nähe des Mittelpunktes haben, ist  $F = \pi r^2$ . Nach dem in der Einleitung gegebenen Vergrößerungsgesetz [Gleichung (6)] ist

$$r = r_1 t^{\frac{2}{3}} \quad \text{oder} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{2}{3} r_1 t^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{r}{t},$$

mithin

$$\frac{dF}{dt} = 2 \pi r \frac{dr}{dt} = \frac{4 \pi}{3} \frac{r^2}{t}.$$

Damit wird

$$\Delta r = \frac{\frac{dF}{dt}}{u_t} = \frac{4 \pi r^2}{3 t} \frac{\pi \sqrt{r}}{\kappa} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{\kappa} \frac{r^{\frac{5}{2}}}{t}.$$

So lange  $\Delta r/r$  nur wenig von Windung zu Windung variiert, was natürlich bei sehr engen Windungen zutrifft, ist

$$\Delta r = -2 \pi \frac{\partial r}{\partial \varphi},$$

worin  $r$  und  $\varphi$  die Polarkoordinaten der Spirale darstellen. Setzen wir nun für  $\Delta r$  obigen Wert ein, so bekommen wir

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\frac{2}{3} \frac{\pi}{\kappa} \frac{r^{\frac{5}{2}}}{t}$$

oder integriert

$$t \frac{\kappa}{\pi} r^{-\frac{3}{2}} = \varphi,$$

oder

$$r = \left( \frac{\kappa t}{\pi \varphi} \right)^{\frac{2}{3}}. \tag{11}$$

**3. Berechnung der zweiten Näherung.** Zeichnet man eine solche Spirale auf (Abb. 19 gestrichelt), so erkennt man sofort durch Vergleich mit Abb. 4 und 5 (oder mit 19 und 23), daß die Extrapolation dieser für die Umgebung des Mittelpunktes abgeleiteten Form für große Radien  $r$  (kleine  $\varphi$ ) der von uns gesuchten Spirale nicht entspricht. Die obige Formel (11) ist also nur eine Näherung für die Umgebung des Mittelpunktes. Wir müssen uns nun fragen, wieweit diese Näherung gilt, und womöglich eine weitere Näherung für größere Radien zu finden suchen. Zu diesem Zweck verallgemeinern wir Gleichung (11) in der Weise, daß wir für den Exponenten von  $\varphi$  anstatt des für den Mittelpunkt gültigen Wertes  $\frac{2}{3}$  allgemeiner  $\nu$  setzen und versuchen, die Veränderung dieses Exponenten näherungs-

weise zu ermitteln. Wir machen also für die Spirale folgenden Ansatz

$$r = \left(\frac{\kappa t}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\varphi^\nu} = k \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^\nu}, \quad (12)$$

indem zur Abkürzung  $\left(\frac{\kappa}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = k$  gesetzt ist;  $\nu$  soll dabei von  $\varphi$  abhängen, wobei  $\nu \rightarrow \frac{2}{3}$  geht, wenn  $\varphi \rightarrow \infty$  geht. Mit diesem Ansatz wollen wir nun die mit der ähnlichen Vergrößerung verbundene Strömung verfolgen. Dabei müssen wir uns aber jetzt von den vereinfachenden Annahmen, welche nur bei sehr engen Windungen gelten, frei machen. Wir müssen berücksichtigen:

1. daß der Radius im Laufe einer Windung sich merklich ändert, und daß die Geschwindigkeit  $u_t$  sowohl längs eines Kreises um den Mittelpunkt als auch längs eines Radius zwischen zwei benachbarten Windungen (längs  $\Delta r$ ) veränderlich ist. An die Stelle der Ausdrücke  $F = \pi r^2$ ,  $\Gamma = u_t \cdot 2\pi r$  und  $Q = u_t \Delta r$  treten daher jetzt entsprechende Integrale,

2. daß die Zirkulation  $\Gamma$  innerhalb eines Kreises von gegebenem Radius infolge auftretender Radialgeschwindigkeiten nicht mehr zeitlich konstant ist.

Wir wollen uns dabei aber immer noch auf ein Gebiet beschränken, in dem diese Abweichungen von den bisherigen Voraussetzungen noch nicht sehr groß sind, so daß wir immerhin noch manche Vereinfachung bei der Rechnung zulassen können. Insbesondere wollen wir voraussetzen:

1. daß sich der Exponent  $\nu$  so langsam verändert, daß wir ihn mindestens in einem Bereich von  $\varphi$  bis  $\varphi + 2\pi$  als einigermaßen konstant annehmen können,

2. daß die radialen Geschwindigkeitskomponenten sehr klein gegenüber den tangentialen sind, d. h. daß die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen nur sehr wenig von Kreisbahnen abweichen.

Wir gehen von der Gleichung (10) aus, nach der

$$\Delta r u_t = \frac{dF}{dt}$$

ist. Für  $\frac{dF}{dt}$  berechnen wir jetzt jedoch den genauen Wert

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} v_n ds, \quad (13)$$

worin  $v_n$  die Normalkomponente der Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt der Spirale bei der ähnlichen Vergrößerung verschiebt, und  $ds$  das Bogenelement auf der Spirale bedeutet (Abb. 8). Außerdem berücksichtigen wir jetzt die Veränderung der Umfangsgeschwindigkeit  $u_t$  über dem Querschnitt  $\Delta r$ , d. h. wir schreiben anstatt Gleichung (10) die Beziehung

$$\int_{r_2}^{r_1} u_t dr = \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} v_n ds. \quad (14)$$

Wenn keine Radialgeschwindigkeiten vorhanden wären, wenn also jedes Flüssigkeitsteilchen sich auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Mittelpunkt bewegt, so würde zwischen zwei Spiralfächern, da hier ja Potentialströmung herrscht und die Radialgeschwindigkeiten entsprechend

unserer Voraussetzung sehr klein sind, für die Abhängigkeit vom Radius die Beziehung gelten

$$u_t = c \frac{1}{r}, \quad (15)$$

wo  $c(\varphi)$  aus Gleichung (14) zu bestimmen ist.

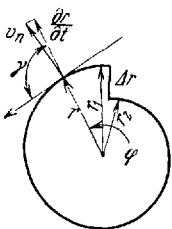


Abb. 8.

Wenn wir mit  $\gamma$  den Winkel bezeichnen, den der Radiusvektor mit der positiven Richtung der Tangente  $T$  der Spirale bildet (Abb. 9), so ist

$$v_n = \frac{\partial r}{\partial t} \sin \gamma = \frac{2}{3} k t^{-\frac{1}{3}} \frac{\sin \gamma}{\varphi^{\nu}}$$

und

$$ds = \frac{r d\varphi}{\sin \gamma} = k \frac{t^{\frac{2}{3}} d\varphi}{\varphi^{\nu} \sin \gamma}.$$

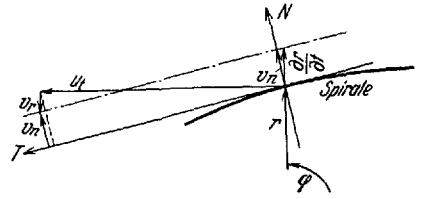


Abb. 9. Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Mithin erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} v_n ds &= \frac{2}{3} k^2 t^{\frac{1}{3}} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi^{2\nu}} = \frac{2}{3} k^2 \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2\nu-1} \left[ \frac{1}{(\varphi-2\pi)^{2\nu-1}} - \frac{1}{\varphi^{2\nu-1}} \right] \\ &= \frac{2}{3} k^2 t^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{2\pi}{\varphi^{2\nu}} + \nu \frac{(2\pi)^2}{\varphi^{2\nu+1}} + \frac{(2\nu+1)\nu}{3} \frac{(2\pi)^3}{\varphi^{2\nu+2}} + \dots \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$\nu$  ist hierbei entsprechend den erwähnten Voraussetzungen in dem Integrationsintervall als hinreichend konstant angenommen.

Weiterhin ergibt sich mit Gleichung (15)

$$\int_{r_2}^{r_1} u_t dr = c \int_{r(\varphi)}^{\frac{r(\varphi-2\pi)}{r(\varphi)} d\varphi} = -c\nu \ln \frac{\varphi-2\pi}{\varphi} = c\nu \left[ \frac{2\pi}{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^3 + \dots \right].$$

Daher bekommen wir aus Gleichung (14)

$$c(\varphi) = \frac{2}{3} \frac{t^{\frac{1}{3}} k^2}{\nu \varphi^{2\nu-1}} \left[ 1 + \frac{2\nu-1}{2} \frac{2\pi}{\varphi} + \frac{1}{3} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^2 + \dots \right]$$

und damit

$$u_t(r, \varphi) = \frac{c(\varphi)}{r} = \frac{2}{3} \frac{t^{\frac{1}{3}} k^2}{\nu \varphi^{2\nu-1} r} \left[ 1 + \frac{2\nu-1}{2} \frac{2\pi}{\varphi} + \frac{1}{3} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^2 + \dots \right]. \quad (17)$$

Um die radiale Komponente  $v_r$  der Strömungsgeschwindigkeit zu erhalten, haben wir die Bedingung einzuführen, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit, mit der sich die Trennungsfäche verschiebt, gleich sein muß der Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in der Normalrichtung. Aus Abb. 9 ergeben sich hiernach für die beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche die Beziehungen:

$$-u_t \left( r = \frac{k t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}, \varphi \right) \cos \gamma + v_r \left( r = \frac{k t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}, \varphi \right) \sin \gamma = v_n = \frac{\partial r}{\partial t} \sin \gamma$$

und

$$-u_t \left( r = \frac{k t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}, \varphi + 2\pi \right) \cos \gamma + v_r \left( r = \frac{k t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}, \varphi + 2\pi \right) \sin \gamma = \frac{\partial r}{\partial t} \sin \gamma;$$

mit Gleichung (17) und

$$\operatorname{tg} \gamma = r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\varphi}{\nu}$$

wird hieraus

$$v_r \left( r = \frac{k t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}, \varphi \right) = -\frac{2}{3} k t^{-\frac{1}{3}} \left[ \frac{2\nu-1}{2} \frac{2\pi}{\varphi^{\nu+1}} + \frac{1}{3} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{(2\pi)^2}{\varphi^{\nu+2}} + \dots \right] \quad (18)$$

und

$$v_r \left( r = \frac{k t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}, \varphi + 2\pi \right) = +\frac{2}{3} k t^{-\frac{1}{3}} \left[ \frac{2\nu-1}{2} \frac{2\pi}{\varphi^{\nu+1}} - \frac{1}{3} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{(2\pi)^2}{\varphi^{\nu+2}} + \dots \right]. \quad (19)$$



Wir sind jetzt in der Lage, die Zirkulation  $\Gamma$  zu berechnen, die sich innerhalb eines Kreises vom Radius  $r$  befindet. Diese ist gleich dem Werte des Linienintegrals der Geschwindigkeit längs einer beliebigen geschlossenen Kurve:

$$\Gamma = \oint v_s ds.$$

Da in unserem Falle die Umfangsgeschwindigkeiten  $u(r, \varphi)$  nach Gleichung (17) bekannt sind, so wählen wir als geschlossene Kurve in obigem Integral für  $\Gamma$  zweckmäßig den Kreis vom Radius  $r$  und erhalten daher

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} u_t(r, \varphi) r d\varphi = \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} c(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2}{3} t^{\frac{1}{3}} \frac{h^2}{v} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \frac{d\varphi}{\varphi^{2\nu-1}} \left[ 1 + \frac{2\nu-1}{2} \frac{2\pi}{\varphi} + \frac{1}{3} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{2}{3} t^{\frac{1}{3}} \frac{h^2}{v} \frac{2\pi}{\varphi^{2\nu-2}} \left[ \frac{2\pi}{\varphi} + \left( \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{12} \right) \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Da nun  $r = \frac{h t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}$  ist, so erhalten wir aus (20) die Zirkulation in Abhängigkeit vom Radius  $r$  und der Zeit  $t$ :

$$\Gamma(r, t) = \frac{2}{3} \frac{1}{v} \left( 2\pi h^{\frac{1}{\nu}} \frac{r^{2-\frac{1}{\nu}}}{t^{1-\frac{2}{3}\frac{1}{\nu}}} + \frac{(2\pi)^3}{h^{\frac{1}{\nu}}} \frac{r^{2+\frac{1}{\nu}}}{t^{1+\frac{2}{3}\frac{1}{\nu}}} \left( \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{12} \right) + \dots \right). \quad (21)$$

Nun kann eine Änderung von  $\Gamma$  in dem Kreise vom konstanten Radius  $r$  nur in dem Maße stattfinden, als Wirbel in diesen Kreis hinein- oder aus ihm herauswandern. Dieser Wirbeltransport aus dem Kreis heraus ist nach Helmholtz gleich der mittleren radialen Strömungsgeschwindigkeit  $\frac{1}{2} [v_r(r, \varphi) + v_r(r, \varphi + 2\pi)]$  multipliziert mit der Zirkulationszunahme in radialer Richtung. Daher muß die Beziehung bestehen:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \cdot \frac{1}{2} [v_r(r, \varphi) + v_r(r, \varphi + 2\pi)], \quad (22)$$

in welcher das Minuszeichen auf der rechten Seite zu setzen ist, weil bei positiver, d. h. nach außen gerichteter Radialgeschwindigkeit  $v_r$  die Zirkulation abnimmt. Aus Gleichung (22) erhält man daher, wenn man Gleichung (21) nach  $t$  und  $r$  differenziert und die Werte für  $v_r$  aus den Gleichungen (18) und (19) entnimmt,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \frac{1}{v} \left[ 2\pi h^{\frac{1}{\nu}} \frac{r^{2-\frac{1}{\nu}}}{t^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{\nu}}} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{v} - 1 \right) - \frac{(2\pi)^3}{h^{\frac{1}{\nu}}} \frac{r^{2+\frac{1}{\nu}}}{t^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{\nu}}} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{v} \right) \left( \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{12} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{v} \left[ 2\pi h^{\frac{1}{\nu}} \frac{r^{1-\frac{1}{\nu}}}{t^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{\nu}}} \left( 2 - \frac{1}{v} \right) + \frac{(2\pi)^3}{h^{\frac{1}{\nu}}} \frac{r^{1+\frac{1}{\nu}}}{t^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{\nu}}} \left( \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{12} \right) \left( 2 + \frac{1}{v} \right) + \dots \right] \\ &\frac{2}{9} \frac{(2\pi)^2}{h^{\frac{2}{\nu}}} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{r^{1+\frac{2}{\nu}}}{t^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\frac{1}{\nu}}}. \end{aligned}$$

Wenn man nun  $r$  wiederum durch  $\varphi$  mit Hilfe der Beziehung  $r = \frac{h t^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\nu}}$  ausdrückt, so bekommt man nach kurzer Umformung in erster Näherung

$$\frac{2}{3} - \nu = \left[ \frac{2}{9} (2\nu - 1) \left( 2\nu^2 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \nu + \frac{2}{3} \right) \left( \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{12} \right) \right] \left( \frac{2\pi}{\varphi} \right)^2$$

oder

$$\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 = \frac{\frac{2}{\nu} - 3}{\frac{11}{3}\nu^2 - \frac{4}{3}\nu - \frac{1}{4}} \tag{23}$$

In Abb. 10 ist die sich hieraus ergebende Abhängigkeit des Exponenten  $\nu$  vom Winkel  $\varphi$  aufgetragen. Man ersieht, daß für endliche  $\varphi$  der Exponent kleiner als  $\frac{2}{3}$  wird. Jedoch ist die Veränderung von  $\nu$  mit abnehmendem Winkel ziemlich gering, so daß unsere Voraussetzung in dieser Hinsicht ziemlich weitgehend erfüllt ist; für  $\varphi = 4\pi$  ist z. B.  $\nu \approx 0,65$ . Für  $\varphi = 2\pi$  ergibt sich immer noch  $\nu \approx 0,61$ . Für diesen Punkt reicht allerdings unsere Näherungsrechnung nicht mehr ganz aus.

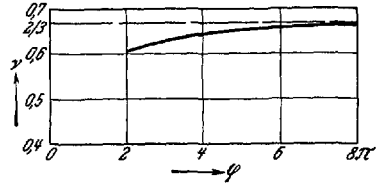


Abb. 10. Verlauf des Exponenten  $\nu$  in Gleichung (12).

Für  $\varphi < 2\pi$  wird der Exponent  $\nu$  noch weiter abnehmen. Für  $\varphi = 1$  muß  $\nu$  nämlich  $-\infty$  werden. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung. Bezeichnet  $r'$  die Größe des Radiusvektors derjenigen Spirale, die überall den Exponenten  $\nu = \frac{2}{3}$  hat, also

$r' = \left(\frac{x t}{\pi \varphi}\right)^{\frac{3}{2}}$  so wird das Verhältnis

$$\frac{r}{r'} = \varphi^{\frac{3}{2} - \nu} \quad \text{oder} \quad \frac{\ln \frac{r}{r'}}{\ln \varphi} = \frac{2}{3} - \nu(\varphi).$$

Da nun für  $\varphi = 1$  dieses Verhältnis  $\frac{r}{r'} > 1$  bzw.  $\ln \frac{r}{r'} > 0$  ist, wie aus Abb. 19 zu erkennen ist, so muß nach obiger Formel, da  $\ln \varphi \rightarrow 0$  geht,  $\nu = -\infty$  werden. [Im Innern der Spirale ( $\varphi > 4\pi$ ) kann man mit sehr großer Annäherung überall mit den Exponenten  $\nu = \frac{2}{3}$  rechnen.]

### III. Verhalten der Spirale im Unendlichen.

**1. Allgemeines über Wirbelfelder.** Das Aufwickeln der Unstetigkeitsfläche findet vom Rande her statt. In großer Entfernung vom Rande bleibt die Fläche zunächst nahezu in Ruhe. Die Spirale geht daher asymptotisch in die ursprüngliche Gerade über. Das Zentrum der Spirale verschiebt sich jedoch gegenüber dieser Geraden. Für ein Koordinatensystem, in welchem die Spiralenmitte im Nullpunkt liegt, ist die Gleichung dieser Asymptote und damit die Gleichung der Spirale in großer Entfernung vom Mittelpunkt ( $\varphi \ll 1$ )

$$r = \frac{b}{\sin \varphi} \approx \frac{b}{\varphi}; \tag{24}$$

$b$  ist dabei die lotrechte Entfernung der Spiralenmitte von der ursprünglichen ebenen Unstetigkeitsfläche. Sie wächst bei der ähnlichen Vergrößerung mit  $t^{\frac{2}{3}}$ . Wir können auch noch eine weitere Näherung für die Form der Spirale für kleine  $\varphi$  (große  $r$ ) angeben, indem wir die Abweichung der Spirale von ihrer Asymptote berechnen. Hierzu ziehen wir die bekannten Formeln für Wirbelfelder heran, die wir hier kurz in solcher Form zusammenstellen, in der wir sie für unser Problem immer wieder brauchen werden.

Das Strömungsfeld eines Wirbelfadens von der Zirkulation  $\Gamma$  in einer ebenen, unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, hat in einem Punkte im Abstände  $r$  eine Geschwindigkeit

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \tag{25}$$

deren Richtung senkrecht auf der Verbindungsstrecke  $r$  vom Wirbelfaden zum Aufpunkt steht. Ist der Ort des Wirbels durch die Koordinaten  $\xi, \eta$ , der des Aufpunktes durch  $x, y$

gegeben, so sind die Komponenten  $u$  und  $v$  parallel zur  $x$ - bzw.  $y$ -Achse (Abb. 11)

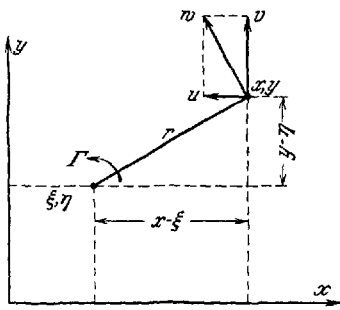


Abb. 11. Geschwindigkeitsfeld eines Wirbels.

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ v(x, y) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

wobei die Zirkulation  $\Gamma$  positiv zu zählen ist bei Drehung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers. Sind anstatt eines einzigen mehrere Wirbelfäden mit den Koordinaten  $\xi_v, \eta_v$  vorhanden, so ist deren resultierendes Geschwindigkeitsfeld gegeben durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma_v (y - \eta_v)}{(x - \xi_v)^2 + (y - \eta_v)^2} \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma_v (x - \xi_v)}{(x - \xi_v)^2 + (y - \eta_v)^2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Wir werden es vornehmlich mit kontinuierlichen Wirbelanordnungen zu tun haben, welche längs einer Kurve  $S$  mit der Zirkulationsdichte  $\frac{d\Gamma(s)}{ds} = \Gamma'(s)$  verteilt sein möge (siehe z. B. Gleichung (1)). Dann ergeben sich für die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes die Formeln

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\Gamma'(s)(y - \eta(s)) ds}{(x - \xi(s))^2 + (y - \eta(s))^2} \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\Gamma'(s)(x - \xi(s)) ds}{(x - \xi(s))^2 + (y - \eta(s))^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Wir wollen diese zunächst auf die ursprüngliche, geradlinige Wirbelkonfiguration  $\Gamma = 2\sigma\sqrt{\xi}$  anwenden, indem wir zeigen, daß diese zuerst keine Formänderung erfährt, abgesehen von ihrem Randpunkte, von wo ja auch das Aufwickeln seinen Ausgang nimmt. Der Einfluß eines Wirbelementes  $d\xi$  im Abstande  $\xi$  vom Rande mit der Zirkulation

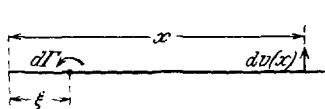


Abb. 12. Einfluß der stetig verteilten Wirbel auf die Geschwindigkeit in einem Punkte.

$d\Gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{\xi}} d\xi$  auf einen Punkt des Bandes im Abstand  $x$  (Abb. 12) ist nach Gleichung (26)

$$du = 0, \quad dv(x) = \frac{d\Gamma(\xi)}{2\pi(x - \xi)},$$

wobei  $u$  und  $v$  die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Fläche und senkrecht dazu bedeuten. Die Gesamtwirkung aller Wirbelemente bekommen wir durch Integration über alle Elemente:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\Gamma(\xi)}{x - \xi} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(x - \xi)}.$$

Dieses Integral ist ein uneigentliches, denn der Integrand wird für  $\xi = x$  unendlich. Aus der Tragflügeltheorie, wo solche Integrale über Unstetigkeitsflächen vielfach vorkommen, ist bekannt, daß der physikalische Sinn derselben durch seinen sogenannten Hauptwert wiedergegeben wird. Dieser ist

$$v(x) = \frac{2\sigma}{2\pi} \ln 1 = 0.$$

Bei dieser Wirbelanordnung heben sich daher längs der ganzen Unstetigkeitsfläche (mit Ausnahme ihres Randes) die Einflüsse aller Wirbelemente gerade auf.

**2. Einfluß des Aufspulens auf die Geschwindigkeiten in großer Entfernung.** Wenn die Wirbelfläche an ihrem Rande aufgespult ist, so ist die Verteilung der Wirbelemente in

dieser Gegend geändert, und es ergeben sich als Feld dieser Wirbelverteilung endliche Störungsgeschwindigkeiten  $u$  und  $v$ , welche das weitere Aufwickeln zur Folge haben. Das Aufwickeln des Wirbelbandes entspricht einer Konzentration der Wirbel in der Umgebung des Mittelpunktes der Spule. Wir können also den Einfluß dieses Vorganges rechnerisch dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir die Wirbel von der ursprünglich geraden Fläche in Richtung dieses Mittelpunktes verschieben. Nehmen wir an, daß ein Wirbelelement  $d\Gamma(\xi)$  im Abstand  $\xi$  um eine Strecke  $\delta(\xi)$  zum Mittelpunkt verschoben ist, so ist die Wirkung dieser Verschiebung dieselbe wie die eines Wirbelpaares in Abb. 13. Durch Hinzufügen eines solchen Wirbelpaares zur ursprünglichen Anordnung wird durch den einen Wirbel des Paares der ursprüngliche Wirbel aufgehoben, es bleibt der zweite Wirbel des Paares allein übrig und ergibt so die neue Anordnung. Für einen Aufpunkt  $x$ , der sehr weit von dem verschobenen Wirbel entfernt ist, so daß  $x - \xi \gg \delta(\xi)$ , wird demnach die Wirkung einer solchen Verschiebung

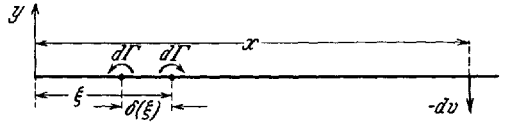


Abb. 13. Einfluß einer wagerechten Wirbelverschiebung.

ist

$$dv(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{d\Gamma(\xi)}{x - \xi - \delta(\xi)} - \frac{d\Gamma(\xi)}{x - \xi} \right\} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(\xi) d\Gamma(\xi)}{(x - \xi)^2}.$$

Da der Schwerpunkt der Wirbel in der  $x$ -Richtung unverändert bleibt (siehe Kap. IV), so muß zu jeder Verschiebung  $\delta(\xi_1)$  eines Wirbels  $d\Gamma(\xi_1)$  nach rechts eine entsprechende Verschiebung  $\delta(\xi_2)$  eines Wirbels  $d\Gamma(\xi_2)$  nach links stattfinden, so daß

$$\delta(\xi_1) d\Gamma(\xi_1) = -\delta(\xi_2) d\Gamma(\xi_2)$$

ist. Die Wirkung dieser beiden Verschiebungen ist

$$dv(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\delta(\xi_1) d\Gamma(\xi_1)}{(x - \xi_1)^2} + \frac{\delta(\xi_2) d\Gamma(\xi_2)}{(x - \xi_2)^2} \right\} \approx -\frac{\delta(\xi_1) d\Gamma(\xi_1)}{2\pi} \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{x^3}. \tag{29}$$

Dabei ist wieder angenommen, daß sowohl  $x \gg \xi_1$  als auch  $x \gg \xi_2$  ist.

Außer dieser Verschiebung von Wirbeln in der  $x$ -Richtung findet auch noch eine Verschiebung in der  $y$ -Richtung statt. Die Wirkung derselben läßt sich durch ein Wirbelpaar gemäß Abb. 14 zum Ausdruck bringen. Das Feld derselben ist

$$\left. \begin{aligned} dv(x) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Gamma}{x - \xi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\Gamma(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \varepsilon^2(\xi)} = -\frac{d\Gamma}{2\pi} \frac{\varepsilon^2(\xi)}{(x - \xi)^3} \approx -\frac{d\Gamma}{2\pi} \frac{\varepsilon^2(\xi)}{x^3}, \\ du(x) &= -\frac{d\Gamma}{2\pi} \frac{\varepsilon(\xi)}{(x - \xi)^2 + \varepsilon^2(\xi)} \approx -\frac{d\Gamma}{2\pi} \frac{\varepsilon(\xi)}{x^2}, \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

wenn  $\varepsilon(\xi)$  die Verschiebung des Wirbelelementes  $d\Gamma$  in Richtung der negativen  $y$ -Achse bedeutet. Der Einfluß dieser Verschiebung senkrecht zur  $x$ -Achse nimmt demnach bezüglich  $v(x)$  ebenfalls mit  $1/x^3$  ab und ist daher von gleicher Größenordnung wie der nach Gleichung (29). Den Einfluß aller Wirbelverschiebungen erhalten wir durch eine Integration über die  $d\Gamma(\xi)$ , wobei an der Abhängigkeit von  $x$  nichts geändert wird. Wir erhalten daher für einen bestimmten Zeitpunkt die Beziehung

$$v(x) = \frac{\text{konst}}{x^3}. \tag{31}$$

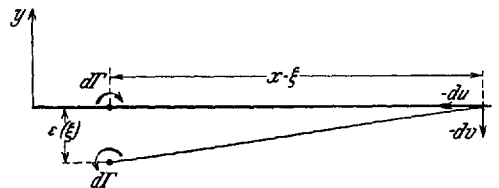


Abb. 14. Einfluß einer senkrechten Wirbelverschiebung.

Die genaue Integration würde, wenn sie ausgeführt werden könnte, nur den Wert der Konstanten ergeben, den wir vorläufig noch unbestimmt lassen müssen. Aus Formel (30) ersieht man, daß die Verschiebung der Wirbelelemente in der  $y$ -Richtung auch eine Ver-

schiebung der Wirbel in der negativen  $x$ -Richtung zur Folge hat. Man erkennt, daß dieser Einfluß mit  $1/x^2$  abnimmt, und daß daher unsere obige Annahme, wonach die Verschiebungen zum Mittelpunkt der Spule sehr rasch mit der Entfernung  $x$  vom Rande abnehmen, zu Recht besteht.

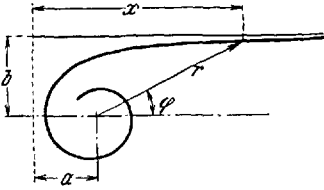


Abb. 15.

Wir kennen hiermit die Abweichung unserer Spirale von der Geraden und sind daher imstande, die analytische Form der Trennungsfläche im Unendlichen anzugeben. Aus Abb. 15 erhält man folgende Beziehung

$$b = (x - a) \operatorname{tg} \varphi + \int_0^t v(x) dt, \quad (32)$$

worin  $a$  die lotrechte und  $b$  die wagrechte Komponente des Weges ist, den der Mittelpunkt der Spirale bis zur Zeit  $t$  zurückgelegt hat. Für hinreichend große  $x$  können wir  $a$  gegen  $x$  vernachlässigen. Daher wird durch Einsetzen von (31) in (32) die Gleichung der Trennungsfläche

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{x} - \frac{\text{konst.}}{x^4}; \quad (33)$$

$b$  und konst sind hierbei noch Funktionen der Zeit. Hieraus erkennt man, daß unsere Spirale sich noch enger an die Asymptotengerade anschmiegt als die gewöhnliche hyperbolische Spirale  $r = \frac{\text{konst.}}{\varphi}$ ; denn für diese gilt mit obigen Bezeichnungen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\text{konst.}}{x} - \frac{\text{konst.}}{x^3}.$$

Die Abweichung von der Geraden geht hier mit der zweiten Potenz von  $1/x$  ein, während sie bei unserer Spirale nach Gleichung (31) proportional der dritten Potenz von  $1/x$  ist.

#### IV. Bestimmung der wesentlichen Konstanten und Festlegung der Form der Spirale.

**1. Schwerpunktssätze.** Für die weitere Behandlung hat sich eine von **A. Betz** angegebene Überlegung als nützlich erwiesen, welche eine Aussage über gewisse allgemeine Bedingungen bei der Deformation der Wirbelfläche gestattet.

Denken wir uns die Strömung gemäß Abb. 3 in der Weise verwirklicht, daß sich an Stelle der Unstetigkeitsfläche eine starre materielle Fläche (etwa ein langes dünnes Brett) befindet, so erhalten wir eine stationäre Strömung, da sich die starre Fläche ja nicht aufwickeln kann. Dabei übt die Strömung infolge ihrer Zentrifugalkraft eine nach links gerichtete Kraft auf diesen Körper aus. Die Größe dieser sogenannten Saugkraft ist<sup>1</sup>

$$P_x = - \frac{\pi}{4} \rho \sigma^2. \quad (34)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Kraft nach links gerichtet ist.

Diese Kraft kann, wenn die Strömung stationär sein soll, nur dann aufgenommen werden, wenn die Fläche starr ist. Nun können wir uns die Zirkulationsverteilung nach Gleichung (3) bzw. (4) so hergestellt denken, daß wir uns diese Fläche aus sehr vielen, sehr kleinen rotierenden Zylindern aufgebaut vorstellen, von denen jeder eine solche Zirkulation  $d\Gamma$  hat, daß sich gerade die Gesamtzirkulationsverteilung nach Gleichung (4) ergibt. Wenn wir jetzt die Fläche verbiegen, so verschieben wir die einzelnen Zylinder in der Flüssigkeit, und dabei entstehen nach einem bekannten Satz von **Kutta** und **Joukowsky**<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vgl. z. B. **R. Grammel**, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, S. 21, Braunschweig 1917.

<sup>2</sup> Vgl. etwa die Darstellung desselben im Handbuch der Physik, Bd. VII, Kap. 1, Ziffer 55, Berlin 1927.

Kräfte auf die einzelnen Zylinder. Wir können uns nun diese Verbiegung so ausgeführt denken, daß diese Kräfte auf die einzelnen Zylinder jeweils die von der Gesamtströmung auf den Körper und damit auf die einzelnen Zylinder ausgeübten Kräfte gerade ausgleichen. Der Körper erfährt dann keine Kräfte mehr; wir brauchen ihn nicht mehr als fest anzunehmen und können ihn wieder durch die Unstetigkeitsfläche ersetzen. Wenn wir auch die hierfür erforderliche Bewegung nicht für jeden Punkt angeben können, so können wir doch auf Grund des Kutta-Joukowskyschen Satzes eine Aussage über die Bewegung des Schwerpunktes machen. Nach diesem Satz ist die Kraft, die ein Körper mit der Zirkulation  $\Gamma$  erfährt, der sich mit der Geschwindigkeit  $w$  relativ zur umgebenden Flüssigkeit bewegt,

$$P = \rho w \Gamma; \quad (35)$$

sie steht rechtwinklig zu  $w$ .

Wir können nun diesen Satz auch so ausdrücken, daß bei einer Änderung der Geschwindigkeit um den Betrag  $w$  eine Änderung der Kraft um den Betrag  $P$  gemäß Gleichung (35) erfolgt. In dieser Form werden wir von dem nicht immer leicht eindeutig festzulegenden Begriff der „Geschwindigkeit relativ zur umgebenden Flüssigkeit“ unabhängig. Weiterhin können wir den Kutta-Joukowskyschen Satz auch auf eine Mehrzahl von Körpern mit Zirkulation anwenden. Die resultierende Gesamtkraft ist dann

$$P_y = \rho \sum \Gamma u, \quad (36)$$

$$P_x = -\rho \sum \Gamma v. \quad (37)$$

Wir können auch hier wieder  $u$  bzw.  $v$  als Geschwindigkeitsänderung und  $P$  als Kraftänderung auffassen.

In unserem Falle einer kontinuierlichen Wirbelverteilung gehen die  $\sum$  in  $\int$  über. Wir müssen nun die Wirbel so bewegen, daß die Kraft

$$P_x = -\frac{\pi}{4} \rho \sigma^2$$

verschwindet und  $P_y$  unverändert Null bleibt, d. h. es muß bei der Bewegung

$$\rho \int v \frac{\partial \Gamma}{\partial s} ds = -\frac{\pi}{4} \rho \sigma^2 \quad (38)$$

und

$$\rho \int u \frac{\partial \Gamma}{\partial s} ds = 0 \quad (39)$$

sein, wobei  $s$  die Bogenlänge der Unstetigkeitsfläche ist und das Integral über die ganze Länge der Unstetigkeitsfläche zu erstrecken ist. Die Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  sind dabei relativ zur ursprünglich geraden Unstetigkeitsfläche gerechnet.

Wir können Gleichung (38) und (39) auch noch in etwas anderer Weise interpretieren: Durch die Deformation der Trennungsfläche (Aufspulen des Randes) wird die Strömung nichtstationär. Dieser nichtstationäre Strömungscharakter hat Beschleunigungen der Flüssigkeitsteilchen vor allem in dem Gebiet des zeitlich anwachsenden aufgespulten Endes zur Folge, welche von der Kraft nach Gleichung (34) erzeugt werden. Für die Bedingung, daß die Summe aller Beschleunigungskräfte gleich  $\frac{\pi}{4} \rho \sigma^2$  ist, haben wir in den Gleichungen (38) und (39) eine äquivalente Beziehung gefunden.

Bei der späteren Anwendung dieser Sätze werden wir Wirbelsysteme betrachten, bei denen Wirbel aus dem einen in das andere System übergehen, so daß sich die Zirkulation eines betrachteten Systemes ändert. Da der gewöhnliche Joukowskysche Satz konstante Zirkulation voraussetzt, so ist es in diesem Falle zweckmäßiger, die Schwerpunktsätze etwas anders zu formulieren. Man kann sagen: Wenn keine Kraft wirkt, bleibt die Lage des Schwerpunktes unverändert, oder das Moment aller Wirbel für irgend einen Bezugspunkt ist

konstant. Wenn eine Kraft  $P$  wirkt, verschiebt sich der Schwerpunkt entsprechend dem Joukowskyschen Satz, oder die Änderung des Momentes aller Wirbel für irgend einen Bezugspunkt ist gleich der Kraft  $P$ . Für unseren Fall ist darnach

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial \Gamma}{\partial s} x ds = 0 \quad (40)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial \Gamma}{\partial s} y ds = P_x. \quad (41)$$

Wie für die Kräfte können wir auch für die Momente dieser Kräfte entsprechende Bedingungen aufstellen. Die nach dem Joukowskyschen Satz aus den Wirbelverschiebungen sich ergebenden Kräfte müssen nicht nur der Größe und Richtung nach, sondern auch der Lage nach der Kraft  $P_x$  gleich sein. Da nun sämtliche Wirbel unterhalb der  $x$ -Achse liegen, so liegt sicher auch die Resultierende  $P_x$ , welche sich aus der lotrechten Bewegung der Wirbel ergibt, unterhalb der  $x$ -Achse. Um das dadurch entstehende Moment auszugleichen, müssen die wagerechten Verschiebungen der Wirbel ein gleiches entgegengesetztes Moment ergeben. Da die letztere Bewegung als resultierende Kraft Null ergibt, so ist hierfür die Lage des Momentenpunktes gleichgültig, wir können ihn z. B. in den Koordinatenanfangspunkt legen und erhalten

$$\varrho \int v y \frac{\partial \Gamma}{\partial s} ds = \varrho \int u x \frac{\partial \Gamma}{\partial s} ds. \quad (42)$$

Wenn in einem System von Wirbeln der Schwerpunkt unverändert bleibt, so ist die Resultierende der nach dem Joukowskyschen Satz für die einzelnen Wirbel sich ergebenden Kräfte Null. Diese Kräfte ergeben aber ein Moment, wenn die Wirbel sich durchschnittlich nach dem Schwerpunkt hin bewegen (konzentrieren) oder weg bewegen. Bei einer Konzentrationsbewegung ist das Moment dem Drehsinn der Wirbel entgegengesetzt, bei der umgekehrten Bewegung gleichgerichtet.

Wollen wir eine Anzahl Wirbel  $\Gamma_1, \Gamma_2$  usw. in einem Punkte konzentrieren, so brauchen wir dazu ein Impulsmoment (das Moment  $M$  muß die Zeit  $t$  wirken)

$$M t = \frac{1}{2} \sum \Gamma_n r_n^2, \quad (43)$$

wenn  $r_n$  den Abstand des Wirbels  $\Gamma_n$  vom Konzentrationspunkt bezeichnet.

**2. Schwerpunkt des Spiralkernes in erster Näherung.** Durch die Abschätzungen in Kap. II und III wissen wir, daß bei der Spirale zwei Gebiete zu unterscheiden sind, das innere mit einigermaßen kreisförmigen Windungen und das äußere, in dem sich die Kurve asymptotisch einer Geraden nähert. Zwischen den beiden Gebieten liegt ein verhältnismäßig sehr kurzes Übergangsstück, über das wir wenig aussagen können. Wir legen eine Trennung zwischen den beiden Gebieten auf den Punkt  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  fest (Abb. 16) und betrachten beide Gebiete getrennt. Das innere Gebiet  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  bezeichnen wir im folgenden mit Spiralkern.

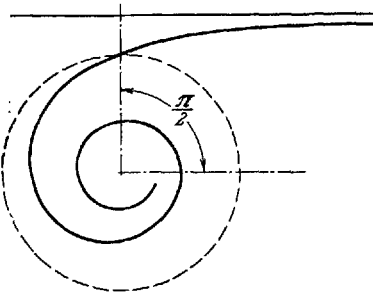


Abb. 16. Abtrennung des Spiralkernes.

Schon in Kap. III haben wir hervorgehoben, daß der Vorgang des Aufspulens am Rande der Trennungsfläche gleichbedeutend ist mit einer Konzentration der Wirbel um den Nullpunkt der Spirale. Die angenähert kreisförmigen Windungen des Spiralkernes bilden eine einigermaßen kreissymmetrische Anordnung von Wirbeln, deren Feld in einiger Entfernung sich nur sehr wenig von dem eines einzelnen Wirbels im Schwerpunkt des Kernes unterscheidet. Wir können uns daher für die Beurteilung der Wirkung nach außen

hin den inneren Teil der Unstetigkeitsfläche ( $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ) als einzelnen Wirbel von der Zirkulation  $\Gamma_0$  im Schwerpunkt konzentriert denken. Dabei ist  $\Gamma_0$  die Zirkulation um das innerhalb des Punktes  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gelegene Stück der Unstetigkeitsfläche (innerhalb des gestrichelten Kreises in Abb. 16). Der Punkt  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  der Spirale möge vor dem Aufwickeln die Entfernung  $X_0$  vom Rande der Unstetigkeitsfläche gehabt haben, so daß also

$$\Gamma_0 = 2 \sigma \sqrt{X_0}$$

ist. In erster Näherung, deren Werte wir im folgenden durch den Zeiger 1 kennzeichnen, erhalten wir daher die Wirkung der Konzentration, wenn wir die Wirbelelemente, die auf der Strecke  $X_0$  vom Anfangspunkt gerechnet liegen, in einem Punkte konzentrieren und die Wirbel der übrigen Strecke zunächst als ungestört ansehen.

Wegen der Unsymmetrie, die durch die willkürliche Abtrennung des Spiralkernes im Punkt  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  bedingt ist, fällt der Wirbelschwerpunkt des Kernes nicht mit dem Mittelpunkt der Spirale zusammen. Zur Unterscheidung von den Koordinaten  $a$  und  $b$  des Mittelpunktes wollen wir die Koordinaten des Schwerpunktes mit  $a'$  und  $b'$  bezeichnen (vgl. Abb. 19).

Da sich der Wirbelschwerpunkt in der  $x$ -Richtung nicht verschieben kann, muß die Abszisse  $a'$  des Schwerpunktes des Kernes mit dem Schwerpunkt der ursprünglichen Wirbelstrecke von  $Q$  bis  $X_0$  übereinstimmen. Es ist also  $a'_1 = \frac{1}{3} X_0$ . Bei der ähnlichen Vergrößerung wächst  $X_0$  nach dem Zeitgesetz

$$X_0 = x_0 t^{\frac{2}{3}}, \tag{44}$$

also ist auch

$$a'_1 = \frac{1}{3} X_0 = \frac{1}{3} x_0 t^{\frac{2}{3}}. \tag{45}$$

Die Größe  $x_0$  hängt mit der durch Gleichung (4) definierten Größe  $\sigma$  zusammen. Wir müssen im folgenden diesen Zusammenhang noch genauer aufklären. Die Bewegung des Kernschwerpunktes in der  $x$ -Richtung, bezogen auf die ursprüngliche Unstetigkeitsfläche findet also mit einer Geschwindigkeit

$$U_1 = \frac{\partial a'_1}{\partial t} = \frac{2}{9} \frac{x_0}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{9} \frac{X_0}{t} \tag{46}$$

statt.

Für den Abstand  $b'_1$  des Schwerpunktes von der  $x$ -Achse bzw. für die Wanderungsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung  $V_1 = \frac{\partial b'_1}{\partial t}$  erhalten wir aus der Joukowskyschen Beziehung [Gleichung (38) und anschließende Bemerkung]

$$P_x = -\rho \frac{\pi}{4} \sigma^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Gamma_0 b'_1) = \rho \Gamma_0 V_1 + \rho b'_1 \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} = \rho V_1 \cdot 2 \sigma \sqrt{X_0} + \frac{2}{3} \rho \sigma \frac{\sqrt{X_0}}{t} b'_1;$$

da aber

$$\frac{2}{3} \frac{b'_1}{t} = \frac{\partial b'_1}{\partial t} = V_1$$

ist, so wird

$$V_1 = -\frac{\pi \sigma}{12 \sqrt{X_0}} = -\frac{\pi \sigma}{12 \sqrt{x_0}} t^{-\frac{1}{3}} \tag{47}$$

und

$$b'_1 = \int_0^t V_1 dt = -\frac{\pi \sigma}{8 \sqrt{x_0}} t^{\frac{2}{3}} = -\frac{\pi \sigma}{8 x_0^{\frac{1}{3}}} X_0. \tag{48}$$



Das negative Vorzeichen bedeutet, daß der Schwerpunkt unterhalb der  $X$ -Achse liegt. Diese Beziehungen gelten natürlich nur näherungsweise, da wir zunächst die Bewegungen des äußeren Teiles der Unstetigkeitsfläche vernachlässigt haben. Da wir aber hiermit zu jeder Zeit den Ort des Wirbelfadens näherungsweise kennen (zunächst bis auf die Konstante  $\sigma/x_0^{\frac{3}{2}}$ ), können wir auch die Störungsgeschwindigkeiten  $u$  und  $v$  auf den äußeren Teil der Wirbelstrecke auf Grund der Gleichungen (26) bis (28) näherungsweise berechnen. Die sich so ergebenden Verschiebungen der Wirbel des äußeren Teiles der Spirale machen nun aber eine Korrektur unserer Berechnung der Lage des Spiralenmittelpunktes auf Grund der Schwerpunktssätze [Gleichung (38) und (39)] nötig. Die neue Lage des Mittelpunktes bedingt dann auch wieder etwas geänderte Verschiebungen im äußeren Teil usw.

**3. Die Zeitkonstante.** Bevor wir jedoch diese weiteren Näherungen rechnen, müssen wir über die Konstante  $\sigma/x_0^{\frac{3}{2}}$  etwas Näheres wissen. Diese ist einerseits ein Maß für die Schnelligkeit des Aufspulvorganges, andererseits hängt sie wesentlich mit den Abmessungen des Kernes zusammen.

Wir haben uns bisher den Spiralenkern in seinem Schwerpunkt konzentriert gedacht, was sowohl für die Berechnung seines Strömungsfeldes, wie auch für die Ermittlung der aus der Schwerpunktsbewegung sich ergebenden resultierenden Kräfte belanglos war. Bei der Erläuterung der Schwerpunktssätze haben wir aber bereits darauf hingewiesen, daß zu einer Konzentration von Wirbeln ein Moment nötig ist. Für die Berechnung der Momente ist es daher nicht mehr gleichgültig, welchen Radius der Spiralenkern hat. Wir können daher erwarten, aus der Bedingung, daß auf die Unstetigkeitsfläche kein Moment wirkt, eine Aussage über die Abmessungen des Spiralenkernes, insbesondere über den diese Abmessungen kennzeichnenden Faktor  $\kappa$  in Gleichung (9) zu erhalten.

Die Verschiebung des Kernschwerpunktes ergibt ein Moment, das durch die Bewegung der übrigen Wirbel, insbesondere durch ihre Annäherung an den Spiralenkern, gerade ausgeglichen wird. Diese Bewegung der übrigen Wirbel erfolgt aber unter dem Einflusse des Spiralenkernes und ist im wesentlichen nur durch die Lage seines Schwerpunktes und fast gar nicht durch die Verteilung der Wirbel bedingt<sup>1</sup>. Wir können uns daher den Zustand zur Zeit  $t$  in der Weise entstanden denken, daß wir die Wirbel einer Strecke  $x$  in ihrem Schwerpunkt konzentrieren, dann nach dem Schwerpunkt des Spiralenkernes verschieben und gleichzeitig die übrigen Wirbel in ihre Endlage wandern lassen und schließlich die im Kernschwerpunkt konzentrierten Wirbel wieder so verteilen, wie es der Verteilung im Spiralenkern entspricht. Wir brauchen dabei nicht den ganzen Spiralenkern zu betrachten, sondern können uns z. B. auch nur auf den inneren Teil desselben beschränken. Das Moment, das bei der Verschiebung der in ihrem Schwerpunkt konzentrierten Wirbel entsteht, wird durch die gleichzeitige Wanderung der übrigen Wirbel ausgeglichen. Damit im ganzen kein Impulsmoment in der Flüssigkeit übrigbleibt, muß daher das Impulsmoment, das bei der Konzentration der Wirbel entstand, entgegengesetzt gleich sein dem Impulsmoment, das bei Verteilung der konzentrierten Wirbel im Kern auftritt.

Um die Wirbel auf der Strecke von 0 bis  $x_1$  von der Gesamtstärke  $\Gamma_1 = 2\sigma\sqrt{x_1}$ , welche nach der Funktion

$$\Gamma' = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\sigma}{\sqrt{x}}$$

verteilt sind, auf ihren Schwerpunkt in  $\frac{1}{3}x_1$  zu konzentrieren, ist ein Impulsmoment

$$(Mt)_1 = \rho \int_0^{x_1} \Gamma' \frac{x^2}{2} dx - \frac{\rho}{2} \Gamma_1 \left(\frac{x_1}{3}\right)^2 = \frac{2}{45} \rho \Gamma_1 x_1^2 \quad (49)$$

<sup>1</sup> Da diese Voraussetzung nicht exakt erfüllt ist, stellt die nachstehende Rechnung nur die erste Stufe eines Näherungsverfahrens dar. Es zeigt sich aber, wenn man diese Voraussetzung auf Grund der späteren Ergebnisse nachprüft, daß der Unterschied im Bereich der Rechengenauigkeit von etwa 1% liegt. Es erübrigt sich daher, weitere Näherungen für  $\kappa$  zu rechnen.

nötig. (Das Moment  $M$  muß während der Zeit  $t$  ausgeübt werden, um die Verschiebung zu bewirken.)

Um diese Wirbel im Kern nach der Funktion

$$\Gamma' = \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = \frac{\kappa}{\sqrt{r}}$$

über einen Kreis mit dem Radius  $r_1$  zu verteilen, ist ein entgegengesetztes Impulsmoment

$$(Mt)_2 = \varrho \int_0^{r_1} \Gamma' \frac{r^2}{2} = \frac{1}{10} \varrho \Gamma_1 r_1^2 \quad (50)$$

erforderlich. Diese beiden Impulsmomente müssen nach obigem gleich sein. Das ergibt

$$\frac{r_1^2}{10} = \frac{2}{45} \kappa_1^2$$

oder

$$r_1 = \frac{2}{3} \kappa_1. \quad (51)$$

Da die auf die Kreisfläche  $r_1$  verteilten Wirbel insgesamt die Stärke

$$\Gamma_1 = 2 \kappa \sqrt{r_1} = 2 \sigma \sqrt{\kappa_1} \quad (52)$$

haben, ergibt sich

$$\kappa = \sigma \sqrt{\frac{\kappa_1}{r_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma. \quad (53)$$

Mit der Größe  $\kappa$  ist nun nicht nur eine die Form und Größe des Kernes bestimmende Konstante gegeben, sondern auch eine Aussage über die Schnelligkeit des Vorganges (Zeitkonstante). Wir können diese Schnelligkeit etwa dadurch ausdrücken, daß wir die Strecke  $\kappa_0$  der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche angeben, welche nach Ablauf der Zeiteinheit gerade bis auf den Rand des Spiralkernes vorgerückt ist. Diese Strecke hängt offenbar von der Intensität der Unstetigkeitsfläche, welche durch  $\sigma$  ausgedrückt wird, ab. Wenn wir für den Spiralkern die Gleichung

$$r = \left( \frac{\kappa t}{\pi \varphi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

bis zum Punkte  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  anwenden, also von der kleinen Abweichung in der Nähe des Kernrandes absehen, so erhalten wir für  $t = 1$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\kappa_0 = \frac{3}{2} r_0 = \frac{3}{2} \left( \frac{2 \kappa}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2 \sigma}{\pi^2} \right)^{\frac{2}{3}},$$

also

$$\frac{\kappa_0}{\sigma^{\frac{2}{3}}} = \left( \frac{9}{2 \pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma}{\kappa_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{9} \pi^2. \quad (54)$$

Damit haben wir nun alle wesentlichen Größen, um die Form der Spirale zu irgend einem Zeitpunkt  $t$  angeben zu können, durch die Konstante  $\sigma = \frac{\Gamma}{2 \sqrt{x}}$  der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche ausgedrückt.

**4. Genauere Berechnung des Kernschwerpunktes.** Mit dieser genaueren Kenntnis über die Schnelligkeit des Aufspulvorganges können wir nunmehr auch die bereits begonnene Ermittlung der Bewegung des Kernschwerpunktes weiter verfolgen. Bei der Ermittlung des lotrechten Abstandes  $b'$  des Schwerpunktes von der ursprünglichen Unstetig-

keitsfläche trat der Faktor  $\sigma/x_0^{\frac{3}{2}}$  auf [Gleichung (48)]. Nachdem wir jetzt durch Gleichung (54) den Zusammenhang von  $x_0$  und  $\sigma$  kennen  $\left(\frac{\sigma}{x_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{9} \pi^2\right)$  erhalten wir aus Gleichung (48)

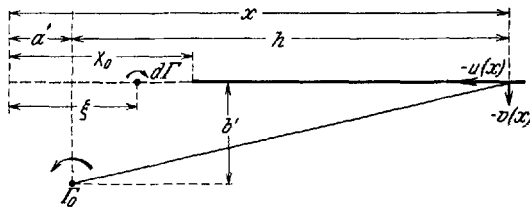


Abb. 17.

$$b'_1 = -\frac{\pi}{8} \frac{\sigma}{x_0^{\frac{3}{2}}} X_0 = -\frac{\pi^3}{36} X_0. \quad (55)$$

Mit diesem Wert und dem Wert  $a'_1 = \frac{1}{3} X_0$  [Gleichung (46)] können wir nun weitere Näherungen für  $a'$  und  $b'$  rechnen.

Die Wirkung der Wirbelkonzentration erhalten wir nach dem Vorgang in Kap. III durch Superposition von Doppelwirbeln über die ursprüngliche Wirbelanordnung, welche ja unter sich im Gleichgewicht war. Wir bekommen daher für die Vertikalkomponente  $v_1(x)$  der Störungsgeschwindigkeit in einem Punkte  $x$  auf der Wirbelstrecke nach Abb. 17

$$v_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{X_0} \frac{\Gamma'(\xi) d\xi}{x - \xi} + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{x - a'_1}{(x - a'_1)^2 + b'^2_1}.$$

Mit

$$b'_1 = -\frac{\pi}{8} \frac{\sigma}{x_0^{\frac{3}{2}}} X_0, \quad \Gamma' = \frac{\sigma}{\sqrt{\xi}}, \quad \Gamma_0 = 2\sigma \sqrt{X_0} \quad \text{und} \quad a'_1 = \frac{1}{3} X_0$$

ergibt sich nach Ausführung der Integration

$$v_1(x) = -\frac{\sigma}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{X_0}{x}}}{1 - \sqrt{\frac{X_0}{x}}} - \frac{\sqrt{X_0}}{\left(x - \frac{1}{3} X_0\right) \left(1 + \frac{b'^2_1}{\left(x - \frac{1}{3} X_0\right)^2}\right)} \right\}. \quad (56)$$

Auf Grund des Gesetzes der ähnlichen Vergrößerung der Spirale mit der Zeit [Gleichung (6)] können wir aus der Verteilung von  $v$  über  $x$  bzw.  $\xi$  zu einer gegebenen Zeit  $t_1$  den zeitlichen Verlauf von  $v$  für eine gegebene Stelle  $x$  berechnen und damit die Verschiebung eines Punktes in der  $y$ -Richtung

$$y(x) = \int_0^{t_1} v(t) dt = \frac{3}{2} t_1 x \int_x^{\infty} \frac{v(\xi)}{\xi^2} d\xi. \quad (57)$$

Führen wir diese Rechnung für die obige Funktion  $v(x)$  durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{X_0} = & -\frac{3}{2} \frac{\sigma}{\pi x_0^{\frac{3}{2}}} z \left[ \frac{2}{3z^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{z} + \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right\} \right. \\ & - \frac{1}{\left(\frac{b'}{X_0}\right)^2 + \frac{1}{9}} \left\{ \frac{\left(\frac{b'}{X_0}\right)^2 - \frac{1}{9}}{\left(\frac{b'}{X_0}\right)^2 + \frac{1}{9}} \ln \frac{\sqrt{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{b'}{X_0}\right)^2}}{z} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3z} - \frac{2}{3} \frac{\frac{b'}{X_0}}{\left(\frac{b'}{X_0}\right)^2 + \frac{1}{9}} \left[ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{b'}{X_0}} \right] \right\} \right], \quad (58) \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung  $\frac{x}{X_0} = z$  gesetzt ist.

Auf Grund der ersten Näherung können wir die Form und Lage des Spiralkernes angenähert auftragen. Wir brauchen dazu allerdings noch den schon erwähnten Unterschied zwischen den Schwerpunktskoordinaten  $a'$ ,  $b'$  und den Mittelpunktskordinaten  $a$ ,  $b$ . Wenn man zur näherungsweise Ermittlung desselben den Exponenten  $\nu$  [Gleichung (12)] bis an den Rand des Kernes zu  $\frac{2}{3}$  annimmt, so läßt sich die Rechnung ziemlich leicht durchführen. Wenn man mit  $R_0$  den Radius des Kernes bezeichnet und nach Gleichung (51)  $R_0 = \frac{2}{3} X_0$  setzt, so ergibt sich für die Lage des Schwerpunktes (Abb. 19)

$$\left. \begin{aligned} a - a' = \Delta a &= 0,15 R_0 = 0,10 X_0, \\ b - b' = \Delta b &= -0,07 R_0 = -0,05 X_0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Zeichnen wir mit diesen Werten den Spiralkern näherungsweise auf und versuchen, in diese Figur den äußeren Spiraleteil auf Grund der Gleichung (58) einzutragen, so erkennen wir, daß die erhaltenen  $y$ -Werte in der Nähe des Kernes wesentlich zu groß sind, so daß die erhaltene Kurve nicht an den Rand des Kernes anschließt. Dies rührt daher, daß unsere Berechnung nur für große  $x$  zulässig ist. Wir können nun so vorgehen, daß wir den Verlauf der äußeren Spirale nach Augenmaß so zeichnen, daß sie vom Rand des Spiralkernes in einer glatten Kurve allmählich in die berechnete Kurve übergeht. Dieses Verfahren sieht zwar auf den ersten Blick sehr ungenau aus, zumal im vorliegenden Falle ein befriedigender Übergang erst bei ziemlich hohen  $x$ -Werten stattfindet. Da aber bereits am Spiralenrand  $y$  ziemlich klein ist und rasch auf noch wesentlich kleinere Werte übergeht (vgl. Abb. 19), so ist die genaue Kenntnis des Verlaufes der Kurve ziemlich belanglos. Wir brauchen den Verlauf ja, um die Schwerpunktslage des Kernes zu korrigieren. Wenn  $b'_2$  die zweite Näherung von  $b'$  bedeutet, so ist

$$\Gamma_0(b'_1 - b'_2) = \int_{x_0}^{\infty} \Gamma^{\nu} y dx. \quad (60)$$

Führt man diese Rechnung mit den teils aus der Zeichnung, teils aus der Rechnung entnommenen Werten von  $y$  durch, so erhält man

$$\begin{aligned} b'_1 - b'_2 &= 0,04 b'_1, \\ b'_2 &= 0,96 b'_1 = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 0,96 \cdot X_0 = -0,83 X_0. \end{aligned} \quad (61)$$

Diese zweite Näherung unterscheidet sich so wenig von der ersten, daß es sich nicht lohnt, weitere Verbesserungen dieses Wertes zu suchen. Man sieht auch, daß die etwas unsichere Bestimmung der  $y$ -Werte wegen der Geringfügigkeit der Korrektur für das Ergebnis ziemlich belanglos ist.

Eine ganz entsprechende Rechnung können wir für die Geschwindigkeiten  $u$  und die daraus sich ergebenden Verschiebungen  $\Delta x$  in der  $x$ -Richtung anstellen. Für hinreichend große  $x$  ist

$$u(h) = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{b'_1}{b_1'^2 + h^2}, \quad (62)$$

wobei  $h = x - a'_1$  ist. In gleicher Weise, wie bei der  $y$ -Komponente, ergibt sich aus  $u(x)$  der zeitliche Verlauf von  $u = u(t)$  für ein gegebenes  $x$  und hieraus die Verschiebung

$$\Delta x = \int_0^t u(t) dt = \frac{3}{2} t_1 x \int_x^{\infty} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi^2}. \quad (63)$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt entsprechend wie bei der lotrechten Verschie-

bung [Gleichung (58)]

$$\frac{\Delta x}{X_0} = \frac{3}{z} \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{x_0^{\frac{3}{2}}} z \left\{ \frac{2}{3} \frac{\frac{b'}{X_0}}{\left[ \left( \frac{b'}{X_0} \right)^2 + \frac{1}{9} \right]^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{\sqrt{\left( \frac{b'}{X_0} \right)^2 + \left( z - \frac{1}{3} \right)^2}}{z} \right. \\ \left. + \frac{\left( \frac{b'}{X_0} \right)^2 - \frac{1}{9}}{\left[ \left( \frac{b'}{X_0} \right)^2 + \frac{1}{9} \right]^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\pi}{z} + \arctg \frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{b'}{X_0}} \right) + \frac{\frac{b'}{X_0}}{\left( \frac{b'}{X_0} \right)^2 + \frac{1}{9}} \frac{1}{z} \right\}. \quad (64)$$

Für den Punkt  $x = X_0$  haben wir wieder die Bedingung, daß er gerade nach dem Kernrande hin wandern muß, d. h. daß für ihn  $\Delta x = a'_1 + \Delta a - X_0 = -0,57 X_0$  sein muß [ $\Delta a$  siehe Gleichung (59)]. Das aus obiger Formel für  $z = 1$  bzw.  $x = X_0$  berechnet  $\Delta x$  ist erheblich kleiner, nämlich  $-0,305 X_0$ . Wir werden daher auch hier zunächst die Kurve für  $\Delta x$  nach Augenmaß so korrigieren, daß sie für  $z = 1$  den Betrag  $-0,57 X_0$  annimmt. Mit den so gefundenen Werten von  $\Delta x$  können wir die Abszisse  $a'$  korrigieren, indem

$$\Gamma_0(a'_2 - a'_1) = - \int_{X_0}^{\infty} \Gamma'' \Delta x dx \quad (65)$$

ist. Daraus ergibt sich

$$a'_2 \approx 1,54 a'_1. \quad (66)$$

Dieser Unterschied von  $a'_2$  und  $a'_1$  ist nun nicht so unerheblich wie der von  $b'_2$  und  $b'_1$ . Wir müssen daher hier noch eine dritte Näherung rechnen. Eine wesentliche Ungenauigkeit der letzten Rechnung bestand darin, daß wir die Geschwindigkeiten  $u(x)$  für die Stellen  $x$  der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche berechneten, während in Wirklichkeit die betreffenden Wirbelelemente sich an einer um  $y$  und  $\Delta x$  verschobenen Stelle befinden. Setzen wir in Gleichung (62) an Stelle von  $b'_1$ ,  $a'_1$  und  $x$  die verbesserten Werte  $b'_2 - y$ ,  $a'_2$  und  $x - \Delta x$  ein, und führen die Rechnung sonst in gleicher Weise durch, so erhalten wir für den Punkt  $x = X_0$  eine Verschiebung  $\Delta x = -0,45 X_0$ , während der geometrisch gegebene Wert  $\Delta x = -(X_0 - a'_2 - \Delta a) = -0,39 X_0$  ist.  $a'_3$  wird darnach  $1,38 a'_1$ . Bei nochmaliger Wiederholung des Verfahrens ergibt sich sowohl aus der Rechnung wie aus dem geometrischen Zusammenhang  $\Delta x = -0,44 X_0$ . Der Verlauf, der sich für  $\Delta x$  hiernach ergibt, ist in Abb. 18 dargestellt.

Damit wird

$$a'_4 = 1,41 a'_1 = 0,47 X_0. \quad (67)$$

Der Unterschied zwischen  $a'_3$  und  $a'_4$  ist nunmehr befriedigend klein, so daß sich weitere Näherungen erübrigen. Für den Spiralenmittelpunkt, der um den Betrag  $\Delta a = 0,10 X_0$  bzw.  $\Delta b = -0,05 X_0$  [Gleichung (59)] vom Schwerpunkt entfernt ist, erhalten wir die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} a &= a' + \Delta a = 0,57 X_0, \\ b &= b' + \Delta b = -0,88 X_0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

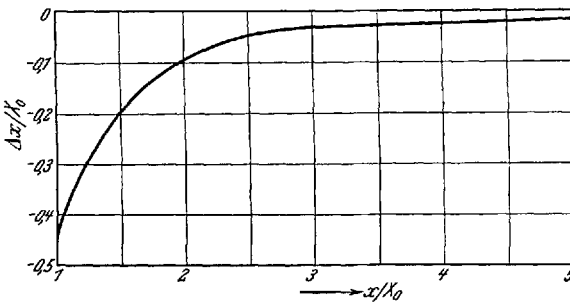


Abb. 18. Wirbelverschiebung in der  $x$ -Richtung.

Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten  $v$  und den daraus sich ergebenden Verschiebungen  $y$  haben wir uns in Gleichung (57) und (58) auf die erste Näherung beschränkt, da sich zeigte, daß diese Größen auf die Berechnung des Schwerpunktsabstandes  $b$  doch nur von ganz geringfügigem Einfluß waren. Tatsächlich bringen aber für  $v$  und  $y$  selbst die Verschiebungen  $\Delta x$  einen verhältnismäßig großen Beitrag. Wir wollen der Vollständigkeit halber wenigstens für sehr große  $x$  die zugehörigen  $y$ -Werte noch in zweiter Näherung

berechnen. In erster Näherung [Gleichung (58)] ergibt sich für große  $x$  die vereinfachte Beziehung

$$y_1 = - X_0 \frac{0,217}{\left(\frac{x}{X_0}\right)^3}.$$

Der Einfluß einer Verschiebung  $\Delta \xi$  eines Wirbels  $\Gamma'(\xi) d\xi$  im Punkte  $\xi$  und einer gleichzeitigen entgegengesetzten Verschiebung des Spiralkernes zur Erhaltung der Schwerpunktlage auf die Geschwindigkeit  $v$  im Punkte  $x$  ist nach Gleichung (29)

$$dv = \frac{\Delta \xi}{2\pi} \frac{2 \left(\xi - \frac{X_0}{3}\right)}{x^3} \frac{\sigma}{\sqrt{\xi}} d\xi,$$

indem hier  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \frac{X_0}{3}$  und  $d\Gamma(\xi_1) = \Gamma'(\xi) d\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{\xi}} d\xi$  ist. Setzt man für  $\Delta \xi$  die Werte nach Abb. 18 ein, so ergibt sich durch Integration

$$v_2 - v_1 = - 0,91 v_1$$

und weiterhin

$$y_2 - y_1 = - 0,91 y_1,$$

$$y_2 = - X_0 \frac{0,42}{\left(\frac{x}{X_0}\right)^3}. \tag{69}$$

Die Verschiebung in der  $x$ -Richtung wird nach Gleichung (64) für sehr große  $x$

$$\Delta x = - X_0 \frac{0,29}{\left(\frac{x}{X_0}\right)^2}. \tag{70}$$

**5. Zusammenstellung.** Damit haben wir nun alle Größen, welche für die Form der Spirale und den zeitlichen Verlauf ihres Anwachsens wesentlich sind. Wir stellen zur Übersicht die wichtigsten Formeln mit den Konstanten zusammen.

Ursprüngliche Unstetigkeitsfläche:

$$\Gamma = 2 \sigma \sqrt{x}; \quad \sigma = \text{gegebene Konstante} \tag{4}$$

Form der Spirale im Innern:

$$r = \left(\frac{\kappa t}{\pi \varphi}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad \kappa = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma \tag{11} \tag{53}$$

$$\Gamma = 2 \kappa \sqrt{r}.$$

Form der Spirale in großer Entfernung:

Verschiebung eines Punktes

$$y = - \frac{0,42}{\left(\frac{x}{X_0}\right)^3} X_0, \tag{69}$$

$$\Delta x = - \frac{0,29}{\left(\frac{x}{X_0}\right)^2} X_0. \tag{70}$$

Schnelligkeit des Aufspulens:

Nach der Zeit  $t = \tau$  ist ein Punkt  $x_0$  der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche gerade bis an den Rand des Spiralkernes ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) gewandert. Es ist

$$x_0 = \left(\frac{9}{2\pi^2} \sigma\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{54}$$

Nach der Zeit  $t$  ist ein Punkt  $X_0$  der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche bis an den Rand des Spiralkernes gewandert. Es ist nach Gleichung (44) und (54)

$$X_0 = x_0 t^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{9}{2\pi^2} \sigma t \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (71)$$

Koordinaten des Spulenzmittelpunktes:

$$a = 0,57 X_0, \quad (68)$$

$$b = -0,88 X_0, \quad (61)$$

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a} = -57^\circ. \quad (72)$$

Die sich hiernach ergebende Form der Spirale ist in Abb. 19 dargestellt.

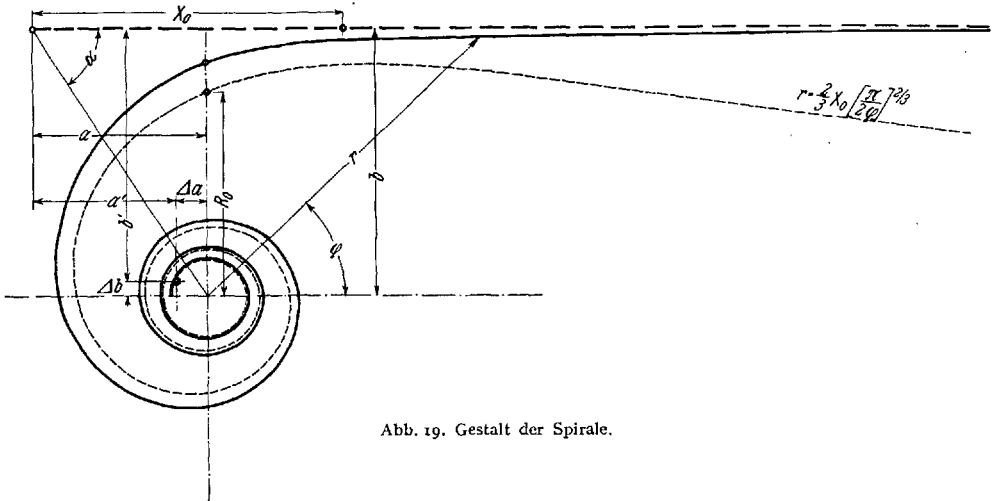


Abb. 19. Gestalt der Spirale.

## V. Anwendungen auf die Tragflügeltheorie.

**1. Flügel endlicher Spannweite.** Um den Anschluß an die in der Einleitung erwähnte Aufgabe zu gewinnen, soll auf die Wirbelfläche hinter einem Tragflügel mit endlicher Spannweite etwas eingegangen werden, um die gewonnenen Ergebnisse wenigstens näherungsweise auf den praktischen Fall übertragen zu können.

Bei einem Tragflügel ist der Auftrieb angenähert nach einer Ellipse über die Spannweite verteilt. Wenn  $\Gamma_{\max}$  die Zirkulation in der Flügelmitte und  $L$  die Flügelspannweite ist, so ist die Zirkulation im Abstände  $z$  von der Mitte

$$\Gamma = \Gamma_{\max} \sqrt{1 - \left( \frac{2z}{L} \right)^2}. \quad (73)$$

Nach bekannten Sätzen der Tragflügeltheorie<sup>1</sup> ist diese Zirkulation um den Flügel an der Stelle  $z$  gleich der Zirkulation um das Stück der Unstetigkeitsfläche hinter dem Flügel vom Rande bis zur Stelle  $z$ . Die letzte Gleichung gibt daher gleichzeitig die Verteilung der Zirkulation in der Unstetigkeitsfläche wieder.

In der Nähe des Randes ergibt sich hieraus, wenn wir die Entfernung vom Rande  $\frac{L}{2} - z = x$  bzw.  $1 - \frac{2z}{L} = \frac{2x}{L}$  setzen

$$\Gamma \approx 2 \Gamma_{\max} \sqrt{\frac{x}{L}}. \quad (74)$$

<sup>1</sup> Vgl. Handb. d. Physik, Bd. VII, Kap. 4, Ziffer 27.

Bei unserer theoretischen Berechnung hatten wir

$$\Gamma = 2 \sigma \sqrt{x}.$$

Es ist daher

$$\sigma = \frac{\Gamma_{\max}}{\sqrt{L}}. \tag{75}$$

Nach den bekannten Sätzen der Tragflügeltheorie<sup>1</sup> ist die Fortschrittsgeschwindigkeit der unaufgewickelten Unstetigkeitsfläche

$$w_0 = \frac{\Gamma_{\max}}{L}; \tag{76}$$

damit wird

$$\sigma = w_0 \sqrt{L}. \tag{77}$$

Der Vorgang des Aufspulens der beiden Enden der Unstetigkeitsfläche findet nun so lange statt, bis die Zirkulation eines Spulenkernes bis zur maximalen Zirkulation  $\Gamma_{\max}$  angewachsen ist. Dann hat sich die ursprüngliche ebene Wirbelfläche in zwei getrennte Wirbel mit der Zirkulation  $\pm \Gamma_{\max}$  verwandelt.

Der Abstand  $L'$  der Mittelpunkte dieser beiden Wirbel ergibt sich aus der Bedingung, daß der Mittelpunkt eines Wirbels dieselbe horizontale Entfernung von der Flügelmitte wie der Wirbelschwerpunkt einer Hälfte der Unstetigkeitsfläche haben muß, zu

$$L' = \frac{\pi}{4} L. \tag{78}$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die beiden Wirbel weiter bewegen, ist

$$w'_0 = \frac{\Gamma_{\max}}{2\pi L'} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\Gamma_{\max}}{L} = \frac{2}{\pi^2} w_0. \tag{79}$$

Die Geschwindigkeit der Strömung in der Mitte zwischen den beiden Wirbeln, welche vor dem Aufspulen  $w_0$  war, ist nach dem Aufspulen auf

$$w_0^* = \frac{2 \Gamma_{\max}}{2\pi \frac{L}{2}} = \frac{8}{\pi^2} w_0 \tag{80}$$

zurückgegangen.

**2. Die Aufspulzeit.** Für die praktische Anwendung hat nun die Beantwortung der Frage Bedeutung: in welcher Entfernung von der Hinterkante des Flügels kann man den Vorgang des Aufspulens als beendet ansehen? Diese Entfernung läßt sich natürlich nicht genau festlegen, da ja ein asymptotischer Übergang in den Endzustand stattfindet. Wir können uns aber in der Weise helfen, daß wir den asymptotischen durch einen unstetigen Übergang ersetzen (Abb. 20): Wir setzen die nach der Theorie für den Anfang gültige Bewegung so lange fort, bis der Spulenzentrum so weit vom Flügelrande entfernt ist, als es dem Endzustande der Einzelwirbel entspricht (Abb. 20, Punkt S). Von da an soll die Bewegung des Wirbelpaares nach seinen Gesetzen erfolgen. Wir wollen nun als Zeit  $T$  des Aufspulens jene Zeit definieren, welche unter der geschilderten Annahme nötig ist, um den Punkt S zu erreichen. Für diese Zeit gilt nach Gleichung (68) und (71)

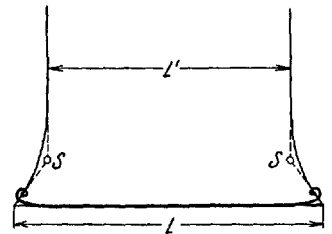


Abb. 20. Wirbelbewegung hinter einem Flügel von endlicher Spannweite.

$$\frac{L - L'}{2} = 0,57 \left( \frac{9\sigma}{2\pi^2} T \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$T = \frac{2\pi^2}{9\sigma} \left( \frac{L - L'}{1,14} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi^2}{9w_0\sqrt{L}} \left( \frac{L \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)}{1,14} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,057 \frac{L}{w_0} = 0,057 \frac{L^2}{\Gamma_{\max}}. \tag{81}$$

<sup>1</sup> Vgl. Handb. d. Physik, Bd. VII, Kap. 4, Ziffer 31.



In dieser Zeit legt der Flügel, wenn wir die Fluggeschwindigkeit mit  $V_0$  bezeichnen, den Weg

$$E = V_0 T = 0,057 \frac{V_0 L^2}{F_{\max}} \quad (82)$$

zurück.

Da der Gesamtauftrieb des Flügels

$$A = \frac{\pi}{4} \rho L V_0 \Gamma_{\max}$$

ist, erhalten wir mit diesem Wert die Beziehung

$$\frac{E}{L} = 0,057 \frac{\pi}{4} \rho \frac{V_0^2 L^2}{A} = 0,045 \rho \frac{V_0^2 L^2}{A}. \quad (83)$$

Ferner können wir noch die Auftriebsziffer

$$c_a = \frac{A}{\frac{\rho}{2} F V_0^2}$$

einführen, worin  $F$  die größte Projektion des Flügels (in der Regel Spannweite mal Flügeltiefe) bedeutet. Es wird daher aus (82)

$$\frac{E}{L} = 0,090 \frac{L^2}{F c_a}. \quad (84)$$

Diese Formel gibt an, wie das Verhältnis der charakteristischen Entfernung  $E$  zur Spannweite  $L$  bei gegebenem  $c_a$  von dem Seitenverhältnis  $L^2/F$  des Flügels abhängt. Eine graphische Darstellung dieser Abhängigkeit ist in Abb. 21 wiedergegeben. Die Aufrollung vollzieht sich also bei den größeren  $c_a$ -Werten und mittleren Seitenverhältnissen verhältnismäßig nahe am Flügel.

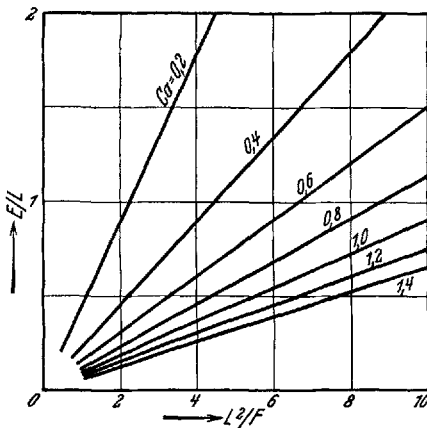


Abb. 21. Beendigung der Aufwicklung hinter einem Flügel.

## VI. Vergleich mit dem Experiment.

**1. Versuchsanordnung.** Die experimentelle Verfolgung des Aufwicklungsvorganges stößt auf große Schwierigkeiten. Einmal ist der in der Theorie behandelte Fall der einseitig sich ins Unendliche erstreckenden Unstetigkeitsfläche im Experiment nicht zu verwirklichen; man kann nur die Unstetigkeitsfläche hinter einem Flügel von endlicher Spannweite verwirklichen, also die Vorgänge, auf welche die Ergebnisse im vorigen Kapitel näherungsweise übertragen wurden. Zum Vergleich mit der Theorie stehen dann nur die ersten Stadien dieser Vorgänge zur Verfügung und diese sind wegen der geringen Ausdehnung der Wirbel am Anfang der Bewegung verhältnismäßig nur recht ungenau zu erkennen. Zu dieser prinzipiellen Schwierigkeit kommt noch die versuchstechnische, daß es nur schwer zu erreichen ist, die Vorgänge einigermaßen frei von Nebenbewegungen zu erhalten, welche die Vorgänge verschleiern<sup>1</sup>. Trotz dieser Unsicherheit schien es nötig, den Vergleich mit dem Experiment heranzuziehen, da bisher über den Verlauf dieser Vorgänge fast nichts bekannt war und deshalb auch schon eine Bestätigung der theoretischen Ergebnisse der Größenordnung nach von Wichtigkeit war.

Die Anordnung, welche zur experimentellen Untersuchung verwandt wurde, ist in Abb. 22 dargestellt. In einem langen Wasserbassin von 60 cm Breite wurde eine 15 cm breite, senkrecht zur Wasseroberfläche stehende Platte  $Pl$  schräg nach unten bewegt. Die

<sup>1</sup> Wahrscheinlich würde man bessere Resultate erhalten, wenn man die Versuche in wesentlich größerem Maßstabe, als es hier möglich war, ausführen könnte.

Neigung der Bahn gegen die Wasseroberfläche betrug etwa  $79^\circ$ , der Anstellwinkel der Platte gegen die Bahn also etwa  $11^\circ$ . 17 cm unter der Wasseroberfläche war ein Zwischenboden  $B$  mit einem Schlitz angebracht, in dem die Platte bei der Bewegung verschwand. Die Platte war 21,5 cm lang und reichte auch in ihrer höchsten Stellung noch unter den Zwischenboden. Unter diesem war sie mit einem an einer Führungsschiene  $Sch$  laufenden Wagen  $W$  verbunden. Der Antrieb erfolgte in der Weise, daß der Wagen mit der Platte zunächst durch eine über eine Rolle  $R$  aufgewickelte Schnur hochgezogen wurde. Die Rolle konnte durch einen Elektromotor mit zwischengeschalteter Schneckenübersetzung gedreht werden. Beim Einschalten des Motors wickelte sich die Schnur von der Rolle ab und der Wagen mit der Platte sank unter seinem Eigengewicht mit konstanter Geschwindigkeit abwärts. Die Fahrgeschwindigkeit der Platte betrug etwa 1,2 m/sek. Vor

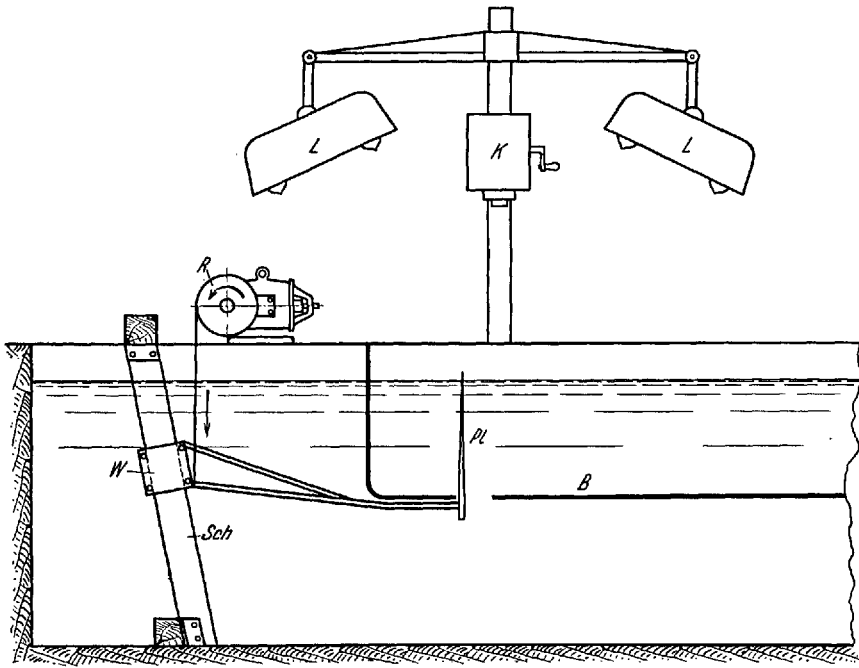


Abb. 22. Versuchsanordnung.  $Pl$  Platte,  $B$  Zwischenboden,  $Sch$  Führungsschiene,  $W$  Wagen,  $R$  Antriebsrolle,  $L$  Lampen,  $K$  Kino.

Beginn der Bewegung ragte die Platte etwa 1 cm über die Wasseroberfläche heraus. Beim Eintauchen der Hinterkante ins Wasser war einigermaßen konstante Geschwindigkeit erreicht. Die Bewegung des Wassers hinter der nach unten weiterfahrenden Platte konnte auf der Wasseroberfläche durch aufgestreutes Aluminiumpulver sichtbar gemacht und durch kinematographische Aufnahmen festgehalten werden. Um insbesondere die Verformung der von der Hinterkante der Platte ausgehenden Wirbelschicht erkennen zu können, wurde die Hinterkante mit angefeuchtetem Aluminiumpulver bestrichen, das beim Eintauchen der Hinterkante abschwamm und die Unstetigkeitsfläche kennzeichnete. Hierbei ergab sich aber die Schwierigkeit, daß dieses Aluminiumpulver kurz nach dem Abschwimmen ungleichmäßige Kapillarspannungen auf der Wasseroberfläche bewirkte, welche merkliche Eigenbewegungen der Aluminiumteilchen verursachten (vgl. das zackige Aussehen der Aluminiummarkierung auf den ersten Bildern der Abb. 23).

**2. Versuchsergebnisse.** Die Kinaufnahme lieferte 16 Aufnahmen je Sekunde. Von diesen ist in Abb. 23 eine Auswahl wiedergegeben (im hauptsächlich interessierenden Bereich jedes 5. Bild). Um die Photographien leichter ausmessen zu können, waren über der

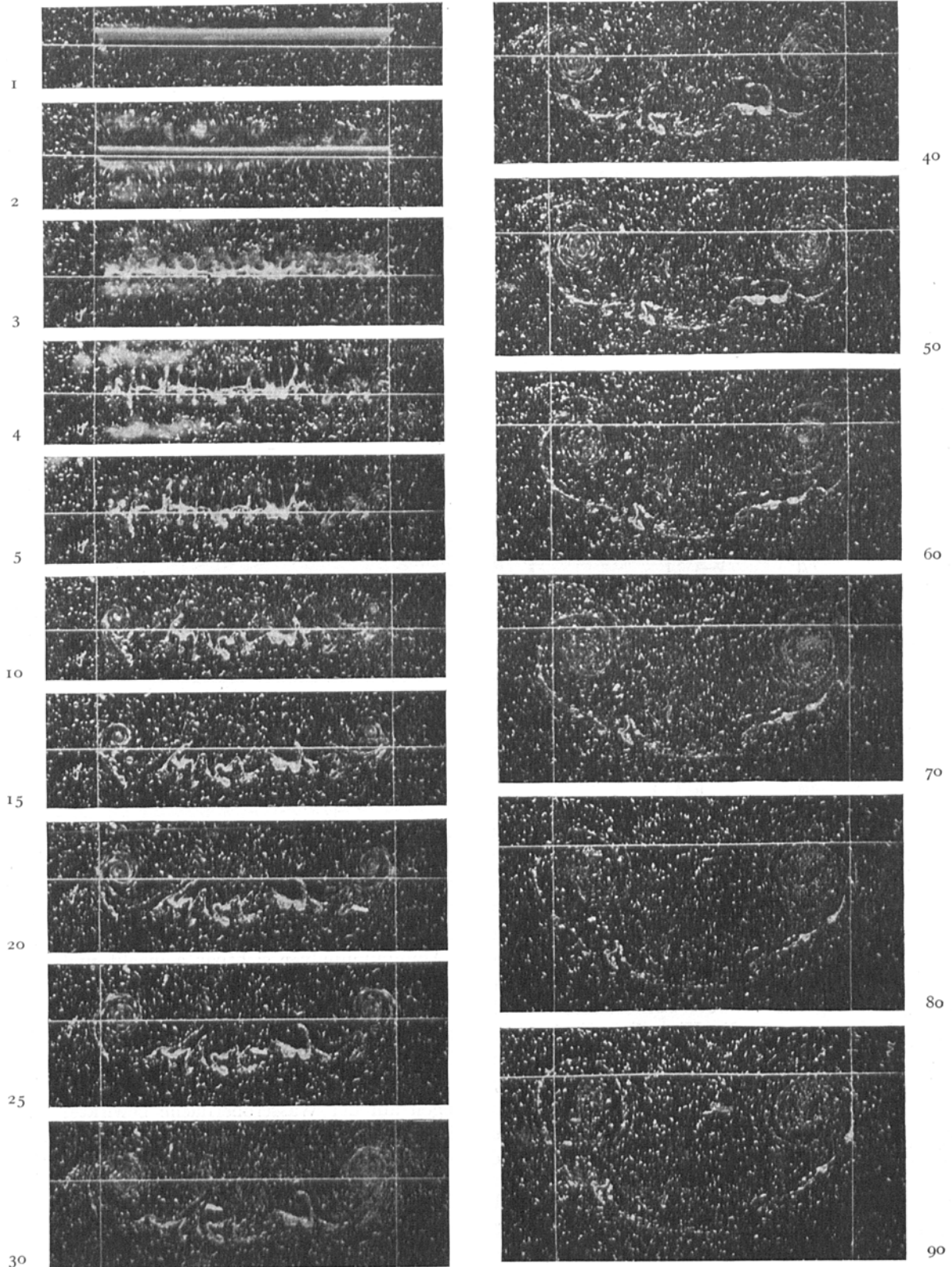


Abb. 23. Kinematographische Aufnahmen des Aufwicklungsvorganges. Die Zahlen bedeuten die Nummer des betreffenden Kinobildchens (Zeitmaßstab).

Wasseroberfläche als feste Koordinaten Drähte gespannt, welche auf allen Bildern erscheinen. Ein Draht liegt quer zur Bewegungsrichtung ungefähr an der Stelle, wo die Plattenhinterkante in das Wasser eintaucht. Zwei weitere parallele Drähte laufen in der Bewegungsrichtung und gehen ungefähr durch die seitliche Begrenzung der Platte.

Zum Vergleich mit der Theorie wurde die Bewegung der Wirbelmittelpunkte [die Koordinaten  $a$  und  $b$  in Gleichung (68)] herangezogen. Die in der Theorie auftretende Größe  $\sigma$  kann nach Gleichung (77) aus der Bewegung der Unstetigkeitsfläche (Geschwindigkeit  $w_0$ ) bestimmt werden.

Die Ausmessung der Bilder bietet insofern Schwierigkeit, als weder der Nullpunkt der Zeit noch der Nullpunkt der Koordinaten genau festliegt. Während der Nullpunkt der Zeit (das Eintauchen der Plattenhinterkante) noch einigermaßen genau aus den Aufnahmen sich feststellen läßt (zwischen Bild 2 und 3), ist der Nullpunkt der Koordinaten erheblich schlechter zu bestimmen, da einerseits die Markierung gleich nach dem Eintauchen ziemlich unscharf wird und andererseits bereits vor dem Eintauchen ein Umströmen der Platte und geringe Wirbelbildung stattfindet. Man mußte diese Nullpunkte so abschätzen, daß die ausgemessenen Werte sich zwanglos gegen diese Nullpunkte extrapolieren ließen.

Nach Gleichung (71) ist

$$X_0 = \left( \frac{9}{2\pi^2} \sigma t \right)^{\frac{2}{3}},$$

nach Gleichung (77)

$$\sigma = w_0 \sqrt{L}.$$

Setzt man letzteren Wert in die vorhergehende Gleichung für  $X_0$  ein und beachtet, daß  $w_0 t = c$  die Verschiebung der Unstetigkeitsfläche bedeutet (Abb. 24), so erhalten wir

$$\frac{X_0}{L} = \left( \frac{9}{2\pi^2} \frac{c}{L} \right)^{\frac{2}{3}}$$

und damit nach Gleichung (68)

$$\frac{a}{L} = 0,57 \frac{X_0}{L} = 0,34 \left( \frac{c}{L} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{b}{L} = 0,88 \frac{X_0}{L} = 0,52 \left( \frac{c}{L} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

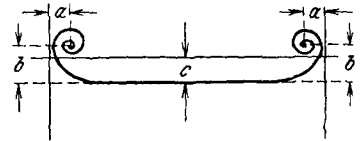


Abb. 24.

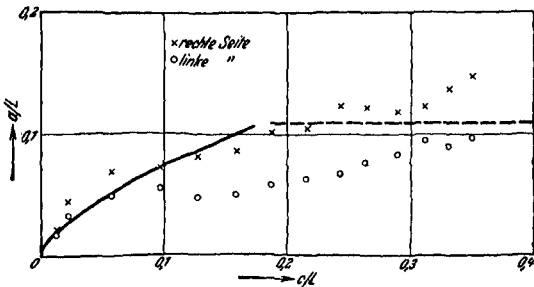


Abb. 25. Wanderung der Wirbel in wagerechter Richtung.

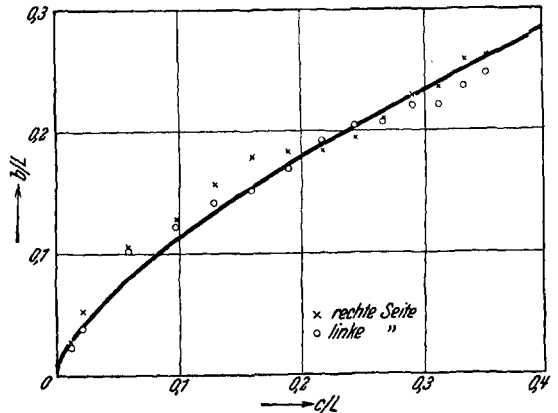


Abb. 26. Wanderung der Wirbel in lotrechter Richtung.

In den Abb. 25 und 26 ist dieser theoretische Zusammenhang zwischen  $a/L$  bzw.  $b/L$  und dem dimensionslosen Zeitmaßstab  $c/L$  durch die ausgezogenen Kurven dargestellt. Außerdem

sind die aus den Kinaufnahmen ausgemessenen zusammengehörigen Werte dieser Größen mit eingetragen, und zwar durch besondere Kennzeichen für die rechte und linke Seite unterschieden. Da die Theorie nur für den Anfang der Bewegung zutrifft, sind die starken Abweichungen der Meßwerte  $a/L$  von der theoretischen Kurve mit zunehmendem  $c/L$  (zunehmender Zeit) nicht verwunderlich; die Werte müssen ja für den Flügel mit endlicher Spannweite (vgl. das Kap. V) in den konstanten Wert

$$\frac{a}{L} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) = 0,107$$

asymptotisch übergehen. Dieser Grenzwert ist in Abb. 25 durch die gestrichelte Linie angegeben. Die Unsicherheit der Meßpunkte kommt in den zum Teil großen Unterschieden zwischen der rechten und linken Seite zum Ausdruck. Wenn man diese Unsicherheit berücksichtigt, kann man die Theorie in der aus den Experimenten zu erzielenden Genauigkeit, die sich allerdings vorläufig auf die Größenordnung beschränkt, bestätigt finden.

Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

(Eingegangen am 19. Januar 1931.)