

## Schubspannungsverteilung im Querschnitt einer Schraubenfeder.

Von O. Göhner in Eßlingen.

Die deformierte Schraubenfeder ist ein für die Technik besonders wichtiges und viel-untersuchtes<sup>1</sup> Beispiel für die Biegung und Drillung dünner Stäbe. Bei der mathematischen Behandlung dieses ganzen Problemkreises läßt man (für anfänglich gerade oder von Hause aus krumme Stäbe) im allgemeinen beliebig große Deformationen der Stabmittellinie zu. Dafür wird auf den „dünnen“ Stab besonderes Gewicht gelegt; das Verhältnis einer Querschnittsabmessung des Stabes zum Krümmungs- und Windungshalbmesser der Stabmittellinie wird als so kleiner Bruch betrachtet, daß man ihm die Größenordnung einer Verzerrungsgröße zuschreibt und es wie eine solche nur linear in die Rechnung aufnimmt. Man kann dann zeigen, daß als Wert für die Drillungssteifigkeit derjenige für die biegungslose Drillung des prismatischen Stabes beibehalten werden darf. Über eine Verteilung der Spannungen über den (sehr klein angenommenen) Querschnitt kann natürlich damit nichts ausgesagt werden; vielmehr begnügt man sich mit der Betrachtung der Resultierenden und des resultierenden Moments dieser Spannungen für den ganzen Querschnitt.

Üblicherweise behandelt man auch eine dickere Schraubenfeder als einen „dünnen“ Stab. Je dicker aber die Feder (im Vergleich zum Wicklungshalbmesser), um so mehr kann sich ein Einfluß der Krümmung der Feder auf die Drillungssteifigkeit geltend machen. Ist dieser nicht mehr vernachlässigbar klein, so kann z. B. die Bestimmung des Schubmoduls einer Zugfeder aus einem Zugversuch fehlerhaft ausfallen, falls man der Rechnung die gewöhnliche Theorie des dünnen Stabes zugrunde legt. Darum verdient die Frage nach der Größe dieses Einflusses das Interesse des Ingenieurs. Ebenso wichtig kann für diesen auch die Frage nach der Verteilung der Schubspannungen in einem Querschnitt werden, falls infolge der Federkrümmung eine erhebliche Abweichung von der (linearen) Verteilung der Drillungsspannungen im zylindrischen Stab auftritt. Denn diese Abweichung beeinflußt den Zusammenhang zwischen größter Schubspannung und Drillungsmoment.

Die genannten beiden Fragen entstammen der Praxis des Festigkeitslaboratoriums: Herr M. Enßlin hat sie anlässlich einer größeren Reihe von Versuchen an Federn<sup>2</sup> aufgeworfen und damit die Anregung zur folgenden Untersuchung gegeben.

**1. Vereinfachende Annahmen.** Bei dem vorliegenden Versuch, den Einfluß der Krümmung einer Schraubenfeder auf die Drillungsspannungen festzustellen<sup>3</sup>, wird eine Schraubenfeder von kreisförmigem Drahtquerschnitt<sup>4</sup> und kleiner Steigung<sup>5</sup> vorausgesetzt, die durch eine Kraft in Richtung der Achse beansprucht wird. Das Verhältnis  $a/R$  des Querschnittsradius  $a$  zum Wicklungshalbmesser  $R$  wird nicht mehr wie eine sehr kleine Größe

<sup>1</sup> Diesbezügliche Literaturangaben s. z. B. im Handbuch der Physik Bd. VI, Kap. 3, Ziff. 34, Berlin 1928.

<sup>2</sup> Ausgeführt im Festigkeitslaboratorium der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. Über den Zusammenhang der Ergebnisse mit vorliegender Theorie wird in einem besonderen Aufsatz berichtet werden.

<sup>3</sup> Vgl. auch den früheren Versuch nach dieser Richtung: Die Berechnung zylindrischer Schraubenfedern von M. Pilgram, Artill. Monatshefte Nr. 79, 80, 81 (1913). Vorliegende Arbeit geht ganz andere Wege und liefert (für den kreisförmigen Querschnitt) genauere und weitergehende Ergebnisse.

<sup>4</sup> Die hier gegebenen Entwicklungen können auch auf andere Querschnittsformen übertragen werden, worüber später berichtet werden soll.

<sup>5</sup> Dieser Begriff „klein“ wird an gegebener Stelle näher präzisiert.

behandelt. Dafür soll keine beliebig große Deformation der Federmittellinie zugelassen werden. Wir nehmen an, daß letztere wieder in eine Schraubenlinie übergeht, und daß dabei die Steigungsänderung nur klein ist. Das Produkt aus Steigungsänderung und  $a/R$  hat die Größenordnung einer Verzerrung. In der gewöhnlichen Theorie beruht seine Kleinheit auf der Kleinheit von  $a/R$ . Im folgenden dagegen muß die Kleinheit der Steigungsänderung wesentlich mitwirken<sup>1</sup>.

Das Problem der Schraubenfeder wird nicht unmittelbar in Angriff genommen; vielmehr wird zunächst strenge nur folgende Aufgabe angefaßt: Statt der vielen Windungen einer Schraubenfeder liege nur eine einzelne Windung vor, die anfänglich eine sehr kleine Steigung habe. Durch eine Kraft in Richtung der Achse<sup>2</sup> gehe die Windung in eine Schraubenwindung der Steigung Null über, also in einen Ringwulst (mit einem sehr schmalen Spalt an der Anfangs- und Endstelle der ursprünglichen vollen Schraubenwindung). Bei dieser Annahme hat man es in Strenge mit keinen Biegungsspannungen mehr zu tun; als einzige Spannungen treten Drillungsspannungen auf (die infolge der Krümmung der Wulstmittellinie aus Gleichgewichtsgründen in jedem Querschnitt außer dem resultierenden Drillungsmoment auch einen resultierenden Schub ergeben müssen). Dieser Fall ist die einfachste Übertragung der gewöhnlichen Drillung eines zylindrischen Stabes auf die Drillung eines gekrümmten Stabes, und an ihm werde zunächst der Einfluß der Krümmung auf die Drillungssteifigkeit und die Verteilung der Drillungsspannungen im Querschnitt untersucht. Die Aufgabe kann auf die Lösung einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt werden, die aber nicht in geschlossener Form gelöst wird. Es wird vielmehr nun von der Kleinheit des Bruches ( $a/R$ ) in dem Sinn Gebrauch gemacht, daß für die gesuchten Größen die Möglichkeit der Entwicklung in eine rasch konvergierende Reihe nach Größen von der Ordnung ( $a/R$ ) vorausgesetzt wird. Die einzelnen Glieder der Entwicklung können beliebig weit der Reihe nach auseinander gefunden werden; es genügt praktisch, mit dem Glied der Ordnung ( $a/R$ )<sup>2</sup> abzubrechen.

Die so gefundene spezielle Lösung für die Einzelwindung kann sodann, wie gezeigt wird, auch als Näherungslösung für eine Schraubenfeder kleiner Steigung benützt werden.

**2. Die Verzerrungsgrößen für eine deformierte Schraubenfeder.** Ehe der soeben genannte spezielle Fall einer einzelnen Windung sehr kleiner Steigung untersucht wird, sollen die Verzerrungsgrößen für den allgemeinen Fall einer Schraubenfeder angegeben werden. Dabei sei auf die allgemeine Theorie der Drillung und Biegung dünner Stäbe, wie sie im bekannten Lehrbuch der Elastizität von **A. E. H. Love** entwickelt ist, Bezug genommen<sup>3</sup>. Zum Verständnis einer dort entnommenen Formel, die unsern Ausgangspunkt bilden wird, und gleichzeitig zur allgemeinen Orientierung und Verständigung über die Bezeichnungen seien einige erklärende Bemerkungen vorausgeschickt.

Im undeformierten Zustand der Schraubenfeder denken wir uns mit jedem Querschnitt ein rechtshändiges Koordinatensystem derart verbunden, daß die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse der Reihe

<sup>1</sup> Später zeigen wir, daß für eine Feder „kleiner Steigung“ — bei der von uns angegebenen Näherung — die Forderung kleiner Steigungsänderung keine praktische wesentliche Einschränkung bedeutet. Es kommt dabei in Betracht, daß das in Rede stehende Produkt aus physikalischen Gründen einer natürlichen Beschränkung unterliegt. Die Verzerrungsgrößen dürfen ja ein gewisses Maß nicht überschreiten, wenn eine auf dem Hookeschen Gesetz begründete mathematische Theorie überhaupt berechtigt sein soll.

<sup>2</sup> Ob und wie eine solche Kraftübertragung praktisch möglich, ist hier belanglos, da es sich bei der Aufgabe um einen rein theoretischen Hilfsfall handelt.

<sup>3</sup> Deutsche Ausgabe, Leipzig und Berlin 1907. Kap. XVIII. Es kommen insbesondere die §§ 252, 253, 256, 259 in Betracht. Namentlich gibt § 259, und zwar der Schluß desselben (S. 457) die grundlegende Formel, aus der die Verzerrungsgrößen mit unseren Annahmen entnommen werden. Für mit der allgemeinen Theorie wenig vertraute Leser sei schon hier darauf hingewiesen, daß in Ziff. 3 die von uns weiterhin benötigten speziellen Ausdrücke für die Verzerrungsgrößen noch anschaulich-geometrisch gedeutet werden.

nach mit der Hauptnormalen, der Binormalen und der Tangente der Schraubenlinie, die die Drahtmittellinie darstellt, zusammenfallen, wobei die positiven Richtungen der Achsen mit den positiven Richtungen der genannten drei Geraden sich decken. Die positive Hauptnormale weist nach dem Krümmungsmittelpunkt der Schraubenlinie, und die positive Tangente zeigt die Richtung, in der die Schraubenlinie ansteigt. Wir denken uns dabei etwa eine nach oben rechts gewundene Schraubenfeder mit vertikaler Achse. Dann weist die positive Binormale nach oben (Abb. 1).

Um das Koordinatensystem in einem Punkt  $P$  der Schraubenlinie mit dem System in einem Nachbarpunkt  $P'$  zur Deckung zu bringen, wo  $PP' = ds$  sei und  $s$  die Bogenlänge der Schraubenlinie bedeute, ist außer der Parallelverschiebung von  $P$  nach  $P'$  eine Drehung erforderlich, die durch einen Vektor mit den Komponenten  $\kappa_0 ds, \kappa'_0 ds, \lambda_0 ds$  bezüglich des Systems in  $P$  dargestellt werde<sup>1</sup>. Da nach unserer Übereinkunft das  $(x, y, z)$ -System sich mit dem Tripel Hauptnormale, Binormale, Tangente deckt und die Bewegung dieses Tripels in  $P$  nach dem Tripel in  $P'$  eine Drehung um die Binormale um Winkel  $ds/\varrho_0$  und gleichzeitig um die Tangente um Winkel  $ds/\sigma_0$  verlangt, wo  $\varrho_0$  den Krümmungs- und  $\sigma_0$  den Windungshalbmesser der Schraubenlinie bedeuten, so folgt in unserem Fall:

$$\kappa_0 = 0, \quad \kappa'_0 = \frac{1}{\varrho_0}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0}. \quad (1)$$

Bezeichnet  $R_0$  den Wicklungshalbmesser<sup>2</sup> und  $\alpha_0$  den Steigungswinkel der undeformierten Feder, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{R_0}, \quad \frac{1}{\sigma_0} = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{R_0}. \quad (2)$$

Im deformierten Zustand der Schraubenfeder weisen wir im Punkt  $P_1$ , in den der obengenannte Punkt  $P$  verschoben wurde, dem Querschnitt wieder ein  $(x, y, z)$ -System zu, wobei die  $+z$ -Achse die positive Tangentenrichtung der deformierten Schraubenlinie in  $P_1$  angibt, während die  $(xz)$ -Ebene das Linienelement enthält, das vor der Deformation durch  $P$  in Richtung der  $x$ -Achse ging. Eine für den Fall der Schraubenfeder naheliegende und häufig gemachte vereinfachende Annahme gibt eine anschaulichere Vorstellung: Denkt man sich, daß der Richtung der Hauptnormalen in  $P$  nach der Deformation wieder die Richtung der Hauptnormalen in  $P_1$  entspricht, so hat man auch in  $P_1$  dieselbe Festsetzung bezüglich des Koordinatensystems wie in  $P$ , und für den Drehungswinkel, der im deformierten Zustand nötig wäre, um das System in  $P_1$  nach dem System in einem Nachbarpunkt im Abstand  $ds$  zu bewegen, und der wieder einen Vektor mit den Komponenten  $\kappa_1 ds, \kappa'_1 ds, \lambda_1 ds$  bezüglich des Systems in  $P_1$  darstelle, hätte man zu (1) und (2) analoge Formeln, wobei man nur durchweg den Index 0 durch Index 1 ersetzt, wenn nun  $\varrho_1, \sigma_1, R_1, \alpha_1$  den Krümmungsradius, Windungsradius, Wicklungshalbmesser, Steigungswinkel der deformierten Schraubenmittellinie darstellen. Indessen machen wir zunächst von dieser einfachen Zuordnung der Systeme in  $P$  und  $P_1$  keinen Gebrauch, sondern lassen diese Frage vorläufig dahingestellt, so daß  $\kappa_1$  nicht Null zu sein braucht und  $\kappa'_1$  und  $\lambda_1$  sich etwas verwickelter darstellen. Ebenso behalten wir zunächst den Buchstaben  $\kappa_0$  bei und ersetzen ihn noch nicht durch Null.

Den Verzerrungszustand in der deformierten Schraubenfeder können wir nun dadurch

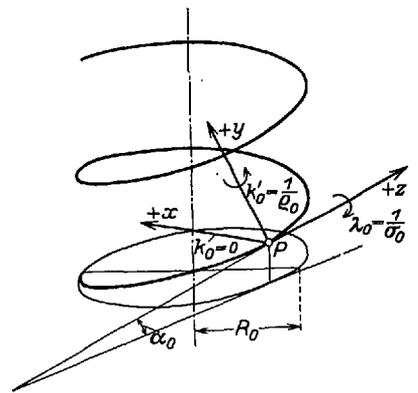


Abb. 1. Drahtmittellinie. Koordinatensystem für einen Querschnitt.

<sup>1</sup> Love schreibt  $\tau$  statt  $\lambda$ ; wir benützen später den Buchstaben  $\tau$  für die Schubspannungen. (Für den seltener geschriebenen Windungshalbmesser haben wir  $\sigma$  — trotz dessen Verwendung bei den Spannungen — belassen.)

<sup>2</sup> Damit ist stets der zur Federmittellinie gehörige Zylinderradius gemeint.

beschreiben, daß wir die Deformation zerlegt denken in eine Verlagerung je des Querschnitts in  $P$  nach dem Querschnitt in  $P_1$ , so daß die entsprechenden Achsensysteme  $(x, y, z)$  zur Deckung gelangen, und in zusätzliche Deformationen, die wiederum einerseits aus einer Querschnittsverwölbung, andererseits aus einer ebenen Querschnittsverformung bestehen. Irgend ein Punkt  $Q(x, y)$  des Querschnitts in  $P$  erleide dabei eine zusätzliche Verschiebung, deren Komponenten bezüglich des Systems in  $P_1$  mit  $\xi, \eta, \zeta$  bezeichnet seien ( $\zeta$  entspricht der genannten Verwölbung,  $\xi$  und  $\eta$  entsprechen der ebenen Verformung).

Man wählt jetzt, um die Verzerrungsgrößen zu berechnen, im undeformierten Zustand außer dem genannten Punkt  $Q$  einen Punkt  $Q'$  in der Nähe von  $Q$  (der nicht mehr im Querschnitt von  $P$  zu liegen braucht). Es sei die Strecke  $QQ' = r$  gesetzt. Ferner seien  $l, m, n$  die Richtungskosinus der Strecke  $QQ'$  bezüglich des (als raumfest gedachten) Koordinatensystems in  $P_1$ , das als solches mit  $(x, y, z)$  bezeichnet wird. Für die Länge  $r_1$  der deformierten Strecke  $QQ'$  erhält man nun die Formel<sup>1</sup>

$$r_1^2 = r^2 \left\{ \left( \mathbf{I} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) l + \frac{\partial \xi}{\partial y} m + \frac{n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial s} + \lambda_0 \left( y \frac{\partial \xi}{\partial x} - x \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \left[ -(\lambda_1 - \lambda_0) y - \lambda_1 \eta + \kappa'_1 \zeta \right] - \frac{\varepsilon \lambda_0 y n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right\}^2 \\ + r^2 \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} l + \left( \mathbf{I} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) m + \frac{n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} + \lambda_0 \left( y \frac{\partial \eta}{\partial x} - x \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \left[ (\lambda_1 - \lambda_0) x + \lambda_1 \xi - \kappa_1 \zeta \right] + \frac{\varepsilon \lambda_0 x n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right\}^2 \\ + r^2 \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} l + \frac{\partial \zeta}{\partial y} m + (\mathbf{I} + \varepsilon) n + \frac{n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \lambda_0 \left( y \frac{\partial \zeta}{\partial x} - x \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \left[ (\kappa_1 - \kappa_0) y - (\kappa'_1 - \kappa'_0) x - \kappa'_1 \xi + \kappa_1 \eta \right] \right\}^2. \quad (3)$$

Dabei ist  $\gamma_0$  eine Abkürzung:

$$\gamma_0 = \kappa_0 y - \kappa'_0 x, \quad (4)$$

während  $\varepsilon$  die Dehnung der Schraubenmittellinie bezeichnet.

Aus dem Ausdruck (3) für  $r_1^2$  entnimmt man nun mittels

$$r_1^2 = r^2 (\mathbf{I} + 2e), \\ e = e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{zz} n^2 + e_{yz} m n + e_{zx} n l + e_{xy} l m$$

die gesuchten Verzerrungsgrößen  $e_{xx}$  usw. Dabei sehen wir, worauf schon Ziff. 1 hinwies, auch die Größen  $(\lambda_1 - \lambda_0) x$ ,  $(\lambda_1 - \lambda_0) y$ ,  $(\kappa_1 - \kappa_0) y$ ,  $(\kappa'_1 - \kappa'_0) x$  als klein an (d. h. nehmen

<sup>1</sup> Diese Formel findet sich bei Love § 259, S. 457 unten. Es fehlen daselbst allerdings zwei hier aufgenommene (aus der Durchrechnung sich ergebende) Glieder, die aber sowohl in der alten Theorie wie in der hier gegebenen Entwicklung belanglos sind. Da die Formel bei Love nicht ausdrücklich abgeleitet ist, sei zur Nachprüfung eine Zwischenformel angegeben. Mit den Bemerkungen auf S. 457 führt man die Rechnung von § 256 durch und erhält an Stelle des S. 450 oben stehenden Ausdrucks für die x-Komponente des deformierten Vektors  $QQ'$ :

$$r l_1 \left[ \left( \mathbf{I} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( l + \frac{n \lambda_0 y}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left( m - \frac{n \lambda_0 x}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{n}{\mathbf{I} + \gamma_0} + \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \{ \kappa'_1 \zeta - \lambda_1 (y + \eta) \} \right] \\ + r l_2 \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( l + \frac{n \lambda_0 y}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right) + \left( \mathbf{I} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( m - \frac{n \lambda_0 x}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{n}{\mathbf{I} + \gamma_0} + \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \{ -\kappa_1 \zeta + \lambda_1 (x + \xi) \} \right] \\ + r l_3 \left[ \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left( l + \frac{n \lambda_0 y}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \left( m - \frac{n \lambda_0 x}{\mathbf{I} + \gamma_0} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{n}{\mathbf{I} + \gamma_0} + \frac{(\mathbf{I} + \varepsilon) n}{\mathbf{I} + \gamma_0} \{ \kappa_1 (y + \eta) - \kappa'_1 (x + \xi) \} \right]$$

Für die y- bzw. z-Komponente desselben Vektors erhält man analoge Ausdrücke, wo nur  $l_i$  durch  $m_i$  bzw.  $n_i$  ersetzt ist. Durch Quadrieren und Addieren erhält man sodann nach einiger Umformung den Ausdruck (3).

auch sie nur linear in die Rechnung auf), ohne dies mit der besonderen Kleinheit der Verhältnisse  $\frac{x}{\varrho_0}$ ,  $\frac{y}{\varrho_0}$ ,  $\frac{x}{\sigma_0}$ ,  $\frac{y}{\sigma_0}$  zu begründen. Wir müssen deshalb die Differenzen  $(\kappa_1 - \kappa_0)$ ,  $(\kappa'_1 - \kappa'_0)$ ,  $(\lambda_1 - \lambda_0)$  genügend klein gewählt denken. Vernachlässigt man sodann im Ausdruck (3) die nichtlinearen Glieder, so folgen die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & e_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ e_{xx} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} [ - (\lambda_1 - \lambda_0) y - \lambda_1 \eta + \kappa'_1 \zeta ] + \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\varepsilon \lambda_0 y}{1 + \gamma_0} + \frac{1}{1 + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial s} + \lambda_0 \left( y \frac{\partial \xi}{\partial x} - x \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right], \\ e_{yy} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} [ (\lambda_1 - \lambda_0) x + \lambda_1 \xi - \kappa_1 \zeta ] + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\varepsilon \lambda_0 y}{1 + \gamma_0} + \frac{1}{1 + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} + \lambda_0 \left( y \frac{\partial \eta}{\partial x} - x \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right], \\ e_{zz} &= \varepsilon + \frac{1}{1 + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial s} + (\kappa_1 - \kappa_0) y - (\kappa'_1 - \kappa'_0) x - \kappa'_1 \xi + \kappa_1 \eta + \lambda_0 \left( y \frac{\partial \xi}{\partial x} - x \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Auf diese Ausdrücke für die Verzerrungsgrößen wird in Ziff. 3 zurückgegriffen.

**3. Die Spannungen für den Fall der zum Ringwulst deformierten Einzelwindung.** Im allgemeinen Fall der eigentlichen Schraubenfeder denken wir uns das untere Ende festgehalten und auf das obere Ende eine Kraft im Betrag  $P$  mit Wirkungslinie in der Achse übertragen. Ist diese Kraft vertikal nach oben gerichtet, so wirkt sie als Zugkraft, und die Steigungsänderung  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  ist positiv; im entgegengesetzten Fall wirkt sie als Druckkraft, und  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  ist negativ. Wir nennen die Kraft in der Folge stets den Zug und bezeichnen demnach im ersten Fall den Zug als  $(+ P)$  oder kurz  $P$ , im zweiten Fall als  $(- P)$ .

Im nun vorliegenden Fall der Einzelwindung haben wir einen Zug  $(- P)$  anzunehmen, so bemessen, daß  $\alpha_1$  zu Null wird. Für die nun negative Steigungsänderung behalten wir (wegen späterer Anwendung auf die Schraubenfeder) die Schreibweise  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  bei. Da  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  als sehr kleine Größe<sup>1</sup> zu betrachten ist, so ist  $\alpha_0$  sehr klein und damit auch die Anfangswindung  $\frac{1}{\sigma_0} = \lambda_0$ , während die Endwindung  $\frac{1}{\sigma_1} = \lambda_1 = 0$  ist. Es ist wegen  $\alpha_1 = 0$  weiter  $\varrho_1 = R_1$ .

In irgend einem Wulstquerschnitt, dessen positive Normale die Richtung der  $+ z$ -Achse habe, müssen wir uns des Gleichgewichts halber den Schub  $S = (- P)$  denken (vertikal nach oben rechnen wir  $S$  positiv) und das Moment  $M_a = (- P \cdot \varrho_1)$  um die  $+ z$ -Achse. Das Moment ist ein reines Drillungsmoment; das Biegemoment fehlt, und darum sind dessen Komponenten um die  $x$ - und  $y$ -Achse beide Null. Da nun nach der Theorie der Biegung gekrümmter Stäbe diese beiden genannten Biegemomente bzw.  $B (\kappa_1 - \kappa_0)$  und  $B (\kappa'_1 - \kappa'_0)$  sind<sup>2</sup>, wo  $B = \frac{\pi a^4 E}{4}$  die Biegesteifigkeit für den Querschnitt bedeutet, so folgt

$$\kappa_1 - \kappa_0 = 0, \quad \kappa'_1 - \kappa'_0 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt bei Beachtung von (1):

$$\kappa_1 = 0.$$

Dies besagt, daß das  $(x, y, z)$ -System für irgend einen Querschnitt des Wulstes mit Hauptnormale, Binormale, Tangente der Wulstmittellinie zusammenfällt.

Weiter ist nach den Gleichungen (1) und (2), die nun auch mit Index 1 statt 0 gelten,

$$\kappa'_1 = \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{R_1}, \quad \kappa'_0 = \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{R_0}.$$

<sup>1</sup> Vgl. übrigens hierzu Ziff. 7.

<sup>2</sup> Vgl. etwa Love § 259, Formel (28).

Also gilt

$$\varrho_1 = R_1 = \frac{R_0}{\cos^2 \alpha_0}. \quad (6)$$

Wir stellen jetzt die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen im Wulst auf, wobei das Federgewicht vernachlässigt werde.

Die Spannungsgrößen im System  $(x, y, z)$  irgend eines Punktes der Wulstmittellinie seien mit  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  bezeichnet. Wir wählen zur Darstellung in Abb. 2 als Punkt den Punkt  $M$  links im Meridianquerschnitt des Wulstes. Dann geht die  $+x$ -Achse nach rechts, die  $+y$ -Achse vertikal nach oben, während die  $+z$ -Achse auf den Beschauer zu gerichtet ist.  $O$  bedeutet den Schnitt der Wulstmittelebene mit der Federachse.

Wir gehen von den bekannten Gleichgewichtsbedingungen in Zylinderkoordinaten aus. Für diese wählen wir eine  $v$ -Achse in der Wulstachse, positiv vertikal nach oben; der Radiusvektor sei mit  $\mu$  bezeichnet und das Azimut mit  $\psi$ . Der positive Sinn von  $\psi$  sei so  $+v$  bestimmt, daß mit  $+v$  zusammen eine Rechtsschraube entsteht.

In diesen Zylinderkoordinaten lauten nun die drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\mu\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial \tau_{\mu v}}{\partial v} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{\mu\psi}}{\partial \psi} + \frac{\sigma_{\mu\mu} - \sigma_{\psi\psi}}{\mu} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial \sigma_{vv}}{\partial v} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{r\psi}}{\partial \psi} + \frac{\tau_{r\mu}}{\mu} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\psi\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial \tau_{\psi v}}{\partial v} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} + 2 \frac{\tau_{\psi\mu}}{\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Mit

$$\sigma_{\mu\mu} = \sigma_{xx}, \quad \sigma_{vv} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{\psi\psi} = \sigma_{zz}, \quad \tau_{v\psi} = +\tau_{yz}, \quad \tau_{\psi\mu} = -\tau_{zx}, \quad \tau_{\mu v} = -\tau_{xy},$$

und mit

$$\mu = \varrho_1 - x, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = +\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = \varrho_1 \frac{\partial}{\partial s}$$

erhalten wir als die gewünschten Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\varrho_1 - x} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial s} + \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{\varrho_1 - x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\varrho_1 - x} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial s} - \frac{\tau_{xy}}{\varrho_1 - x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{1}{\varrho_1 - x} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial s} - 2 \frac{\tau_{zx}}{\varrho_1 - x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Eine mögliche Lösung von (7) ist

$$\text{mit} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - 2 \frac{\tau_{zx}}{\varrho_1 - x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Diese Lösung ist nun gerade eine für unseren Wulst passende; wegen des Verschwindens der  $\sigma$  fehlen in irgend einem Querschnitt Biegemoment und Zugkraft; es sind lediglich Schubspannungen im Querschnitt übrig. Der Wulstmantel ist spannungsfrei, wenn die  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  geeignet bestimmt werden. Die Lösung ist also dann die richtige, wenn sie mit dem Ansatz für die Verzerrungsgrößen in Einklang zu bringen ist.

Gehen wir zu den Verzerrungsgrößen (5) zurück, so haben wir daselbst zu beachten, daß — wie schon berührt —  $\lambda_0$  als sehr kleine Größe zu behandeln ist, und daß die Deh-

nung  $\varepsilon$  wegen (8) verschwindet. So erhalten wir mit  $\kappa'_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ ,  $\kappa_1 = \lambda_1 = 0$  für die drei letzten Verzerrungsgrößen in (5):

$$\begin{aligned} e_{zx} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} \left[ -(\lambda_1 - \lambda_0) y + \frac{\zeta}{\varrho_1} \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{1 + \gamma_0} \frac{\partial \xi}{\partial s}, \\ e_{zy} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} (\lambda_1 - \lambda_0) x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{1 + \gamma_0} \frac{\partial \eta}{\partial s}, \\ e_{zz} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{\xi}{\varrho_1} \right]. \end{aligned}$$

Die erste Gleichungsreihe in (8) verlangt Verschwinden der Verzerrungsgrößen  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$ ,  $e_{xy}$ , und damit folgt aus (5) und der letzten eben angeschriebenen Gleichung:

$$\xi = \eta = \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0.$$

(Man beachte, daß  $\xi$  und  $\eta$  keine Bewegung des als starr gedachten Querschnitts enthalten.)

Wir haben so nur noch die eine unbekannt Funktion  $\zeta$ , abhängig von  $x$  und  $y$ , und es bleiben, wenn man noch nach (4) und (1)

$$\gamma_0 = -\kappa'_0 x = -\frac{x}{\varrho_0}$$

berücksichtigt, die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} e_{zx} &= \frac{-(\lambda_1 - \lambda_0) y}{1 - \frac{x}{\varrho_0}} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{\varrho_1 \left(1 - \frac{x}{\varrho_0}\right)}, \\ e_{zy} &= \frac{+(\lambda_1 - \lambda_0) x}{1 - \frac{x}{\varrho_0}} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Schließlich setzen wir noch  $\lambda_1 - \lambda_0 = c$ . Die bei Zugfeder positive, bei Druckfeder (wie im gegenwärtigen Fall) negative Konstante  $c$  wird nach Gleichung (2), die jetzt auch mit Index 1 statt 0 gilt,

$$c = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{R_1} - \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{R_0}. \tag{9}$$

(Für den Wulst ist  $\alpha_1 = 0$  zu denken.)

Wir gewinnen damit die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} e_{zx} &= \frac{-cy}{1 - \frac{x}{\varrho_0}} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{\varrho_1 \left(1 - \frac{x}{\varrho_0}\right)}, \\ e_{zy} &= \frac{+cx}{1 - \frac{x}{\varrho_0}} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

So kommen für die Schubspannungen  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$ , die wir nun kürzer und unmißverständlich mit  $\tau_x$  und  $\tau_y$  bezeichnen, die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{-cGy}{1 - \frac{x}{\varrho_0}} + G \frac{\partial \zeta}{\partial x} + G \frac{\zeta}{\varrho_1 \left(1 - \frac{x}{\varrho_0}\right)}, \\ \tau_y &= \frac{+cGx}{1 - \frac{x}{\varrho_0}} + G \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Die noch unbekannte Funktion  $\zeta$  von  $x$  und  $y$  ist dabei aus der Gleichung (8) zu ermitteln:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - 2 \frac{\tau_x}{\varrho_1 - x} = 0^* \quad (12)$$

Bei Erfüllung von (11) und (12) sind nun alle Forderungen erfüllt, die an eine richtige Lösung zu stellen sind.

Hierzu sei noch bemerkt: Unser Verzerrungsansatz (10) ist kein willkürlich angenommener, der irgendwelcher nachträglichen Bestätigung bedürftig wäre, sondern der aus dem allgemeinsten Ansatz (5) — für kleine Formänderung der Mittellinie — in unserem Spezialfall — Übergang von der Schraubenwindung zum Wulst — notwendig hervorgehende. Daß dieser Übergang durch eine einem axialen Zug ( $-P$ ) von richtig bemessenem Betrag äquivalente Beanspruchung zu erzwingen ist, sieht man so: Das durch unsere Entwicklungen im Unendlichkleinen gesicherte Gleichgewicht bedingt auch das Gleichgewicht an einem durch zwei benachbarte Querschnitte herausgeschnittenen Wulstelement. Da nun unsere Spannungen nur ein Drillungsmoment  $M_a$  (+ um die  $+z$ -Achse gerechnet) ergeben und kein Biegemoment, so folgt, daß in  $x$ -Richtung kein Schub auftreten kann und in  $y$ -Richtung gerade ein Schub  $S = \frac{M_a}{\varrho_1}$  auftreten muß (vgl. Ziff. 5). Eben diesen Zusammenhang zwischen  $S$  und  $M_a$  liefert aber der Zug ( $-P$ ), wegen  $S = -P$ ,  $M_a = -P\varrho_1$ . Die Endquerschnitte bringen keine besondere Randbedingung; sie verhalten sich wie ein beliebiger Querschnitt. So bleibt als einzige Randbedingung die Spannungsfreiheit des Wulstmantels oder das Verschwinden der Schubspannung  $\tau$  am Querschnittsrand in radialer Richtung. Eben diese Randbedingung wird im folgenden zur Integration von (11) und (12) benützt werden.

Ehe wir zur Integration dieser Gleichungen schreiten, sei noch nachträglich eine anschauliche Deutung der für das Weitere grundlegenden Ausdrücke (10) gegeben. Wir betrachten vor allem in beiden Ausdrücken das wichtigste erste Glied. Dieses unterscheidet sich vom entsprechenden Glied ( $-cy$ ) bzw. ( $+cx$ ) bei der Drillung des zylindrischen Stabes lediglich durch den Nenner  $(1 - \frac{x}{\varrho_0})$ , der somit zu erklären ist. Beim zylindrischen Stab bedeutet  $c$  den Drillungswinkel pro Längeneinheit der Stabachse; für die Schraubenwindung kann entsprechend  $c$  als Drillungswinkel pro Längeneinheit der Schraubenmittellinie aufgefaßt werden. Der Faktor  $\frac{1}{1 - \frac{x}{\varrho_0}}$  erklärt sich nun aus der Verschiedenheit

der Länge der Fasern bei unserem gekrümmten Stab. Betrachten wir zwei benachbarte Querschnitte im Abstand  $ds$  (auf der Mittellinie gemessen). Während eine Faser durch den Punkt  $(x, y)$  zwischen diesen beim zylindrischen Stab die Länge  $ds$  hat, hat bei der Schraubenwindung die entsprechende Faser offenbar die Länge  $(1 - \frac{x}{\varrho_0})ds$ . Für diese Faser kommt darum der Drillungswinkel  $c$  nicht mehr auf die Längeneinheit, sondern auf die Länge  $(1 - \frac{x}{\varrho_0}) \cdot 1$ , so daß auf die Längeneinheit der Faser der Drillungswinkel  $\frac{c}{1 - \frac{x}{\varrho_0}}$

entfällt. Es ist darum, wenn man von der Drillung des zylindrischen Stabes zur Drillung der Schraubenwindung übergehen will,  $c$  durch  $\frac{c}{1 - \frac{x}{\varrho_0}}$  zu ersetzen. Die von der Querschnittsverwölbung  $\zeta$  herrührenden zwei Glieder  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  bzw.  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  sind unmittelbar zu verstehen.

\* Der Vergleich mit der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit in dem bekannten „hydrodynamischen Gleichnis“ für  $\varrho_0 = \infty$  und  $\varrho_1 = \infty$  versagt nun.

Solche Glieder<sup>1</sup> hat man übrigens auch bei der Drillung gerader prismatischer Stäbe; nur verschwindet dann  $\zeta$  bei kreisförmigem Querschnitt.

Schließlich ist noch der Beitrag  $\frac{\zeta}{\varrho_1 \left(1 - \frac{x}{\varrho_0}\right)}$  zur Verzerrungsgröße  $e_{xx}$  zu deuten. Betrachten wir wieder zwischen zwei Querschnitten im Abstand  $ds$  die Faser an der Stelle  $(x, y)$  mit der Länge  $ds' = ds \left(1 - \frac{x}{\varrho_0}\right)$ . Zwischen den zwei Querschnittsebenen liegt nach der Deformation der Winkel  $d\chi = \frac{ds}{\varrho_1}$ . Die Verschiebungen  $\zeta$  an den Enden der Faser schließen daher auch diesen Winkel  $d\chi$  ein, so daß auf die Faser noch eine Verschiebung in Richtung der  $x$ -Achse vom Betrag  $\zeta d\chi$  kommt. Ihr entspricht für die Faser  $ds'$  eine zu  $e_{xx}$  hinzuzufügende Winkeländerung  $\frac{\zeta d\chi}{ds'} = \frac{\zeta}{\varrho_1 \left(1 - \frac{x}{\varrho_0}\right)}$ .

So ist der grundlegende Ansatz (10) einfach erklärt. Wenn trotzdem in Ziff. 2 die allgemeine Theorie beigezogen wurde, so rührt dies einmal daher, daß wir die speziellen Ansätze (10) übersichtlich und zwangsläufig aus (5) erhielten (mit  $\xi = \eta = 0$ ); sodann werden wir (3) und (5) auch wieder beim Übergang zur Schraubenfeder benötigen (Ziff. 7 und 8).

**4. Gang der Integration der Differentialgleichung (12); Näherungslösung nullter Ordnung.** Da bei sehr kleinem  $\alpha_0$  die Größe  $\cos^2 \alpha_0 = 1$  gesetzt werden kann und damit nach (6)

$$\varrho_1 = R_1 = R_0, \tag{6}$$

haben wir statt (11) und (12), indem wir noch statt  $R_0$  kürzer  $R$  schreiben,

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{-cGy}{1 - \frac{x}{R}} + G \frac{\partial \zeta}{\partial x} + G \frac{\zeta}{R - x}, \\ \tau_y &= \frac{+cGx}{1 - \frac{x}{R}} + G \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \tag{11'}$$

und

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - 2 \frac{\tau_x}{R - x} = 0. \tag{12'}$$

Trägt man die Ausdrücke (11') in Gleichung (12') ein, so entsteht für  $\zeta$  eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie enthält außer dem Ausdruck  $\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$ , den wir wie üblich kurz als  $\Delta \zeta$  bezeichnen, ein Glied mit  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ , ein weiteres Glied mit  $\zeta$  und endlich ein Absolutglied. Die so recht verwickelte Gleichung lösen wir durch sukzessive Näherung. Wir denken uns (vgl. Ziff. 1) für  $\zeta$  eine unendliche Reihe angesetzt:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots,$$

wo  $\zeta_n$  den Faktor  $1/R$  zur  $n$ -ten Potenz enthalten soll. Es wird dann  $\zeta_n$  von der Größenordnung  $a/R$  gegenüber dem nicht verschwindend gedachten  $\zeta_{n-1}$ , und da  $a/R$  ein kleiner Bruch, kann die Entwicklung rasch abgebrochen werden.

Wir nennen  $\zeta_n$  ein Glied  $n$ -ter Ordnung. Es sei weiter bezeichnet

$$\zeta_I = \zeta_0 + \zeta_1, \quad \zeta_{II} = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2, \text{ usw.}$$

$\zeta_0, \zeta_I, \zeta_{II}, \dots$  heiße Näherungslösung nullter, erster, zweiter usw. Ordnung für  $\zeta$ . Eben solche Bezeichnungen und Indizzeschreibweisen wenden wir sodann für die durch  $\zeta$  be-

<sup>1</sup> Theorie von de Saint-Venant.

stimmten Schubspannungen  $\tau_x$  und  $\tau_y$  an und schließlich auch für das Drillungsmoment  $M_d$  und den Schub  $S$ , die resultierenden Ausdrücke für den ganzen Querschnitt. ( $S$  sei in Richtung  $+y$  positiv,  $M_d$  bei Rechtsdrehung um  $+z$  positiv gerechnet.)

Es ist nun wesentlich, daß gilt

$$\zeta_0 = c. \quad (13)$$

$\zeta_0$  ist das  $\zeta$  für  $R = \infty$ , also im Fall der Drillung eines zylindrischen Stabes. Hier ist, wie schon einmal erwähnt, die Lösung:

$$\tau_{x0} = -cGy, \quad \tau_{y0} = +cGx. \quad (14)$$

Weiter haben wir durch Integration über den Kreisquerschnitt

$$M_{d0} = \iint (x\tau_{y0} - y\tau_{x0}) dx dy,$$

also — wie bekannt —

$$M_{d0} = \frac{\pi c G a^4}{2}. \quad (15)$$

Für den Schub  $S_0$  folgt:

$$S_0 = \iint \tau_{y0} dx dy,$$

also

$$S_0 = 0. \quad (16)$$

Um nun aus der Näherungslösung nullter Ordnung die erster Ordnung zu gewinnen, beachten wir, daß  $\zeta_I = \zeta_1$  eine Größe erster Ordnung<sup>1</sup> ist und ebenso<sup>2</sup>  $\frac{\partial \zeta_I}{\partial x}$ . Werden diese Größen noch durch  $R$  dividiert, so entstehen bereits Größen zweiter Ordnung, die für unsern Zweck zu streichen sind. D. h.: Wollen wir die Näherungslösung  $\zeta_I'$  ermitteln, so können wir in den den Faktor  $\frac{1}{R}$  enthaltenden Gliedern mit  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  und  $\zeta$  der Differentialgleichung  $\zeta$  durch  $\zeta_0 = 0$  ersetzen und erhalten so lediglich eine Potentialgleichung:

$$\Delta \zeta_I = \text{bekannter Funktion von } x \text{ und } y.$$

Nachdem mittels der Randbedingung  $\zeta_I$  ermittelt ist, geht man zur Berechnung von  $\zeta_{II}$  analog vor, indem man in den vorhin genannten Gliedern mit  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  und  $\zeta$  die unbekannte Funktion durch  $\zeta_I$  ersetzt usw. Natürlich wird auch der Bruch  $\frac{1}{1 - \frac{x}{R}}$  in eine geometrische Reihe entwickelt, und es werden jeweils nur die benötigten Glieder beibehalten.

In dieser Weise berechnen wir in Ziff. 5 und 6 die Lösungen erster und zweiter Ordnung.

**5. Näherungslösung erster Ordnung.** Von (11') haben wir hier beizubehalten

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xI} &= -cGy \left( 1 + \frac{x}{R} \right) + G \frac{\partial \zeta_I}{\partial x}, \\ \tau_{yI} &= +cGx \left( 1 + \frac{x}{R} \right) + G \frac{\partial \zeta_I}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und von (12')

$$\frac{\partial \tau_{xI}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yI}}{\partial y} - 2 \frac{\tau_{xI}}{R} = 0. \quad (18)$$

Vor Ausführung der Integration sei bemerkt, daß die wichtige Größe  $M_{dI}$  auch ohne Kenntnis von  $\zeta_I$  ermittelt werden kann. Denn von seiten der zweiten Summanden in den Ausdrücken (17) kommt als Beitrag zu  $M_{dI}$

$$G \iint \left( x \frac{\partial \zeta_I}{\partial y} - y \frac{\partial \zeta_I}{\partial x} \right) dx dy.$$

<sup>1</sup> Gegenüber  $ca \cdot a$ , dem Hauptverschiebungsglied.

<sup>2</sup> Gegenüber  $ca$ , dem Glied nullter Ordnung in der Verzerrung  $e_{z\varphi}$  (Abb. 2).

Nach dem Greenschen Satz können wir dieses Flächenintegral umformen in das Randintegral

$$-G \oint \zeta_I (x dx + y dy),$$

und für die Kreisberandung wird  $x dx + y dy = 0$ , womit das Integral verschwindet.

Es folgt also

$$M_{aI} = cG \iint (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{x}{R}\right) dx dy = cG \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

Wir haben daher

$$M_{aI} = M_{a0}. \quad (19)$$

Damit ist das bemerkenswerte Ergebnis gewonnen, daß in erster Näherung kein Einfluß der Stabkrümmung auf das Drillungsmoment statthat. Der Ansatz  $M_{a0}$  für das Drillungsmoment nach der gewöhnlichen Theorie ist damit, solange man es nicht mit sehr dicker Schraubenwindung zu tun hat, erhärtet, und unsere Untersuchung zeitigte so bisher ein negatives Ergebnis. Für  $M_{aII}$  werden wir dagegen in Ziff. 6 einen von  $M_{a0}$  verschiedenen Ausdruck erhalten, und was die Spannungsverteilung (und damit  $\tau_{\max}$ ) anlangt, so werden wir schon in erster Näherung eine erhebliche Abweichung von der Lösung nullter Ordnung finden. Diese zu bestimmen, integrieren wir nun (18).

Durch Einsetzen von (17) in (18) erhält man, wenn man durchweg nur Glieder erster Ordnung beibehält,

$$\Delta \zeta_I - \frac{cy}{R} + \frac{2cy}{R} = 0$$

oder

$$\Delta \zeta_I = -\frac{cy}{R}. \quad (20)$$

Als Randbedingung für den Kreisquerschnitt haben wir, wenn wir neben  $x$  und  $y$  noch Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  einführen (Abb. 2):

$$\tau_r = 0 \quad \text{für} \quad r = a$$

oder, da die ersten Glieder in  $\tau_x$  bzw.  $\tau_y$  am Rande bereits tangential gerichtete Spannungen liefern:

$$\left(\frac{\partial \zeta_I}{\partial r}\right)_{r=a} = 0. \quad (21)$$

Ein partikuläres Integral der Gleichung (20) ist nun

$$-\frac{cy(x^2 + y^2)}{8R} \quad \text{oder} \quad -\frac{cr^3 \sin \varphi}{8R}.$$

Nehmen wir hierzu noch das Integral  $\frac{A a^2 cr \sin \varphi}{R}$  der homogenen Differentialgleichung  $\Delta \zeta_I = 0$ , so folgt der Ansatz

$$\zeta_I = -\frac{cr^3 \sin \varphi}{8R} + \frac{A ca^2 r \sin \varphi}{R}.$$

Es ist

$$\left(\frac{\partial \zeta_I}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{-3ca^3 \sin \varphi}{8R} + \frac{A ca^2 \sin \varphi}{R}.$$

Daher folgt aus (21)  $A = \frac{3}{8}$  und so als Lösung von (20)

$$\left. \begin{aligned} \zeta_I &= \frac{cr \sin \varphi (3a^2 - r^2)}{8R}, \\ \zeta_I &= \frac{cy}{R} (3a^2 - x^2 - y^2). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

oder auch

So kommt

$$\frac{\partial \zeta_I}{\partial x} = \frac{-cxy}{4R} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta_I}{\partial y} = \frac{c}{8R} (3a^2 - x^2 - 3y^2)$$

und damit nach (17)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xI} &= -cGy - \frac{5cG}{4R}xy, \\ \tau_{yI} &= +cGx + \frac{cG}{8R}(7x^2 - 3y^2 + 3a^2). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Als Schub  $S_I$  folgt  $\iint \tau_{yI} dx dy$ , also

$$\begin{aligned} S_I &= \frac{cG}{8R} \iint (7x^2 - 3y^2 + 3a^2) dx dy = \frac{cG}{8R} \iint (4x^2 + 3a^2) dx dy \\ &= \frac{cG}{8R} (\pi a^4 + 3\pi a^4) \end{aligned}$$

oder

$$S_I = \frac{\pi c G a^4}{2R}. \quad (24)$$

Es gilt also nach (19) und (15)

$$S_I = \frac{M_{dI}}{R} = \frac{M_{d0}}{R}. \quad (25)$$

An einem Element des Wulsts zwischen zwei Querschnitten im Abstand  $ds$  bilden die an den Endquerschnitten auftretenden Drillungsmomente den Winkel  $ds/R$  miteinander und ergeben somit ein resultierendes Moment  $M_d ds/R$  um die  $x$ -Achse. Diesem hält das Kräftepaar  $Sds$  der Schubspannungen  $S$  an den Endquerschnitten eben das Gleichgewicht, wie wir erwarten mußten.

Die nun auch unmittelbar gegebene Gleichstellung von  $S_I$  bzw.  $M_I$  und dem Zug ( $-P$ ) bzw. dem Moment ( $-PR$ ) verfolgen wir hier zunächst nicht weiter, sondern stellen später diese Betrachtung allgemein für eine eigentliche Schraubenfeder an. Ebenso verschieben wir eine Diskussion von (23) und der entsprechenden Ausdrücke zweiter Ordnung in Ziff. 6 auf den Schluß des Aufsatzes, wo die Anwendung auf die Schraubenfeder gegeben wird.

Es sei noch wegen einer Anwendung in Ziff. 8 die genauere Lösung, bei der  $\varrho_0$  und  $\varrho_1$  unterschieden sind, kurz angegeben. Mit

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xI} &= -cGy \left(1 + \frac{x}{\varrho_0}\right) + G \frac{\partial \zeta_I}{\partial x}, \\ \tau_{yI} &= +cGx \left(1 + \frac{x}{\varrho_0}\right) + G \frac{\partial \zeta_I}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (17')$$

statt (17) und

$$\frac{\partial \tau_{xI}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yI}}{\partial y} - 2 \frac{\tau_{xI}}{\varrho_1} = 0, \quad (18')$$

statt (18) käme für  $\zeta_I$

$$\Delta \zeta_I = - \left( \frac{2}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0} \right) cy, \quad (20')$$

und als Lösung

$$\zeta_I = \left( \frac{2}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \frac{cy}{8} (3a^2 - x^2 - y^2). \quad (22')$$

Damit wäre

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xI} &= -cGy - \left( \frac{3}{4\varrho_0} + \frac{1}{2\varrho_1} \right) cGxy, \\ \tau_{yI} &= +cGx + cG \left[ \left( \frac{9}{8\varrho_0} - \frac{1}{4\varrho_1} \right) x^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{2}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0} \right) (y^2 - a^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23')$$

Für den Schub folgte damit

$$S_{dI} = \frac{M_{d0}}{\varrho_1} = \frac{M_{d0}}{R_1}, \quad (25')$$

wie zu erwarten.

6. Näherungslösung zweiter Ordnung. Wir haben nun von (11') beizubehalten:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xII} &= -cG\gamma \left( 1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} \right) + G \frac{\partial \zeta_{II}}{\partial x} + G \frac{\zeta_I}{R}, \\ \tau_{yII} &= +cGx \left( 1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} \right) + G \frac{\partial \zeta_{II}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

und von (12')

$$\frac{\partial \tau_{xII}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yII}}{\partial y} - \frac{2\tau_{xII}}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \right) = 0. \quad (27)$$

Wieder erledigen wir zunächst die Frage nach dem Drillungsmoment  $M_{dII}$ .

Im Integral  $\iint (x\tau_{yII} - y\tau_{xII}) dx dy$  haben wir, wie mittels derselben Betrachtung wie in Ziff. 5 einzusehen, keinen Beitrag von seiten der Glieder  $G \frac{\partial \zeta_{II}}{\partial x}$  und  $G \frac{\partial \zeta_{II}}{\partial y}$ . Es bleibt so, wenn man (22) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} M_{dII} &= M_{d0} + \frac{cG}{R^2} \iint (x^4 + x^2 y^2) dx dy - \frac{cG}{8R^2} \iint (3a^2 - x^2 - y^2) y^2 dx dy, \\ &= M_{d0} + \frac{cG}{8R^2} \iint (9x^4 + 9x^2 y^2 - 3a^2 y^2) dx dy \\ &= M_{d0} + \frac{cG}{8R^2} \left( 9 \frac{\pi a^6}{8} + 9 \frac{\pi a^6}{24} - 3a^2 \frac{\pi a^4}{4} \right) \\ &= M_{d0} + \frac{3cG\pi a^6}{32}. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher nach (15)

$$M_{dII} = M_{d0} \left( 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right). \quad (28)$$

Damit ist der Einfluß der Stabkrümmung auf das Drillungsmoment bis zur zweiten Ordnung in  $(a/R)$  festgestellt. Da der Bruch  $\frac{3}{16}$  klein ist, ist die anzubringende Korrektur nur bei sehr dicken Federn von Belang, so daß wieder hinsichtlich des Drillungsmoments eine Bestätigung für die gute Näherung der gewöhnlichen Theorie geliefert ist.

Einsetzen von (26) in (27) liefert nun die Differentialgleichung

$$\Delta \zeta_{II} - 2 \frac{\partial \zeta_I}{R \partial x} + \frac{\partial \zeta_I}{R \partial x} - \frac{cy}{R} - \frac{2cxy}{R^2} + \frac{2cy}{R} \left( 1 + \frac{2x}{R} \right) = 0$$

oder

$$\Delta \zeta_{II} = \frac{x}{R} \frac{\partial \zeta_I}{\partial x} - \frac{cy}{R} - \frac{2cxy}{R^2}.$$

Mit  $\zeta_{II} = \zeta_I + \zeta_2$  folgt unter Berücksichtigung von (22)

$$\Delta \zeta_2 = -\frac{9cxy}{4R^2}. \quad (29)$$

Als Randbedingung folgt diesmal, da auch das Glied  $\zeta_I/R$  in  $\tau_x$  zu berücksichtigen ist, das die Komponente  $\zeta_I \cos \varphi / R$  in die Richtung des Radius wirft,

$$\frac{\partial \zeta_{II}}{\partial r} + \frac{\zeta_I}{R} \cos \varphi = 0 \quad \text{für } r = a,$$

also wegen (21)

$$\left( \frac{\partial \zeta_2}{\partial r} + \frac{\zeta_I}{R} \cos \varphi \right)_{r=a} = 0. \quad (30)$$

Ein partikuläres Integral von (29) ist der Ausdruck

$$-\frac{3c}{16R^2} xy(x^2 + y^2) \quad \text{oder} \quad -\frac{3c}{32R^2} r^4 \sin 2\varphi.$$

Als Integral der reduzierten Gleichung  $\Delta \zeta_2 = 0$  nehmen wir hinzu

$$\frac{Ac a^2 r^2 \sin 2\varphi}{R^2}$$

und haben so für  $\zeta_2$  den Ansatz

$$\zeta_2 = -\frac{3c}{32R^2}r^4 \sin 2\varphi + \frac{Aca^2}{R^2}r^2 \sin 2\varphi.$$

Es ist

$$\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{3ca^3}{8R^2} \sin 2\varphi + \frac{2Aca^3}{R^2} \sin 2\varphi,$$

während nach (22) gilt

$$\left(\frac{\zeta_I \cos \varphi}{R}\right)_{r=a} = \frac{ca^3}{8} \sin 2\varphi.$$

Daher liefert die Randbedingung (30) die Gleichung

$$-\frac{ca^3}{4R^2} \sin 2\varphi + \frac{2Aca^3}{R^2} \sin 2\varphi = 0,$$

und damit folgt

$$A = \frac{1}{8}.$$

Also ist das gesuchte Integral von (29)

$$\left. \begin{aligned} \zeta_2 &= \frac{cr^2 \sin 2\varphi}{32R^2} (4a^2 - 3r^2), \\ \zeta_2 &= \frac{cx y}{16R^2} (4a^2 - 3x^2 - 3y^2). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Hieraus errechnet man

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \frac{cy}{16R^2} (4a^2 - 9x^2 - 3y^2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = \frac{cx}{16R^2} (4a^2 - 3x^2 - 9y^2).$$

Die Glieder zweiter Ordnung  $\tau_{x2}$  und  $\tau_{y2}$  in  $\tau_{xII}$  bzw.  $\tau_{yII}$  sind nach (26)

$$\begin{aligned} \tau_{x2} &= -\frac{cGx^2y}{R^2} + G\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + G\frac{\zeta_I}{R}, \\ \tau_{y2} &= +\frac{cGx^3}{R^2} + G\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{aligned}$$

oder nach der vorigen Gleichung und (22)

$$\begin{aligned} \tau_{x2} &= -\frac{cGx^2y}{R^2} + \frac{cGy}{16R^2} (4a^2 - 9x^2 - 3y^2) + \frac{cGy}{8R} (3a^2 - x^2 - y^2), \\ \tau_{y2} &= \frac{cGx^3}{R^2} + \frac{cGx}{16R^2} (4a^2 - 3x^2 - 9y^2). \end{aligned}$$

Damit kommt nach Zusammenfassung

$$\begin{aligned} \tau_{x2} &= -\frac{cGy}{16R^2} (27x^2 + 5y^2 - 10a^2), \\ \tau_{y2} &= \frac{cGx}{16R^2} (13x^2 - 9y^2 + 4a^2). \end{aligned}$$

Fügen wir schließlich diese Glieder zu den Näherungslösungen erster Ordnung (23) hinzu, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xII} &= -cGy - \frac{5cG}{4R}xy && -\frac{cGy}{16R^2} (27x^2 + 5y^2 - 10a^2), \\ \tau_{yII} &= +cGx + \frac{cG}{8R} (7x^2 - 3y^2 + 3a^2) && + \frac{cGx}{16R^2} (13x^2 - 9y^2 + 4a^2). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Der Schub  $S_{II}$  ergibt sich, da  $\tau_{y2}$  keinen Beitrag liefert, als nicht von  $S_I$  verschieden:

$$S_{II} = \dot{S}_I = \frac{Ma_I}{R}. \quad (33)$$

(Es ist der Größenordnung halber klar, daß  $S_{II}$  nicht  $\frac{M_{dII}}{R}$  entsprechen kann; erst  $S_{III}$  würde genau  $\frac{M_{dII}}{R}$  gleich werden.)

**7. Gültigkeitsbereich der gefundenen Näherungslösungen.** In Ziff. 3 haben wir zur Gewinnung des grundlegenden Ansatzes (II) und (I2) die Voraussetzung beigefügt, daß die Anfangssteigung unserer Schraubenwindung, die zum Ringwulst deformiert werden soll, „sehr klein“ sei. Mit dieser Einschränkung erreichten wir, daß die bereits beim Übergang von (3) zu (5) (Weglassen der Glieder zweiten Grades) und weiter beim Übergang von (5) zu (II) gemachten Vernachlässigungen „beliebig klein“ gedacht werden konnten, so daß uns der Weg zu einer „beliebig genaueren“ Lösung freistand. Verlangen wir nun aber nur die Genauigkeit einer vorgeschriebenen Ordnung, so brauchen wir nur mehr dafür zu sorgen, daß die begangenen Fehler von höherer als dieser Ordnung sind.

Wir prüfen nun die in Ziff. 3 gefundene Lösung  $\xi = \eta = \varepsilon = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ , ohne die früher gemachten Vernachlässigungen zu wiederholen. Dabei gehen wir, um auch die Wirkung der Glieder zweiten Grades mitzubeurteilen, unmittelbar von (3) aus. Es kommt

$$\begin{aligned} r_1^2 = r^2 & \left[ l + \frac{n}{1 + \gamma_0} \{ -(\lambda_1 - \lambda_0) y + x'_1 \xi \} \right]^2 + r^2 \left[ m + \frac{n(\lambda_1 - \lambda_0) x}{1 + \gamma_0} \right]^2 \\ & + r^2 \left[ l \frac{\partial \xi}{\partial x} + m \frac{\partial \xi}{\partial y} + n + \frac{n \lambda_0}{1 + \gamma_0} \left( y \frac{\partial \xi}{\partial x} - x \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß die Ausdrücke (10) auch so stimmen, ohne daß wir irgendwelche Annahme über  $\alpha_0$  machen. Dagegen werden nun, wie es doch sein müßte, die Ausdrücke für  $e_{xx}$ ,  $e_{xy}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$  nicht mehr exakt zu Null. Wir haben die Größenordnung der so entstehenden Fehler zu prüfen. Das Glied niederster Ordnung ist das (zu  $e_{xx}$ , d. h. dem Faktor von  $n^2$  gehörige) Glied  $(\lambda_1 - \lambda_0)^2 (x^2 + y^2) = (ca)^2$ , wenn wir wieder  $(\lambda_1 - \lambda_0)$  durch  $c$  ersetzen. Nun ist  $ca$  selbst von nullter Ordnung [vgl. (14)]; wir erhalten also die Ordnung von  $(ca)^2 = (ca) \cdot (ca)$ , wenn wir den zweiten Faktor  $ca$ , mit dem der erste Faktor  $ca$  nullter Ordnung multipliziert ist, zu  $a/R$  in Beziehung bringen. Ist  $ca \approx \left(\frac{a}{R}\right)^n$ , so ist  $(ca)^2$  von  $n$ -ter Ordnung (gegenüber  $ca$ ), und damit haben unsere genannten Fehler dieselbe Ordnung.

Schließlich verdient noch ein Punkt Erwähnung. Wir sind von (II) und (I2) auf (II') und (I2') übergegangen mit  $\cos^2 \alpha_0 \approx 1$ . Diese Vernachlässigung spielt, wenn wir jetzt den früher „sehr kleinen“ Gültigkeitsbereich erheblich ausdehnen, trotzdem gar keine Rolle. Denn einmal kommt der dadurch entstehende relative Fehler  $\frac{\alpha_0^2}{2}$  ohnehin nur auf Glieder von höherer als nullter Ordnung, und dann ist weiter  $|\lambda_1 - \lambda_0| \approx \frac{\alpha_0}{R}$ , also  $ca \approx \alpha_0 \left(\frac{a}{R}\right)$ . Ist also  $ca$  auch nur von zweiter Ordnung, so ist  $\alpha_0$  bereits von erster Ordnung klein und  $\alpha_0^2$  schon ein Glied zweiter Ordnung, womit dann die absoluten Fehler von mindestens dritter Ordnung werden.

Wir fanden damit: Die genaue Gültigkeit der Näherungslösung erster bzw. zweiter Ordnung verlangt, daß  $ca$  von zweiter bzw. dritter Ordnung klein wird (gegenüber  $\frac{a}{R}$ ).

Bei den Verformungen, die „physikalisch zulässig“ heißen sollen, d. h. bei denen wir noch innerhalb der Proportionalitätsgrenze bleiben, geht man wohl schon recht weit mit dem Ansatz  $ca \approx \frac{1}{100}$  als oberer Grenze (für Stahl). Nach der Näherung nullter Ordnung hat man es dann mit  $\tau_{\max} \approx 8000 \text{ kg/cm}^2$  zu tun, nach der Näherung erster oder zweiter Ordnung (vgl. Ziff. 10) mit noch — bei dicker Feder erheblich — größerem  $\tau_{\max}$ .

Die Zahl  $\frac{1}{100}$  bedeutet etwa zweiter Ordnung für  $\frac{a}{R} \approx \frac{1}{10}$  und dritter Ordnung für  $\frac{a}{R} \approx \frac{1}{5}$ . So finden wir denn eine praktisch ziemlich weitgehende Anwendbarkeit unserer Lösungen; wir haben mit der gemachten Annahme für  $ca$  nach Obigem: Für alle „physikalisch zulässigen“ Deformationen ist für eine Schraubenwindung mit  $\frac{a}{R} \geq \frac{1}{10}$  die Lösung erster Ordnung richtig, für eine Windung mit  $\frac{a}{R} \geq \frac{1}{5}$  auch die Lösung zweiter Ordnung. Was die Windungen mit  $\frac{a}{R}$  zwischen  $\frac{1}{10}$  und  $\frac{1}{5}$  anlangt, so ist für sie der Einfluß der Glieder zweiter Ordnung schon gering; für  $\frac{a}{R} = \frac{1}{7}$  z. B. wird das Drillungsmoment um weniger als  $\frac{1}{2}\%$  geändert, und im Bild der Schubspannungsverteilung und bei  $\tau_{\max}$  interessieren die Glieder zweiter Ordnung deshalb weniger, weil die Glieder erster Ordnung weit überwiegen. Beachtet man noch, daß wir mit  $ca$  bis zur oberen Grenze gingen und im allgemeinen kleinere Deformationen üblich sind, so erhalten wir das praktische Ergebnis, daß bei dickeren Windungen die Näherungslösung auch zweiter Ordnung brauchbare Formeln liefert. Bei ganz dünnen Windungen gilt natürlich auch die Lösung erster Ordnung nicht im vollen (physikalisch) möglichen Umfang; der Einfluß auf das Drillungsmoment ist hier praktisch Null.

**8. Anwendung auf die Schraubenfeder.** a) Allgemeiner Ansatz für die Verzerrungsgrößen und Gleichgewichtsbedingungen. Wir suchen zu beurteilen, inwieweit die Anwendung der gewonnenen speziellen Lösung für die zum Ringwulst deformierte Schraubenwindung auf eine Schraubenfeder berechtigt ist. Zunächst stellen wir wie früher neben die Ausdrücke für die Verzerrungsgrößen, für die wir nun im allgemeinen Fall — ohne besondere vereinfachende Annahmen — (5) zu übernehmen haben, die Gleichgewichtsbedingungen. Es genügen nun aber nicht die in der gewöhnlichen Theorie benützten Gleichgewichtsbedingungen für die Resultierende und das resultierende Moment im Querschnitt<sup>1</sup>; vielmehr benötigen wir wiederum die Gleichgewichtsbedingungen im Unendlichkleinen. Dabei ist zu beachten, daß die Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  sich auf ein jedem Querschnitt eigentümliches Koordinatensystem  $(x, y, z)$  beziehen, also nicht auf ein raumfestes System. Um die gesuchten Bedingungen abzuleiten, gehen wir analytisch vor: Wir denken uns mit dem System  $(x, y, z)$  in dem Querschnitt des Punktes  $M$  der deformierten Schraubenmittellinie, den wir betrachten wollen, ein raumfestes System  $(x, y, z)$  zur Deckung gebracht. Für dieses seien die Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xy}$ . Die Gleichgewichtsbedingungen lauten nun bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Diese Gleichung gilt es auf das System  $(x, y, z)$  zu transformieren. Für das System  $(x, y, z)$  in einem beliebigen Punkt  $N$  der deformierten Schraubenmittellinie seien die Richtungskosinus bezüglich des festen Systems in  $M$  gegeben durch das Schema:

	$x$	$y$	$z$
$x$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

<sup>1</sup> Vgl. etwa Love § 259, (26) und (27).

Dann gilt<sup>1</sup>

$$\frac{\partial l_1}{\partial s} = l_2 \lambda_1 - l_3 \kappa'_1, \quad \frac{\partial l_2}{\partial s} = l_3 \kappa_1 - l_1 \lambda_1, \quad \frac{\partial l_3}{\partial s} = l_1 \kappa'_1 - l_2 \kappa_1,$$

und zwei analoge Gleichungstriplet für  $\frac{\partial m_i}{\partial s}$  und  $\frac{\partial n_i}{\partial s}$ .

Lassen wir  $N$  mit  $M$  zusammenfallen, so daß sich  $(x, y, z)$  mit  $(x, y, Z)$  deckt, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} l_1 = m_2 = n_3 = 1, \text{ sonst verschwindende Richtungskos.} \\ \frac{\partial l_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial l_2}{\partial s} = -\lambda_1, \quad \frac{\partial l_3}{\partial s} = \kappa'_1, \\ \frac{\partial m_1}{\partial s} = \lambda_1, \quad \frac{\partial m_2}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial m_3}{\partial s} = -\kappa_1, \\ \frac{\partial n_1}{\partial s} = -\kappa'_1, \quad \frac{\partial n_2}{\partial s} = \kappa_1, \quad \frac{\partial n_3}{\partial s} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Wir beachten bei der Transformation von (34), daß  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$ , und daß damit in allen drei Gleichungen die beiden ersten Summanden unverändert bleiben, wofern man nur die Buchstaben  $x, y, z$  durch  $x, y, z$  ersetzt. Dagegen erfordert jeweils das dritte Glied eine sorgfältige Behandlung.

Zunächst stellen wir fest, daß für den Vektor von einem Punkte  $(x, y)$  im Querschnitt von  $M$  nach dem Nachbarpunkt  $(x, y)$  im Querschnitt von  $M'$ , wo  $MM' = ds$  ist, die  $z$ -Komponente wird:

$$dz = ds(1 + \kappa_1 y - \kappa'_1 x)$$

oder kurz

$$\left. \begin{aligned} dz = ds(1 + \gamma_1), \\ \gamma_1 = \kappa_1 y - \kappa'_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Damit wird

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{(1 + \gamma_1) ds}.$$

Für die drei Spannungskomponenten im jeweils letzten (linken) Summanden von (34) haben wir

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= l_1 n_1 \sigma_{xx} + (l_1 n_2 + l_2 n_1) \tau_{xy} + l_2 n_2 \sigma_{yy} + (l_1 n_3 + l_3 n_1) \tau_{xz} \\ &\quad + (l_2 n_3 + l_3 n_2) \tau_{yz} + l_3 n_3 \sigma_{zz}, \\ \tau_{yz} &= m_1 n_1 \sigma_{xx} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \tau_{xy} + m_2 n_2 \sigma_{yy} + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \tau_{xz} \\ &\quad + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \tau_{yz} + m_3 n_3 \sigma_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= n_1^2 \sigma_{xx} + 2 n_1 n_2 \tau_{xy} + n_2^2 \sigma_{yy} + 2 n_1 n_3 \tau_{xz} + 2 n_2 n_3 \tau_{yz} + n_3^2 \sigma_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Nunmehr ist die Umformung auch des jeweils dritten Gliedes eine bloße Differenzierungsangelegenheit mit Berücksichtigung von (35) und (36); es kommt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{1}{1 + \gamma_1} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial s} - \kappa'_1 \sigma_{xx} + \kappa'_1 \sigma_{zz} + \kappa_1 \tau_{xy} - \lambda_1 \tau_{yz} \right), \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{1}{1 + \gamma_1} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial s} + \kappa_1 \sigma_{yy} - \kappa_1 \sigma_{zz} - \kappa'_1 \tau_{xy} + \lambda_1 \tau_{xz} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \frac{1}{1 + \gamma_1} \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial s} - 2 \kappa'_1 \tau_{xz} + 2 \kappa_1 \tau_{yz} \right). \end{aligned}$$

Damit folgen die gewünschten Gleichgewichtsbedingungen, die in dieser allgemeinen Form für jeden durch Biegung und Drillung verzerrten Stab Gültigkeit haben:

<sup>1</sup> Vgl. z. B. Love § 253, Gleichung (5).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{1 + \gamma_1} \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial s} + \kappa_1' (\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) + \kappa_1 \tau_{xy} - \lambda_1 \tau_{yz} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{1 + \gamma_1} \left[ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial s} - \kappa_1 (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) - \kappa_1' \tau_{xy} + \lambda_1 \tau_{xz} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{1}{1 + \gamma_1} \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial s} - 2 \kappa_1' \tau_{zx} + 2 \kappa_1 \tau_{zy} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wir erwähnen noch, daß mit  $\kappa_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  und (36) gerade wieder die Differentialgleichungen (7) für den Ringwulst aus (38) hervorgehen.

Ist  $\lambda_1 \neq 0$ , so treten  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  in den beiden ersten Gleichungen auf, selbst wenn man die Abhängigkeit von  $s$  ignorieren wollte. Der einfache Ansatz wie beim Ringwulst ist nicht mehr möglich;  $\xi$  und  $\eta$  verschwinden nicht mehr. Die drei Gleichungen (38) sind miteinander gekoppelt und geben drei Gleichungen für die drei unbekannt Funktionen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

b) Die Schraubenfeder kleiner Steigung. Wir setzen von jetzt ab fest, daß wir unter „kleiner Steigung“ eine Steigung erster Ordnung klein verstehen wollen, wobei wiederum  $a/R$  die ordnungsbestimmende Größe ist. Darunter verstehen wir etwa, daß  $\operatorname{tg} \alpha_0 \approx \alpha_0$  die Größe  $a/R$  nicht übersteigt. Eine Gang auf Gang gepackte Feder hätte  $\alpha_0 \approx \frac{a}{\pi R}$ ; diese Feder kann also um die doppelte Achsenlänge verlängert gedacht werden, ohne daß wir aus dem Bereich „kleiner Steigung“ heraustreten. Die Feder kleiner Steigung hat darum für Deformationen einen noch weiten Spielraum. Aus ihm soll aber unsere Feder nicht heraustreten; auch für  $\alpha_1$  soll gelten, was für  $\alpha_0$  festgesetzt wurde. Wir beachten noch, daß die Feder kleiner Steigung bei möglichst großer Deformation (durch den ganzen genannten Spielraum hindurch) eine Änderung  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  von erster Ordnung erfährt; dann ist also  $ca \approx (\alpha_1 - \alpha_0) \frac{a}{R}$  eine Größe zweiter Ordnung.

Nunmehr betrachten wir zunächst eine sehr kleine Deformation einer Schraubenfeder kleiner Steigung. Wir fragen, ob wir nicht für eine Näherungslösung bis zur zweiten Ordnung die frühere Lösung übernehmen können. Das ist der Fall, wenn wir dabei nur Größen von mindestens dritter Ordnung zu vernachlässigen brauchen. Wir haben wieder  $\zeta$  als Größe erster Ordnung anzusehen.  $\xi$  und  $\eta$  werden auch mindestens von erster Ordnung klein; aus den zwei ersten Gleichungen (38) können wir sogar schließen, daß  $\xi$  und  $\eta$  Größen zweiter Ordnung werden; denn dort sind die [nach (5)]  $\xi$  und  $\eta$  entsprechenden Spannungen mit  $\lambda_1 \tau_{yz}$  und  $\lambda_1 \tau_{xz}$  gekoppelt ( $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial s}$  und  $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial s}$  dürfen wir uns mindestens ebenso klein denken).  $\lambda_1$  aber ist  $\approx \frac{\alpha_1}{R}$  und damit  $a \lambda_1 \tau_{yz}$  bzw.  $a \lambda_1 \tau_{xz}$  ebenfalls von zweiter Ordnung klein (gegenüber  $ca G$ ).

Betrachten wir (5), so erkennen wir damit unter Berücksichtigung des Umstandes, daß  $(a \lambda_0)$  und  $(a \lambda_1)$  und ebenso  $(a \kappa_1)$  und  $\varepsilon^1$  von mindestens zweiter Ordnung klein werden, daß für  $e_{zx}$  und  $e_{zy}$  die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} e_{zx} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} (- (\lambda_1 - \lambda_0) y + \kappa_1' \zeta) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{1 + \gamma_0} \frac{\partial \xi}{\partial s}, \\ e_{zy} &= \frac{1}{1 + \gamma_0} (\lambda_1 - \lambda_0) x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{1 + \gamma_0} \frac{\partial \eta}{\partial s}. \end{aligned}$$

Was die bereits genannte Größe  $\kappa_1$  anlangt, so werden wir bei der kleinen Abweichung vom Fall des Ringwulstes mit der (z. B. in der Lord Kelvinschen Theorie der Schraubenfeder<sup>2</sup> benützten) Annäherung  $\kappa_1 = 0$  rechnen dürfen (die auch bei beliebiger Steigung gut wäre, wenn die Steigungsänderung sehr klein angenommen wird). Genauer

<sup>1</sup>  $\varepsilon$  ist sogar von der Ordnung  $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_0) a^2/R$ .

<sup>2</sup> S. etwa Love § 271.

wäre<sup>1</sup>  $|\kappa_1| = \kappa'_1 \operatorname{tg} \beta$ , wenn  $\beta$  den Winkel zwischen  $x$ -Achse und Hauptnormale im deformierten Zustand bedeutet. Dieser Winkel  $\beta$  brauchte nur klein von erster Ordnung zu sein, damit  $a\kappa_1$  klein von zweiter Ordnung wird. In Wirklichkeit wird  $\beta$  viel kleiner sein (insbesondere bei der angenommenen sehr kleinen Steigungsänderung). Ist  $\kappa_1 = 0$ , hat also die  $x$ -Achse die Richtung der Hauptnormalen, so bleibt in jedem Querschnitt die Orientierung des  $(x, y, z)$ -Systems gegenüber der Richtung des Zuges  $P$  und gegenüber der Achse des Moments  $P\varrho_1$  dieselbe (schon  $\kappa_1 = \text{konst}$  genügt hierzu). Das Drillungsmoment  $P\varrho_1 \cos \alpha_1$  ist ohnehin stets dasselbe, und nun bleiben auch die Biegemomente immer gleich: um die  $x$ -Achse  $= 0$  und um die  $y$ -Achse  $= P\varrho_1 \sin \alpha_1$ . Damit entfällt ersichtlich die Abhängigkeit von  $s$ . So gelangen wir von den oben angeschriebenen Ausdrücken für  $e_{xx}$  und  $e_{yy}$  wieder zu (10) und von der dritten Gleichgewichtsbedingung (38) wieder zu (12).

Schließlich können wir wie in Ziff. 7 von der „sehr kleinen“ Deformation noch zur „physikalisch zulässigen“ Deformation übergehen. Das dort Gesagte gilt wiederum, wobei wir nur — wie zuletzt bemerkt — außerdem  $\kappa_1$  vernachlässigbar klein und ebenso damit  $\partial/\partial s$  als klein höherer Ordnung ansehen müssen. Nach dem schon Ausgeführten werden wir kein Bedenken haben, diese Annahme zu treffen. Damit können wir das am Schluß von Ziff. 7 Ausgeführte auf die Schraubenfeder kleiner Steigung unmittelbar übertragen. Es sei nur noch hinzugefügt, daß der Gültigkeitsbereich für die Lösung erster Ordnung für unsere Feder sozusagen ein unbeschränkter ist: Da  $ca$  hier nur von zweiter Ordnung klein ist, so kann die Feder kleiner Steigung überhaupt jede ihr als solcher zustehende Deformation ausführen, wenn diese physikalisch zulässig ist.

Wir fügen noch eine Bemerkung zur Anwendung auf die Schraubenfeder bei. Daß wir uns auf kleine Steigungen wirklich beschränken müssen, erkennen wir z. B. so: Die Gleichgewichtsbedingung (12), die wir nun auch auf die Schraubenfeder anwenden, führt mit dem Ansatz (11) auf eine Näherungslösung erster Ordnung, die — wie am Schluß von Ziff. 5 gezeigt — den Schub von der Größe  $M_{a0}/\varrho_1$  liefert. Dieser Schub müßte aber den Wert  $M_{a0}/R_1$  haben. (Früher war  $\varrho_1 = R_1$ ). Dies geht unmittelbar aus der Federbelastung hervor. Tiefer in den Gleichgewichtszusammenhang dringen wir ein, wenn wir ein Federelement zwischen zwei benachbarten Querschnitten herausgreifen: Die Krümmung  $1/\varrho_1$  verlangt, um die Richtungsänderung von  $M_{a0}$  an den Endquerschnitten zu kompensieren, einen Schub  $M_{a0}/\varrho_1$ , wie wir ihn auch aus unserer Rechnung erhalten würden, und wie er bei fehlender Torsion der einzige wäre. Nun verlangt dazu noch die Windung  $1/\sigma_1$ , um die Richtungsänderung des Biegemoments  $M_{b0} = M_{a0} \operatorname{tg} \alpha_1$  zu kompensieren, den Schub  $\frac{M_{b0}}{\sigma_1}$ . Mit  $\frac{1}{\sigma_1} = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{R_1}$  und  $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{R_1}$  erhalten wir so den Gesamtschub

$$\frac{M_{a0} \cos^2 \alpha_1}{R_1} + \frac{M_{a0} \sin^2 \alpha_1}{R_1} = \frac{M_{a0}}{R_1}.$$

(Man erkennt wieder, wie die Drillungsspannungen nun mit den übrigen Spannungen gekoppelt sind; wir haben kein reines Drillungsproblem mehr.)

Im Gesamtschub haben wir also bei unserer Näherungsrechnung den Fehler

$$\frac{M_{a0} \sin^2 \alpha_1}{R_1}.$$

Ist  $\alpha_1$  von erster Ordnung klein (Feder kleiner Steigung), so ist dieser Fehler von dritter Ordnung klein.

Man könnte auch einen (formal) richtigen Schub  $M_{a0}/R_1$  erzwingen, wenn man in oben genannter Gleichgewichtsbedingung  $\varrho_1$  durch  $R_1$  ersetzt, also  $\cos \alpha_1$  durch 1. Der so gemachte Fehler in  $\frac{\tau}{\varrho_1 - x}$  ist von dritter Ordnung und darf darum begangen werden.

<sup>1</sup> S. Love, S. 442, Gleichung (3):  $\beta = \frac{\pi}{2} - f$ .

Schließlich ersetzen wir (vgl. eine Bemerkung in Ziff. 7)  $\varrho_0$  durch  $R_0$  und  $R_1$  durch  $R_0$ . Dann kommt mit der Schreibweise  $R_0 = R$  gerade die Ausgangsgleichung (12').

Unser Begriff der „kleinen Steigung“ ist hinsichtlich der praktischen Verwendungsfähigkeit zwar für die dicksten Federn gewiß ausreichend, kann aber bei weniger dicken Federn etwas zu eng erscheinen. (Von ganz dünnen Federn sehen wir bei vorliegender Theorie natürlich ganz ab). Da nun nach Ziff. 7 die Anwendbarkeit der Näherung zweiter Ordnung für solche Federn (etwa  $\frac{a}{R} < \frac{1}{5}$ ) nur noch in beschränktem Maße genau gilt und hier ohnehin die Korrekturen zweiter Ordnung weniger interessieren, kann man auch den Übergang vom Wulstproblem zur Feder im Hinblick auf eine bloße Anwendung der Lösung erster Ordnung untersuchen. Man findet leicht, daß der Begriff „kleine Steigung“ dann wesentlich erweitert werden kann: Es genügt, daß das Quadrat der Steigung der Feder etwa die Größe  $a/R$  hat, womit dann sicherlich der praktischen Verwendungsfähigkeit keine Schranken mehr gesetzt sind. Die am Schluß von Ziff. 7 gefundene Regel für „physikalisch zulässige“ Deformationen lautet nun: Für alle physikalisch zulässigen Deformationen gilt die Näherung zweiter Ordnung genau für Federn kleiner Steigung (Steigung  $\approx \frac{a}{R}$ ) und  $\frac{a}{R} \geq \frac{1}{5}$ , die Näherung erster Ordnung bereits für Federn mit kleiner Steigung im erweiterten Sinn (Quadrat der Steigung  $\approx \frac{a}{R}$ ) und  $\frac{a}{R} \geq \frac{1}{10}$ . Die Angaben über die Steigung bedeuten praktisch keinerlei Einschränkung, wohl aber die Angaben über das Verhältnis ( $a/R$ ). Es ist indessen hierzu zu sagen, daß wir nicht nur mit den Deformationen bis zur Grenze physikalischer Zulässigkeit gingen, sondern auch in Ziff. 7 zum Ausgangspunkt unserer Abschätzungen die Forderung strenger Gültigkeit der betreffenden Näherungslösung machten. Im Sinne einer bloßen „brauchbaren Näherung“ ist zweifellos der Gültigkeitsbereich ein erheblich weiterer, und der Praktiker mag in diesem Sinne die entwickelten Ergebnisse (Ziff. 9 und 10) unbedenklich übernehmen, dabei die Frage, ob in einem vorliegenden Fall die Lösung nullter, erster oder zweiter Ordnung zu nehmen sei, lediglich nach der praktischen Überlegung beurteilend, bis zu welcher Ordnung sich für ein bestimmtes vorliegendes ( $a/R$ ) das Mitführen von Korrektionsgliedern lohnt.

**9. Zusammenhang zwischen Verlängerung und Zugkraft für eine Schraubenfeder.** Die Feder, die in unseren Benennungen etwa als Zugfeder gedacht ist, habe  $n$  Windungen, den Wicklungshalbmesser  $R$ , den Querschnittsradius  $a$ . Die Zugkraft sei  $P$ . Wir bezeichnen noch die Länge der Federmittellinie mit  $l$ , die Höhe der Feder oder die Achsenlänge mit  $h$  und die Verlängerung von  $h$  mit  $\delta h$ . Die Steigung der Feder sei von der Ordnung ( $a/R$ ) klein.

Zunächst gehen wir bei unserer Betrachtung in der einfachen Weise vor, wie man in der Festigkeitslehre gewöhnlich zu verfahren pflegt, d. h. wir setzen

$$\cos \alpha_0 \approx \cos \alpha_1 \approx 1, \quad \sin \alpha_0 \approx \alpha_0, \quad \sin \alpha_1 \approx \alpha_1, \quad R_1 \approx R_0 = R.$$

Für die Verlängerung  $\delta h$  haben wir dann wegen  $h = l \sin \alpha_0$

$$\delta h \approx l(\alpha_1 - \alpha_0).$$

Weiter ist

$$l \approx 2 \pi n R.$$

Also folgt der Wert

$$\delta h = 2 \pi n R (\alpha_1 - \alpha_0). \quad (39)$$

Wir haben weiter das Drillungsmoment  $\approx PR$  und andererseits nach (28) und (15), wenn wir nun die genauere Formel für  $M_a$  benützen,

$$M_a = \frac{\pi c G a^4}{2} \left( 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right). \quad (40)$$

Hier ist noch  $c$  aus (9) einzutragen; in unserer Näherungsrechnung wird einfach

$$c = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{R}. \quad (41)$$

So kommt die Beziehung

$$PR = \frac{\pi(\alpha_1 - \alpha_0)G a^4}{2R} \left( 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right) \quad (42)$$

und wegen (39)

$$\delta h = \frac{4nR^3P}{a^4G} \left( 1 - \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right). \quad (43)$$

Diese kurze genäherte Ableitung für  $\delta h$  ist insofern unvorsichtig, als die bei den begangenen Vernachlässigungen entstehenden Fehler selbst von der zweiten Ordnung in  $(a/R)$  sein könnten, so daß dann die Benützung des Korrektionsgliedes zweiter Ordnung in  $M_a$  wirkungslos würde. Wir prüfen daher noch die Berechtigung unserer Entwicklung.

Statt (42) hätten wir genauer zu schreiben, wenn  $c$  aus (9) entnommen wird,

$$PR_1 \cos \alpha_1 = \frac{\pi G a^4}{2} \left( \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{R_1} - \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{R_0} \right) \left( 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right). \quad (42')$$

So kommt

$$P = \frac{\pi G a^4}{2} \left( \frac{\sin \alpha_1}{R_1^2} - \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{R_1 R_0 \cos \alpha_1} \right) \left( 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right).$$

Nun ist  $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}$  von der Ordnung  $(\alpha_1 - \alpha_0) \alpha_0$  klein. Man kann diese Differenz berechnen, wenn man vom Biegemoment (um die  $y$ -Achse)  $M_b = M_a \operatorname{tg} \alpha_1$  ausgeht, wobei für  $M_a$  hier der Wert  $M_{a0}$  genügt:

$$\frac{\pi a^4 E}{4} \left( \frac{\cos^2 \alpha_1}{R_1} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{R_0} \right) \approx \frac{G \pi a^4}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{R_0} \alpha_1.$$

So bestätigt man leicht die Behauptung. Ferner ist der Faktor

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} \approx \frac{1 - \frac{\alpha_0^2}{2}}{1 - \frac{\alpha_1^2}{2}} \approx 1 + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_0^2}{2},$$

also auch  $\left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} - 1 \right)$  von der Ordnung  $(\alpha_1 - \alpha_0) \alpha_0$ .

Denken wir uns nur Formänderungen mit  $(\alpha_1 - \alpha_0) \approx \left( \frac{a}{R} \right)^2$ , d. h. auch  $ca \approx \left( \frac{a}{R} \right)^3$ , so sind demnach die gemachten Fehler gerade von höchstens dritter Ordnung. Nun fanden wir in Ziff. 7 und 8, daß der Formänderungsbereich, für den  $(ca)$  von dritter Ordnung klein ist, auch eben derjenige ist, in dem für die Feder kleiner Steigung die Näherungslösung zweiter Ordnung (und damit  $M_{aII}$ ) genau gilt. Zugleich liegen für dicke Federn, für die man ja eben das Korrektionsglied in  $M_a$  mitnehmen möchte, die physikalisch zulässigen Deformationen in diesem Bereich (Ziff. 7). Der Praktiker kann daher unbedenklich in den ihm gewohnten Rechnungen den genaueren Wert (40) für  $M_a$  benützen, falls er die Korrektion zweiter Ordnung berücksichtigen will.

Der genauere Ansatz (42') statt (42) entspricht gerade der Genauigkeit (mit Ausnahme natürlich des Korrektionsgliedes in  $M_a$ ), wie sie in der Lord Kelvinschen Theorie der Schraubenfeder erreicht wird. In der bei Love<sup>1</sup> hierfür angegebenen Formel

$$\delta h = PlR^2 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{B} + \frac{\cos^2 \alpha}{C} \right), \quad (44)$$

<sup>1</sup> Love § 271 S. 478.

wo  $B$  die Biegesteifigkeit und  $C$  die Drillungssteifigkeit bezeichnet, müssen wir nun bei Anwendung des Wertes  $M_{aII}$  für  $M_a$  die Drillungssteifigkeit ersetzen durch

$$C = \frac{\pi G a^4}{2} \left( 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right). \tag{45}$$

Kehren wir zu (43) zurück, und denken wir uns diese Formel nach  $G$  aufgelöst. Man erkennt, daß ein aus Zug- oder Druckversuchen mit dicken Federn bestimmter Schubmodul  $G$  sich nach der früheren Theorie etwas zu groß ergibt. Der relative Fehler ist durch den Bruch  $\frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2$  gegeben, errechnet sich also z. B. für

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{5} \text{ zu } 3,4\%, \quad \text{für } \frac{a}{R} = \frac{1}{4} \text{ zu } 1,17\%, \quad \text{für } \frac{a}{R} = \frac{1}{3} \text{ zu } 2,08\%.$$

**10. Schubspannungsverteilung im Querschnitt einer gespannten Feder kleiner Steigung; Zusammenhang zwischen Drillungsmoment und größter Spannung.** a) Näherungslösung erster Ordnung. Nach (23) haben wir

$$\tau_{xI} = -c G y - \frac{5cG}{4R} x y, \quad \tau_{yI} = +c G x + \frac{cG}{8R} (7x^2 - 3y^2 + 3a^2).$$

Längs der  $x$ -Achse haben wir

$$\tau_{xI} = 0, \quad \tau_{yI} = c G x + \frac{cG}{8R} (7x^2 + 3a^2).$$

An die Stelle linearer Verteilung tritt eine parabolische Verteilung. Für  $\frac{a}{R} = \frac{1}{5}$  zeigt diese Abb. 4. Bei diesem und den weiteren, ebenfalls für  $\frac{a}{R} = \frac{1}{5}$  gezeichneten Spannungsdiagrammen ist zu beachten, daß die  $+x$ -Achse gegen die Federachse weist. (Vgl. Abb. 2). Der mit  $i(a)$  bezeichnete Randpunkt  $x = +a$  ( $x = -a$ ) ist also der innerste (äußerste) Randpunkt; die Randpunkte  $x = 0$  sind als Punkte mittleren Achsenabstandes mit  $m$  bezeichnet.

Die Abbildungen wurden sehr einfach auf graphischem Wege gewonnen. Man gelangt leicht zu dieser Konstruktion, wenn man die Korrektionsglieder

$$\tau_{x1} = -\frac{5cG}{4R} x y, \quad \tau_{y1} = +\frac{cG}{8R} (7x^2 - 3y^2 + 3a^2)$$

in Polarkoordinaten darstellt. Man erhält so an Stelle von  $\tau_{x1}$  und  $\tau_{y1}$

$$\tau_{r1} = \frac{3caG}{8} \left( \frac{a}{R} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \sin \varphi, \quad \tau_{\varphi 1} = \frac{caG}{8} \left( \frac{a}{R} \right) \left[ 3 + 7 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \cos \varphi.$$

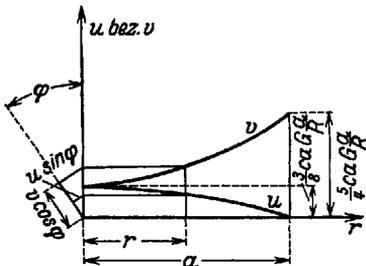


Abb. 3<sup>1</sup>. Die Hilfsgrößen  $u$  und  $v$  für die Spannungen.

Wir setzen noch

$$u = \frac{3caG}{8} \left( \frac{a}{R} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right],$$

$$v = \frac{caG}{8} \left( \frac{a}{R} \right) \left[ 3 + 7 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right].$$

Zeichnet man für vorliegendes  $a$  und  $a/R$  nach Annahme von  $caG$  (Randspannung für die Näherungslösung nullter Ordnung)  $u$  und  $v$  als Funktion von  $r$  auf, wie das in Abb. 3 für  $\frac{a}{R} = \frac{1}{5}$  geschah, so hat man für die graphische Ausführung nur noch zu beachten:

$$\tau_{r1} = u \sin \varphi, \quad \tau_{\varphi 1} = v \cos \varphi.$$

Die beiden Kurven für  $u$  und  $v$  sind gewöhnliche Parabeln mit gemeinsamem Scheitel auf der Ordinatenachse.

<sup>1</sup> Abb. 3 ist in größerem Maßstab gezeichnet als die Abb. 4 bis 7.

Bei jedem zu zeichnenden Diagramm geht man von der linearen Verteilung aus und bringt unsere Korrektionsglieder  $\tau_{r1}$  und  $\tau_{\varphi 1}$  an. In Abb. 4 ist  $\varphi = 0$  bzw.  $= 180^\circ$ , also  $\tau_{r1} = 0$ ,  $\tau_{\varphi 1} = +v$  bzw.  $= -v$ . In Abb. 5 ist  $\varphi = 90^\circ$  bzw.  $= 270^\circ$ , also  $\tau_{r1} = u$  bzw.  $= -u$  und  $\tau_{\varphi 1} = 0$ . Längs eines beliebigen Durchmessers  $\varphi$  bzw.  $(180^\circ + \varphi)$ , wie in Abb. 6, verfährt man etwa, wie in Abb. 3 für einen Punkt  $(r = \frac{a}{2})$  angedeutet. Will man die Spannungen längs eines Kreises auftragen, wie in Abb. 7 die Randspannungen und die Spannungen für  $r = \frac{a}{2}$ , so benützt man zweckmäßig — wie angedeutet — außer Abb. 3 noch Hilfskreisen mit den Radien  $u$  bzw.  $v$  (für das entsprechende  $r$ )<sup>1</sup>.

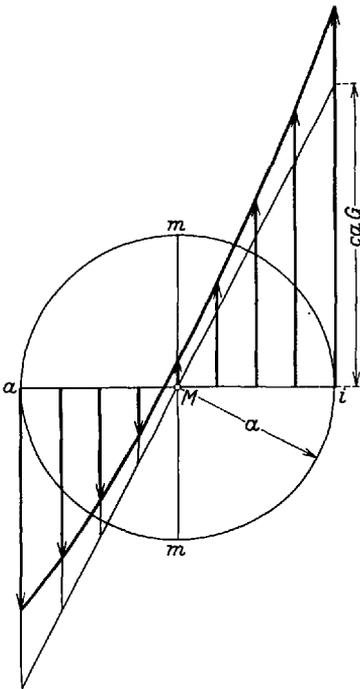


Abb. 4. Spannungen längs der x-Achse.

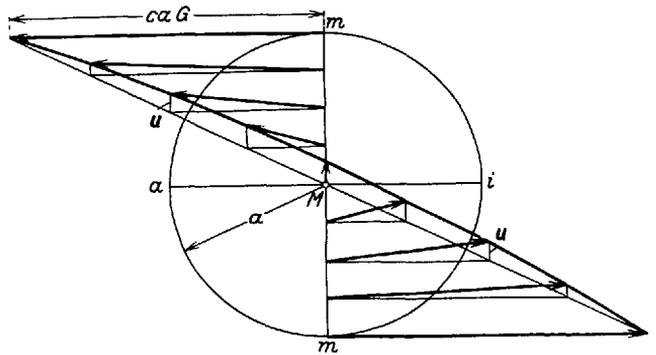


Abb. 5. Spannungen längs der y-Achse.

Was die Spannungslinien für die Lösung erster Ordnung anlangt, so ist ihre Differentialgleichung in Polarkoordinaten

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{\tau_r}{\tau_\varphi},$$

mit

$$\tau_r = \frac{3cGa^2}{8R} \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) \sin \varphi,$$

$$\tau_\varphi = cGr + \frac{cGa^2}{8R} \left( 3 + 7 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) \cos \varphi.$$

Man kann die Differentialgleichung in folgender Weise leicht näherungsweise integrieren: Die Spannungslinien werden nur wenig von Kreisen abweichen. Der Radius des durch die Schnittpunkte einer Spannungslinie mit der y-Achse gehenden Kreises um M sei  $\rho$ . Wir setzen für diese Spannungslinie  $r = \rho + \varepsilon$  und behandeln  $\varepsilon$  als kleine Größe. Dann wird, wenn man in den Korrektionsgliedern der  $\tau$  die Größe  $r$  durch  $\rho$  ersetzt mit den Abkürzungen

$$h = \frac{3a^2}{8R} \left( 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right), \quad k = \frac{a^2}{8R} \left( 3 + 7 \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right),$$

<sup>1</sup> Die Randspannungen können auch (graphisch oder rechnerisch) einfach nach der für sie gültigen Beziehung:  $\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = c a G \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{x}{R} \right)$  ermittelt werden.

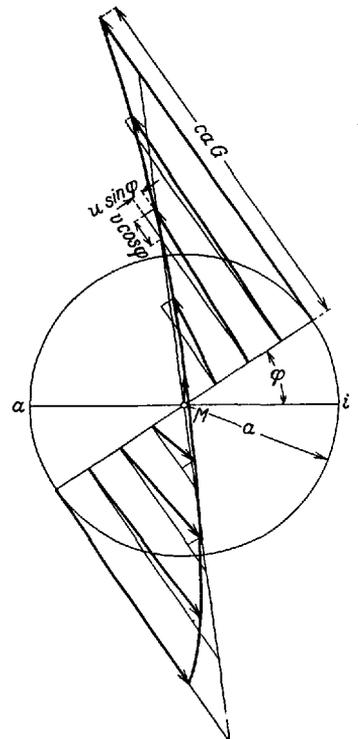


Abb. 6. Spannungen längs eines beliebigen Durchmessers.

die Differentialgleichung der zu  $r = \rho$  gehörigen Spannungslinie:

$$\frac{d\varepsilon}{(\rho + \varepsilon) d\varphi} = \frac{h \sin \varphi}{\rho + \varepsilon + h \cos \varphi}.$$

Unter bloßer Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung in den kleinen Größen  $\varepsilon$ ,  $h$  und  $k$  erhalten wir

$$\varepsilon = -h \cos \varphi$$

und damit schließlich als Gleichung unserer Spannungslinie genähert:

$$r \approx \rho - h \cos \varphi = \rho - \frac{3a^2}{8R} \left( 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right) \cos \varphi.$$

Auf Grund dieser Gleichung entstand Abb. 8  $\left( \frac{a}{R} = \frac{1}{5} \right)$ .

Eine Kurve der Abb. 8 kann als eine zum Kreischen vom Durchmesser  $h$  gehörige Konchoide aufgefaßt und so konstruiert werden.

Von der Deformation der Querschnittsfläche durch die Verwölbung  $\zeta_I$  kann man sich in nachfolgender Weise leicht ein Bild machen. Die deformierte Fläche hat in bezug auf das  $(xyz)$ -System der unverwölbten Fläche nach (22) folgende Gleichung:

$$z = \frac{cy}{8R} (3a^2 - x^2 - y^2).$$

Diese Fläche dritten Grades enthält die  $x$ -Achse. Der Schnitt mit der  $yz$ -Ebene ist die Parabel dritten Grades

$$z = \frac{cy}{8R} (3a^2 - y^2).$$

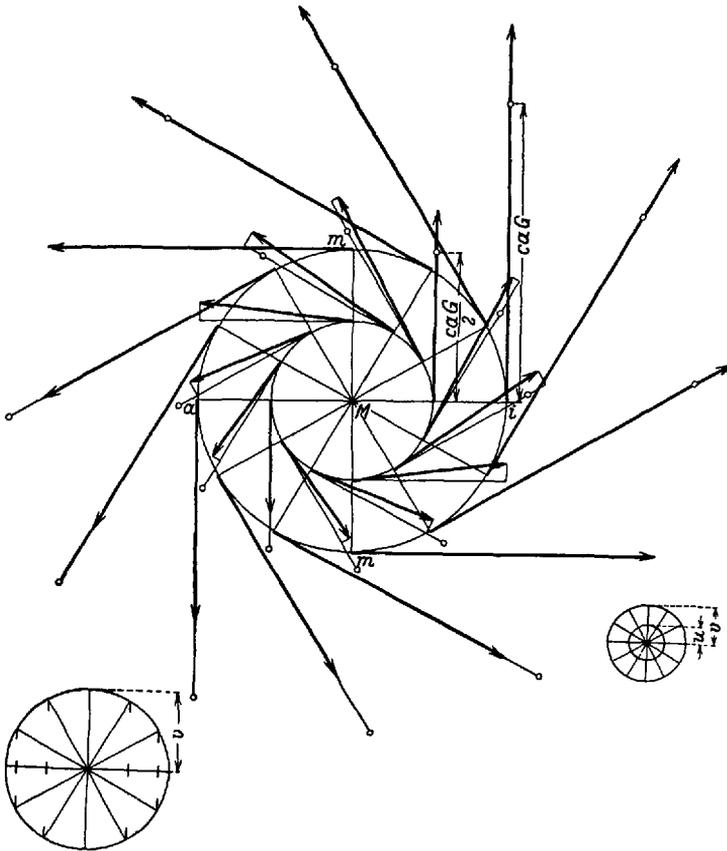


Abb. 7. Spannungen längs des Randes und eines konzentrischen Kreises.

Diese in Abb. 9 gezeichnete Kurve hat im Mittelpunkt einen Wendepunkt und für  $y = \pm a$  Tangenten parallel zur  $y$ -Achse. Ein Schnitt der Fläche mit einem Kreiszylinder  $x^2 + y^2 = \rho^2$  liefert wegen  $z = \text{konst} \cdot y$  eine ebene Kurve, die demnach eine Ellipse ist. Die Fläche ist der geometrische Ort einer Schar von Ellipsen, die auf der  $x$ -Achse ihre kleine Achse haben. Zu irgend einem Punkt  $P$  der Kurve von Abb. 9 gehört eine Ellipse mit der großen Halbachse  $MP$  und der kleinen Halbachse  $MP'$ . Diese Ellipsenschar ist durch Verzerrung der Schar konzentrischer Kreise des ursprünglichen Querschnitts entstanden.

Die besondere Betrachtung von  $\tau_{\max}$  erledigen wir zusammen mit der Näherungslösung zweiter Ordnung.

b) Näherungslösung zweiter Ordnung; größte Spannung. Nun haben wir die Ausdrücke (32)

$$\tau_x = -cGy - \frac{5cG}{4R}xy - \frac{cGy}{16R^2}(27x^2 + 5y^2 - 10a^2),$$

$$\tau_y = +cGx + \frac{cG}{8R}(7x^2 - 3y^2 + 3a^2) + \frac{cGx}{16R^2}(13x^2 - 9y^2 + 4a^2).$$

Wir verzichten auf eine graphische Darstellung; die bisherigen Abbildungen würden nur wenig abgeändert. In den Punkten  $i$  und  $a$  (vgl. Abb. 4) wird nun beidemale die Span-

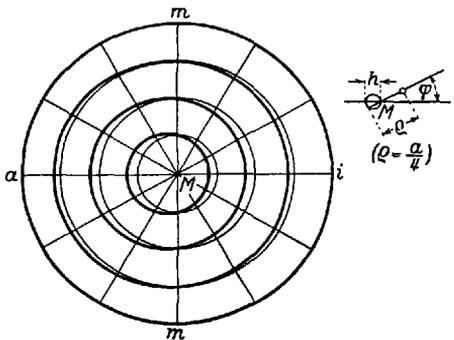


Abb. 8. Spannungslinien.

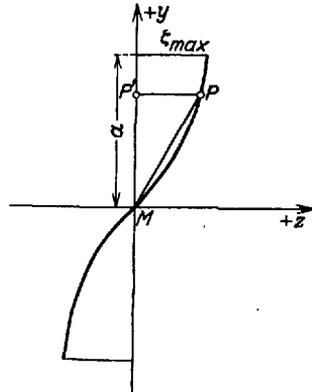


Abb. 9. Schnitt der verwölbten Querschnittsfläche mit der  $x y$ -Ebene ( $z$  stark überhöht).

nung vergrößert und um denselben Betrag; in den Punkten  $m$  war vorher die Spannung  $= caG$  und wird nun (und zwar beidemale gleich) um ein Geringes vermindert.

Für die genannten wichtigen Randpunkte wollen wir die Spannungen, ihre Beträge mit  $\tau_i, \tau_a, \tau_m$  bezeichnend, anschreiben. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= caG \left( 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{17}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right), \\ \tau_a &= caG \left( 1 - \frac{5}{4} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{17}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right), \\ \tau_m &= caG \left( 1 - \frac{5}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Wir bringen nun noch  $\tau_i = \tau_{max}$  in Zusammenhang mit  $M_a$ . Eliminiert man aus der ersten Gleichung (46) und aus (40) die Konstante  $c$ , so folgt

$$\tau_{max} = \frac{M_a \left[ 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{17}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right]}{\frac{\pi a^3}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right]}$$

oder auch

$$\tau_{max} = \frac{M_a}{\frac{\pi a^3}{2}} \left[ 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{7}{8} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right]. \quad (47)$$

Wieder gilt, wie bei Gleichung (43), daß die Mitführung des zweiten Korrektionsgliedes nur dann sinnvoll ist, wenn  $M_a$  bis zur zweiten Ordnung genau angegeben wird. Genau wäre:  $M_a = P_1 R_1 \cos \alpha_1$ .

Zu dem dem Praktiker gewohnten Ersatz  $M_a = PR$  ist wieder dieselbe Bemerkung wie bei (43) zu machen. Dieser Ersatz ist demnach unbedenklich.

**II. Zusammenfassung.** Es werden die Verzerrungsgrößen für eine durch Zug oder Druck deformierte Schraubenfeder von kreisförmigem Querschnitt bei kleiner Formänderung ohne Vernachlässigung des Verhältnisses  $a/R$  (Querschnittsradius: Wicklungshalbmesser) aus der allgemeinen Theorie der Biegung und Drillung dünner Stäbe entnommen. Für den Sonderfall einer Einzelwindung, die zum Ringwulst deformiert wird, werden (unter Angabe des Gültigkeitsbereichs) die Drillungsspannungen bis zur Größenordnung  $(a/R)^2$  genau berechnet. Es wird gezeigt, daß diese Lösung mindestens auf den Fall einer Schraubenfeder mit einer Steigung von höchstens  $\approx a/R$  übernommen werden kann. Der Einfluß der Federkrümmung auf das Drillungsmoment ergibt sich als nur geringfügig. Dagegen zeigt die Spannungsverteilung eine erhebliche Abweichung von der beim gedrehten zylindrischen Stab auftretenden linearen Verteilung. Dies bedingt auch einen starken Einfluß auf den Zusammenhang zwischen maximaler Schubspannung und Drillungsmoment.

(Eingegangen am 1. September 1930.)