

Die Stabilität der Kreiszyinderschale.

Von W. Flügge in Göttingen¹.

Seit im Jahre 1926 auf der Gesolei die erste mit zylindrischen Schalen überdeckte Halle errichtet wurde², hat sich diese neue Bauweise weitgespannter Dachkonstruktionen rasch ein großes Anwendungsgebiet erobert. Die Markthallen in Frankfurt und Budapest sind die größten Vertreter einer großen Anzahl von Bauten, bei denen das neue Konstruktionsprinzip Anwendung gefunden hat. Nachdem durch die grundlegenden Arbeiten von F. Dischinger und U. Finsterwalder³ die statische Wirkungsweise der zylindrischen Schalendächer geklärt und damit die Möglichkeit der Ausführung dieser nur wenige Zentimeter starken Bauglieder gegeben war, hat die Frage nach ihrer Knicksicherheit mit jedem neuen Großbau, der geplant oder errichtet wurde, immer mehr an Bedeutung gewonnen.

Einen vollständigen Überblick über die Behandlung, die dies Thema bisher gefunden hat, enthält die kürzlich erschienene Arbeit von K. v. Sanden und F. Tölke⁴, auf die wegen ausführlicher Literaturangaben verwiesen sei. Drei für den Bau von Schalendächern wesentliche Fragen sind in den dort aufgeführten Arbeiten teils noch nicht erschöpfend behandelt, teils noch gar nicht in Angriff genommen worden:

1. Wie groß ist die Knicksicherheit, wenn Druckkräfte in Richtung der Erzeugenden und in Ringrichtung gleichzeitig in beliebigem Größenverhältnis vorhanden sind?
2. Welchen Einfluß auf die Knicksicherheit hat die Anordnung dicht liegender Verstärkungsrippen?
3. Ist es zulässig, die bisher allein der Rechnung zugänglich gewesenen hochsymmetrischen Spannungszustände zu benutzen, um die Knicksicherheit eines Schalendaches mit seiner ganz andern Spannungsverteilung danach zu beurteilen?

Der Klärung dieser drei Fragen dient die vorliegende Arbeit in den Abschnitten II, V, VI. Die Ergebnisse des Abschnittes II wurden durch Versuche überprüft (Abschn. IV), und zur Aufklärung der dabei gefundenen Abweichungen dienen die Erörterungen unter III.

I. Die Grundlagen der Spannungstheorie.

1. **Geometrie der Verformungen.** Unsere Rechnung baut auf der Theorie der dünnen Schalen auf, die wir im wesentlichen als bekannt voraussetzen und durch folgende Annahmen präzisieren:

1. Die bei der Verformung der Schale eintretende Verschiebung eines beliebigen Punktes ist durch die Verschiebung des zugehörigen Punktes der Mittelfläche derart bestimmt, daß die Normalen zur Mittelfläche auch nach der Verformung zur neuen Mittelfläche normal sind und ihre Länge nicht ändern.

2. Die Schalenstärke δ sei gegen die Abmessungen der Mittelfläche, insbesondere gegen ihre Krümmungsradien vor und nach der Verformung, so klein, daß die unter der ersten Annahme aufgestellten Rechnungen ein brauchbares Bild des tatsächlichen Spannungszustandes ergeben.

¹ Erweiterte Göttinger Habilitationsschrift.

² F. Dischinger u. U. Finsterwalder, Bauing. 7 (1926) S. 929.

³ F. Dischinger, Handb. f. Eisenbetonbau, Bd. XII, 3. Aufl., Berlin 1928. U. Finsterwalder, Diss. München 1930.

⁴ K. v. Sanden u. F. Tölke, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 24.

3. Die Verschiebungen seien klein gegen die Schalenstärke.

Als Koordinaten auf der Mittelfläche der Schale wählen wir x und φ nach Abb. 1 und führen für die nach ihnen genommenen Ableitungen einer beliebigen Funktion $f(x, \varphi)$ die Abkürzungen ein:

$$a \frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f''.$$

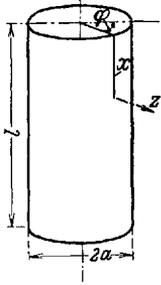


Abb. 1. Koordinatensystem.

Zur Aufstellung des Zusammenhangs der Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche mit den Verformungen und Schnittkräften am Schalenelement brauchen wir noch eine dritte Koordinate z , die wir von der Mittelfläche aus radial nach außen messen wollen. Dies Koordinatensystem kann nun in doppeltem Sinne gebraucht werden. Einmal kann man sich an jeden Punkt der Schale die Koordinaten angeschrieben denken, die ihm im undeformierten Zustand zukommen, und dieses Zahlentripel auch nach der Deformation zur Kennzeichnung des Punktes verwenden (biegsame Koordinaten). Zum andern kann man auch das Koordinatensystem als starr betrachten und den von einem Punkte zurückgelegten Verschiebungsweg durch die Differenz seiner Koordinaten vor und nach der Deformation beschreiben (starre Koordinaten).

Wir benutzen zunächst ein starres Koordinatensystem und definieren die drei Komponenten der Verschiebung eines beliebigen Punktes, wie folgt:

ξ ist der Zuwachs von x ,

η ist der Zuwachs von φ , multipliziert mit dem Radius a der Mittelfläche,

ζ ist der Zuwachs von z .

Die Verschiebungen der Mittelfläche, also die Werte ξ, η, ζ für $z = 0$, wollen wir mit besonderen Buchstaben bezeichnen, nämlich mit u, v, w . Unsere erste Aufgabe ist nun,

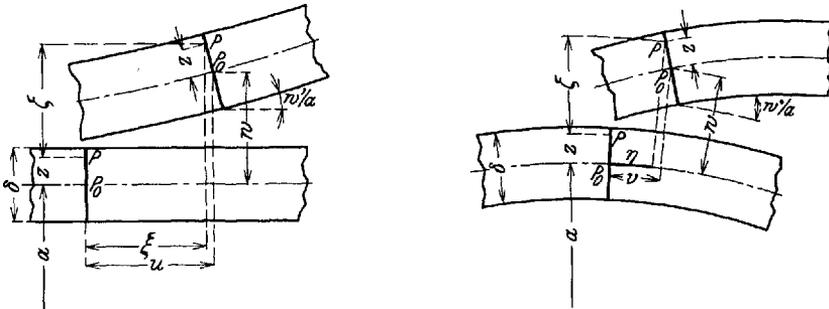


Abb. 2a, b. Längsschnitt $\varphi = \text{konst}$ und Querschnitt $x = \text{konst}$ durch die unverformte und die verformte Schale.

ξ, η, ζ durch u, v, w auszudrücken. Dazu betrachten wir, wie im folgenden immer, unsere Koordinaten als biegsam. In Abb. 2 ist ein Stück der Schale vor und nach der Verformung dargestellt. Uns interessieren die Unterschiede zwischen den Verschiebungen ξ, η, ζ eines Punktes P und denen des zugehörigen Punktes P_0 der Mittelfläche. Sie rühren davon her, daß sich die Schalennormale PP_0 bei der Formänderung um den Winkel w'/a in der x - z -Ebene und w'/a in der φ - z -Ebene verdreht. Dadurch wird der Punkt P in x -Richtung um die Strecke $z \sin \frac{w'}{a} \approx z \frac{w'}{a}$ zurückgeschoben, so daß seine Gesamtverschiebung in dieser Richtung

$$\xi = u - \frac{z}{a} w' \tag{1a}$$

ist. Die entsprechende Verschiebung η in φ -Richtung findet man aus Abb. 2b. Durch die Verdrehung w'/a wird P um $z \frac{w'}{a}$ zurückgeschoben. Wir müssen nun beachten, daß wir

unter η nicht die Verschiebung von P selbst verstehen, sondern deren radiale Projektion auf die ursprüngliche Mittelfläche. Wir haben daher von der Mittelflächenverschiebung v den Betrag $z \frac{w'}{a} \frac{a}{a+z+w}$ abzuziehen. Hier machen wir von der Grundannahme 3 Gebrauch und vernachlässigen im Nenner w gegen z , so daß wir erhalten

$$\eta = v - \frac{z}{a+z} w'. \tag{1b}$$

Die Verschiebung ζ schließlich unterscheidet sich, wie man aus beiden Abbildungen z feststellen kann, von w nur um Glieder, die in w' und w'' quadratisch sind und deshalb wegbleiben können:

$$\zeta = w. \tag{1c}$$

Von den sechs Dehnungen und Gleitungen interessieren uns nur die drei, die die Vorgänge in einer Fläche $z = \text{konst}$ beschreiben. Sie sind mit den Verschiebungen durch folgende Gleichungen verbunden:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\xi'}{a} \\ \epsilon_\varphi &= \frac{\eta \cdot \frac{a+z}{a} d\varphi + \zeta d\varphi}{(a+z) d\varphi} = \frac{\eta'}{a} + \frac{\zeta}{a+z}, \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\xi' d\varphi}{(a+z) d\varphi} + \frac{a+z}{a} \frac{\eta'}{dx} = \frac{\xi'}{a+z} + \frac{a+z}{a} \frac{\eta'}{a}. \end{aligned} \right\} \tag{2a-c}$$

Die zweite und dritte Formel bedürfen der Erläuterung: In Abb. 3a ist ein Schnitt $x = \text{konst}$ durch die undeformierte Schale dargestellt. Die stark gezeichnete Faser im Abstand z von der Mittelfläche ist auch in der Lage eingezeichnet, in die sie durch die Formänderung kommt,

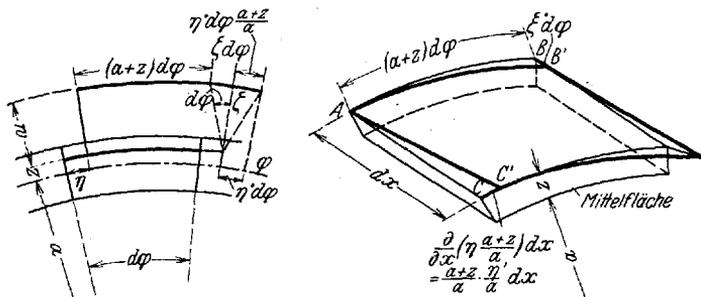


Abb. 3a, b. Verzerrungsgrößen im Abstand z von der Mittelfläche.

und aus den angeschriebenen Bezeichnungen kann man unschwer die Formel (2b) ablesen.

Abb. 3b zeigt in dünnen Linien die Ansicht eines Schalenstücks, das nach unten durch die Mittelfläche und nach oben durch eine Fläche $z = \text{konst}$ begrenzt ist, also nicht durch die innere und äußere Laibung der Schale. Die Fläche $z = \text{konst}$ geht bei der Formänderung in die stark gezeichnete Gestalt über. Die gesuchte Gleitung $\gamma_{x\varphi}$, die natürlich von z abhängt, ist die Summe der beiden kleinen Winkel BAB' und CAC' , und diese Winkel sind gerade die in (2c) angegebenen Summanden.

Durch Einsetzen von (1) in (2) folgt ohne weiteres

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{v'}{a} - z \frac{w''}{a^2}, \\ \epsilon_\varphi &= \frac{v'}{a} - \frac{z}{a} \frac{w''}{a+z} + \frac{w}{a+z}, \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{v'}{a+z} + \frac{a+z}{a^2} v' - \frac{w''}{a} \left(\frac{z}{a} + \frac{z}{a+z} \right). \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

2. Die Schnittkräfte. In einem Schnitt $x = \text{konst}$ durch die Schale wirken die Normalspannung σ_x und die Schubspannungen $\tau_{x\varphi}$ und τ_{xz} , in einem Schnitt $\varphi = \text{konst}$ ent-

sprechend $\sigma_\varphi, \tau_{\varphi x}, \tau_{\varphi z}$ (Abb. 4). Diese Spannungen sind Funktionen von x, φ, z . Nach einem einfachen Gesetz der Festigkeitslehre ist $\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = \tau$. Die Spannungen werden in üblicher Weise durch Integration in z -Richtung zu Resultierenden und resultierenden Momenten zusammengefaßt. Dabei ist für den Schnitt $x = \text{konst}$ zu berücksichtigen, daß die Schnittlänge an der innern und äußern Laibung der Schale verschieden ist. Danach ergeben sich folgende Definitionsgleichungen der Schnittkräfte:

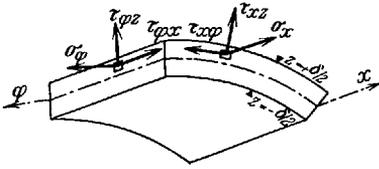


Abb. 4. Positive Richtung der Spannungen am Schalenelement.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Längskräfte:} \quad N_\varphi &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi dz, & N_x &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, \\
 \text{Schubkräfte:} \quad N_{\varphi x} &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau dz, & N_{x\varphi} &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, \\
 \text{Biegemomente:} \quad M_\varphi &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi z dz, & M_x &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz, \\
 \text{Drillungsmomente:} \quad M_{\varphi x} &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau z dz, & M_{x\varphi} &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz, \\
 \text{Querkräfte:} \quad Q_\varphi &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{\varphi z} dz & Q_x &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz.
 \end{aligned} \right\} (4a-k)$$

In diesen Formeln bezeichnen die Integrationsgrenzen $z = -\frac{\delta}{2}$ die innere und $z = +\frac{\delta}{2}$ die äußere Laibung der Schale. Die Minuszeichen bei den Momenten bedeuten, daß solche Momente positiv sind, bei denen an der inneren Laibung positive Spannungen auftreten. Es sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß $N_{\varphi x} \neq N_{x\varphi}, M_{\varphi x} \neq M_{x\varphi}$, obwohl die Schubspannungen paarweise gleich sind. Für $M_{\varphi x} = M_{x\varphi} = 0$ (Membrantheorie!) werden die beiden Schubkräfte einander gleich, da dann τ von z unabhängig ist und vor die Integrale gezogen werden kann.

Zur Aufstellung des Elastizitätsgesetzes der Zylinderschale muß nun der Zusammenhang dieser Schnittkräfte mit den Verformungen der Mittelfläche festgestellt werden. Diese sind bestimmt durch u, v, w und deren Ableitungen nach x und φ . Ausgehend vom Hookeschen Gesetz des dreidimensionalen Kontinuums erhält man mit $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{\varphi z} = 0$, also unter der üblichen Vernachlässigung der Formänderung durch die Querkräfte,

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x), \\
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi), \\
 \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi}
 \end{aligned} \right\} (5)$$

und damit unter Benutzung der Gleichungen (3) z. B. für N_x

$$N_x = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(v + \nu w') \delta + w \left(\delta + \frac{\delta^2}{12 a^2}\right) + w'' \frac{\delta^3}{12 a^2} \right]$$

und ähnlich für die übrigen Schnittkräfte. Die so erhaltenen Formeln führen dazu, das elastische Verhalten der Schale durch zwei Steifigkeitsgrößen zu kennzeichnen,

$$\left. \begin{aligned} \text{die Dehnungssteifigkeit } D &= \frac{E \delta}{1 - \nu^2} \\ \text{und die Biegesteifigkeit } K &= \frac{E \delta^3}{12 (1 - \nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dann wird der Zusammenhang der Schnittkräfte mit den Verschiebungen durch folgende acht Gleichungen dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{D}{a} (v' + w + \nu u') + \frac{K}{a^3} (w + w''), \\ N_x &= \frac{D}{a} (u' + \nu v' + \nu w) - \frac{K}{a^3} w'', \\ N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \frac{1 - \nu}{2} (u' + v') + \frac{K}{a^3} \frac{1 - \nu}{2} (u' + w'), \\ N_{x\varphi} &= \frac{D}{a} \frac{1 - \nu}{2} (u' + v') + \frac{K}{a^3} \frac{1 - \nu}{2} (v' - w'), \\ M_{\varphi} &= \frac{K}{a^2} (w + w'' + \nu w'''), \\ M_x &= \frac{K}{a^2} (w'' + \nu w''' - u' - \nu v'), \\ M_{\varphi x} &= \frac{K}{a^2} (1 - \nu) \left(w' + \frac{u'}{2} - \frac{v'}{2} \right), \\ M_{x\varphi} &= \frac{K}{a^2} (1 - \nu) (w' - v'). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Es ist nützlich, sich den Inhalt dieser Gleichungen anschaulich klar zu machen. Setzt man $K = 0$, so verschwinden die Momente, und für die Längs- und Schubkräfte erhält man die durchsichtigen Formeln der Membrantheorie: Jede Längskraft ist proportional der in ihre Richtung fallenden Dehnung der Mittelfläche und dem ν -fachen der andern Dehnung, und die beiden Schubkräfte sind einander gleich und proportional der Schubverzerrung der Mittelfläche. Bei den vier Momenten ist die Bedeutung von w und seinen Ableitungen leicht verständlich: $w + w''$ und w''' sind die Verkrümmungen, w' ist die Verwindung der Mittelfläche. Bei M_x treten Zusatzglieder auf: u' und $\nu v'$. Sie bedeuten, daß die bei entsprechenden Verschiebungen entstehenden, gleichmäßig über die Schalenstärke verteilten Spannungen (bei $\nu v'$ aus der Querdehnung) in bezug auf die Mittelfläche ein Moment ergeben; denn der Schwerpunkt der trapezförmigen Seitenfläche eines Schalenelements liegt außerhalb der Mittelfläche. Ferner vermißt man bei M_x ein Glied mit νw , entsprechend dem w bei M_x . Dies rührt daher, daß die zu w gehörigen Spannungen ungleichförmig und gerade so über die Schalenstärke verteilt sind, innen größer als außen, daß dadurch die Wirkung der Trapezform des Schnittes kompensiert wird. Der Einfluß von u' und v' auf die Drillungsmomente ist ganz ähnlich zu deuten. — Die Zusatzglieder bei den Längs- und Schubkräften rühren daher, daß die Spannungsverteilung über die Schalenstärke nicht linear ist. Die mit D multiplizierten Anteile enthalten die Spannungen der Mittelfläche, die nicht mit den Mittelwerten der Spannungen übereinstimmen. Den Unterschied stellen die mit K multiplizierten Glieder dar. Alle diese Zusätze entsprechen sinngemäß den bekannten Korrekturen in der Theorie der Biegung krummer Stäbe. Sie sind also sehr klein und können in der Spannungstheorie in der Regel ganz fortbleiben.

Die Gleichungen (7) sind das Elastizitätsgesetz der Zylinderschale und bilden die Grundlage für deren strenge Biegetheorie, soweit eine Darstellung dreidimensionaler Vorgänge durch ein zweidimensionales Kontinuum überhaupt als streng gelten kann.

Von den von **Love** auf anderem Wege gewonnenen und von **E. Schwerin** und **K. Miesel**¹ in ihren Arbeiten benutzten Formeln weichen sie in den Korrekturgliedern zum Teil erheblich ab². Es scheint, als ob der Wert dieser Glieder, die von den in mancher Hinsicht willkürlichen Grundannahmen auf S. 463 so stark abhängen, weniger in einer Erhöhung der Genauigkeit besteht, als in der durch sie erreichten logischen Geschlossenheit des ganzen Formelwerks.

Wenn auch die weitere Rechnung auf den Formeln (7) aufbaut, so sei hier doch noch eine andere Fassung derselben Gleichungen gegeben, die einiges Interesse bietet. Wir kennzeichnen die Deformation im kleinen durch folgende sechs Formänderungsgrößen der Mittelfläche:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Dehnungen:} & \varepsilon_{x0} = \frac{u'}{a}, \quad \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{v'}{a} + \frac{w}{a}, \\ \text{Gleitung:} & \gamma_{x\varphi 0} = \frac{u'}{a} + \frac{v'}{a}, \\ \text{Verkrümmungen:} & \kappa_x = \frac{w''}{a^2}, \quad \kappa_{\varphi} = \frac{w + w''}{a^2}, \\ \text{Drillung:} & \kappa_{x\varphi} = \frac{w''}{a^2}. \end{array} \right\} \quad (8a-f)$$

und durch die Drehung des Flächenelements um die Schalennormale

$$\vartheta = -\frac{1}{2} \left(\frac{u'}{a} - \frac{v'}{a} \right). \quad (8g)$$

Führt man (8) in (7) ein, so erhält man

$$\left. \begin{array}{l} N_{\varphi} = D(\varepsilon_{\varphi 0} + \nu \varepsilon_{x0}) + \frac{K}{a} \kappa_{\varphi}, \\ N_x = D(\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{\varphi 0}) - \frac{K}{a} \kappa_x, \\ N_{\varphi x} = D \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi 0} + \frac{K}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\kappa_{x\varphi} + \frac{\gamma_{x\varphi 0}}{2a} - \frac{\vartheta}{a} \right), \\ N_{x\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi 0} - \frac{K}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\kappa_{x\varphi} - \frac{\gamma_{x\varphi 0}}{2a} - \frac{\vartheta}{a} \right), \\ M_{\varphi} = K(\kappa_{\varphi} + \nu \kappa_x), \\ M_x = K \left(\kappa_x + \nu \kappa_{\varphi} - \frac{\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{\varphi 0}}{a} \right), \\ M_{\varphi x} = K(1-\nu) \left(\kappa_{x\varphi} - \frac{\vartheta}{a} \right), \\ M_{x\varphi} = K(1-\nu) \left(\kappa_{x\varphi} - \frac{\gamma_{x\varphi 0}}{2a} - \frac{\vartheta}{a} \right). \end{array} \right\} \quad (9)$$

Wie diese Gleichungen lehren, kann man die Zylinderschale als ein zweidimensionales anisotropes Kontinuum behandeln. Das Elastizitätsgesetz ist nicht drehungsinvariant. Ursache der Anisotropie ist die nach verschiedenen Richtungen verschiedene Krümmung der Mittelfläche.

3. Die Formänderungsarbeit. Im Anschluß an die Entwicklung der Beziehungen für die Schnittkräfte der Zylinderschale ermitteln wir noch die Formänderungsarbeit. Die

¹ **Love-Timpe**, Lehrbuch der Elastizität, S. 604—606, Leipzig 1907. **E. Schwerin**, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922) S. 341. **K. Miesel**, Ing.-Arch. 1 (1930) S. 32.

² Die Abweichungen sind die folgenden: Die Glieder mit K bei Längs- und Schubkräften sind hinzugezogen. Bei den Biegemomenten steht w statt $-v'$ und umgekehrt. Bei den Drillungsmomenten sind die Koeffizienten von u' und v' anders, ebenso das Vorzeichen von u' in M_x .

potentielle Energie der Formänderung, bezogen auf die Flächeneinheit der Schalenmittelfläche, ist

$$a = \frac{1}{2} \int (\sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \sigma_x \varepsilon_x + \tau \gamma_{x\varphi}) \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, \tag{10}$$

wie man aus dem allgemeinen Ausdruck für die Formänderungsarbeit des elastischen Körpers herleitet. Durch Einsetzen von (5) erhält man

$$a = \frac{E}{(1-\nu^2)a} \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \left(\varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_\varphi \varepsilon_x + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi}^2 \right) (a+z) dz.$$

Dabei bezeichnen $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_x, \gamma_{x\varphi}$ die von z abhängigen Werte für einen beliebigen, nicht notwendig auf der Mittelfläche liegenden Punkt. Ersetzt man sie nach (3) durch die Verschiebungen und ihre Ableitungen und rechnet die Integrale aus, so erhält man die Formänderungsarbeit als Funktion der Verschiebungen der Mittelfläche:

$$a = \frac{D}{2a^2} \left(u'^2 + \frac{1-\nu}{2} u''^2 + (1-\nu) u' v' + 2\nu u' v' + v'^2 + \frac{1-\nu}{2} v''^2 + 2v' w + w^2 + 2\nu u' w \right) + \frac{K}{2a^4} \left(\frac{1-\nu}{2} u''^2 + \frac{3}{2} (1-\nu) v'^2 - 3(1-\nu) v' w' - 2\nu v' w'' + w^2 + w''^2 + 2(1-\nu) w'^2 + 2w w'' + 2\nu w'' w'' - 2u' w'' + (1-\nu) u' w' \right). \tag{11}$$

Auch dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Gleichungen (8) auf die Verzerrungsgrößen der Mittelfläche einschließlich der Drehung ϑ umgerechnet werden. Die einfache Rechnung liefert

$$a = \frac{1}{2} D \left(\varepsilon_{x0}^2 + \varepsilon_{\varphi 0}^2 + 2\nu \varepsilon_{x0} \varepsilon_{\varphi 0} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi 0}^2 \right) + \frac{1}{2} K \left(\varkappa_x^2 + \varkappa_\varphi^2 + 2\nu \varkappa_x \varkappa_\varphi + 2(1-\nu) \varkappa_{x\varphi}^2 - \frac{2}{a} \varepsilon_{x0} \varkappa_x - \frac{2\nu}{a} \varepsilon_{\varphi 0} \varkappa_x - \frac{1-\nu}{a} \gamma_{x\varphi 0} \varkappa_{x\varphi} + \frac{1-\nu}{2a^2} \gamma_{x\varphi 0}^2 - \frac{4}{a} (1-\nu) \varkappa_{x\varphi} \vartheta + \frac{1-\nu}{a^2} \gamma_{x\varphi 0} \vartheta + \frac{2}{a^2} (1-\nu) \vartheta^2 \right). \tag{12}$$

Man kann hieran noch eine interessante Erörterung knüpfen: Differenziert man a nach den darin vorkommenden Größen, so erhält man nur zum Teil die entsprechenden Schnittkräfte, zum Teil aber auch Linearkombinationen von mehreren. Das ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß durch Differenzieren nach sieben Veränderlichen nicht gut acht verschiedene Schnittkräfte erhalten werden können. Diese Verschiedenheit der Zahl der Schnittkräfte von der Zahl der unabhängigen Parameter der Formänderungsarbeit findet ihre einfache Erklärung darin, daß die Schnittkräfte, wie man schon aus den Gleichungen (9) erkennen kann, nicht linear unabhängig voneinander sind. Vielmehr besteht zwischen ihnen eine Beziehung, die im wesentlichen die Aussage von der paarweisen Gleichheit der Schubspannungen enthält. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen wird noch darauf zurückzukommen sein.

II. Knickung unter vollsymmetrischer Längs- und Querbelastung.

1. **Statischer Ansatz.** Gegenstand der Untersuchung ist in diesem Abschnitt ein Kreiszyylinder, der durch einen auf seine beiden Ränder $x = 0$ und $x = l$ wirkenden Normaldruck P (Abb. 5) und durch einen auf seinen ganzen Mantel gleichförmig radial nach innen wirkenden Flächendruck p (in der Abbildung nicht dargestellt) belastet ist, und zwar bezeichnet P die auf die Längeneinheit des Zylinderrandes wirkende, p die auf die Flächen-

einheit der Zylindermittelfläche bezogene Kraft. Diese Lasten erzeugen im Zylinder Schnittkräfte, die wir durch den zusätzlichen Index I kennzeichnen wollen:

$$N_{xI} = -P, \quad N_{\varphi I} = -p a. \tag{13}$$

Die Randbedingungen des Knickvorgangs werden wir später noch genauer zu formulieren haben. Hier soll nur die eine Forderung schon vorweggenommen werden, daß bei der Belastung der durch (13) dargestellte Spannungszustand entstehen soll, ohne am Rande gestört zu sein. Nachdem man die Belastung bis zur Knickgrenze getrieben hat, sollen dann erst die später noch anzugebenden Randbedingungen für den Knickvorgang in Kraft treten. Diese nur sehr schwer erfüllbare Voraussetzung ist nötig, um zu einem einfachen

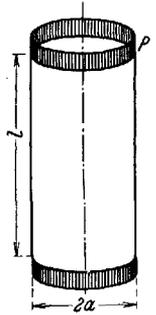


Abb. 5. Belastung durch Längsdruck P .

Knickvorgang zu kommen. Wir werden in Abschnitt III sehen, inwieweit man sich von dieser Einschränkung freimachen kann. Die Rechnung stellt eine in der Regel nicht streng erfüllbare Idealisierung dar, und es ist dementsprechend der Bruch im Versuche schon unterhalb der Knickgrenze zu erwarten. Der Wert einer Stabilitätsbetrachtung liegt, wie übrigens auch bei der Knickung der Stäbe, wenigstens unter technisch möglichen Lagerbedingungen, darin, daß der wirkliche Bruch nicht weit unter der Stabilitätsgrenze erfolgt.

Wir fragen nun nach der Stabilität des durch (13) dargestellten elastischen Gleichgewichts, d. h. wir fragen: Ist es möglich, dem belasteten Zylinder eine unendlich kleine Formänderung zu erteilen, nach der er sich wieder im Gleichgewicht befindet? Wir suchen also eine benachbarte Gleichgewichtslage. Die bei der kleinen Gestaltänderung des Zylinders auf-

tretenden Verschiebungen wollen wir mit u, v, w bezeichnen, die zugehörigen Schnittkräfte mit $N_{\varphi x}, M_x$ usw. Auch die Kräfte N_{xI} und $N_{\varphi I}$ erfahren dabei Änderungen, die wir mit N_x und N_φ bezeichnen wollen. Der Spannungszustand des belasteten und aus der geraden Gleichgewichtslage gebrachten Zylinders wird also dargestellt durch $\bar{N}_x = N_{xI} + N_x, \bar{N}_\varphi = N_{\varphi I} + N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}, M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}, M_{\varphi x}$. Die sechs zuletzt genannten Größen sind ebenso wie N_x und N_φ von der Größenordnung der Verformungen, d. h. beliebig klein, während \bar{N}_x und \bar{N}_φ von der Größenordnung der Lasten sind. Wir

werden nun für den deformierten Zustand die Gleichgewichtsbedingungen am Schalelement aufstellen und sehen, daß sich darin die Kräfte von der Größenordnung der Belastung herausheben, so daß wir Gleichungen bekommen zwischen Schnittkräften von der Größenordnung der Verformung. Produkte der Lasten mit Formänderungsgrößen sind von derselben Größenordnung und dürfen deshalb nicht, wie in der Spannungstheorie, vernachlässigt werden.

Das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung x liefert folgende Gleichung (Abb. 6):

$$\bar{N}'_x + \bar{N}'_{\varphi x} + p a \frac{w'}{a} + \bar{N}'_\varphi \frac{u'}{a} = 0. \tag{14a}$$

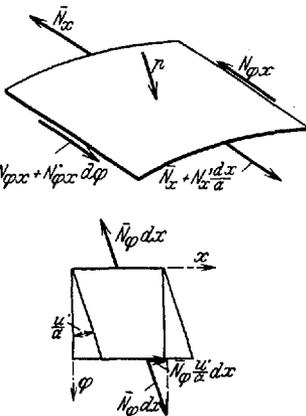


Abb. 6. Schnittkräfte in x -Richtung.

Die Bedeutung der beiden ersten Glieder ist aus der Spannungstheorie bekannt. Das dritte rührt daher, daß das Schalelement durch die Deformation etwas verdreht ist, so daß die auf ihm senkrecht stehende Kraft $p a d\varphi dx$ mit der Richtung w den Winkel w'/a bildet und dementsprechend eine Komponente $p a d\varphi dx \sin \frac{w'}{a}$ in x -Richtung wirft. Vertauschung des Sinus mit dem Winkel und Division mit $d\varphi dx$ gibt den dritten Summanden der Gleichung. Das letzte Glied beruht auf einer besonderen Vereinbarung über die Richtung der Schnittkräfte am deformierten Element. Abb. 6b zeigt in Draufsicht

ein durch Schubkräfte rhombisch deformiertes Teilchen. Wir wollen nun unter $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$ immer die Kräfte verstehen, die sich durch eine Komponentenzerlegung parallel zu den Rändern des verzerrten Flächenelements ergeben. Dann hat \bar{N}_φ in Richtung x die Komponente $\bar{N}_\varphi \frac{u}{a} dx$ und der Unterschied dieser Komponenten auf dem vorderen und hinteren Rand des Elements ergibt sich durch Differenzieren nach φ zu

$$\frac{\partial \bar{N}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \frac{u}{a} dx + \bar{N}_\varphi \frac{u''}{a} d\varphi dx.$$

Da nun $N_{\varphi I}$ von φ unabhängig ist, so ist $\frac{\partial \bar{N}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi}$ von der Größenordnung der Verschiebungen, das erste der beiden Glieder also von zweiter Ordnung klein, während das zweite nach Division mit $d\varphi dx$ den letzten Summanden der Gleichung (14a) bildet.

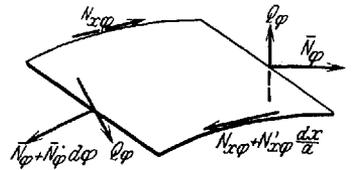


Abb. 7. Schnittkräfte in φ -Richtung.

Die Bedingung des Kräftegleichgewichts in Richtung φ erhält man durch ganz analoge Betrachtungen (Abb. 7):

$$\bar{N}_\varphi + N'_{x\varphi} - Q_\varphi + \bar{N}_x \frac{v''}{a} = 0. \quad (14b)$$

Die ersten drei Glieder sind wieder aus der Spannungstheorie bekannt. Ein Glied, das die Schrägstellung der Mantellast $p a d\varphi dx$ berücksichtigt, ist hier nicht vorhanden, weil die mit der Mantellast im Gleichgewicht stehenden Kräfte $N_{\varphi I}$ die Drehung mitmachen. Der letzte Summand kommt ebenso zustande wie das letzte Glied von (14a).

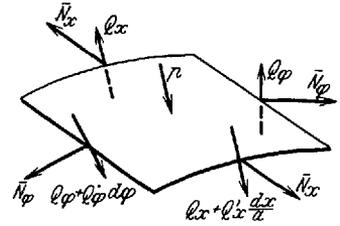


Abb. 8. Schnittkräfte in z -Richtung.

Die nächste Gleichung, die das Gleichgewicht der auf den Zylinderradius projizierten Kräfte ausdrückt (Abb. 8), enthält die meisten Glieder. Sie lautet

$$Q_\varphi + Q'_x + N_\varphi \left(1 + \frac{v}{a} - \frac{w''}{a} \right) - \bar{N}_x \frac{w''}{a} + p a \left(1 + \frac{u'}{a} + \frac{v}{a} + \frac{w}{a} \right) = 0. \quad (14c)$$

Die ersten drei Glieder treten auch in der Spannungstheorie auf, das dritte jedoch ohne die Klammer. Diese enthält eine Korrektur des Kontingenzwinkels zwischen den beiden Kräften $\bar{N}_\varphi dx$. Dieser Winkel ist wegen der Verformung nicht einfach $d\varphi$, sondern $\left(1 + \frac{v}{a} - \frac{w''}{a} \right) d\varphi$. Das vierte Glied stellt die Resultierende der mit dem Kontingenzwinkel w''/a angreifenden Kräfte \bar{N}_x dar und das letzte enthält den Manteldruck. Die Klammer bedeutet die Vergrößerung der Druck aufnehmenden Mantelfläche infolge der Verformung.

Die drei weiteren Gleichgewichtsbedingungen stellen das Gleichgewicht der Momente dar und haben dieselbe Form wie in der Spannungstheorie, ohne Zusatzglieder (Abb. 9). Sie lauten

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi + M'_{x\varphi} - a Q_\varphi &= 0, \\ M'_x + M_{\varphi x} - a Q_x &= 0, \\ a N_{x\varphi} - a N_{\varphi x} + M_{\varphi x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14d-f)$$

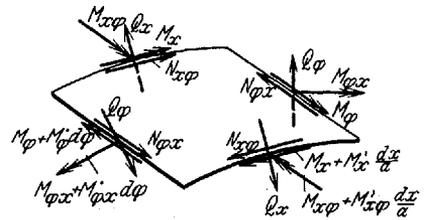


Abb. 9. Schnittkräfte, die zu den Momentengleichungen (14d-f) Beiträge liefern.

Setzt man $\bar{N}_x = -P + N_x$ und $\bar{N}_\varphi = -pa + N_\varphi$ in die Gleichungen ein, und eliminiert man mit Hilfe von (14d, e) die Querkräfte Q_x und Q_φ , so erhält man

$$\left. \begin{aligned} N'_x + N_{\varphi x} + p(w' - u'') &= 0, \\ a N_{\varphi x} + a N'_{x\varphi} - M_\varphi - M'_{x\varphi} - P v'' &= 0, \\ M_\varphi'' + M'_{x\varphi} + M_{\varphi x}' + M_x'' + a N_\varphi + p a(u' + w + w'') + P w'' &= 0, \\ a N_{x\varphi} - a N_{\varphi x} + M_{\varphi x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15a-d)$$

Das sind vier Gleichungen mit acht unbekanntem Schnittkräften. Dazu treten die acht Gleichungen (7) zwischen diesen Kräften und den drei Verschiebungen u, v, w . Das sind insgesamt 12 Gleichungen für 11 Unbekannte. Der Gleichungsüberschuß ist nur scheinbar; denn (15d) erweist sich, wenn man die Kräfte durch die Verschiebungen ausdrückt, als Identität. Das findet seine Erklärung in dem bereits in I, 3 angedeuteten Umstand, daß bei der Aufstellung der Gleichungen (4) schon die Beziehung $\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x}$ verwendet worden ist, durch die eine lineare Abhängigkeit zwischen den Schnittkräften geschaffen ist. Gleichung (15d) enthält dieselbe Aussage, nur sind die Schubspannungen mit $(a+z) dz$ multipliziert und integriert.

Wir behalten also, wenn wir jetzt nach (7) die Schnittkräfte durch die Verschiebungen ausdrücken, nur noch die ersten drei Gleichungen (15) übrig. Ehe wir diese Gleichungen in der neuen Form aufschreiben, ist es gut, noch ein paar neue Bezeichnungen zu vereinbaren, und zwar erweist es sich als nützlich, die Lasten und das Verhältnis der Dehnungszur Biegesteifigkeit durch dimensionslose Größen darzustellen:

$$k = \frac{K}{D a^2} = \frac{\delta^2}{12 a^2}, \quad q_1 = \frac{p a}{D}, \quad q_2 = \frac{P}{D}. \quad (16)$$

Mit diesen Abkürzungen schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v'' + \nu w'' + k \left(\frac{1-\nu}{2} u'' - w'' + \frac{1-\nu}{2} w'' \right) \\ \quad + q_1 (-u'' + w'') &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' + w'' + k \left(\frac{3-\nu}{2} (1-\nu) v'' - \frac{3-\nu}{2} w'' \right) - q_2 v'' &= 0 \\ \nu u'' + v'' + w'' + k \left(\frac{1-\nu}{2} u'' - w'' - \frac{3-\nu}{2} v'' + w'' + 2w'' + w'' + 2w'' + w'' \right) \\ \quad + q_1 (u'' + w'' + w'') + q_2 w'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Diese Gleichungen sind die Differentialgleichungen unserer Aufgabe. Ihre Eigenwerte bestimmen die Knicklast, und ihre Lösungen stellen die Knickfiguren dar.

Die allgemeine Lösung des Systems gibt ein Exponentialansatz. Unter geeigneten Randbedingungen kommt man mit Kreisfunktionen aus. Man muß dann auf eine Einspannung der Zylinderränder verzichten. Wir wählen diesen Ansatz, um die Rechnung nicht unnötig zu erschweren:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos m \varphi \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ v &= B \sin m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ w &= C \cos m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad \left(\lambda = n \pi \frac{a}{l} \right) \quad (18)$$

Die Randbedingungen, denen dieser Ansatz genügt, sind folgende: Ist n eine ganze Zahl, so ist an beiden Rändern der Schale $v = 0$ und $w = 0$ und nach (7) auch $M_x = 0$, während u nicht verschwindet. Da jedoch die Verschiebungen u , wie die Ausrechnung von Zahlenwerten zeigt, nur klein sind, so hat man eine Lösung vor sich, die für die an den Rändern $x = 0$ und $x = l$ frei gelagerte Schale brauchbar ist. Für eingespannte Ränder muß man zum Exponentialansatz greifen oder (18) durch Summieren über $n = 1, 2, 3, \dots$ zu einer Fourierreihe ausbauen. Der einfache Ansatz liefert jedoch schon so viel wertvolle Ergebnisse, daß auf eine Verfeinerung in dieser Richtung in der vorliegenden Arbeit verzichtet werden möge.

Setzt man (18) in die Differentialgleichungen ein, so kann man mit $\frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} \frac{\cos \lambda \frac{x}{a}}{\sin \lambda \frac{x}{a}}$ kürzen und erhält drei lineare, homogene Gleichungen für die Amplituden A, B, C :

$$\left. \begin{aligned}
 & A \left[-\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 - k \frac{1-\nu}{2} m^2 + q_1 m^2 \right] + B \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda m \right] \\
 & \quad + C \left[\nu \lambda + k \left(\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2 \right) + q_1 \lambda \right] = 0, \\
 & A \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda m \right] + B \left[-m^2 - \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 - k \cdot \frac{3}{2} (1-\nu) \lambda^2 + q_2 \lambda^2 \right] \\
 & \quad + C \left[-m - k \frac{3-\nu}{2} \lambda^2 m \right] = 0, \\
 & A \left[-\nu \lambda + k \left(-\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2 \right) - q_1 \lambda \right] + B \left[m + k \frac{3-\nu}{2} \lambda^2 m \right] \\
 & \quad + C \left[1 + k(\lambda^4 + 2\lambda^2 m^2 + m^4 - 2m^2 + 1) + q_1(1 - m^2) - q_2 \lambda^2 \right] = 0.
 \end{aligned} \right\} (19)$$

Diese Gleichungen haben dann und nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante verschwindet. Das gibt eine Gleichung zwischen den Lasten q_1 und q_2 , durch die die Knickgrenze bezeichnet ist.

2. Arbeitsansatz. Bevor wir an die Auswertung der Knickdeterminante gehen, wollen wir sie noch auf einem anderen Wege zu gewinnen versuchen. Die zur Erzeugung der Verschiebungen u, v, w nötige Energie setzt sich zusammen aus der dazu notwendigen Formänderungsarbeit und der gegen die äußeren Lasten zu leistenden Arbeit. Das elastische Gleichgewicht ist stabil, wenn dieser Energiebedarf stets positiv ist, dagegen labil, wenn es Verschiebungen gibt, bei denen Energie frei wird. Die Stabilitätsgrenze, die wir suchen, ist dadurch gekennzeichnet, daß Verschiebungen möglich sind, bei denen überhaupt keine Energietönung eintritt. Wir setzen sie nun an und suchen die Bedingungen, unter denen sie Null wird.

Wenn wir den Grundspannungszustand N_{xI} usw. in den Zustand $N_{xI} + N_x$ usw. überführen, so kommen zu der schon vorhandenen Formänderungsarbeit Glieder mit $N_{xI} \cdot N_x$ hinzu und solche, die in den neuen Schnittkräften $N_x \dots$ quadratisch sind. Wir wollen die Summe der letzteren mit A_1 bezeichnen und mit $A_2 + A_3$ den in den N_x usw. linearen Teil, d. h. die Arbeit, die bei den Verschiebungen u, v, w gegen die schon vorhandenen innern Kräfte geleistet werden muß. Für A_1 gilt dann unmittelbar die Gleichung (11):

$$A_1 = a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a \, dx \, d\varphi. \tag{20a}$$

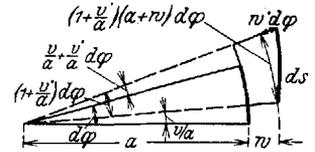


Abb. 10. Linienelement einer Ringfaser $x = \text{konst}$ zur Berechnung der Arbeit der Ringkräfte.

Da der Ausdruck in den Verschiebungen quadratisch ist, haben wir auch im folgenden die Quadrate der Verschiebungen zu berücksichtigen, während wir höhere Potenzen stets abstoßen werden.

Die Arbeit A_2 ist die Arbeit der Ringkräfte $N_{\varphi I} = -p a$ und A_3 die der in Achsrichtung wirkenden Kräfte $N_{xI} = -P$. $N_{\varphi I}$ leistet Arbeit bei einer Ringdehnung. Abb. 10 zeigt die Projektion einer deformierten Linie $x = \text{konst}$ auf ihre ursprüngliche Ebene. Zu den beiden darin sichtbaren Komponenten von ds kommt noch die auf dieser Ebene senkrechte hinzu: $w' d\varphi$. Daraus ergibt sich

$$ds^2 = \left[\left(1 + \frac{v'}{a} \right)^2 (a + w)^2 + w'^2 + u'^2 \right] d\varphi^2,$$

unter Fortlassung dritter und höherer Potenzen in den Verschiebungen

$$\left(\frac{1}{a} \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = 1 + 2 \frac{w}{a} + 2 \frac{v'}{a} + \frac{w^2}{a^2} + \frac{v'^2}{a^2} + \frac{w'^2}{a^2} + \frac{u'^2}{a^2} + 4 \frac{v' w}{a^2}$$

und durch Entwicklung der Quadratwurzel

$$\frac{1}{a} \frac{ds}{d\varphi} = 1 + \frac{w}{a} + \frac{v'}{a} + \frac{1}{2 a^2} (w'^2 + u'^2 + 2 v' w).$$

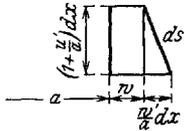
Der Zuwachs der Bogenlänge bei der Verformung ist also

$$\frac{\Delta ds}{a d\varphi} = \frac{ds - a d\varphi}{a d\varphi} = \frac{v' + w}{a} + \frac{u'^2 + 2v'w + w'^2}{2a^2}$$

und die Arbeit der Ringkräfte

$$A_2 = -\phi a \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\Delta ds}{d\varphi} d\varphi dx. \quad (20b)$$

Die Dehnung der Längsfasern kann entsprechend gefunden werden. Abb. 11 zeigt einen Achsschnitt des Zylinders. ds bedeutet jetzt das verzerrte Element dx . Zu seinen beiden in der Abbildung sichtbaren Komponenten kommt wieder eine dritte $\frac{v'}{a} dx$



hinzu, so daß

$$ds^2 = \left(\left(1 + \frac{u'}{a} \right)^2 + \frac{w'^2}{a^2} + \frac{v'^2}{a^2} \right) dx^2$$

ist, woraus dann ebenso wie bei den Ringkräften gefunden wird

$$\frac{\Delta ds}{dx} = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{u'}{a} + \frac{v'^2 + w'^2}{2a^2},$$

Abb. 11. Linienelement einer Längsfaser $\varphi = \text{konst.}$

und damit ist die Arbeit der Kräfte N_{xI}

$$A_3 = -P a \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\Delta ds}{dx} dx d\varphi. \quad (20c)$$

Schließlich ist noch die Arbeit der äußern Kräfte zu ermitteln. Sie besteht aus der Arbeit der Randkräfte P und der Flächenlast ϕ . Die Randkräfte leisten die Arbeit

$$P a \int_0^{2\pi} (u_{x=0} - u_{x=l}) d\varphi.$$

Zur Berechnung der Arbeit der Flächenkräfte dient Abb. 10. Wir denken uns den Manteldruck durch den Druck einer Flüssigkeit erzeugt. Dann ist seine Arbeit gleich dem zwischen gestreckter und deformierter Zylinderfläche liegenden Volumen, multipliziert mit dem Druck ϕ . Wir betrachten zunächst den Schnitt $x = \text{konst.}$ Er liefert

$$dF = \frac{1}{2} (a + w)^2 \left(1 + \frac{v'}{a} \right) d\varphi - \frac{1}{2} a^2 \left(1 + \frac{v'}{a} \right) d\varphi.$$

Die Arbeit des Manteldrucks ist mit dieser Bezeichnung

$$\phi \int_0^l \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{u'}{a} \right) dF dx.$$

Insgesamt erhält man so als Arbeit der äußern Kräfte, wenn man wieder die Glieder dritter und höherer Ordnung in den Verschiebungen unterdrückt,

$$A_4 = P a \int_0^{2\pi} (u_{x=0} - u_{x=l}) d\varphi + \phi a \int_0^l \int_0^{2\pi} w dx d\varphi + \phi \int_0^l \int_0^{2\pi} \left(w u' + w w' + \frac{w^2}{2} \right) dx d\varphi. \quad (20d)$$

Die ganze für eine Verformung aufzuwendende Energie ist

$$A = \sum_1^4 A_i. \quad (21)$$

Man kann nun einen beliebigen Ansatz für die Verschiebungen u, v, w machen und dann die Frage untersuchen, ob für diese Verschiebungen bei irgend einem Wert der Lasten P und ϕ die Arbeit $\mathbf{A} = 0$ wird. Dann ist für diese Lasten das elastische Gleichgewicht indifferent. Eine Knickgrenze ist natürlich erst dann gefunden, wenn man denjenigen von allen mit den Randbedingungen verträglichen Verschiebungsansätzen benutzt, der die kleinsten Werte für die Lasten liefert. Um diesen zu finden, stellen wir die Verschiebungen als biharmonische Reihen dar:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos m \varphi \cdot \cos n \pi \frac{x}{l}, \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m \varphi \cdot \sin n \pi \frac{x}{l}, \\ w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos m \varphi \cdot \sin n \pi \frac{x}{l}. \end{aligned} \right\} \left(\lambda = n \pi \frac{a}{l} \right) \quad (22)$$

Das kann man in (20) einsetzen und die Integrale auswerten. Man erhält \mathbf{A} als quadratische Form in den Veränderlichen A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{D \pi l}{4 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn}^2 \left[\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2 + k \frac{1-\nu}{2} m^2 - q_1 m^2 \right] \right. \\ &\quad + A_{mn} B_{mn} [-(1+\nu) \lambda m] \\ &\quad + B_{mn}^2 \left[m^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + k \frac{3}{2} (1-\nu) \lambda^2 - q_2 \lambda^2 \right] \\ &\quad + B_{mn} C_{mn} [2 m + k (3-\nu) \lambda^2 m] \\ &\quad + C_{mn}^2 [1 + k (\lambda^4 + 2 \lambda^2 m^2 + m^4 - 2 m^2 + 1) - q_1 (m^2 - 1) - q_2 \lambda^2] \\ &\quad \left. + C_{mn} A_{mn} [-2 \nu \lambda + k (-2 \lambda^3 + (1-\nu) \lambda m^2) - q_1 \cdot 2 \lambda] \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Dabei bedeutet der Akzent an dem ersten Summenzeichen, daß die Glieder für $m = 0$ doppelt zu summieren sind. Daß in (23) nur solche Produkte der Amplituden A, B, C vorkommen, deren Faktoren dieselben Indizes haben, liegt an der Orthogonalität der \cos und \sin .

Das elastische Gleichgewicht wird labil, wenn \mathbf{A} für geeignete Werte A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} negativ wird. Wir suchen das Minimum von \mathbf{A} auf und bestimmen dessen Vorzeichen. Das Minimum wird bestimmt durch die $3mn$ Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial A_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial B_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial C_{mn}} = 0$$

oder ausgeschrieben

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} [2 \lambda^2 + (1-\nu) m^2 + k (1-\nu) m^2 - 2 q_1 m^2] + B_{mn} [-(1+\nu) \lambda m] \\ \quad + C_{mn} [-2 \nu \lambda + k (-2 \lambda^3 + (1-\nu) \lambda m^2) - q_1 \cdot 2 \lambda] &= 0, \\ A_{mn} [-(1+\nu) \lambda m] + B_{mn} [2 m^2 + (1-\nu) \lambda^2 + k \cdot 3 (1-\nu) \lambda^2 - 2 q_2 \lambda^2] \\ \quad + C_{mn} [2 m + k (3-\nu) \lambda^2 m] &= 0, \\ A_{mn} [-2 \nu \lambda + k (-2 \lambda^3 + (1-\nu) \lambda m^2) - q_1 \cdot 2 \lambda] + B_{mn} [2 m + k (3-\nu) \lambda^2 m] \\ \quad + C_{mn} [2 + k (2 \lambda^4 + 4 \lambda^2 m^2 + 2 m^4 - 4 m^2 + 2) + q_1 \cdot 2 (1 - m^2) - q_2 \cdot 2 \lambda^2] &= 0. \end{aligned} \right\} (24)$$

Dieses System von $3mn$ linearen, homogenen Gleichungen zerfällt in $m \cdot n$ einzelne Systeme von je drei Gleichungen. Im allgemeinen haben alle Gleichungen nur die triviale Lösung Null. Nur wenn die dreireihige Determinante eines Teilsystems verschwindet, existiert eine Lösung, bei der einige Unbekannte von Null verschieden sind. Für die quadratische

Form heißt das, daß sie im allgemeinen nur ein Extremum im Nullpunkt hat, zu dem der Wert

$$\mathbf{A} = 0$$

gehört, und das für kleine Lasten ein Minimum sein muß, da jedes elastische Gleichgewicht für hinreichend kleine Lasten stabil ist. Verschwindet eine Teildeterminante, so hat man ein Lösungssystem A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , und jedes durch Multiplikation mit einer Konstanten daraus entstehende Größentripel führt wieder zu einem Minimum von \mathbf{A} , das dann notwendig von dieser Konstanten unabhängig sein muß, also wieder gleich Null ist. Man hat einen Zustand an der Stabilitätsgrenze vor sich, und die Knickbedingung lautet:

$$\begin{vmatrix} [2\lambda^2 + (1-\nu)m^2 & & [-2\nu\lambda + k(-2\lambda^3 \\ + k(1-\nu)m^2 - 2q_1m^2] & [-(1+\nu)\lambda m] & + (1-\nu)\lambda m^2 - 2q_1\lambda] \\ & [2m^2 + (1-\nu)\lambda^2 & [2m + k(3-\nu)\lambda^2 m] \\ [-(1+\nu)\lambda m] & + k \cdot 3(1-\nu)\lambda^2 - 2q_2\lambda^2] & \\ [-2\nu\lambda + k(-2\lambda^3 & [2m + k(3-\nu)\lambda^2 m] & [2 + 2k(\lambda^4 + 2\lambda^2 m^2 \\ + (1-\nu)\lambda m^2) - 2q_1\lambda] & & + m^4 - 2m^2 + 1) \\ & & + 2q_1(1-m^2) - 2q_2\lambda^2] \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Das ist aber bis auf den Faktor -8 dieselbe Determinante, wie die aus den Koeffizienten der Gleichungen (19) gebildete.

Aus der hier gegebenen Herleitung der Knickbedingung erkennt man noch folgendes: Jede durch die biharmonische Reihe (22) darstellbare Deformation ist durch eine abbrechende Entwicklung dieser Art beliebig genau approximierbar. Von allen abbrechenden Reihen aber liefert die Knicklast eine solche, die nur aus einem einzigen Gliede besteht. Es genügt also, sich auf den Ansatz (18) zu beschränken, wenn man dasjenige Wertepaar m , n bestimmt, zu dem die kleinste Knicklast gehört.

Die Frage, ob das Gleichgewicht oberhalb der indifferenten Stelle labil wird, oder ob noch einmal stabile Zonen kommen, ist konstruktiv von geringem Interesse. Sie läßt sich durch Untersuchung der Schwingungen des Systems leicht dahin beantworten, daß immer Instabilität eintritt, worauf hier jedoch nicht eingegangen werden soll.

3. Auflösung der Knickdeterminante. Mit der Aufstellung der Gleichung (25) ist das Knickproblem noch nicht gelöst. Es bleibt noch die doppelte Aufgabe, das ungünstigste Wertepaar m , n zu bestimmen und die Gleichung (25) in eine Form zu bringen, die die Ergebnisse überblicken läßt. Beides geht Hand in Hand.

Die Knickbedingung (25) liefert eine Gleichung, die in q_1 und q_2 je vom zweiten Grade ist:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 k + c_5 k^2 + c_6 k^3 = & (c_3 + c_7 k + c_8 k^2) q_1 + (c_9 + c_{10} k) q_1 q_2 + (c_{11} + c_{12} k) q_1^2 \\ & + (c_4 + c_{13} k + c_{14} k^2) q_2 + (c_{15} + c_{16} k) q_2^2 + c_{17} q_1^2 q_2 + c_{18} q_1 q_2^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Der übliche Weg wäre nun der, mit Hilfe dieser Gleichung etwa q_1 als Funktion von q_2 auszudrücken und nach m und λ zu differenzieren, um die kleinste Knicklast zu finden. Das gibt algebraische Gleichungen hohen Grades in m und λ , deren Auflösung sehr mühsam wäre. Es bietet sich ein einfacherer Weg, zum Ziele zu kommen. Wir sehen uns zunächst die Größenordnung der Bestandteile von (26) an. $k = \frac{\delta^2}{12 a^2}$ ist eine sehr kleine Größe. q_1 und q_2 stellen, wie man aus ihren Definitionsgleichungen erkennt, im wesentlichen die elastischen Dehnungen der Mittelfläche in Richtung φ und x infolge der Knicklasten dar, sind also, solange die Spannungen gegen den Elastizitätsmodul klein bleiben, ebenfalls kleine Größen. Über das gegenseitige Verhältnis der drei Größen zueinander kann keine Aussage gemacht werden. $\lambda = n\pi \frac{a}{l}$ kann je nach der Schlankheit des Zylinders alle

Werte zwischen Null und ∞ annehmen, kann also gegen Eins sehr klein oder sehr groß sein, während m als ganze Zahl von der Größenordnung 1 oder größer ist. Daraus ergibt sich folgende Regel: Die höchstmögliche Größenordnung eines Koeffizienten c_i ist bestimmt durch seine höchste und niedrigste Potenz von λ und seine höchste von m . In Gleichung (26) kann jedes Glied vernachlässigt werden, das klein gegen ein anderes ist. Dazu ist nötig, daß es 1. eine höhere Potenz von k , q_1 oder q_2 enthält als das andere, und daß 2. sein Koeffizient c_i niemals von höherer Größenordnung ist als der Koeffizient des andern. Um das zu übersehen, ist die folgende Tabelle zusammengestellt. Sie enthält in der zweiten Spalte die zur Beurteilung der Größenordnung maßgebenden Potenzen von λ und m . Die folgenden Spalten geben für die am Kopfgemachten Annahmen die Größenordnung der Koeffizienten an. 0 bedeutet die Größenordnung der Einheit, positive Zahlen große, negative kleine Werte.

Koeffizienten	Wesentliche Summanden	$\lambda \approx 1$ $m \approx 1$	$\lambda \gg 1$ $m \approx 1$	$\lambda \approx 1$ $m \gg 1$	$\lambda \gg 1$ $m \gg 1$	$\lambda \ll 1$ $m \approx 1$	$\lambda \ll 1$ $m \gg 1$	Faktor in (26)
c_1	λ^4	0	4	0	4	-4	-4	1
c_2	$\lambda^8 + m^8$	0	8	8	8	0	8	k
c_5	$\lambda^8 + m^8$	0	8	8	8	0	8	k^2
c_6	$\lambda^8 + \lambda^2 m^6$	0	8	6	8	-2	4	k^3
c_3	$\lambda^4 m^2 + m^6$	0	4	6	6	0	6	q_1
c_7	$\lambda^6 m^2 + m^8$	0	6	8	8	0	8	$k q_1$
c_8	$\lambda^6 m^2 + \lambda^2 m^6$	0	6	6	8	-2	4	$k^2 q_1$
c_9	$\lambda^4 m^2 + \lambda^2 m^4$	0	4	4	6	-2	2	$q_1 q_2$
c_{10}	$\lambda^6 m^2 + \lambda^2 m^6$	0	6	6	8	-2	4	$k q_1 q_2$
c_{11}	$\lambda^6 + m^6$	0	4	6	6	0	6	q_1^2
c_{12}	$\lambda^4 + \lambda^2 m^4$	0	4	4	6	-2	2	$k q_1^2$
c_4	$\lambda^6 + \lambda^2 m^4$	0	6	4	6	-2	2	q_2
c_{13}	$\lambda^8 + \lambda^2 m^6$	0	8	6	8	-2	4	$k q_2$
c_{11}	$\lambda^8 + \lambda^2 m^6$	0	8	6	8	-2	4	$k^2 q_2$
c_{15}	$\lambda^6 + \lambda^4 m^2$	0	6	2	6	-4	-2	q_2^2
c_{16}	$\lambda^4 m^2$	0	4	2	6	-4	-2	$k q_2^2$
c_{17}	$\lambda^4 + \lambda^2 m^4$	0	4	4	6	-2	2	$q_1^2 q_2$
c_{18}	$\lambda^4 m^2$	0	4	2	6	-4	-2	$q_1 q_2^2$

In der Tabelle kann man zwischen zwei wagenrechten Strichen den folgenden Koeffizienten gegen den vorhergehenden vernachlässigen, wenn er in keiner Spalte eine höhere Größenordnung aufweist. Außerdem kann man vernachlässigen: c_9 und c_{11} gegen c_3 , c_{10} gegen c_7 , c_{15} und c_{17} gegen c_4 , c_7 und c_{13} gegen c_2 . Von unsrer Knickbedingung bleibt nur noch übrig

$$c_1 + c_2 k = c_3 q_1 + c_4 q_2. \tag{26'}$$

Die darin vorkommenden Koeffizienten können leicht aus (25) berechnet werden. Sie heißen

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (1 - \nu^2) \lambda^4, \\ c_2 &= (\lambda^2 + m^2)^4 - 2(\nu \lambda^6 + 3 \lambda^4 m^2 + (4 - \nu) \lambda^2 m^4 + m^6) + (2(2 - \nu) \lambda^2 m^2 + m^4), \\ c_3 &= m^2 (\lambda^2 + m^2)^2 - (3 \lambda^2 m^2 + m^4), \\ c_4 &= \lambda^2 (\lambda^2 + m^2)^2 + \lambda^2 m^2, \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

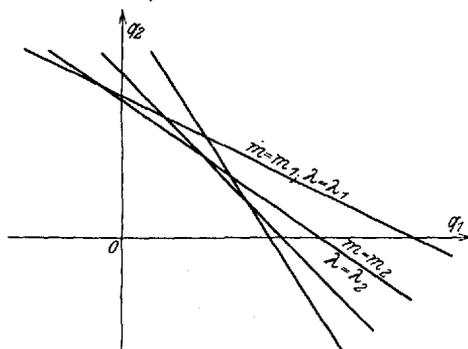


Abb. 12. Darstellung der Knickbedingung (26') durch ein Diagramm mit geraden Linien.

wenn man durch einen allen gemeinsamen Faktor durchdividiert und außerdem alle Summanden streicht, die nach der Tabelle vernachlässigt werden können (Glieder mit λ^2 in c_2, c_3, c_4).

Die Beziehung (26') ist in den Lasten linear, so daß man zu einer schönen Darstellung kommt: Man trägt sich q_1 und q_2 als rechtwinklige Koordinaten auf (Abb. 12) und kann dann zu jedem Wertepaar λ, m nach (26') eine Gerade zeichnen.

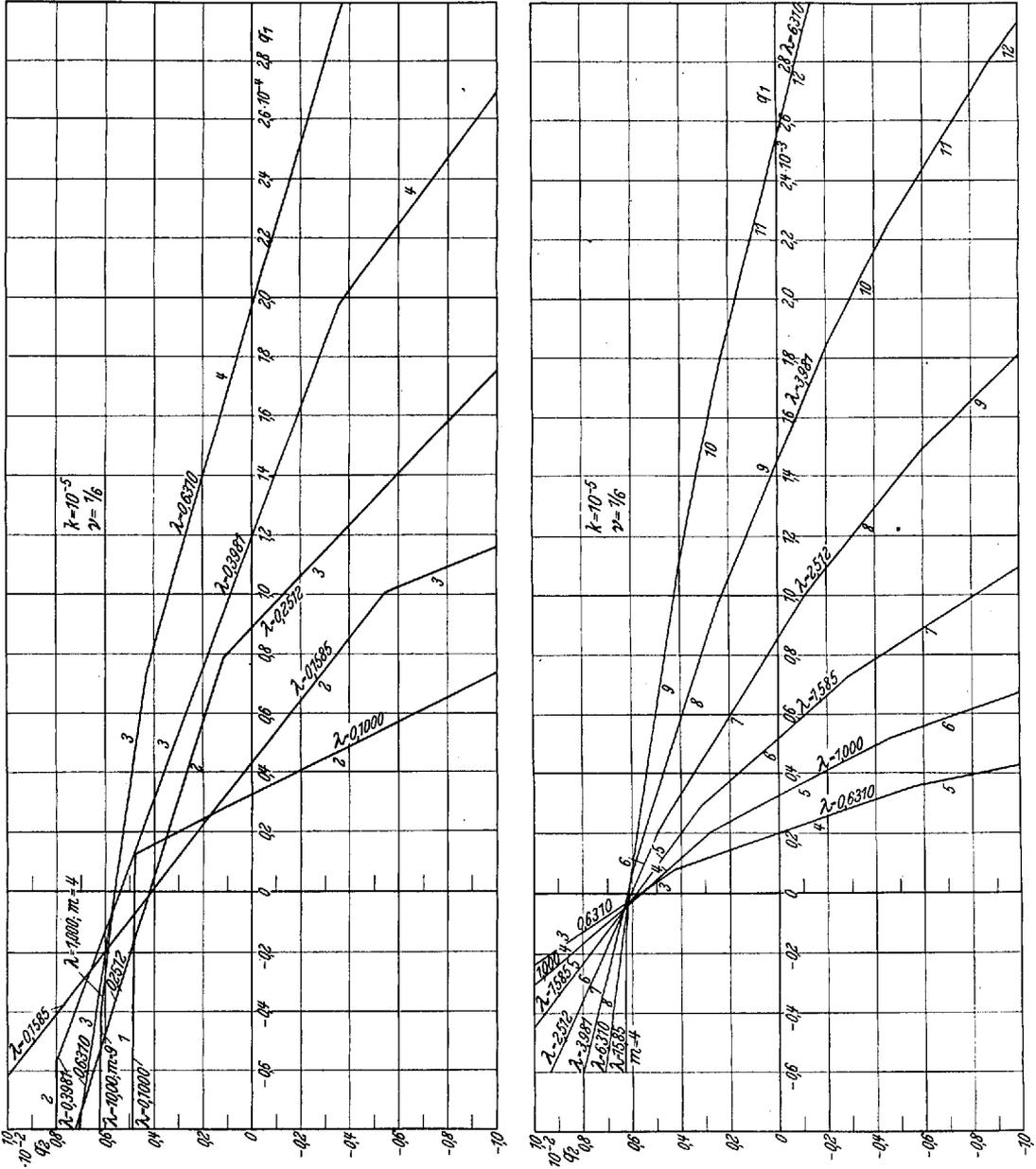


Abb. 13 a, b. Knickgrenze des Zylinders mit Axiallast und Manteldruck für einige Werte $\lambda = n\pi \frac{a}{l}$, $k = 10^{-5}$, $\nu = \frac{1}{6}$. Die an die Kurven angeschriebenen ein- und zweistelligen Zahlen bedeuten die Wellenzahlen m .

Diese Linie besagt: Wenn die Lasten q_1 und q_2 so weit gesteigert werden, daß der Diagrammpunkt die Gerade erreicht, so wird das elastische Gleichgewicht derart labil, daß die Schale mit einer durch die zugehörigen Parameter λ und m bestimmten Knickfigur ausknicken kann. Indem man zu vielen Werten λ und m die Geraden (26) in das Diagramm einträgt, findet man als eigentliche Knickgrenze ein Polygon, das dem Koordinatenursprung die konkave Seite zuehrt.

In den Abb. 13a, b sind für $h = 10^{-5}$, $\nu = \frac{1}{6}$ eine Reihe von Polygonen gezeichnet, die zu verschiedenen Werten λ gehören. Welche von diesen Kurven maßgebend ist, hängt von der Zylinderlänge l ab. Wenn der Zylinder mit einer Halbwelle in der Längsrichtung knicken soll, so muß $\lambda = \pi \frac{a}{l}$ sein. Wenn ein ganzes Vielfaches hiervon zu einer kleineren Knicklast führt, ist dieses maßgebend, und der Zylinder knickt mit mehreren Halbwellen in der Längsrichtung. Dies kommt, wie man sieht, nur bei überwiegendem Axialdruck in Frage, wo sich die λ -Polygone überschneiden.

Die Abbildungen zeigen, daß bei gleichzeitiger Wirkung von Axial- und Ringdrücken die Knicklast kleiner ist, als wenn nur einer von beiden da wäre, aber größer als man durch lineare Interpolation aus den beiden Grenzfällen $q_1 = 0$ und $q_2 = 0$ finden würde. Sie zeigen weiter, daß innerer Überdruck das Knicken unter axialer Last nur wenig beeinflusst, während axialer Zug die Knickfestigkeit stark erhöht.

4. Die Sonderfälle $m = 0$ und $m = 1$. Diese beiden Sonderfälle beanspruchen ein besonderes Interesse. Für $m = 0$ fällt in (18) die mittlere Gleichung weg, ebenso auch in (19). Die beiden verbleibenden liefern die Knickbedingung

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\nu\lambda - k\lambda^3 - q_1\lambda \\ -\nu\lambda - k\lambda^3 - q_1\lambda & 1 + k(\lambda^4 + 1) + q_1 - q_2\lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

Entwickelt gibt das mit denselben Vernachlässigungen wie früher

$$q_2 = \frac{1-\nu^2}{\lambda^2} + k(\lambda^2 - 2\nu). \quad (28')$$

Darin ist besonders auffällig, daß der Knickfall $m = 0$, d. h. das rotationssymmetrische Ausknicken, nur unter einem Axialdruck P zustande kommen kann, während ein gleichzeitiger Manteldruck p auf die Höhe der Knicklast ohne Einfluß ist. Gleichung (28') wurde schon von Timoshenko¹ angegeben. Sie lautet dort unter Benutzung unserer Bezeichnungen

$$q_2 = \frac{1-\nu^2}{\lambda^2} + k\lambda^2.$$

Das fehlende Glied erklärt sich aus den Annahmen über die Verschiebung u . Zahlenmäßig spielt es kaum eine Rolle; denn entweder kann es gegen λ^2 vernachlässigt werden (für große λ), oder der Summand ist überhaupt klein.

Der einfache Bau der Formel ermöglicht eine einfache Diskussion des ungünstigsten λ , die auch von Timoshenko herrührt und auf die hier kurz hingewiesen werden soll: Für einen unendlich langen Zylinder, für den jedes λ mit den Randbedingungen verträglich ist, erhält man aus $\frac{\partial q_2}{\partial \lambda} = 0$ den kritischen Wert

$$\lambda = \frac{1-\nu^2}{k}.$$

Für kleines a/l , also lange Zylinder, wird n eine große Zahl, so daß die Forderung der Ganzzahligkeit nicht mehr viel zu bedeuten hat. Man kommt so zu dem bekannten Ergebnis, daß für die zentralsymmetrische Knickfigur die Knicklast langer Zylinder von der Länge unabhängig ist. Wir werden bei der Besprechung der reinen Längsknickung allerdings sehen, daß der Möglichkeit einer solchen Knickfigur enge Grenzen gezogen sind, so daß man das Ergebnis nicht auf die Zylinderknickung schlechthin verallgemeinern darf.

Auch der Fall $m = 1$ verdient eine besondere Betrachtung. Die Knickbedingung kann ohne weiteres aus (25) abgelesen werden. Sie heißt

$$-q_1 + (\lambda^4 + 2)q_2 = (1 - \nu^2)\lambda^2 + k(\lambda^6 + 2(2 - \nu)\lambda^4). \quad (29)$$

¹ S. Timoshenko, Z. Math. Phys. 58 (1910) S. 337. K. v. Sanden u. F. Tölke, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 44.

Setzen wir zunächst einmal $q_1 = 0$, betrachten also den Fall einfacher axialer Beanspruchung! Dann ist die Knicklast

$$q_2 = (1 - \nu^2) \frac{\lambda^2}{2 + \lambda^4} + k \frac{\lambda^6 + 2(2 - \nu)\lambda^4}{2 + \lambda^4}.$$

Wenn der Zylinder sehr lang und $n = 1$, also $\lambda = \pi \frac{a}{l}$ eine kleine Zahl ist, so erhält man angenähert

$$q_2 = \frac{P}{D} = (1 - \nu^2) \frac{\pi^2 a^2}{2 l^2}$$

oder, wenn man für D seinen Wert einsetzt und die Gleichung so schreibt, daß links die ganze vom Zylinder getragene Last steht,

$$P \cdot 2 \pi a = E \delta a^3 \pi \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Das ist aber genau die Eulersche Knickformel¹ für einen Stab vom Trägheitsmoment $J = \delta a^3 \pi$. Besondere Beachtung verdienen die Randbedingungen: Während für $m \neq 1$ die Verzerrung der Zylinderränder infolge der Verschiebungen u nur eine nicht sehr wesentliche Verwölbung bedeutet, ist die Verschiebung $u_{Rand} = \pm A \cos \varphi$ eine freie Verdrehung des Querschnitts, frei deshalb, weil infolge $u'_{Rand} \equiv 0$ der Randwert der Längskraft \bar{N}_x beim Knicken unveränderlich ist, der als Stab aufgefaßte schlanke Zylinder also kein Spannungsmoment erhält.

Dies Ergebnis stellt eine Bestätigung der Rechnung dar und war nicht anders zu erwarten. Um so überraschender sind die Folgerungen, die man für $q_2 = 0$ aus (29) ziehen kann. Man erhält

$$q_1 = - (1 - \nu^2) \lambda^2. \quad (30)$$

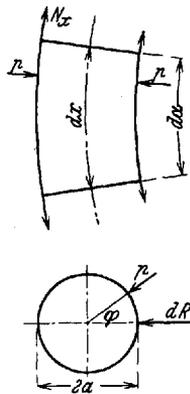
Das Glied mit k kann fortbleiben, da wir unter der selbstverständlichen Voraussetzung rechnen, daß q_1 eine kleine Zahl ist, so daß auch λ^2 klein sein muß. Gleichung (30) sagt aus, daß ein hinreichend langes zylindrisches Rohr unter innerem Überdruck seitwärts ausknicken kann. Da das Glied mit k keinen Einfluß hat, ist dieser Vorgang von der Biegungsteifigkeit der Schale unabhängig, also ein reines Dehnungsknicken. Eine Überschlagsrechnung zeigt die Abmessungen, bei denen es eintritt: Nehmen wir für Eisen $q_1 = 10^{-3}$, $\nu = \frac{1}{3}$, so wird

$$\lambda = \sqrt{\frac{9}{8} 10^{-3}} = 3,35 \cdot 10^{-2}$$

und

$$l = \frac{\pi a}{3,35 \cdot 10^{-2}} = 94 a.$$

Abb. 14. Längs- und Querschnitt durch ein Längenelement eines schlanken Zylinders.



Der Zylinder muß also etwa 50 Durchmesser lang sein, damit ein solches Knicken vor Überschreitung der Elastizitätsgrenze eintreten kann. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Schale keine Kräfte in Achsrichtung führt, der auf die Abschlußböden wirkende Druck also anderweitig aufgenommen wird. Ein Achszug vergrößert die Knicklast, und wenn man λ^4 gegen 2 vernachlässigt, ist für $q_2 = \frac{q_1}{2}$ nach (29) schon kein Knicken unter innerem Überdruck mehr möglich.

Das Knicken eines Systems, in dem überhaupt keine Druckspannungen vorkommen, ist für den ersten Augenblick einigermaßen merkwürdig. Man kann sich den Vorgang jedoch anschaulich klar machen. Abb. 14 zeigt ein Stück der Zylinderschale von der Länge dx , dessen ursprünglich parallele Begrenzungsschnitte infolge der Formänderung

¹ K. v. Sanden u. F. Tölke, a. a. O. S. 43.

einen Winkel $d\alpha$ einschließen. Die Resultierende der Manteldrücke ist für dieses Element

$$dR = - \int_0^{2\pi} p \cos \varphi (dx - a d\alpha \cos \varphi) a d\varphi = - p \pi a^2 d\alpha.$$

Aus der gezeichneten Verzerrung folgen auch Längskräfte $N_x = D \varepsilon_x = D \frac{a d\alpha \cos \varphi}{dx}$, die sich, wenn man den ganzen Zylinder einfach als Stab betrachtet, zu einem Biegemoment M zusammensetzen lassen:

$$M = \int_0^{2\pi} N_x a^2 \cos \varphi d\varphi = D \pi a^3 \frac{d\alpha}{dx}.$$

Für eine vorgegebene Deformation entsteht also eine bestimmte Querbelastung dR/dx des Rohres. Betrachtet man dieses als Träger auf zwei Stützen, so müssen die zu dieser Querlast gehörenden Angriffsmomente gleich den eben ausgerechneten Momenten der innern Kräfte sein. Ist das Rohr kürzer, so haben die innern Kräfte das Übergewicht und führen es in die gestreckte Lage zurück; ist es länger, so knickt es aus. Nehmen wir für eine überschlägliche Rechnung einmal an, daß dR/dx konstant sei längs des Zylinders, seine Achse also zu einem Kreis gebogen würde, so ist das Angriffsmoment in der Mitte

$$M_A = - \frac{l^2}{8} \frac{dR}{dx} = - \frac{pl^2}{8} a^2 \frac{d\alpha}{dx}$$

und aus der Gleichsetzung mit dem Spannungsmoment folgt für die Knickgrenze

$$\frac{pa}{D} = q_1 = - 8 \frac{a^2}{l^2}.$$

Das stimmt mit (30) einigermaßen überein, so daß die hier gegebene Erklärung das Wesentliche des Vorgangs trifft.

5. Der Sonderfall der reinen Längsknickung. In der in Ziff. 3 gegebenen Lösung sind auch die beiden Sonderfälle der reinen Axialbelastung (Längsknickung) und der reinen Mantellast (Querknickung) enthalten. Sie besonders zu untersuchen, lohnt sich nicht nur, weil sie leicht diskutierbare Ergebnisse liefern, so daß von da aus ein bequemer Überblick über das Ganze erhalten werden kann, sondern auch deshalb, weil diese Fälle in älteren Arbeiten schon behandelt sind, mit deren Ergebnissen hier verglichen werden kann.

Die reine Längsknickung ergibt sich, indem man in (26') $q_1 = 0$ setzt, und liefert

$$q_2 = \frac{(1 - \nu^2) \lambda^4 + k[(\lambda^2 + m^2)^4 - 2(\nu \lambda^6 + 3 \lambda^4 m^2 + (4 - \nu) \lambda^2 m^4 + m^6)] + (2(2 - \nu) \lambda^2 m^2 + m^4)}{\lambda^2(\lambda^2 + m^2)^2 + \lambda^2 m^2}. \quad (31)$$

Dabei ist $\lambda = n\pi \frac{a}{l}$ im wesentlichen die reziproke Wellenlänge für die Faltung des Zylinders in Längsrichtung. Man trägt zweckmäßig in einem Diagramm die dimensionslose Knicklast $q_2 = \frac{P}{D}$ als Funktion der halben Wellenlänge $\frac{l}{na} = \frac{\pi}{\lambda}$ auf. Jeder Wert m liefert eine Kurve. Das ist in Abb. 15 für $k = 10^{-5}$ und $\nu = \frac{1}{6}$ geschehen, und zwar unter Verwendung logarithmischer Maßstäbe in beiden Richtungen, um das ganze Gebiet bequem überblicken zu können. Von jeder Kurve interessiert immer nur das Stück, in dem ihre Ordinaten kleiner sind, als die jeder andern. Das Diagramm lehrt folgendes:

In seinem linken Teil (links von $\frac{l}{na} = 0,17$) decken sich verschiedene Kurven fast ganz. Sie steigen alle nach links hin rasch an und gehen für $\frac{l}{na} \rightarrow 0$ gegen ∞ . Bedenkt man, daß am linken Ende der Abbildung die Höhe der Halbwelle (Höhe des Zylinders) 2,5% des Durchmessers ist, so vermutet man, daß sich hier der Knickvorgang von der

Knickung eines ebenen Bleches nicht mehr viel unterscheidet. Die Formeln dafür sind in II, 7 abgeleitet, und die zugehörige Diagrammlinie ist in Abb. 15 aufgenommen.

Rechts von $\frac{l}{na} = 0,17$ bis nahe an die rechte Grenze der Zeichnung besteht die Knickgrenze aus einer Wellenlinie, die im großen ganzen schwach fällt. Es ist dies das Gebiet der eigentlichen Zylinderknickung. Ein Beispiel möge die Dinge erläutern: Es sei ein Zylinder der Länge $l = 9a$ gegeben. Dann liest man bei Abszisse $\frac{l}{na} = 9,00$ auf der Kurve $m = 3$ ab, daß er mit einer Halbwelle in Längsrichtung und 3 ganzen Wellen auf dem Umfang bei einer Last von $q_2 = 6,1 \cdot 10^{-3}$ ausknicken kann. Verfolgt man das Diagramm nach links, so sieht man, daß die Knickung mit $n = 2$ Halbwellen in Längsrichtung bei Abszisse $\frac{l}{na} = 4,5$ eine etwas höhere Knicklast $q_2 = 6,25 \cdot 10^{-3}$ erfordert, während für $n = 3$, also $\frac{l}{na} = 3,00$, die Knicklast nur $q_2 = 5,65 \cdot 10^{-3}$ beträgt. Dabei ist $m = 4$. Eine Ausbiegung mit noch

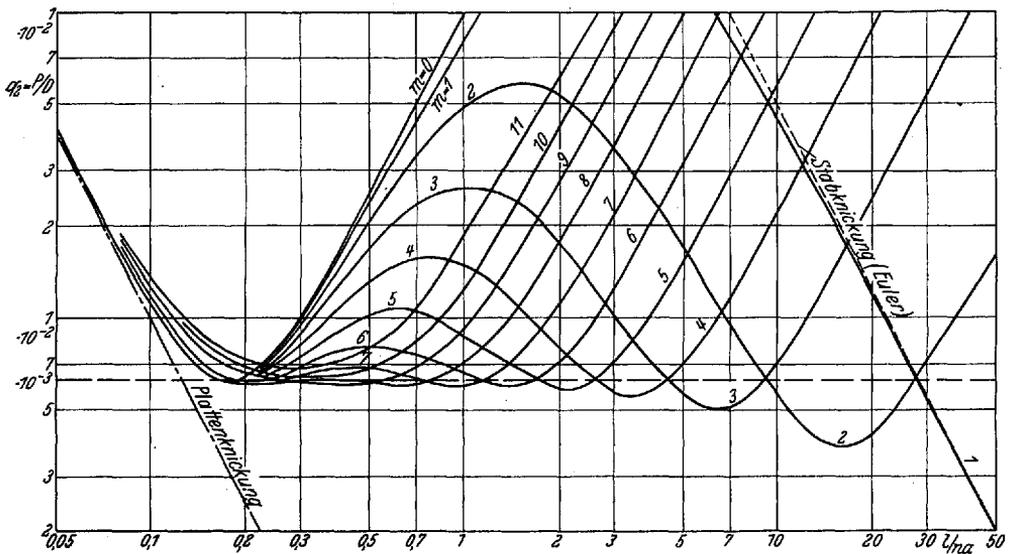


Abb. 15. Knickgrenze für axiale Belastung als Funktion der Zylinderlänge. $k = 10^{-3}$, $\nu = \frac{1}{8}$.

kürzeren Wellen würde wieder höhere Lasten erfordern, so daß $n = 3$, $m = 4$ zu erwarten wäre. Gleichzeitig aber sieht man, daß die Unterschiede der kritischen Lasten für die verschiedenen Knickfiguren keineswegs groß sind. Da nun bei allen Knickvorgängen, ganz besonders aber beim Schalenknicken, kleine Unregelmäßigkeiten in Form und Elastizität des Körpers und unvermeidbare Unsauberkeiten in den Randbedingungen (Auftreten von Biegemomenten vor Erreichung der Knicklast) großen Einfluß haben können, so darf man sich nicht wundern, wenn bei einem Knickversuch zwar die Knicklast innerhalb der erreichbaren Grenzen richtig ausfällt, die Knickfigur aber von der ungünstigsten etwas abweicht.

Das Knickdiagramm hat schließlich ganz rechts noch einen dritten, wesentlich andern Teil, der von der Kurve $m = 1$ gebildet wird. Diese Kurve strebt nicht, wie die andern, rechts nach oben, sondern nach unten. Wir sahen in Ziffer 4, daß wir hier zur Eulerknickung geführt werden, d. h. zur Knickung des Zylinders als Ganzem. Die der Eulerschen Knickformel entsprechende Linie ist in die Abbildung eingetragen. Man erkennt, wie sich ihr die Kurve $m = 1$ asymptotisch nähert.

Da von jeder der in Abb. 15 eingetragenen Linien immer nur derjenige Teil in Betracht kommt, in dem sie kleinere Knicklasten liefert als die andern Kurven, so braucht für den

praktischen Gebrauch auch nur dieser gezeichnet zu werden. Das ist in Abb. 16 für verschiedene Werte von $k = \frac{\delta^2}{12 a^2}$ geschehen.

Die Knickung der Kreiszyklinder unter zentrischer Axiallast ist schon 1911 von R. Lorenz¹ behandelt worden. Mit seiner Gleichung stimmt die hier gefundene Gleichung (31) nicht überein, wohl aber im wesentlichen mit Gleichung (59) der mehrfach zitierten Arbeit von K. v. Sanden und F. Tölke. Die geringen Abweichungen sind auf die verschiedene Fassung der in Abschnitt I gegebenen Grundgleichungen zurückzuführen.

6. Der Sonderfall der reinen Querknickung. Der andere Sonderfall, der sich aus den Ergebnissen von Ziffer 3 gewinnen läßt, ist die Knickung des Zylinders unter äußerem Überdruck, wie sie z. B. bei Flammrohren vorkommt. Mit $q_2 = 0$ liefert (26') die Knickformel

$$q_1 = \frac{(1 - \nu^2) \lambda^4 + k[(\lambda^2 + m^2)^4 - 2(\nu \lambda^6 + 3 \lambda^4 m^2 + (4 - \nu) \lambda^2 m^4 + m^6) + (2(2 - \nu) \lambda^2 m^2 + m^4)]}{m^2(\lambda^2 + m^2)^2 - (3 \lambda^2 m^2 + m^4)}. \quad (32)$$

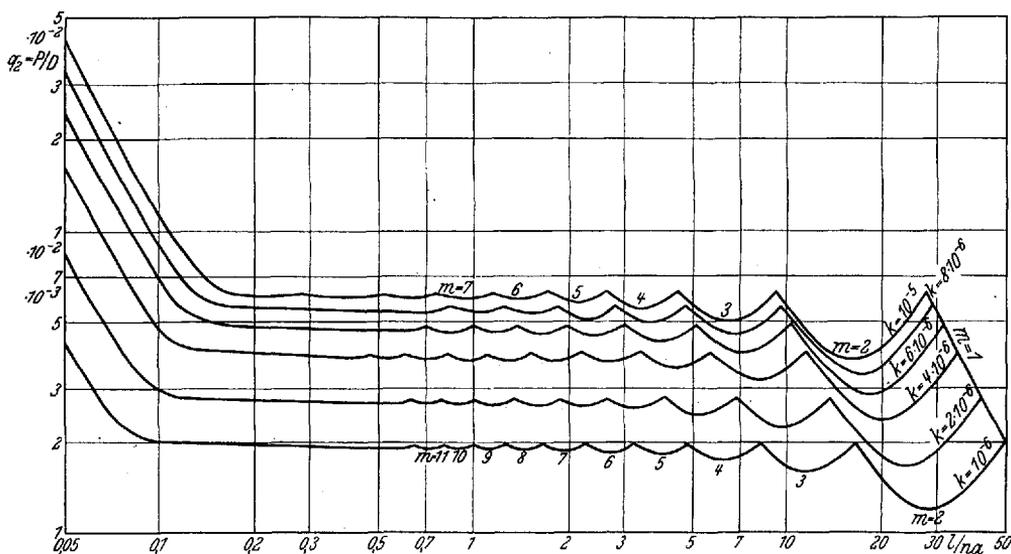


Abb. 16. Knickgrenze für axiale Belastung als Funktion der Zylinderlänge l/na und der Steifigkeitszahl $k = \frac{\delta^2}{12 a^2}$. $\nu = \frac{1}{11}$.

Diese Gleichung kann ebenso behandelt werden wie (31). Das entsprechende Diagramm zeigt Abb. 17. Auch hier ist das Ergebnis wieder eine aus vielen Kurvenstücken zusammengesetzte Wellenlinie. Die ganze Abbildung zerfällt in zwei verschiedene Teile.

Der linke, etwa bis $\frac{l}{na} = 20$, ist der eben erwähnte gebrochene Linienzug. Wenn man den Zylinder kürzer macht, steigt die Knicklast unbegrenzt, wobei gleichzeitig die Zahl m der Ringwellen zunimmt, während in der Längsrichtung immer nur eine Halbwellen auftritt. Der andere, rechte Teil des Diagramms wird ganz von der Kurve $m = 2$ gebildet, die für große l eine wagerechte Asymptote hat. Solche Asymptoten haben alle Kurven, jedoch sind sie für $m > 2$ bedeutungslos. Die zugehörigen Lasten sind die kritischen Lasten eines durch Außendruck beanspruchten kreisförmigen Stabes (unendlich langer Zylinder = Zylinder ohne Endversteifungen). Die Höhe des asymptotischen Knickdruckes findet man aus (32) durch Grenzübergang

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} q_1 = k(m^2 - 1)$$

¹ R. Lorenz, Physik. Z., 12, I (1911) S. 241.

und für $m = 2$

$$\lim q_1 = 3k. \quad (33)$$

Das stimmt mit der aus der Baustatik bekannten Formel für die Knicklast des Kreisstabes überein:

$$\hat{p} = 3 \frac{K}{a^3}.$$

Die Knickung des Zylinders unter Außendruck wurde schon durch R. v. Mises untersucht¹. Seine Formel stimmt mit Gleichung (32) gut überein, jedoch nicht vollständig.

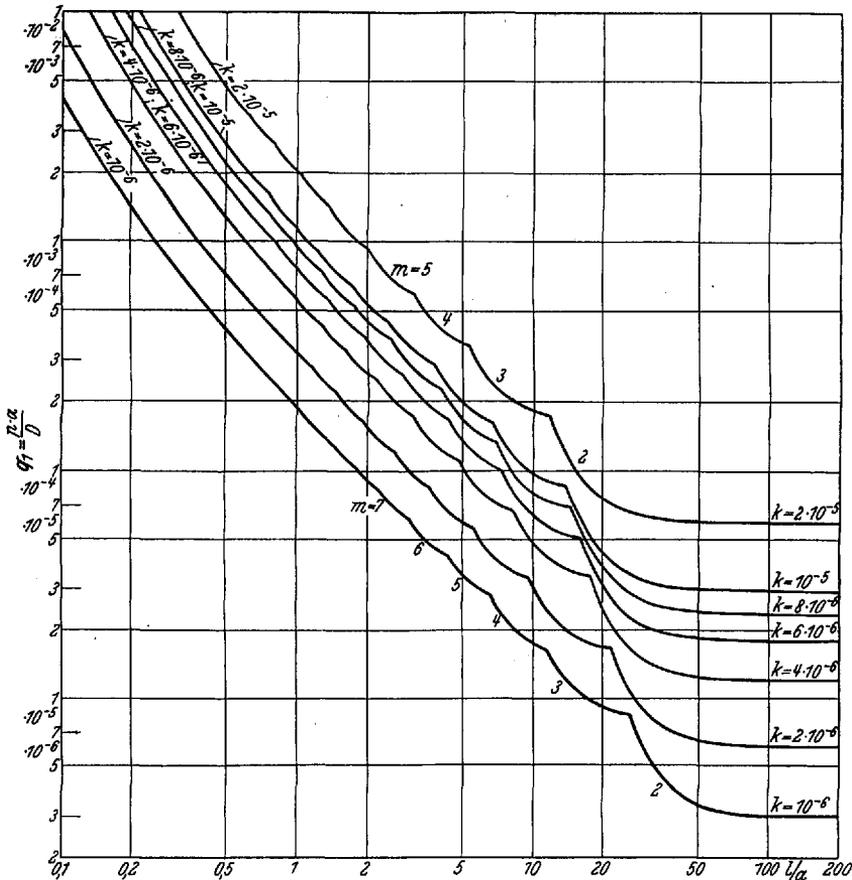


Abb. 17. Knickgrenze für Manteldruck als Funktion der Zylinderlänge l/a und der Steifigkeitszahl $k = \frac{\delta^2}{12 a^2}$. $\nu = \frac{1}{6}$.

Das wird auch nicht besser, wenn man noch berücksichtigt, daß bei R. v. Mises nicht N_x , sondern $\varepsilon_x = 0$ gesetzt ist. Der Unterschied ist jedoch unwesentlich und kommt in den numerischen Ergebnissen nicht zum Ausdruck. Er dürfte seine Ursachen in der etwas abweichenden Formulierung der in Abschnitt I dargestellten Grundformeln haben. Dasselbe gilt auch von Gleichung (74) der Arbeit von K. v. Sanden und F. Tölke², die von unserer Gleichung (32) nur in numerisch unwesentlichen Gliedern abweicht.

7. Zusammenhang mit der Plattenknickung. Aus den Ergebnissen von II, 1 bis 3 kann man durch einen Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ leicht die bekannten Formeln der Plattenknickung herleiten. Wir vollziehen ihn in der Knickdeterminante (25). Von den darin vorkommenden

¹ R. v. Mises, Z. VDI 58 (1914) S. 750.

² K. v. Sanden u. F. Tölke, a. a. O. S. 47.

Größen gehen gleichzeitig mit dem Zylinderradius auch λ und m (bei konstanten Wellenlängen) nach ∞ . Wir führen darum folgende neuen Bezeichnungen ein:

Länge einer Halbwelle in x -Richtung: $l_x = \frac{l}{n} = \frac{\pi a}{\lambda}$,

Länge einer Halbwelle in φ -Richtung: $l_y = \frac{\pi a}{m}$.

Von der Koordinate φ gehen wir zu der kartesischen $y = a\varphi$ in der Plattenebene über, setzen $k = \frac{K}{D} a^{-2}$ und erzeugen die Ringkräfte \bar{N}_φ nicht mehr durch eine Mantellast p , sondern durch die Randlast $P_y = -\bar{N}_\varphi$ von der gleichen Art wie P , das wir jetzt P_x nennen wollen. Mit all diesen Änderungen lautet die Knickdeterminante

$$\begin{vmatrix} \left[2 \frac{\pi^2}{l_x^2} a^2 + (1-\nu) \frac{\pi^2}{l_y^2} a^2 + \frac{K}{D} (1-\nu) \frac{\pi^2}{l_y^2} - 2 \frac{P_y}{D} \frac{\pi^2}{l_y^2} a^2 \right] & \left[-(1+\nu) \frac{\pi^2}{l_x l_y} a^2 \right] & \left[-2\nu \frac{\pi}{l_x} a + \frac{K}{D} \left((1-\nu) \frac{\pi^3}{l_x l_y^3} - 2 \frac{P_y}{D} \frac{\pi}{l_x} a \right) \right] \\ \left[-(1+\nu) \frac{\pi^2}{l_x l_y} a^2 \right] & \left[2 \frac{\pi^2}{l_y^2} a^2 + (1-\nu) \frac{\pi^2}{l_x^2} a^2 + \frac{K}{D} 3(1-\nu) \frac{\pi^2}{l_x^2} - 2 \frac{P_x}{D} \frac{\pi^2}{l_x^2} a^2 \right] & \left[2 \frac{\pi}{l_y} a + \frac{K}{D} (3-\nu) \frac{\pi^3}{l_x^3 l_y} a \right] \\ \left[-2\nu \frac{\pi}{l_x} a + \frac{K}{D} \left((1-\nu) \frac{\pi^3}{l_x l_y^3} - 2 \frac{P_y}{D} \frac{\pi}{l_x} a \right) \right] & \left[2 \frac{\pi}{l_y} a + \frac{K}{D} (3-\nu) \frac{\pi^3}{l_x^3 l_y} a \right] & \left[2 + 2 \frac{K}{D} \left(\frac{\pi^4}{l_x^4} a^2 + 2 \frac{\pi^4}{l_x^2 l_y^2} a^2 + \frac{\pi^4}{l_y^4} a^2 - 2 \frac{\pi^2}{l_y^2} + \frac{1}{a^2} \right) - 2 \frac{P_y}{D} \left(\frac{\pi^2}{l_y^2} a^2 - 1 \right) - 2 \frac{P_x}{D} \frac{\pi^2}{l_x^2} a^2 \right] \end{vmatrix}.$$

Dividiert man jetzt jede Zeile durch $\pi^2 a^2$, die letzte noch außerdem durch 2, und macht man dann den Grenzübergang $a \rightarrow \infty$, so erhält man als Knickbedingung

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{2}{l_x^2} + \frac{1-\nu}{l_y^2} - \frac{2 P_y}{l_y^2 D} \right] & \left[-\frac{1+\nu}{l_x l_y} \right] & 0 \\ \left[-\frac{1+\nu}{l_x l_y} \right] & \left[\frac{2}{l_y^2} + \frac{1-\nu}{l_x^2} - \frac{2 P_x}{l_x^2 D} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{K}{D} \pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 - \frac{1 P_x}{l_x^2 D} - \frac{1 P_y}{l_y^2 D} \right] \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante zerfällt. Wenn der zweireihige Minor verschwindet, so findet ein biegunsfreies Knicken statt ($w = 0$), das dem Labilwerden einer Longitudinalschwingung entspricht. Entwickelt man die Determinante, so erkennt man, daß dabei $\frac{P_x}{D}$ und $\frac{P_y}{D}$ nicht mehr klein gegen 1 sein können. Ein solches Knicken ist daher nur in einem Material möglich, dessen Elastizitätsmodul von der Größenordnung seiner Bruchspannung ist, kann aber auch dann mit unserer Theorie nicht beherrscht werden. Es bleibt dann als Knickbedingung nur die, daß das letzte Glied der Determinante verschwindet. Führt man statt der Halbwellenlängen l_x, l_y die Zahlen $n_x = \frac{b_x}{l_x}$ und $n_y = \frac{b_y}{l_y}$ der Halbwellen ein, die auf einer rechteckigen Platte $b_x b_y$ Platz haben (Abb. 18), so lautet die Gleichung

$$P_x \frac{n_x^2}{b_x^2} + P_y \frac{n_y^2}{b_y^2} = K \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{b_x^2} + \frac{n_y^2}{b_y^2} \right)^2.$$

Das ist die bekannte Knickbedingung der nach Abb. 18 belasteten Platte¹.

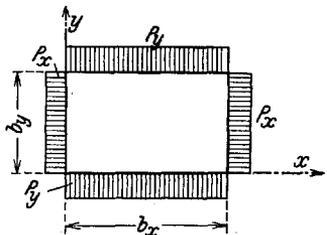


Abb. 18. Parallel zu beiden Kantenrichtungen gedrückte Platte.

¹ Auerbach-Hort, Handb. d. physik. u. techn. Mechanik, Bd. IV, 1, S. 130.

Die ausführliche Diskussion ist von Timoshenko geliefert worden. Wir wollen hier nur den Fall $P_y = 0$, $b_y \gg b_x$ näher untersuchen. Dann ist

$$P_x = K \pi^2 \left(\frac{n_x}{b_x} + \frac{b_x}{n_x} \frac{n_y^2}{b_y^2} \right)^2 \approx K \pi^2 \frac{n_x^2}{b_x^2}.$$

Das wird ein Minimum für $n_x = 1$, und wir kommen für die Knickung des unendlich langen Streifens auf die Formel

$$P_x = E \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\pi^2}{b_x^2}. \quad (34)$$

Das ist die Eulerformel für einen Stab der Breite 1 mit dem Trägheitsmoment $J = \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ und der Länge b_x . Der Nenner $(1-\nu^2)$ rührt von der Behinderung der Querdehnung her und tritt hier ebenso auf wie beim Übergang von der gebogenen Rechteckplatte auf den Sonderfall der Balkenbiegung. Gleichung (34) stellt die asymptotische Form dar, der sich die Knickbedingung für die Zylinderschale nähert, wenn der Radius wächst und die Länge abnimmt. Mit den beim Zylinder benutzten Bezeichnungen heißt sie

$$q_2 = \pi^2 k \left(\frac{a}{l} \right)^2. \quad (35)$$

In dieser Form ist sie in das Diagramm für die reine Längsknickung, Abb. 15, aufgenommen worden.

III. Ursachen eines Biegebungsbruches vor Erreichen der Knicklast axial gedrückter Zylinder.

1. Behinderung der Querdehnung am Rande. Bei Herleitung der Knickbedingung mußten wir die Voraussetzung machen, daß die für den Knickvorgang geltenden Randbedingungen erst bei Erreichung der Knicklast in Kraft treten sollten. Es muß insbesondere auch die Radialverschiebung w am Zylinderrande ungehindert möglich sein, während die Last von Null auf den kritischen Wert anwächst. Diese Bedingung ist praktisch wegen der aussteifenden Böden so gut wie unerfüllbar. Wir wollen in diesem Abschnitt die Folgen untersuchen, die die Behinderung der Ringdehnung hat, und beschränken uns zur Vereinfachung der Rechnung auf den Fall des reinen Längsdruckes. Die dabei gewonnenen grundsätzlichen Erkenntnisse lassen sich natürlich auch auf jede andere Belastung übertragen. Man kann sie sogar zum Teil bei der Knickung des geraden Druckstabes wiederfinden, wo sie aber bedeutungslos und deshalb unbeachtet geblieben sind.

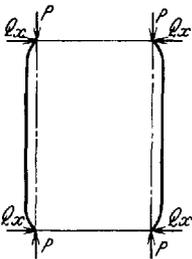


Abb. 19. Behinderung der Querdehnung am Rande der Zylinderschale. Die gestrichelte Linie bezeichnet den spannungslosen Zustand.

Wenn wir eine Kreiszyinderschale der Belastung $P = q_2 D$ unterwerfen, so wird sich ihr Durchmesser infolge der Querdehnung etwas vergrößern, nämlich von $2a$ auf $2(a+w)$, wenn wir jetzt im Gegensatz zum Abschnitt II unter u, v, w die vom spannungslosen Zustand aus gemessenen Verschiebungen verstehen. An den beiden Zylinderenden ist wegen der Böden $w = 0$. Die Ränder sind also etwas eingeschnürt, und es wird dort eine Querkraft Q_x eingetragen (Abb. 19). Zur Berechnung der Formänderung der Schale und der dabei auftretenden Schnittkräfte dienen die homogenen Differentialgleichungen (17), zu denen aber jetzt inhomogene Randbedingungen treten. Die Gleichungen vereinfachen sich wegen $q_1 = 0$ und wegen der Drehsymmetrie bedeutend und heißen

$$\left. \begin{aligned} u'' + \nu w' - k w''' &= 0, \\ \nu u' + w - k (u''' - w''' - w) + q_2 w'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Randbedingungen heißen für den frei drehbaren, unverschieblichen Rand

$$M_x = Dk(w'' - u') = 0, \quad w = 0,$$

beides für $x = 0$ und für $x = l$. Eine fünfte Bedingung fordert, daß für irgend ein x die Längskraft

$$N_x = \frac{D}{a}(u' + \nu w - kw'') = -P$$

ist, und schließlich können wir noch für $x = 0$ vorschreiben $u = 0$. Dadurch wird eine starre Verschiebung ausgeschlossen, die sonst noch in der Lösung enthalten wäre.

Wir lösen die Differentialgleichung durch einen Exponentialansatz

$$u = A e^{\lambda x/a}, \quad w = C e^{\lambda x/a},$$

der sie in zwei gewöhnliche Gleichungen für A und C überführt:

$$\begin{aligned} A \cdot \lambda^2 + C \cdot (\nu \lambda - k \lambda^3) &= 0, \\ A \cdot (\nu \lambda - k \lambda^3) + C \cdot (1 + k + k \lambda^4 + q_2 \lambda^2) &= 0. \end{aligned}$$

Aus dem Verschwinden ihrer Determinante folgt die Gleichung für λ :

$$\lambda^6 + \frac{q_2 + 2\nu k}{k} \lambda^4 + \frac{1 - \nu^2}{k} \lambda^2 = 0.$$

Sie hat die Doppelwurzel

$$\lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

und ferner die vier Wurzeln

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{q_2}{2k} - \nu \pm \frac{1}{2k} \sqrt{q_2^2 - 4(1 - \nu^2)k}}. \tag{37}$$

Wir wollen zunächst den Fall untersuchen, daß

$$q_2^2 < 4(1 - \nu^2)k$$

ist. Dann werden diese vier Wurzeln alle komplex und können

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \alpha \pm i \beta$$

geschrieben werden, wobei α und β reelle, positive Zahlen sind, die für gegebenes k und q_2 in bekannter Weise ausgerechnet werden können. An der oberen Grenze unseres Lastbereichs, die wir hier ausschließen wollen, wird $\alpha = 0$.

Die vier Partikularlösungen $e^{\lambda_1 x/a}$ bis $e^{\lambda_4 x/a}$ können unter Einführung neuer Integrationskonstanten durch ein von ihnen linear abhängiges Lösungssystem ersetzt werden, das aus Produkten von reellen e -Funktionen und Kreisfunktionen besteht:

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{-\alpha \frac{x}{a}} \left[A_1 \cos \beta \frac{x}{a} + A_2 \sin \beta \frac{x}{a} \right] \\ &+ e^{-\alpha \frac{l-x}{a}} \left[A_3 \cos \beta \frac{l-x}{a} + A_4 \sin \beta \frac{l-x}{a} \right] + A_5 + A_6 \frac{x}{a}, \\ w &= e^{-\alpha \frac{x}{a}} \left[C_1 \cos \beta \frac{x}{a} + C_2 \sin \beta \frac{x}{a} \right] \\ &+ e^{-\alpha \frac{l-x}{a}} \left[C_3 \cos \beta \frac{l-x}{a} + C_4 \sin \beta \frac{l-x}{a} \right] + C_5 + C_6 \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichungen ergeben sich zwischen den A und C lineare Beziehungen:

$$\begin{aligned} A_{1,3} &= C_{1,3} \alpha \left(k - \frac{\nu}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - C_{2,4} \beta \left(k + \frac{\nu}{\alpha^2 + \beta^2} \right), \\ A_{2,4} &= C_{1,3} \beta \left(k + \frac{\nu}{\alpha^2 + \beta^2} \right) + C_{2,4} \alpha \left(k - \frac{\nu}{\alpha^2 + \beta^2} \right), \\ A_6 &= -\frac{1}{\nu} C_5, \quad C_6 = 0. \end{aligned}$$

A_5 geht nicht in die Differentialgleichungen ein und wird wegen der sechsten Randbedingung Null. Die vorletzte Randbedingung ergibt, wenn man die Lösung einsetzt und die A_m durch die C_m ausdrückt,

$$C_5 = \frac{\nu}{1 - \nu^2} q_2 a,$$

und die vier andern führen nach geringer Umformung auf folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \cos \frac{\beta l}{a} + C_4 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \sin \frac{\beta l}{a} &= -C_5, \\ -C_2 + C_3 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \sin \frac{\beta l}{a} - C_4 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \cos \frac{\beta l}{a} &= C_5 \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2 \alpha \beta} - \frac{1 - \nu^2}{2 \nu \alpha \beta} \right), \\ C_1 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \cos \frac{\beta l}{a} + C_2 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \sin \frac{\beta l}{a} + C_3 &= -C_5, \\ C_1 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \sin \frac{\beta l}{a} - C_2 e^{-\frac{\alpha l}{a}} \cos \frac{\beta l}{a} - C_4 &= C_5 \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2 \alpha \beta} - \frac{1 - \nu^2}{2 \nu \alpha \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Dieser Gleichungssatz, der zu gegebener Last Durchbiegungen und Spannungen der Schale bestimmt, hat eine eindeutige, endliche und im allgemeinen von Null verschiedene Lösung, solange seine Koeffizientendeterminante nicht verschwindet. Wir wollen zeigen, daß das nicht geschehen kann, solange α und β , wie vorausgesetzt, reell und von Null verschieden sind:

Entwickelt man die Determinante Δ und rechnet die Glieder zusammen, so erhält man

$$\Delta = 4 \alpha^2 \beta^2 \left[1 - 2 e^{-2 \frac{\alpha l}{a}} \cos 2 \beta \frac{l}{a} + e^{-4 \frac{\alpha l}{a}} \right],$$

und das kann für $q_2^2 < 4(1 - \nu^2)k$ nur verschwinden, wenn die Klammer Null wird, wenn also

$$\cos 2 \alpha \frac{l}{a} = \cos 2 \beta \frac{l}{a}$$

ist. Das ist für kein reelles Wertepaar α, β möglich. Die erste Nullstelle der Determinante liegt mit $\alpha = 0$ gerade an der hier ausgeschlossenen oberen Grenze des betrachteten Lastbereichs.

Für hinreichend kleine Lasten ist α klein und noch fast bis an die Grenze des Bereichs kann man $e^{-\alpha l/a}$ gegen 1 vernachlässigen. Dann zerfällt das System (39) in zwei von einander unabhängige Gleichungspaare. Mechanisch heißt das, daß an jedem Schalenrand eine Zone vorhanden ist, in der Biegemomente und Querkräfte auftreten, und daß diese Störung vom Rande weg schnell abklingt, so daß sich die Vorgänge an den beiden Enden des Zylinders gegenseitig nicht beeinflussen. Erst nahe an der Grenze $q_2^2 = 4(1 - \nu^2)k$ wachsen die Störungszonen in der Zylindermitte zusammen. In Abb. 20 ist dieser Vorgang dar-

gestellt. Die letzte Abbildung entspricht gerade der Grenzlast. Zu ihrer Berechnung ist unser Ansatz nicht mehr zu gebrauchen, da dann alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ebenso alle Partikularlösungen paarweise gleich sind. Die Ergänzung des Ansatzes durch Glieder der Form $x e^{\frac{\mu}{a} x}$ ist bekannt, und wir wollen auf die Durchrechnung des Sonderfalles verzichten und uns damit begnügen, die Ergebnisse anzugeben.

Vorher aber wenden wir uns dem wichtigen Fall zu, daß die Last

$$q_2^2 > 4(1 - \nu^2)k$$

ist. Dann sind λ_1 bis λ_4 rein imaginär und wir schreiben

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = i\mu_1, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = i\mu_2,$$

wobei μ_1 und μ_2 reell sind und aus (37) leicht entnommen werden können. Die Lösung heißt damit

$$u = \bar{A}_1 \cos \mu_1 \frac{x}{a} + \bar{A}_2 \cos \mu_2 \frac{x}{a} - \bar{A}_3 \sin \mu_1 \frac{x}{a} - \bar{A}_4 \sin \mu_2 \frac{x}{a} + A_5 \frac{x}{a},$$

$$w = \bar{C}_1 \sin \mu_1 \frac{x}{a} + \bar{C}_2 \sin \mu_2 \frac{x}{a} + \bar{C}_3 \cos \mu_1 \frac{x}{a} + \bar{C}_4 \cos \mu_2 \frac{x}{a} + C_5,$$

und durch Einsetzen in die Differentialgleichungen findet man zwischen den \bar{A} und \bar{C} die Beziehungen:

$$\bar{A}_1 = \bar{C}_1 \frac{\nu + k\mu_1^2}{\mu_1}, \quad \bar{A}_2 = \bar{C}_2 \frac{\nu + k\mu_2^2}{\mu_2}, \quad A_5 = -\frac{1}{\nu} C_5.$$

Zur Einführung der Randbedingungen empfiehlt es sich, das Koordinatensystem derart zu verschieben, daß die Zylinderenden bei $x = \pm \frac{l}{2}$ liegen. Die Randbedingung $N_x = -P$ für einen der Ränder ergibt für C_5 den früheren Wert, während die Forderungen $w = 0$ und $M_x = 0$ für $x = \pm \frac{l}{2}$ auf die folgenden vier Gleichungen führen:

$$\pm \bar{C}_1 \sin \frac{\mu_1 l}{2a} \pm \bar{C}_2 \sin \frac{\mu_2 l}{2a} + \bar{C}_3 \cos \frac{\mu_1 l}{2a} + \bar{C}_4 \cos \frac{\mu_2 l}{2a} = -C_5,$$

$$\pm \bar{C}_1 \mu_1^2 \sin \frac{\mu_1 l}{2a} \pm \bar{C}_2 \mu_2^2 \sin \frac{\mu_2 l}{2a} + \bar{C}_3 \mu_1^2 \cos \frac{\mu_1 l}{2a} + \bar{C}_4 \mu_2^2 \cos \frac{\mu_2 l}{2a}$$

$$\mp \bar{A}_1 \mu_1 \sin \frac{\mu_1 l}{2a} \mp \bar{A}_2 \mu_2 \sin \frac{\mu_2 l}{2a} - \bar{A}_3 \mu_1 \cos \frac{\mu_1 l}{2a} - \bar{A}_4 \mu_2 \cos \frac{\mu_2 l}{2a} = -\frac{1}{\nu} C_5.$$

Darin sind die \bar{A} nach den eben gegebenen Formeln durch die \bar{C} auszudrücken. Durch paarweises Addieren und Subtrahieren kann man das System in zwei von einander unabhängige Gleichungspaare spalten. Das eine mit den Unbekannten \bar{C}_3 und \bar{C}_4 gibt den Anteil der Durchbiegungen w , der zur Mittelebene $x = 0$ des Zylinders symmetrisch ist, während das andere Paar mit den Unbekannten \bar{C}_1 und \bar{C}_2 den antimetrischen Lösungsanteil liefert. Wir wollen die Gleichungspaare kurz als symmetrisches und antimetrisches bezeichnen.

Das symmetrische hat von Null verschiedene Absolutglieder. Es liefert in Fortsetzung der aus (32) erhaltenen Ergebnisse die unter steigenden Lasten weiter anwachsende Verbiegung des Zylinders, und wenn seine Determinante Null wird, so gehen die Durchbiegungen nach unendlich. Das geschieht, wie man leicht nachrechnet, wenn die Gleichung

$$(\nu - \mu_2^2) \cos \frac{\mu_1 l}{2a} \cos \frac{\mu_2 l}{2a} = (\nu - \mu_1^2) \cos \frac{\mu_1 l}{2a} \cos \frac{\mu_2 l}{2a}$$

erfüllt ist. Wegen $\mu_1 \neq \mu_2$ muß einer der Kosinus verschwinden, es muß also

$$\mu_1 \quad \text{oder} \quad \mu_2 = n \pi \frac{a}{l} \quad (40)$$

sein mit ganzzahligem, ungeradem n .

Das antimetrische Gleichungssystem ist homogen. Es liefert zur Deformation der Schale nur dann einen Beitrag, wenn seine Determinante Null ist, und dann hat dieser Beitrag eine unbestimmte Amplitude, gibt also eine Folge unendlich benachbarter Gleichgewichtslagen. Die Lasten q_2 , für die das eintritt, sind demnach regelrechte Knicklasten, bei denen ein stabiles Gleichgewicht in ein labiles übergeht. Als Bedingung für das Verschwinden der Determinante findet man leicht die eben angegebene Formel (40), jedoch diesmal mit geradem n .

Es bleibt noch der Grenzfall $q_2^2 = 4(1 - \nu^2)k$ zu besprechen. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung werden dann paarweise gleich. Die Durchrechnung, die nichts Neues bietet, wollen wir hier übergehen und nur erwähnen, daß sie wieder auf die Formel (40) führt, die aber mit der Nebenbedingung $\mu_1 = \mu_2$ nur für ganz bestimmte Zylinderlängen erfüllt werden kann.

Durch Einsetzen von μ_1 oder μ_2 nach (37) bestätigt man leicht, daß (40) mit der in II, 4 gefundenen Formel (28') identisch ist. Das Hinzutreten der Randstörung infolge behinderter Querdehnung hat also die Wirkung, daß diejenigen Knicklasten, zu denen eine gerade Halbwellenzahl gehört, Knicklasten bleiben, während die andern in Unendlichkeitsstellen der Formänderungen und Spannungen übergehen. Deren mechanischer Sinn ist bekanntlich der, daß die kleinste von ihnen die Höchstlast darstellt, bis zu der ein Biegebuch vollendet sein muß. Die Stelle größter Beanspruchung liegt, wie die Abb. 20 erkennen lassen, beim ersten Maximum von w . Die dort herrschende

Spannung übertrifft den Mittelwert $\sigma = \frac{P}{\delta}$ um so mehr, je größer die Durchbiegungen werden, d. h. je näher man der kritischen Last kommt, und besonders dann, wenn diese weit über der Fließgrenze liegt,

wird der Zylinder an dieser Stelle nachgeben, noch ehe die mittlere Spannung die Elastizitätsgrenze erreicht hat. Die erste Welle wird dann einfach plattgedrückt, und mit steigender Last schreitet die Störung von einer Biegungswelle zur andern weiter, bis der ganze Zylinder, von den Enden ausgehend, zusammengebrochen ist. Diese Erscheinung ist zuerst von J. Geckeler bei Knickversuchen gefunden und von ihm und L. Föppl erklärt worden¹.

Die Knicklasten, die wir für gerade n fanden, und deren kleinste für geeignete Zylinderlängen unterhalb der ersten Unendlichkeitsstelle liegen kann, haben praktisch keine Bedeutung, da die kleinsten kritischen Lasten alle so nahe beieinander liegen, daß sie sich experimentell nicht trennen lassen. Bei dem in Abb. 20 dargestellten Zylinder liegt z. B. die Grenzlast $q_2 = 2\sqrt{(1 - \nu^2)k}$, die Knicklast des unendlich langen Zylinders, bei $6,2327 \cdot 10^{-3}$, die erste wirkliche Knicklast des endlichen Zylinders mit $n = 14$ bei $6,2320 \cdot 10^{-3}$ und die erste Unendlichkeitsstelle mit $n = 15$ bei $6,286 \cdot 10^{-3}$. Wie man den

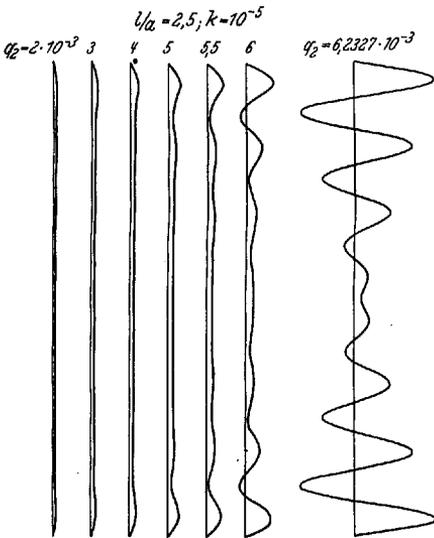


Abb. 20. Fortschreitende Verbiegung eines axial gedrückten Zylinders mit behinderter Querdehnung am Rande. $k = 10^{-5}$, $\frac{l}{a} = 2,5$. Die Durchbiegungen sind 34-fach vergrößert.

¹ J. Geckeler, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928) S. 341. L. Föppl, Sitzungsber. d. Bayr. Ak. d. Wissensch. (1926) S. 27.

Zahlen ansieht, ist logarithmische Rechnung nötig, um die Unterschiede zwischen ihnen zu finden. Die wesentliche Erkenntnis, die diese Rechnung vermittelt, ist die, daß hier ein Gleichgewicht labil werden kann, das nicht biegungsfrei ist¹. Man kann diese Erscheinung auch am gewöhnlichen Knickstab wiederfinden, worauf wir hier jedoch nicht eingehen wollen.

Bei der Anwendung der in Abschnitt II entwickelten Theorie hat man darauf zu achten, daß sie nur dann gilt, wenn die aus ihr errechnete Knicklast unterhalb der Last liegt, die den eben geschilderten Biegungsbruch erzeugt. Dazu ist nötig, daß zur kleinsten Knicklast eine Ringwellenzahl $m > 0$ gehört, und daß die kleinste zu $m = 0$ gehörende Knicklast erst in größerem Abstände folgt. Außerdem wird die Knickerscheinung natürlich um so besser der Theorie entsprechen, je weiter unter der Quetschgrenze sie auftritt. Die Knickformel gilt trotz der am Rande behinderten Querdehnung exakt, solange auch an der Stelle größter Biegungsbeanspruchung noch kein Fließen begonnen hat.

Auf andere Belastungen, insbesondere auf den radialen Manteldruck, lassen sich die hier gefundenen Ergebnisse sinngemäß übertragen. Die Verhältnisse liegen dort für das Zustandekommen wirklicher Knickvorgänge günstiger, weil auch bei größeren Wandstärken die kritische Last noch unter der Fließgrenze liegt.

2. Abweichungen von der vollkommenen Zylinderform. Die im Abschnitt IV besprochenen Versuche zeigen, daß es auch für die in Richtung der Achse gedrückten Zylinder gelungen ist, die eben dargelegten Anforderungen zu erfüllen. Die Zylinder sind nicht zusammengefallen, sondern ausnahmslos verbeult mit Ringwellenzahlen $m > 0$. Trotzdem wurden nach Tabelle 3 die rechnerischen Knicklasten nur zu 50 bis 60% erreicht. Die Erklärung dafür ist in Formfehlern der Zylinderschalen zu suchen, deren Einfluß wir jetzt ermitteln wollen.

Die Mittelfläche der Schale sei bestimmt durch die Abweichungen U , V , W ihrer Punkte von einer genauen Zylinderfläche. Wir machen dafür den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} U &= 0, \\ V &= V_0 \sin m_0 \varphi \sin \lambda_0 \frac{x}{a}, \\ W &= W_0 \cos m_0 \varphi \sin \lambda_0 \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Die Amplituden V_0 und W_0 können beliebig vorgegeben werden. Es würde genügen, $V_0 = 0$ zu setzen und die Schale durch die eine Koordinate W allein zu beschreiben. Für die Rechnung ist es zweckmäßiger, V_0 so zu wählen, daß das Bogenelement in φ -Richtung für Schale und Zylinder dasselbe ist:

$$V_0 = - \frac{W_0}{m_0}.$$

Die Schale werde wieder nur durch einen Längsdruck P belastet. Wenn die Abweichungen V , W von der genauen Form die Größenordnung elastischer Durchbiegungen haben, und das wollen wir annehmen, so müssen wir zur Berechnung der entstehenden Spannungen von den Differentialgleichungen (17) ausgehen. Dabei ist zu beachten, daß die darin enthaltenen Verschiebungen u , v , w , soweit sie mit den Lasten q_1 , q_2 multipliziert sind, Abweichungen der elastisch deformierten Schale von der Zylinderform darstellen, hier also

¹ Zusatz bei der Korrektur: Ein ähnliches Problem findet sich bei F. Schleicher, Stabilität leicht gekrümmter Rechteckplatten. Abh. Intern. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau, Bd. I, S. 433, Zürich 1932. Eine typisch nichtlineare Aufgabe, die auch zum Labilwerden eines Biegunsgleichgewichts führt, hat E. Chwalla behandelt: Sitzungsber. d. Ak. d. Wissensch., Wien, II a, 140 (1931) S. 163.

durch $u + U, v + V, w + W$ zu ersetzen sind, während die andern Summanden der Gleichungen die durch die elastischen Verschiebungen ausgedrückten Schnittkräfte sind, die auch hier wieder von den elastischen Verschiebungen allein abhängen. Die Differentialgleichungen unseres Problems heißen also

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v'' + \nu w' + k \left(\frac{1-\nu}{2} u'' - w''' + \frac{1-\nu}{2} w''' \right) &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' + w' + k \left(\frac{3}{2} (1-\nu) v'' - \frac{3-\nu}{2} w''' \right) - q_2 v'' &= q_2 V'', \\ \nu u' + v' + w + k \left(\frac{1-\nu}{2} u''' - u''' - \frac{3-\nu}{2} v''' + w'''' + 2 w'''' + w'' + 2 w'' + w \right) & \\ &+ q_2 w'' = -q_2 W''. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Die Gleichungen sind inhomogen. Wir können sofort eine Partikularlösung angeben:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos m_0 \varphi \cos \lambda_0 \frac{x}{a}, \\ v &= B \sin m_0 \varphi \sin \lambda_0 \frac{x}{a}, \\ w &= C \cos m_0 \varphi \sin \lambda_0 \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Setzt man das ein, so erhält man ein System von drei linearen, nicht homogenen Gleichungen für A, B, C . Die linken Seiten sind dieselben wie in (19), jedoch mit λ_0 und m_0 statt λ und m , und die rechten Seiten heißen $0, -q_2 \lambda_0^2 V_0, q_2 \lambda_0^2 W_0$. Die Koeffizienten enthalten zum Teil die Last q_2 . Die Absolutglieder sind der Last und den Fehleramplituden V_0, W_0 proportional. Daraus folgt: Die in der Schale entstehenden Nebenspannungen, d. h. die Spannungen abzüglich der gleichmäßigen Druckspannung P/δ , sind proportional der Abweichung von der Zylinderform, proportional den Lasten jedoch nur so lange, als die q_2 -Glieder in den Koeffizienten vernachlässigbar klein sind. Wird q_2 größer, so wachsen die Deformationen und die Nebenspannungen schneller und gehen nach unendlich, wenn die Nennerdeterminante des Gleichungssystems Null wird. Die Last, bei der das geschieht, kennen wir schon. Es ist die zu $m = m_0, \lambda = \lambda_0$ gehörende Knicklast.

Zu der angegebenen Partikularlösung haben wir noch die in Ziff. I aufgestellte Lösung der homogenen Gleichungen zu addieren, mit der wir die Randbedingungen erfüllen können. Sie besteht, wie wir gesehen haben, aus einem linearen Teil, der die gleichmäßige elastische Zusammendrückung durch die Kraft N_x darstellt, und aus Exponentialfunktionen mit komplexem oder imaginärem Argument, durch die der Einfluß einer Randstörung wiedergegeben wird, die bei steigender Last schließlich den ganzen Zylinder erfaßt.

Die homogenen Differentialgleichungen haben aber für ausgezeichnete Werte q_2 noch die Lösungen (18). Für alle Knicklasten des Zylinders, für die $m \neq m_0$ oder $\lambda \neq \lambda_0$ ist, kann man diese Lösung mit beliebiger Amplitude addieren, erhält also eine Folge unendlich benachbarter Gleichgewichtslagen. Daraus ergibt sich folgendes:

Wenn die Schale in der durch (41) dargestellten Weise von der genauen Zylinderform etwas abweicht, so wachsen diese Abweichungen unter steigender Last immer stärker an und gehen nach unendlich, wenn q_2 die zu m_0, λ_0 gehörende kritische Last erreicht. Das ist die äußerste Grenze, bis zu der die Schale durch Überschreitung ihrer Biegefestigkeit zu Bruch gegangen sein muß. Ist für die niedrigste Knicklast der Schale entweder $m \neq m_0$ oder $\lambda \neq \lambda_0$ oder beides, so wird bei Erreichung dieser Last der sich vorbereitende Biegebruch unterbrochen, und es tritt eine regelrechte Knickung ein. Auch hier wird also ein elastischer Gleichgewichtszustand labil, der nicht biegefrei ist. Gleichzeitig mit diesen Vorgängen spielen sich die in Ziff. I behandelten ab. Sie treten nicht in Erscheinung,

wenn die kleinste kritische Last überhaupt weit genug unter der kleinsten Knicklast mit dreh-symmetrischer Knickfigur liegt.

Da, wie wir schon sahen, die Nebenspannungen den ursprünglichen Abweichungen von der genauen Form proportional sind, so kann man den Ansatz (41) zu einer biharmonischen Reihe erweitern. Mit andern Worten: Wenn man die Einflüsse der stets vorhandenen unregelmäßigen Formfehler einer Schale untersuchen will, so muß man diese Fehler der harmonischen Analyse unterwerfen und sie durch eine doppelt unendliche Reihe darstellen, deren Glieder wie (41) gebaut sind. Diejenigen Harmonischen, deren λ, m zu den kleinsten Knicklasten des Zylinders gehören, wachsen unter steigender Last am stärksten an und bestimmen die entstehende Ausbeulung. Wenn die zur allerkleinsten kritischen Last gehörende Harmonische eine besonders kleine Amplitude hat, so können die nächstfolgenden so stark hervortreten, daß sie schon lange vor Erreichung der Knickgrenze zu einem Biegungsbruch führen und das Aussehen der Bruchfigur bestimmen. Je geringer die Formfehler sind, und je weniger einzelne Harmonische überwiegen, um so besser wird man die rechnerische Knicklast und die zugehörigen Wellenzahlen m und n erreichen.

IV. Versuche zur Zylinderknickung.

Zweierlei kann man an Knickversuchen messen, die Lasten q_1, q_2 und die Wellenzahlen m, n . Beide sind den im vorigen Abschnitt geschilderten Störungen unterworfen, jedoch in sehr verschiedenem Maße. Abweichungen der Wellenzahlen rühren von Unvollkommenheiten der Schalenform her, durch die eine Knickfigur, deren kritische Last nur wenig über der kleinsten liegt, unter Umständen bevorzugt wird. Die Wellenzahlen weichen dabei immer nur wenig, meist nur um eine Einheit, vom Sollwert ab. Ganz anders steht es mit den Lasten. Sie können durch unvollkommene Randbedingungen und ungenaue Schalenform sehr wesentlich herabgedrückt werden. Das gilt natürlich ganz besonders für die Anwendung der Theorie auf technische Fälle, wo man es noch viel weniger in der Hand hat, einwandfreie Randbedingungen zu schaffen. Auch die gewöhnliche Stabknickung, bei der man im Laboratorium alle Exzentrizitäten vermeiden kann, muß in der Praxis in der Regel auf Stäbe angewandt werden, die mit andern Bauteilen biegeunfest verbunden sind und in die dadurch eine unerwünschte Exzentrizität hineingetragen wird. Diese Unstimmigkeiten müssen durch einen entsprechenden Sicherheitskoeffizienten abgegolten werden, für den die Stabknickung reiches Erfahrungsmaterial bietet und für

Tabelle 1.

Nr.	l cm	a cm	δ cm	Material	E kg/cm ²	k	p gem. kg/cm ²	p ber. kg/cm ²	Ver- hältnis %	m gem.	m ber.	Quelle
1	106,2	50,0	0,81	Eisen (?)	$2,10 \cdot 10^6$	$2,19 \cdot 10^{-5}$	24	31,8	76	5	5	1
2	91,4	68,55	0,635	Eisen (?)	$2,10 \cdot 10^6$	$7,13 \cdot 10^{-6}$	9,0	12,4	73	6	7—8	2
3	76,2	7,62	0,109	Eisen (?)	$2,10 \cdot 10^6$	$1,71 \cdot 10^{-5}$	4,6	4,68	98	—	3	3
4	76,2	10,16	0,109	Eisen (?)	$2,10 \cdot 10^6$	$9,62 \cdot 10^{-6}$	2,75	2,87	96	—	3	3
5	101,6	10,16	0,109	Eisen (?)	$2,10 \cdot 10^6$	$9,62 \cdot 10^{-6}$	2,18	2,08	105	—	3	3
6	0,635	1,334	0,0214	Messing	$9,84 \cdot 10^5$	$2,13 \cdot 10^{-5}$	38,2	85,8	44	8	> 10	4
7	2,03	1,334	0,0211	Messing	$9,84 \cdot 10^5$	$2,08 \cdot 10^{-5}$	16,9	19,25	88	4	6	4
8	4,04	1,334	0,0216	Messing	$9,84 \cdot 10^5$	$2,18 \cdot 10^{-5}$	10,4	10,3	101	4	4—5	4
9	7,12	1,334	0,0216	Messing	$9,84 \cdot 10^5$	$2,18 \cdot 10^{-5}$	4,61	6,29	73	3	3—4	4
10	11,18	1,334	0,0211	Messing	$9,84 \cdot 10^5$	$2,08 \cdot 10^{-5}$	3,23	3,29	98	2	3	4
11	17,80	1,334	0,0216	Messing	$9,84 \cdot 10^5$	$2,18 \cdot 10^{-5}$	2,26	2,16	105	2	2	4

- Quellen: 1. Bach, Z. VDI 38 (1894) S. 689; zitiert bei R. Lorenz, Physik. Z. 12, 1 (1911) S. 259.
 2. Richards, Engineer (1881) I, S. 429; abgedruckt bei Wehage, Dinglers polytechn. J. 242 (1881) S. 236; bei C. v. Bach, Maschinenelemente, 7. Aufl., S. 191. R. Lorenz, a. a. O. und R. v. Mises, Z. VDI 58 (1914) S. 754. 3. Fairbairn, Trans. Roy. Soc. Lond. (1858) S. 389; zitiert bei R. v. Mises, a. a. O.
 4. Gilbert Cook, Philos. Mag. 50 (1925) S. 848.

dessen Festsetzung auch die im folgenden wiedergegebenen Versuche einen Anhalt geben.

In der Literatur finden sich zahlreiche Mitteilungen über Versuchsergebnisse zu dem unter II, 6 behandelten Fall der Knickung unter Manteldruck. Davon müssen viele ausgeschieden werden, weil bei ihnen das Material schon vor Eintritt der Knickung über seine Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht war (plastisches Knicken!). Von den zum Vergleich mit der Theorie geeigneten gibt Tabelle 1 eine Auswahl.

Bei der Auswertung der Versuche wurde Abb. 17 benutzt, die im Hinblick auf ihre Verwendung im Eisenbetonbau für $\nu = \frac{1}{6}$ gerechnet ist, und durch Stichproben geprüft, daß der Einfluß der Querdehnungszahl unwesentlich ist. An den Versuchen erkennt man folgendes: Bei langen Zylindern (Nr. 5 und 11) wird die errechnete Bruchlast um einige Prozent überschritten, während die andern meist 5 bis 10% zu wenig geben. Die älteren Versuche (Nr. 1 und 2) geben geringere Bruchlasten. Ihre Urheber waren bestrebt, technischen Bedingungen möglichst nahe zu kommen und haben deshalb auf einwandfreie Randbedingungen und genaue Kreisform kein Gewicht gelegt. Die Zahlen zeigen, mit welcher Festigkeitsverminderung gegenüber sorgfältigen Laboratoriumsversuchen man in der Praxis etwa zu rechnen hat.

Ganz aus der Reihe fällt Nr. 6. Dieser Zylinder, der nur 44 % der rechnerischen Last getragen hat, ist nur $\frac{1}{4}$ Durchmesser lang. Wegen dieser geringen Länge und des hohen Knickdrucks muß natürlich die Behinderung der Ringdehnung an den Enden stark zur Wirkung kommen, so daß schon vor Erreichung der Stabilitätsgrenze ein Biegebungsbruch zustande kommt.

Im Anschluß an diese Versuche sind die von R. v. Mises gemachten zu erwähnen¹, bei denen eiserne Zylinder einem allseitigen, auch auf die Böden wirkenden Druck ausgesetzt wurden, so daß $q_1:q_2 = 2:1$ ist. Bei allen Versuchen war $k = 2,085 \cdot 10^{-6}$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm², $\nu = 0,30$. Es wurde hierfür ein Diagramm nach Art der Abb. 13 gezeichnet und daraus die Knicklasten entnommen. Sie sind in Tabelle 2 den gemessenen Werten gegenübergestellt.

Tabelle 2.

Nr.	<i>l</i> cm	<i>a</i> cm	δ cm	\hat{p} gem. kg/cm ²	\hat{p} ber. kg/cm ²	Ver- hältnis %	<i>m</i> gem.	<i>m</i> ber.
1	12,0	40,0	0,20	6,1	13,4	46	17	16—17
2	18,0	40,0	0,20	3,9	8,4	46	15	14
3	24,0	40,0	0,20	3,35	6,17	54	14	12—13
4	18,0	60,0	0,30	7,0	13,4	52	17	16—17
5	27,0	60,0	0,30	5,1	8,4	61	15	14
6	36,0	60,0	0,30	4,15	6,17	67	13—14	12—13
7	36,0	80,0	0,40	6,0	8,4	71	14—15	14
8	36,0	120,0	0,60	9,5	13,4	71	16	16—17
9	54,0	120,0	0,60	7,2	8,4	86	14—15	14

Unter den berechneten *m*-Werten sind zwei benachbarte angegeben, wenn der Diagrammpunkt in der Nähe einer Ecke der polygonalen Knickgrenze liegt. Die Versuche zeigen eine auffallend gute Übereinstimmung der gerechneten und beobachteten Knickfiguren, während die erreichten Bruchlasten um so stärker zurückbleiben, je kleiner die Versuchskörper sind. Die Abb. 6 der Originalarbeit läßt vermuten, daß durch die Art des Anschlusses der Böden Störungen in den Spannungszustand hineingetragen worden sind.

Über Versuche zur Längsknickung waren in der Literatur keine Zahlenangaben zu finden. Es sind deshalb einige Versuche gemacht worden. Die Verwendung von Metall-

¹ R. v. Mises, Stodola-Festschrift, S. 418ff., Zürich 1929.

Tabelle 3.

Nr.	Zylinder	<i>l</i> cm	<i>a</i> cm	δ cm	Material	<i>E</i> kg/cm ²	<i>h</i>	<i>P</i> gemessen kg/cm	<i>P</i> berechnet kg/cm	Verhältnis %	<i>m/n</i> gemessen	<i>m/n</i> berechnet
1	G II	15,9	4,5	0,05	Gummi	17	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$3,18 \cdot 10^{-3}$	$4,89 \cdot 10^{-3}$	65	2/3	4/1
2	G II	15,9	4,5	0,05	Gummi	17	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$2,83 \cdot 10^{-3}$	$4,89 \cdot 10^{-3}$	58	4/?	4/1
3	G 2a	7,9	4,5	0,05	Gummi	17	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$4,07 \cdot 10^{-3}$	$5,50 \cdot 10^{-3}$	74	5/3	5/1
4	Z I	18,42	4,58	0,0475	Zelluloid	25000	$8,95 \cdot 10^{-6}$	4,24	6,60	64	4/3	4/1
5	Z 2	18,38	4,58	0,0475	Zelluloid	25000	$8,95 \cdot 10^{-6}$	3,34	6,60	51	4/1	4/1
6	Z 3	18,22	3,64	0,0263	Zelluloid	25000	$4,35 \cdot 10^{-6}$	1,36	2,57	53	4/?	4/1
7	Z 4	18,20	3,63	0,0263	Zelluloid	25000	$4,38 \cdot 10^{-6}$	1,23	2,57	48	4/?	4/1
8	Z 5	18,42	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	5,00	7,72	65	4/2	4/1, 5/2
9	Z 5	18,42	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	3,89	7,72	50	3/1	4/1, 5/2
10	Z 6	18,42	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	4,03	7,72	52	4/?	4/1, 5/2
11	Z 6	18,42	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	3,83	7,72	50	3/1	4/1, 5/2
12	Z 7	18,38	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	4,03	7,72	52	—	4/1, 5/2
13	Z 8	18,38	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	4,17	7,72	54	—	4/1, 5/2
14	Z 5a	8,92	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	4,90	7,72	64	5/2	5/1
15	Z 6	18,42	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	3,69	7,72	58	4/1	4/1, 5/2
16	Z 7	18,38	4,58	0,0508	Zelluloid	25000	$1,03 \cdot 10^{-5}$	4,03	7,72	52	4/1	4/1, 5/2

zylindern kommt nicht in Frage. Um vor Erreichung der Elastizitätsgrenze zu knicken,

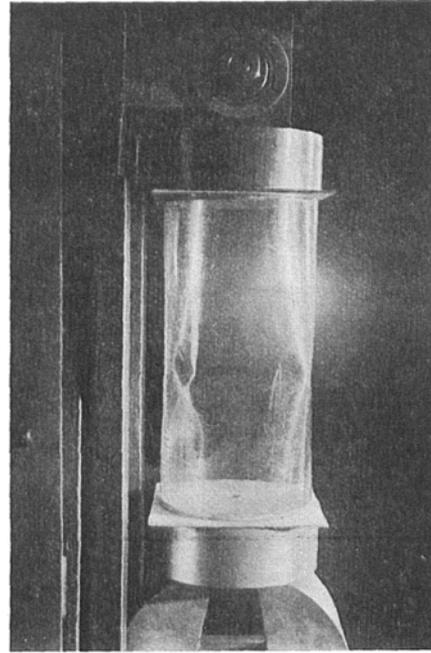


Abb. 21a. Zylinder Z 1, *m* = 4, *n* = 1.

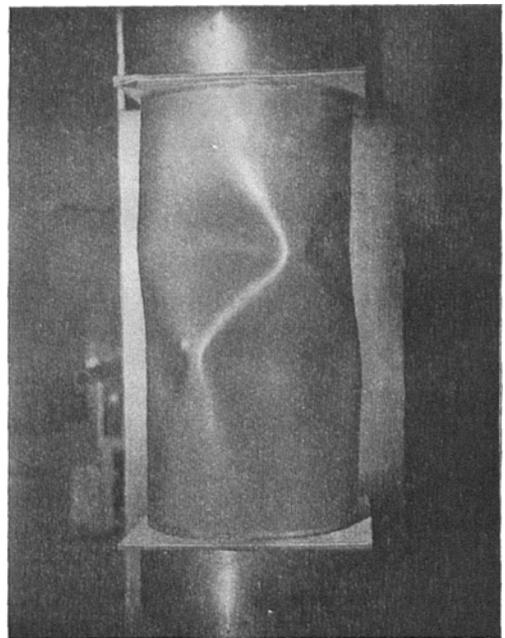


Abb. 21b. Zylinder Z 6, *m* = 4, *n* = 2.

müssen sie so geringe Wandstärken haben, daß kaum darauf zu hoffen ist, daß sie bei

Verwendung auch nur einigermaßen kreisrund sind. Es wurden deshalb zunächst Freihandversuche mit Gummizylindern gemacht, die aus etwa 0,5 mm starkem Gummi hergestellt sind. Sie sind in der Längsnaht stumpf geklebt und an den Enden durch Böden aus Pappe ausgesteift. Durch vorsichtiges Kleben konnte erreicht werden, daß diese Kanten scharnierartig wirkten, wie es die Theorie voraussetzt. Zur Belastung dienten vorsichtig und möglichst zentrisch aufgelegte Gewichte; oder die Zylinder wurden auf eine größere Briefwage gestellt und mit der Hand niedergedrückt. In beiden Fällen ist das Eigengewicht der Zylinder bei Bestimmung der Knicklast mit in Ansatz gebracht. Von diesen Versuchen, die wegen der Schwierigkeit der Kraftmessung auf Genauigkeit natürlich keinen Anspruch machen können, sind in Tabelle 3 einige wiedergegeben. Die Hauptschwierigkeit scheint nicht in den Randbedingungen zu liegen, sondern in der Herstellung und Erhaltung der genauen Zylinderform.

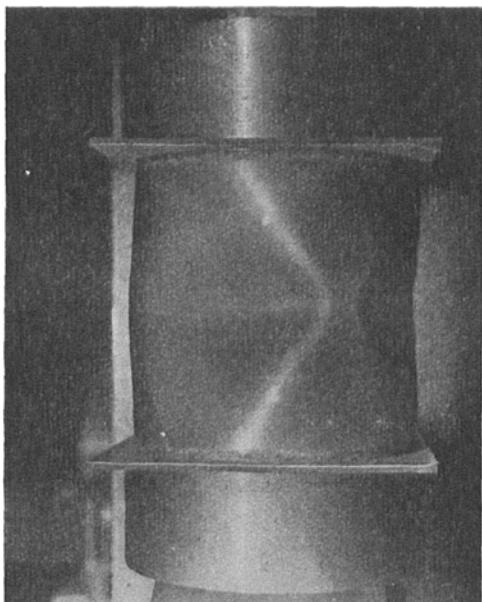


Abb. 21 c. Zylinder *Z 5a*, $m = 4$, $n = 1$.

Abb. 21 a bis c. Zelluloidzylinder nach Erreichung der Knicklast.

Für genauere Untersuchungen wurden Zylinder aus Zelluloid gebaut¹. Das Material wurde in ebenen Tafeln bezogen, in die gewünschte Form gebracht und durch längeres, gleichmäßiges Erwärmen entspannt. Die Längsnähte sind mit schwächerem Material doppelt verlascht und haben bei den Versuchen keinen merklichen Einfluß auf die Ausbildung der Knickfigur ausgeübt, so daß angenommen werden kann, daß sie weder zu schwach, noch zu steif geraten sind. Die Enden der Zylinder sind durch 4 mm starke Sperrholzböden ausgesteift, die mit dem Zelluloid fest verklebt sind. Eine scharnierartige Befestigung gelang nicht. Da die Versuchskörper mit einer Ausnahme (*Z 5a*) ziemlich lang sind, ist das nicht so wesentlich. Die Feststellung der genauen Abmessungen vor den Knickversuchen zeigte, daß es leider nicht gelungen ist, wirklich kreisrunde Zylinder zu erhalten. An den ausgesteiften Enden stimmten selbstverständlich alle Durchmesser überein, aber in der Mitte schwankten sie um 1 bis 2 mm. Das hat

natürlich die Knickfestigkeit ungünstig beeinflußt.

Zum Abpressen diente eine handgetriebene Amslermaschine mit 200 kg Meßbereich (Bruchlasten 28 bis 144 kg). Zwischen die Häupter der Presse und den Versuchskörper wurde eine Zwischenlage aus Gummi und Pappe eingeschoben, um eine gleichmäßige Druckverteilung zu erzielen. Die erreichten Knicklasten zeigt Tabelle 3, einige Knickfiguren Abb. 21.

Der Auswertung ist Abb. 16 zugrunde gelegt und wieder durch Stichproben festgestellt, daß Abweichungen der Querdehnungszahl fast einflußlos sind. Das Ergebnis der Versuche bestätigt, daß die Bruchvorgänge längsbelasteter Zylinderschalen starken Störungen ausgesetzt sind, worauf schon hingewiesen wurde. Die erreichten Bruchlasten liegen zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ der Sollwerte und zeigen, welche Tragfähigkeit technisch etwa zu erwarten ist, wo man es auch mit Körpern zu tun hat, die Abweichungen von der genauen Form und störende Randeinflüsse haben. Immerhin wäre es eine lohnende Aufgabe, die Herstellung der Versuchskörper so weit zu vervollkommen, daß die Abweichungen von

¹ Die Versuche wurden im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen ausgeführt.

der kreiszylindrischen Form nicht mehr merklich sind. Ein geeigneter Baustoff für derartige Versuche scheint im Zelluloid gefunden zu sein, da das Verhältnis des Elastizitätsmoduls zur Elastizitätsgrenze mit $2,5 \cdot 10^4 : 160 = 156$ jedenfalls sehr viel günstiger liegt als bei den meist verwendeten Metallen¹.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß die in der Literatur vorliegenden, besonders die englischen Versuche, die für die Querknickung aufgestellten Formeln gut bestätigen, daß die wenigen für gemischte Quer- und Längsbelastung vorhandenen Versuche zum Teil offenbar durch Randstörungen stark beeinflußt sind. Die Längsknickung, deren Bruchlasten ja um Zehnerpotenzen höher liegen als die der Querknickung, dürfte in technischen Anwendungen meist überhaupt erst nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze auftreten.

V. Anisotrope Zylinder.

1. Grundlagen der Spannungstheorie. Wenn die Spannungen in Richtung der beiden Koordinatenlinien sehr verschieden sind, so ist es oft zweckmäßig, dem konstruktiv durch aufgesetzte Rippen Rechnung zu tragen. Ist deren Abstand groß, so hat man eine Schale mit elastischen Längsträgern oder Spanten zu berechnen und tut das, indem man für einen zwischen zwei solchen Trägern liegenden Schalenstreifen die Differentialgleichungen aufstellt und den Zusammenhang zwischen Schale und Rippen als Randbedingung formuliert. Wesentlich einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn der Rippenabstand klein ist gegen die bei der Deformation in der dünnen Schale zu erwartenden Wellenlängen. Dann kann man den Grenzübergang zu unendlich dicht liegenden und entsprechend schwachen Rippen machen und die Schale samt ihren Verstärkungen als ein homogenes, aber anisotropes Kontinuum behandeln. Die Stabilität derartiger Schalen soll in diesem Abschnitt näher untersucht werden.

Wir fassen die Aufgabe möglichst allgemein und stellen das Elastizitätsgesetz auf für eine Schale, deren Schnitte $\varphi = \text{konst}$ und $x = \text{konst}$ die Abb. 22 a, b zeigen. Sie besteht aus plattenartigen, in der Abbildung eng schraffierten Teilen und zwei Scharen von Rippen, die in Richtung der Koordinatenlinien laufen. Ihr Querschnitt ist beliebig, aber innerhalb jeder der beiden Scharen überall derselbe.

Wir betrachten zunächst den Schnitt längs einer Erzeugenden. Er besteht aus der periodischen Wiederholung des in der Abbildung schraffierten Teils, dessen Breite gleich dem Abstand b_0 der Ringrippen ist. Die Breite der Rippen nennen wir b_1 . Sie ist eine Funktion der Koordinate z , die von einer beliebig gewählten „Mittelfläche“ $z = 0$, einem zu den Schalenlaibungen parallelen Zylinder, radial nach außen gemessen wird. Für die plattenartigen Teile, die wir Gurtplatten nennen wollen, ist $b_1 = b_0$. Außerdem brauchen wir noch die Breite b_2 , die ebenfalls von z abhängt und dadurch definiert ist, daß sie im Bereich der Gurtplatten $= b_0$, sonst $= 0$ ist. Ganz entsprechende Bezeichnungen können wir für den Schnitt $x = \text{konst}$ einführen, wollen da aber alles in Winkelmaß ausdrücken. Es ist also β_0 der zum Abstand zweier Längsrippen gehörende Zentriwinkel, β_1 die Winkelbreite dieser Rippen und β_2 für die Gurte $= \beta_0$, außerhalb derselben $= 0$.

Mit Hilfe dieser Querschnittsabmessungen definieren wir zwölf Größen, die das elastische Verhalten der Schale beschreiben sollen. Die Integrale sind stets über die ganze Schalenstärke zu erstrecken:

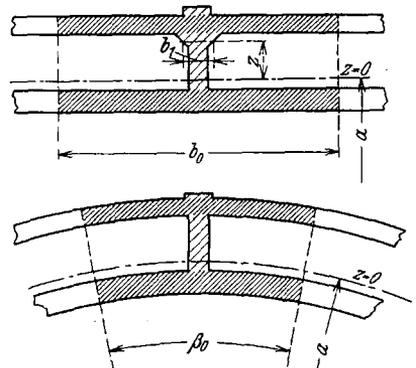


Abb. 22 a, b. Längs- und Querschnitt durch eine anisotrope Zylinderschale.

¹ Zahlenangaben nach G. Mesmer, Techn. Mech. Thermodyn. I (1930) S. 97.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Dehnungssteifigkeiten:} \quad D_{\varphi} &= \frac{E}{b_0} \int b_1 dz, & D_x &= \frac{E}{\beta_0} \int \beta_1 \frac{a+z}{a} dz, \\
 \text{Schubsteifigkeiten:} \quad D_{\varphi x} &= \frac{E}{b_0} \int b_2 dz, & D_{x\varphi} &= \frac{E}{\beta_0} \int \beta_2 \frac{a+z}{a} dz, \\
 \text{Momente erster Ordnung:} \quad S_{\varphi} &= \frac{E}{b_0} \int b_1 z dz, & S_x &= \frac{E}{\beta_0} \int \beta_1 \frac{a+z}{a} z dz, \\
 & S_{\varphi x} = \frac{E}{b_0} \int b_2 z dz, & S_{x\varphi} &= \frac{E}{\beta_0} \int \beta_2 \frac{a+z}{a} z dz, \\
 \text{Biegesteifigkeiten:} \quad K_{\varphi} &= \frac{E}{b_0} \int b_1 z^2 dz, & K_x &= \frac{E}{\beta_0} \int \beta_1 \frac{a+z}{a} z^2 dz, \\
 \text{Drillungssteifigkeiten:} \quad K_{\varphi x} &= \frac{E}{b_0} \int b_2 z^2 dz, & K_{x\varphi} &= \frac{E}{\beta_0} \int \beta_2 \frac{a+z}{a} z^2 dz.
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Diese Steifigkeiten sind nicht alle unabhängig voneinander; denn während b_1/b_0 und β_1/β_0 nichts miteinander zu tun haben, bezeichnen b_2 und β_2 beide dasselbe, nämlich die Lage der Gurtplatten. Es ist $\frac{b_2}{b_0} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$, und damit ergeben sich, wenn man in den rechts stehenden Formeln die Integrale in zwei Summanden spaltet, die Beziehungen

$$D_{x\varphi} = D_{\varphi x} + \frac{1}{a} S_{\varphi x}, \quad S_{x\varphi} = S_{\varphi x} + \frac{1}{a} K_{\varphi x},$$

und wenn man wie früher $\int z^3 dz$ vernachlässigt, folgt ferner

$$K_{x\varphi} = K_{\varphi x}.$$

In den Formeln (4a bis h) sind für die isotrope Schale die Längskräfte, Schubkräfte und Momente definiert. Diese Definitionen müssen für die Schale mit Rippen und mehreren Gurtplatten natürlich entsprechend abgeändert werden. Bei den Längskräften und Biegemomenten fügen wir einfach den Faktor b_1/b_0 oder β_1/β_0 unter dem Integral ein, bei den Schubkräften und Drillungsmomenten b_2/b_0 oder β_2/β_0 entsprechend der Annahme, daß sich die schmalen Rippen nicht an der Aufnahme von Schubspannungen beteiligen können. An dem in (1) niedergelegten Gesetz vom Ebenbleiben der Querschnitte und den daraus folgenden Formeln (3) halten wir fest. Dagegen wollen wir uns das Hookesche Gesetz (5) dadurch vereinfachen, daß wir $\nu = 0$ setzen. Diese Vernachlässigung der Querdehnung hat sich bei der isotropen Theorie für die in dieser Arbeit behandelten Lastfälle als ungefährlich erwiesen, so daß wir von der damit verbundenen Erleichterung der Rechnung gern Gebrauch machen werden, doch ist vor einer Anwendung der Formeln auf andere Fälle die Zulässigkeit der Vereinfachung erneut nachzuprüfen, da der Einfluß der Querdehnung gelegentlich sehr merklich werden kann, wie z. B. bei der Knickung des langen tordierten Zylinders¹.

Drückt man mit (5) und (3) die Spannungen in den Definitionsgleichungen der Schnittkräfte durch die Verschiebungen u, v, w der Mittelfläche aus, so erhält man z. B. für N_x :

$$N_x = \frac{1}{\beta_0} \int \beta_1 \sigma_x \frac{a+z}{a} dz = \frac{E}{\beta_0} \int \beta_1 \left(\frac{u'}{a} - z \frac{w''}{a^2} \right) \frac{a+z}{a} dz = \frac{1}{a} D_x u' - \frac{1}{a^2} S_x w''.$$

Ganz ähnlich verläuft die Rechnung bei den sieben andern Schnittkräften und liefert das folgende Elastizitätsgesetz der anisotropen Schale:

¹ E. Schwerin, Proc. 1st Int. Congr. appl. Mech. Delft (1924) S. 264. K. v. Sanden u. F. Tölke Ing.-Arch. 3 (1932) S. 62.

$$\left. \begin{aligned}
 N_\varphi &= D_\varphi \frac{v' + w}{a} - S_\varphi \frac{w + w''}{a^2} + K_\varphi \frac{w + w''}{a^3}, \\
 N_x &= D_x \frac{u'}{a} - S_x \frac{w''}{a^2}, \\
 N_{\varphi x} &= \frac{1}{2} \left[D_{\varphi x} \frac{u' + v'}{a} - S_{\varphi x} \frac{u' - v' + 2w''}{a^2} + K_{\varphi x} \frac{u' + w''}{a^3} \right], \\
 N_{x\varphi} &= \frac{1}{2} \left[D_{x\varphi} \frac{u' + v'}{a} - S_{x\varphi} \frac{u' - v' + 2w''}{a^2} + K_{x\varphi} \frac{u' + w''}{a^3} \right], \\
 M_\varphi &= -S_\varphi \frac{v' + w}{a} + K_\varphi \frac{w + w''}{a^2}, \\
 M_x &= -S_x \frac{u'}{a} + K_x \frac{w''}{a^2}, \\
 M_{\varphi x} &= \frac{1}{2} \left[-S_{\varphi x} \frac{u' + v'}{a} + K_{\varphi x} \frac{u' - v' + 2w''}{a^2} \right], \\
 M_{x\varphi} &= \frac{1}{2} \left[-S_{x\varphi} \frac{u' + v'}{a} + K_{x\varphi} \frac{u' - v' + 2w''}{a^2} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Wenn die Schale isotrop ist, so werden alle D und alle K untereinander gleich, können also ohne Index geschrieben werden. Die Momente erster Ordnung verhalten sich verschieden. Ihre Definitionsgleichungen liefern für die einfache, rippenlose Schale $S_\varphi = S_{\varphi x} = 0$, $S_x = S_{x\varphi} = \frac{K}{a}$. Setzt man das ein, so stimmen die Elastizitätsgleichungen (45) mit (7) überein, wenn man dort $\nu = 0$ setzt.

Die Anisotropie, die wir hier behandeln, ist nicht die allgemeinst mögliche. Ihre Besonderheit besteht darin, daß in den Formeln der Längskräfte keine Schubverzerrungen u', v' vorkommen, während die Schubkräfte von den Dehnungsgrößen u', v' und w unabhängig sind. Ebenso erzeugen Biegemomente keine Verwindung, Drillungsmomente keine Krümmungsänderung. Das liegt daran, daß unsere Koordinatenlinien und die Verstärkungsrippen parallel laufen. Wo das nicht der Fall ist, kompliziert sich die Theorie noch weiter. Das durch die Formeln (45) dargestellte elastische Verhalten ist im wesentlichen dasselbe wie die von **Huber** als Orthotropie bezeichnete Anisotropie von Platten¹.

2. Das Stabilitätskriterium. Die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am Schalenelement sind bei anisotropen Schalen nicht anders als bei der isotropen, also nach Elimination der Querkräfte die Gleichungen (15a bis d). Die vierte erweist sich auch hier als Identität, wenn man nach (45) die Verschiebungen einführt, während die drei andern die folgenden homogenen Differentialgleichungen für u, v, w geben:

$$D_x a^2 u'' + \frac{1}{2} (D_{\varphi x} a^2 - S_{\varphi x} a + K_{\varphi x}) u'' - p a^3 u'' + \frac{1}{2} (D_{\varphi x} a^2 + S_{\varphi x} a) v'' - S_x a w''' - \frac{1}{2} (S_{\varphi x} a - K_{\varphi x}) w''' + p a^3 w' = 0,$$

$$\frac{1}{2} D_{\varphi x} a^2 u'' + (D_\varphi a^2 + S_\varphi a) v'' + \frac{1}{2} (D_{\varphi x} a^2 + 3 S_{\varphi x} a + 3 K_{\varphi x}) v'' - P a^2 v'' - S_\varphi a w''' + D_\varphi a^2 w' - (S_{\varphi x} a + \frac{3}{2} K_{\varphi x}) w''' = 0,$$

$$(-S_{\varphi x} a + \frac{1}{2} K_{\varphi x}) u'' - S_x a u''' + p a^3 u' - S_\varphi a v''' + D_\varphi a^2 v' - (S_{\varphi x} a + \frac{3}{2} K_{\varphi x}) v'' + K_\varphi w'' + 2 K_{\varphi x} w''' + K_x w'''' - 2 (S_\varphi a - K_\varphi) w'' + (D_\varphi a^2 - S_\varphi a + K_\varphi) w + p a^3 w + p a^3 w'' + P a^2 w'' = 0,$$

die wieder durch den Ansatz (18) in drei lineare Gleichungen für die Amplituden A, B, C übergeführt werden können:

¹ M. T. Huber, Verh. 2. Int. Kongr. techn. Mech. Zürich (1926) S. 397.

$$\left. \begin{aligned}
 & A [2 D_x a^2 \lambda^2 + D_{\varphi x} a^2 m^2 - S_{\varphi x} a m^2 + K_{\varphi x} m^2 - 2 p a^3 m^2] + B [- D_{x\varphi} a^2 \lambda m] \\
 & \quad + C [- 2 S_x a \lambda^3 - S_{\varphi x} a \lambda m^2 + K_{\varphi x} \lambda m^2 - 2 p a^3 \lambda] = 0, \\
 & A [- D_{x\varphi} a^2 \lambda m] \\
 & \quad + B [2 D_{\varphi} a^2 m^2 + 2 S_{\varphi} a m^2 + D_{x\varphi} a^2 \lambda^2 + 2 S_{x\varphi} a \lambda^2 + K_{x\varphi} \lambda^2 - 2 P a^2 \lambda^2] \\
 & \quad + C [2 S_{\varphi} a m^3 + 2 D_{\varphi} a^2 m + 2 S_{x\varphi} a \lambda^2 m + K_{x\varphi} \lambda^2 m] = 0, \\
 & A [- 2 S_{\varphi x} a \lambda m^2 + K_{\varphi x} \lambda m^2 - 2 S_x a \lambda^3 - 2 p a^3 \lambda] \\
 & \quad + B [2 S_{\varphi} a m^3 + 2 D_{\varphi} a^2 m + 2 S_{x\varphi} a \lambda^2 m + K_{x\varphi} \lambda^2 m] \\
 & \quad + C [2 K_x \lambda^4 + 4 K_{x\varphi} \lambda^2 m^2 + 2 K_{\varphi} m^4 + 4 (S_{\varphi} a - K_{\varphi}) m^2 \\
 & \quad + 2 (D_{\varphi} a^2 - S_{\varphi} a + K_{\varphi}) - 2 p a^3 (m^2 - 1) - 2 P a^2 \lambda^2] = 0.
 \end{aligned} \right\} (46a-c)$$

Aus den neun Koeffizienten dieses Gleichungssystems wird in bekannter Weise die Knickdeterminante gebildet, deren Verschwinden die Knickgrenze anzeigt. Eine Auswertung der Knickbedingung in Diagrammen, wie sie für den isotropen Zylinder vorgeführt wurde, scheidet hier an der großen Zahl unabhängiger Veränderlicher. Wenn man eine Schale hat, die in beiden Richtungen Rippen besitzt, so bleibt nichts anderes übrig, als die der Konstruktion zu entnehmenden numerischen Werte der Steifigkeiten hier einzusetzen, damit die Determinante zu entwickeln und nach dem Muster der Abb. 12, 15 oder 17 für den speziellen Fall ein Diagramm zu entwerfen, aus dem die Knicklast entnommen werden kann.

3. Schale mit nur einer Platte und Ringrippen. Wir wollen die in Abb. 23 dargestellte Schale, die nur Ringrippen hat, als Sonderfall herausgreifen und näher untersuchen. Als Fläche $z = 0$ wählen wir die Mittelfläche der Platte. Zu ihr ist der Querschnitt symmetrisch,

und es wird $S_{\varphi} = S_{\varphi x} = 0$ und $S_x = \frac{K_x}{a}$, $S_{x\varphi} = \frac{K_{x\varphi}}{a}$. Durch das Fehlen der Längsrippen treten noch weitere Vereinfachungen ein, die man leicht aus (44) abliest:

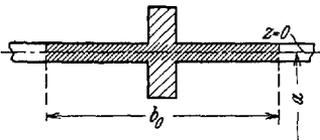


Abb. 23. Längsschnitt durch einen Zylinder mit Ringrippen.

$$\begin{aligned}
 D_x &= D_{x\varphi} = D_{\varphi x} = D = E \delta, \\
 K_x &= K_{x\varphi} = K_{\varphi x} = a S_x = a S_{x\varphi} = K = \frac{E \delta^3}{12}.
 \end{aligned}$$

Dagegen bleiben D_{φ} und K_{φ} von D und K verschieden. Die Determinante der Gleichungen (46) vereinfacht sich dadurch bedeutend und führt zu folgender Knickbedingung:

$$\begin{vmatrix}
 [2 \lambda^2 + m^2 + k m^2 - 2 q_1 m^2] & [- \lambda m] & [- 2 k \lambda^3 + k \lambda m^2 - 2 q_1 \lambda] \\
 [- \lambda m] & [2 d_{\varphi} m^2 + \lambda^2 + 3 k \lambda^2 - 2 q_2 \lambda^2] & [2 d_{\varphi} m + 3 k \lambda^2 m] \\
 [- 2 k \lambda^3 + k \lambda m^2 - 2 q_1 \lambda] & [2 d_{\varphi} m + 3 k \lambda^2 m] & [2 d_{\varphi} + 2 k (\lambda^4 + 2 \lambda^2 m^2) \\
 & & \quad + 2 k_{\varphi} (m^4 - 2 m^2 + 1) \\
 & & \quad - 2 q_1 (m^2 - 1) - 2 q_2 \lambda^2]
 \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Darin sind in Ergänzung der Formeln (16) noch zwei weitere Dimensionslose eingeführt:

$$k_{\varphi} = \frac{K_{\varphi}}{D a^2}, \quad d_{\varphi} = \frac{D_{\varphi}}{D}.$$

Beim Entwickeln der Determinante hat man wieder zu beachten, daß $k \ll 1$ und $k_{\varphi} \ll 1$ ist, während man d_{φ} nicht gegen 1 vernachlässigen darf. Die Knickbedingung erhält die Form

$$c_1 + c_2 k + c_3 k_{\varphi} = c_3 q_1 + c_4 q_2 \quad (48)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 c_1 &= d_\varphi \lambda^4, \\
 c_2 &= \lambda^6 (\lambda^2 + 2m^2) + d_\varphi \lambda^2 m^2 [2(\lambda^2 - 1)^2 + 2(m^2 - 1)^2 + 5\lambda^2 m^2 - 2] \\
 \bar{c}_2 &= (m^2 - 1)^2 [\lambda^4 + d_\varphi (2\lambda^2 + m^2) m^2], \\
 c_3 &= \lambda^4 m^2 + d_\varphi (2\lambda^2 + m^2) m^4 - d_\varphi (3\lambda^2 + m^2) m^2, \\
 c_4 &= \lambda^6 + d_\varphi \lambda^2 m^2 (2\lambda^2 + m^2 + 1).
 \end{aligned} \tag{48'}$$

Die Formeln sind für ein Zahlenbeispiel ausgewertet und in Abb. 24 aufgetragen worden. Man erkennt aus dem Diagramm deutlich den Gewinn an Tragfähigkeit durch die Rippen und die durch die Ringversteifung verursachte Verkleinerung der Ringwellenzahl m .

In den meisten Fällen wird man Verstärkungsrippen lieber einseitig anbringen, um wenigstens auf einer Seite der Schale eine glatte Fläche zu behalten. Dann ist $S_\varphi \neq 0$ und übt auf die Knicksicherheit einen sehr wesentlichen Einfluß aus. Um

ihn kennen zu lernen, wurde auch für diesen Fall die Knickbedingung aufgestellt und für die Querschnitte Ia und Ib der Abb. 24 numerisch ausgewertet. Ia hat die Rippen auf der Außenseite, Ib auf der Innenseite der Schale, und beide sind so gewählt, daß sie mit Querschnitt I im Flächeninhalt und im Trägheitsmoment für die wagerechte Schwerachse (also nicht in K_φ !) übereinstimmen. Die Abbildung zeigt, daß dadurch noch ein weiterer Gewinn an Tragkraft erzielt wird.

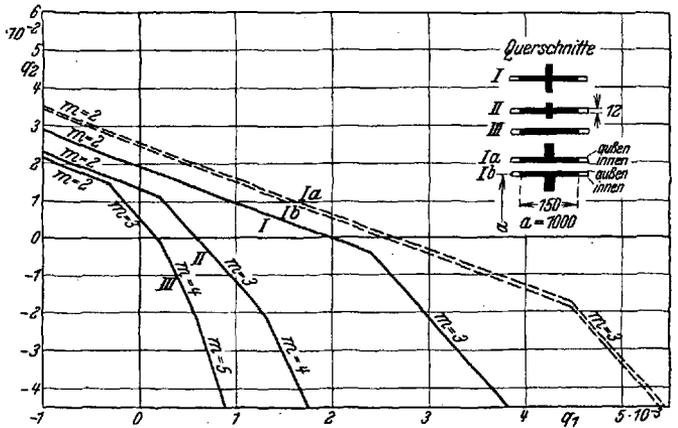


Abb. 24. Knickgrenze für einige anisotrope Zylinder unter Axiallast und Mantel-
druck. $\lambda = 0,5$, $\nu = 0$. Für negative q_1 geben die Kurven nicht die kleinste
Knicklast, da die Zylinder dann mit $n > 1$ knicken. Rippenhöhe für Quer-
schnitt I ist $30 + 12 + 30 = 72$, für Querschnitt II : $15 + 12 + 15 = 42$, Breite = 15.

VI. Knickung unter exzentrischer Längsbelastung.

In diesem Abschnitt soll ein Versuch gemacht werden, über die Betrachtung rotations-symmetrischer Spannungszustände hinaus zu kommen. Es wird daher der einfachste un-symmetrische Spannungszustand näher untersucht, ohne Rücksicht auf die unmittelbare technische Verwendbarkeit der Ergebnisse. Gegenstand der Untersuchung ist eine Kreiszyklinderschale, die an ihrem oberen und untern Rand Belastungen

$$P = P_0 + P_1 \cos \varphi \tag{49}$$

trägt (Abb. 25) und denselben Randbedingungen unterworfen sein soll, die wir schon in Abschnitt II benutzt haben. Der Belastungszustand ist zweiparametrig, wie dort, und wir beschreiben ihn wieder durch zwei Dimensionslose

$$q_0 = \frac{P_0}{D}, \quad q_1 = \frac{P_1}{D}. \tag{50}$$

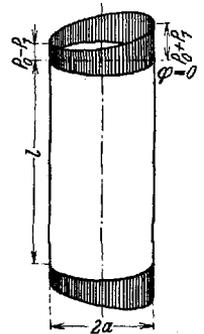


Abb. 25. Belastung der Zylinderschale.

Die Differentialgleichungen des Problems erhält man, indem man in (17) die neuen Lasten einführt. Dabei muß man sich natürlich davon überzeugen, daß bei der Herleitung nirgends

\bar{N}_x oder P' vorkommt, die hier nicht mehr Null sind. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v'' + \nu w' + k \left(\frac{1-\nu}{2} u'' - w''' + \frac{1-\nu}{2} w'' \right) &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' + w' + k \left(\frac{3}{2} (1-\nu) v'' - \frac{3-\nu}{2} w''' \right) - q_0 v'' &= q_1 v'' \cos \varphi, \\ \nu u' + v' + w + k \left(\frac{1-\nu}{2} u'' - w''' - \frac{3-\nu}{2} v'' + w'''' + 2 w'''' + w'' + 2 w'' + w \right) & \\ + q_0 w'' &= -q_1 w'' \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Die Gleichungen unterscheiden sich von denen symmetrisch belasteter Zylinder grundsätzlich dadurch, daß nicht mehr alle Koeffizienten konstant sind. Mit dem Ansatz (18) kann das System daher nicht mehr befriedigt werden. Wählt man dagegen den allgemeinen Ansatz (22), so zeigt sich, daß wieder ein Zerfall der Determinante eintritt, jedoch nicht in $m \cdot n$ Teile, sondern nur in n Determinanten, deren jede unendlich viele Reihen hat, wenn man die Summen der Ansätze bis ∞ erstreckt. Es genügt daher, mit dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos \lambda \frac{x}{a} \sum_0^{\infty} A_m \cos m \varphi, \\ v &= \sin \lambda \frac{x}{a} \sum_1^{\infty} B_m \sin m \varphi, \\ w &= \sin \lambda \frac{x}{a} \sum_0^{\infty} C_m \cos m \varphi \end{aligned} \right\} \quad \left(\lambda = n \pi \frac{a}{l} \right) \quad (52)$$

zu arbeiten, wobei später wieder über λ geeignet zu verfügen ist, und man hat dann als Knickbedingung eine unendliche Determinante zu diskutieren.

Durch Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichungen und Umformung der rechten Seiten findet man

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_m \left[-\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 - k \frac{1-\nu}{2} m^2 \right] + B_m \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda m \right] \right. \\ \left. + C_m \left[\nu \lambda + k \left(\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2 \right) \right] \right] \cos m \varphi &= 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda m \right] + B_m \left[-m^2 - \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 - k \frac{3}{2} (1-\nu) \lambda^2 + q_0 \lambda^2 \right] \right. \\ \left. + C_m \left[-m - k \frac{3-\nu}{2} \lambda^2 m \right] \right] \sin m \varphi & \\ = -q_1 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m \varphi \cos \varphi & \\ = -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} (B_{m-1} + B_{m+1}) \sin m \varphi \quad \text{mit } B_0 = 0, & \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_m \left[-\nu \lambda + k \left(-\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2 \right) \right] + B_m \left[m + k \frac{3-\nu}{2} \lambda^2 m \right] \right. \\ \left. + C_m \left[1 + k (\lambda^4 + 2 \lambda^2 m^2 + m^4 - 2 m^2 + 1) - q_0 \lambda^2 \right] \right] \cos m \varphi & \\ = q_1 \lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m \varphi \cos \varphi & \\ = \frac{1}{2} q_1 \lambda^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} (C_{m-1} + C_{m+1}) \cos m \varphi + C_0 \cos \varphi \right] & \\ \text{mit } C_{-1} = 0. & \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Diese Gleichungen stellen trigonometrische Entwicklungen dar, zu deren identischem Verschwinden es nötig ist, daß jeder Koeffizient einzeln verschwindet. Man erhält so für jedes m drei lineare Gleichungen, in denen außer den unbekanntten Amplituden A_m, B_m, C_m auch noch die zu den Indizes $m - 1$ und $m + 1$ gehörenden vorkommen.

Wenn man die Determinante des Gleichungssystems aufstellt, so zeigt sich, daß sie nicht konvergiert. Auch Durchdividieren jeder Gleichung mit einer geeigneten Potenz von m schafft keine Abhilfe. Dagegen kommt man zum Ziele, wenn man jedes Gleichungstriple durch Elimination der A_m und B_m in eine Gleichung zusammenzieht. Man erhält dann folgendes System:

$$\left. \begin{aligned} c_{00} 2 C_0 + c_{01} C_1 &= 0, \\ c_{10} 2 C_0 + c_{11} C_1 + c_{12} C_2 + c_{13} C_3 &= 0, \\ c_{20} 2 C_0 + c_{21} C_1 + c_{22} C_2 + c_{23} C_3 + c_{24} C_4 &= 0, \\ c_{31} C_1 + c_{32} C_2 + c_{33} C_3 + c_{34} C_4 + c_{35} C_5 &= 0, \\ \vdots &\vdots \\ c_{m, m-2} C_{m-2} + c_{m, m-1} C_{m-1} + c_{mm} C_m + c_{m, m+1} C_{m+1} + c_{m, m+2} C_{m+2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Die Gleichungen sind fünfgliedrig und bilden wieder ein homogenes System. Bei der Berechnung der Koeffizienten ist wieder zu beachten, daß k, q_0, q_1 sehr klein sind, während m und λ groß werden können, λ auch sehr klein. Bei der Vernachlässigung kleiner Glieder im Laufe der Rechnung ist jedoch eine gewisse Vorsicht geboten, da sich gelegentlich beim Subtrahieren Glieder wegheben, gegen die man dann natürlich die nächstkleineren nicht vernachlässigen darf. Die Koeffizienten der ersten beiden Gleichungen haben, wie man aus (50) erkennt, verschiedene Unregelmäßigkeiten und müssen deshalb getrennt ausgerechnet werden. Wenn man auf alles das Rücksicht nimmt, findet man nach längerer Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} c_{00} &= (1 - \nu^2) + k(\lambda^4 - 2\nu\lambda^2) - q_0\lambda^2, \\ c_{01} &= -q_1\lambda^2, \\ c_{10} &= -(1 - \nu^2)^2 q_1 [2(2 + \nu)\lambda^{10} + (18 + 3\nu - \nu^2)\lambda^8 + 2(14 - 2\nu - \nu^2)\lambda^6 \\ &\quad + (18 - 9\nu - \nu^2)\lambda^4 + 4(1 - \nu)\lambda^2 + 4k\lambda^{12}], \\ c_{11} &= 2(1 - \nu) [(1 - \nu)^2 [2(2 + 3\nu + \nu^2)\lambda^8 + (10 + 9\nu - 2\nu^2 - \nu^3)\lambda^6 + 4(1 - \nu^2)\lambda^4] \\ &\quad + (1 - \nu)k [2(2 + \nu)\lambda^{12} + (30 - \nu - 9\nu^2)\lambda^{10}] + 4(1 - \nu)k^2\lambda^{14} \\ &\quad - 2(1 - \nu)q_0 [(2 + \nu)\lambda^{10} + 4(1 - \nu)\lambda^2] + \frac{1}{2}(2 + \nu)q_1^2\lambda^{10}], \\ c_{12} &= -(1 - \nu)q_1 [(1 - \nu) [2(2 + \nu)\lambda^{10} + (22 + 9\nu + \nu^2)\lambda^8 + (40 + 3\nu - 4\nu^2 - \nu^3)\lambda^6 \\ &\quad + (27 - 11\nu + 4\nu^2)\lambda^4 + 6(1 - \nu)\lambda^2] + 2(4 - \nu)k\lambda^{12} + 4k^2\lambda^{14}], \\ c_{13} &= \frac{1 - \nu}{2} q_1^2 [2(2 + \nu)\lambda^{10} + (12 - 5\nu - 5\nu^2)\lambda^8 + (9 - 11\nu + 2\nu^3)\lambda^6 + 2(1 - \nu)^2\lambda^4 \\ &\quad + 4k\lambda^{12}], \\ c_{m, m\mp 2} &= \frac{1}{4} (1 - \nu)^2 q_1^2 [(1 - \nu)^2 \lambda^4 m^{-6} \pm (1 - \nu)^2 \lambda^4 m^{-7} + 2(4 - 5\nu + \nu^3)\lambda^6 m^{-8} \\ &\quad \pm 8(1 - \nu)\lambda^6 m^{-9} + (24 - 12\nu - 11\nu^2 + 2\nu^3 + \nu^4)\lambda^8 m^{-10} \\ &\quad \pm (24 - 4\nu - 5\nu^2 - 2\nu^3 - \nu^4)\lambda^8 m^{-11} + 4(8 + 2\nu - 3\nu^2 - \nu^3)\lambda^{10} m^{-12} \\ &\quad \pm 16(2 + \nu)\lambda^{10} m^{-13} + 4(2 + \nu)^2 \lambda^{12} m^{-14} \pm 4(2 + \nu)^2 \lambda^{12} m^{-15}], \\ c_{m, m\mp 1} &= -\frac{1}{2} (1 - \nu)^3 q_1 [(1 - \nu)\lambda^2 m^{-4} - 2(1 - \nu)\lambda^2 m^{-6} \pm (1 - \nu)\lambda^2 m^{-7} \\ &\quad + ((25 - \nu - 7\nu^2 - \nu^3)\lambda^8 + (1 - \nu)\lambda^2) m^{-8} \mp 2(1 - \nu)\lambda^2 m^{-9} \\ &\quad + 2(19 + 7\nu - 3\nu^2 - \nu^3)\lambda^8 m^{-10} \pm (1 - \nu)\lambda^2 m^{-11} + (28 + 20\nu + \nu^2 - \nu^3)\lambda^{10} m^{-12} \\ &\quad + 2(2 + \nu)^2 \lambda^{12} m^{-14} - 2(2 + \nu)^2 \lambda^{12} m^{-16}], \end{aligned} \right\}$$

Wie die Gleichungen (55) zeigen, ist die numerische Auswertung einigermaßen mühsam, allerdings nicht ganz so schlimm, wie es auf den ersten Blick scheinen mag, denn in den Koeffizienten $c'_{\alpha, \beta}$ kann man, je nachdem, ob $\lambda < 1$ oder $\lambda > 1$ ist, jedesmal eine ganze Menge von Gliedern vernachlässigen.

Um einen Einblick zu gewinnen, wie die Dinge aussehen, wurden für $\lambda = 1, k = 10^{-6}$ die Koeffizienten berechnet und die Determinante ausgewertet. Dabei genügt es, diese durch ihren neunten Abschnitt zu approximieren. Man kommt dann, wenn man alle unbedeutenden Glieder streicht, auf eine Gleichung dritten Grades in q_1^2 , aus der man es für gegebenes q_0 ausrechnen kann. Das Ergebnis zeigt Abb. 26, in der q_0 und q_1 als rechtwinklige Koordinaten aufgetragen sind. Die Abbildung lehrt, daß man die Knicksicherheit nach der Beanspruchung der am stärksten gedrückten Faser, $\max N_x = -D(q_0 + q_1)$, unter Verwendung der Formeln für die drehsymmetrische Belastung ungefähr beurteilen kann (gestrichelte Linien in Abb. 26). Allerdings ist die Genauigkeit nicht bedeutend, doch bleibt man mit dieser Näherung immer auf der sichern Seite. Für zentrischen Druck ($q_1 = 0$)

ist die Ringwellenzahl $m = 6$. Wenn $q_1 \neq 0$ ist, so wird die Verformung durch eine Fourierreihe dargestellt, in der das sechste Glied das stärkste ist, so daß die Länge einer Halbwelle auch dann ungefähr $\frac{1}{4}$ Durchmesser beträgt. Die Veränderlichkeit der Längskraft N_x innerhalb der am stärksten gedrückten Halbwelle ist verhältnismäßig um so größer, je kleiner die Druckzone im Zylinder ist. Dementsprechend weicht in Abb. 26 die gestrichelte Linie um so mehr von der ausgezogenen ab, je kleiner q_0 und je größer q_1 wird.

Für die Belastung $q_0 = 8,0 \cdot 10^{-4}$, $q_1 = 1,67 \cdot 10^{-3}$, die nach Abb. 26

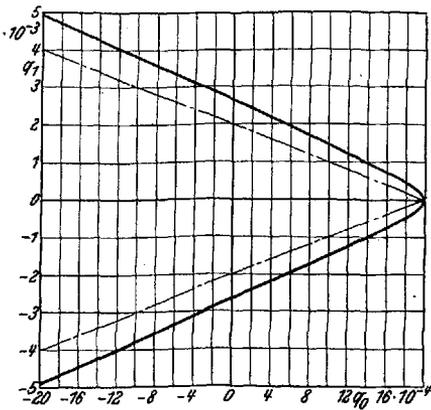


Abb. 26. Knickgrenze für die nach Abb. 25 belastete Schale. $k = 10^{-6}$, $\nu = \frac{1}{2}$.

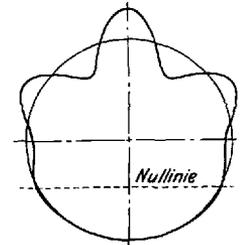


Abb. 27. Querschnitt durch die symmetrische Knickfigur eines nach Abb. 25 belasteten Zylinders. $q_0 = 8,0 \cdot 10^{-4}$, $q_1 = 1,67 \cdot 10^{-3}$, $k = 10^{-6}$, $\nu = \frac{1}{2}$.

eine Knickbelastung ist, wurden die homogenen Gleichungen (54) aufgelöst. Die Durchbiegungen w , die natürlich nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt werden können, sind in Abb. 27 dargestellt. Die Fourierreihe, aus der sie berechnet sind, heißt in ihrem wesentlichen Teil

$$w = \dots + 0,03205 \cos 3 \varphi + 0,320 \cos 4 \varphi + 1,000 \cos 5 \varphi + 1,100 \cos 6 \varphi + 0,530 \cos 7 \varphi + 0,1283 \cos 8 \varphi + \dots$$

Das erste und letzte der hier mitgeteilten Glieder sind schon recht klein. Der Gedanke liegt nahe, zur angenäherten Berechnung der Knicklast die Summen im Ansatz (52) nur über drei oder vier aufeinander folgende Indizes zu erstrecken, die natürlich geeignet auszuwählen sind. Eine solche Rechnung führt auch tatsächlich zum Erfolg und ist zur Nachprüfung der Abb. 26 verwendet worden.

Unser Ansatz (52) ist nicht die allgemeinste Lösung unserer Aufgabe. Wir gewannen ihn aus (22). Das ist auch nicht der allgemeinste Ansatz für die Knickung unter zentral-symmetrischer Last, sondern man kann noch ebensoviele Glieder hinzufügen, bei denen $\cos m \varphi$ durch $\sin m \varphi$ ersetzt ist und umgekehrt. Wegen des vollständigen Zerfalls der Determinante, durch den wir im Abschnitt II schließlich auf die Benutzung nur eines Gliedes von (22) geführt wurden, ist dort die Erweiterung des Ansatzes bedeutungslos, da die neuen Glieder durch geeignete Drehungen des Koordinatensystems in die alten übergehen. Im vorliegenden Falle, wo die Determinante nicht so weitgehend zerfällt, müssen

wir aber noch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos \lambda \frac{x}{a} \sum_1^{\infty} A_m \sin m\varphi, \\ v &= \sin \lambda \frac{x}{a} \sum_0^{\infty} B_m \cos m\varphi, \\ w &= \sin \lambda \frac{x}{a} \sum_1^{\infty} C_m \sin m\varphi \end{aligned} \right\} \left(\lambda = n\pi \frac{a}{l} \right) \quad (58)$$

näher untersuchen. Er stellt Knickfiguren dar, die zur Symmetrieebene der Belastung antimetrisch sind, während die zu (52) gehörigen Deformationen dieselbe Symmetrie haben wie die Lasten. Eine Kombination beider Ansätze ist nicht nötig, da sie durch Determinantenzzerfall wieder getrennt werden.

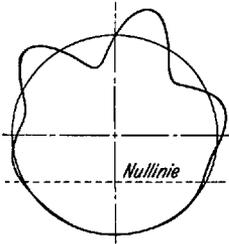


Abb. 28. Querschnitt durch die antimetrische Knickfigur eines Zylinders mit denselben Lasten und Abmessungen wie in Abb. 27.

Wir haben also unsere Aufgabe vollständig gelöst, wenn wir die mit (52) ausgeführten Rechnungen mit (58) wiederholen. Setzt man die Verschiebungen in die Differentialgleichungen ein, so ergeben sich lineare Gleichungen für die Koeffizienten, die sich für $m = 0$ und $m = 1$ wesentlich, sonst nur durch Vorzeichen von den früher erhaltenen unterscheiden. Führt man $-B_m$ statt B_m als Unbekannte ein und multipliziert noch die mittlere Gleichung jedes Tripels mit -1 , so hat man diese Vorzeichenunterschiede ganz beseitigt. Das für den symmetrischen Ansatz beschriebene Eliminationsverfahren führt dann zu einer Normaldeterminante,

die sich von der durch (55) und (56) beschriebenen nur durch die ersten beiden Zeilen unterscheidet. Deren Koeffizienten heißen

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{00} &= 1, & \bar{c}_{01} &= \bar{c}_{10} = 0, \\ \bar{c}_{11} &= c_{11} - 16(1 - \nu) q_1^2 \lambda^2, \\ \bar{c}_{12} &= c_{12}, & \bar{c}_{13} &= c_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (55')$$

Führt man die Rechnung für dasselbe Zahlenbeispiel durch, so erhält man die gleiche Knickgrenze, weil die ersten Zeilen der Determinante numerisch keinen Einfluß haben. Das hängt damit zusammen, daß in der Knickfigur die ersten Fourierkoeffizienten klein sind. Man erhält daher auch für A_m und C_m dieselben, für B_m die entgegengesetzt gleichen Werte wie im symmetrischen Fall. Der Anteil w der Verschiebungen ist in Abb. 28 aufgetragen. Man erkennt auch hier, wie der Zylinder auf der Zugseite glatt bleibt und erst in der Nähe der Nulllinie anfängt, sich merklich zu verbiegen.

Da die Knicklasten bei symmetrischem und antimetrischem Fall dieselben sind, so ist bei Versuchen zu erwarten, daß sich beide Knickfiguren überlagern. Solche unsymmetrische Verformung konnte auch tatsächlich an Gummizylindern beobachtet werden.

(Eingegangen am 4. Juli 1932.)