

Über die unsymmetrische Biegung dünner Kreisringplatten.

Von H. Reißner in Berlin-Charlottenburg.

1. Einleitung. Eine vollständige Lösung für das Problem der unsymmetrisch gestützten oder unsymmetrisch belasteten Kreis- oder Kreisringplatte hat unter den bekannten Näherungsvoraussetzungen der elementaren Plattentheorie¹ A. Clebsch² schon 1862 gegeben.

Die Theorie ist für punktförmig belastete oder punktförmig gestützte volle Kreis- (und Kreissektor)-platten von A. Föppl³ und A. Nadai¹ numerisch durchgeführt worden.

Dagegen scheinen Anwendungen der Clebschschen Theorie auf Kreisringplatten, trotzdem das technische Anwendungsgebiet solcher „Flanschplatten“ sehr groß ist, noch nicht gemacht worden zu sein.

Im folgenden sollen nun zwei durchgerechnete, der Konstruktionspraxis entnommene Beispiele mitgeteilt werden, und zwar:

1. der rechnerisch besonders einfache Fall der unbelasteten, ursprünglich ebenen Kreisringplatte, deren einer Rand gegen den andern um eine Durchmesserachse verdreht wird (Abb. 1 a, b).

2. der rechnerisch erheblich mühsamere Fall der am inneren Rande eingespannten, am äußeren Rande in einem Punkte belasteten Kreisringplatte (Abb. 1 a, c).

Der erste Fall ist technisch wichtig für eine biegungs- oder längsverschieblich elastische Wellenkupplung, der zweite Fall für den durch Bolzen belasteten Rohrflansch oder den durch Einzelasten beanspruchten Kragringträger.

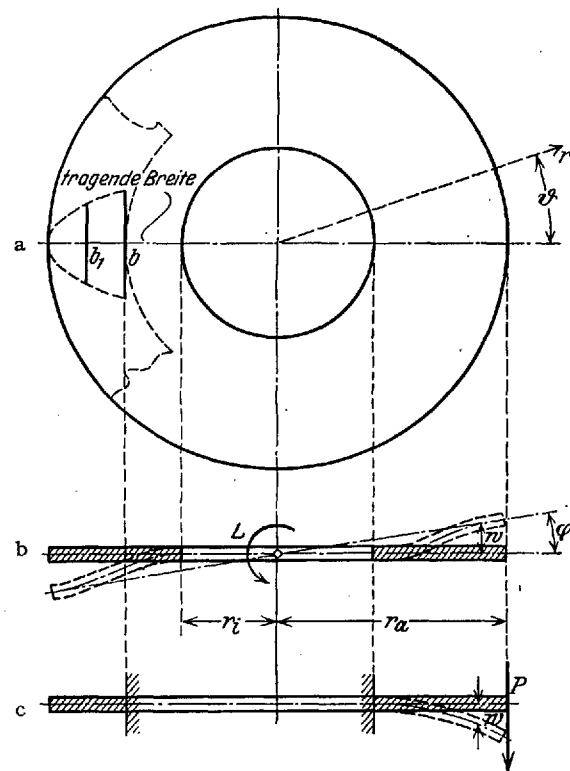


Abb. 1 a bis c.

Die Vereinfachung dieses Falles durch Verlegung der Einzellast an den Rand ließe sich unschwer nach der gezeigten Methode auf den Fall beliebig angreifender Einzellast erweitern, stellt aber jedenfalls die ungünstigste Spannungsverteilung dar.

¹ A. Nadai, *Elastische Platten*, S. 19ff. u. 190ff., Berlin 1925.

² Wieder abgedruckt in: *Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch*, traduite par B. de St. Venant et Flamant, S. 763ff., Paris 1883.

³ A. Föppl, *Die Biegung einer kreisförmigen Platte*, Ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. (1912) S. 155. J. H. Michel, *Math. Soc. Proc.* (1902) S. 182 bis 223 (siehe auch A. E. H. Love, *Elastizität*, S. 562, Leipzig 1907) und E. Melan, *Eisenbau* (1919) S. 190 haben wesentlich einfachere Lösungen gefunden, welche sich jedoch auf die Kreisringplatte nicht ausdehnen lassen.

2. Die allgemeine Lösung für die unbelastete Platte. Die ins Auge gefaßten Aufgaben beziehen sich auf die nur am Rande beanspruchte Platte und bedienen sich also nur der Differentialgleichungen für die unbelastete Platte. Diese lautet

$$\Delta \Delta w = 0, \quad (1)$$

wo in Polarkoordinaten das Symbol Δ die Bedeutung hat

$$\Delta w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \quad (1a)$$

Es mögen nun die folgenden dimensionslosen Variablen eingeführt werden (Abb. 1a, b, c)

$\zeta = \frac{w}{\delta}$, d. h. die Durchbiegung im Verhältnis zur Plattendicke und

$\varrho = \frac{r}{r_a}$, d. h. der radiale Abstand im Verhältnis zum Außenradius der Ringplatte.

Es ist dann

$$\Delta w = \frac{\delta}{r_a^2} \Delta \zeta(\varrho, \vartheta) = \frac{\delta}{r_a^2} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta^2} \right]. \quad (1b)$$

Clebsch macht nun den Ansatz

$$\zeta = \sum_0^{\infty} R_n(\varrho) \cos n \vartheta + R_n^*(\varrho) \sin n \vartheta \quad (2)$$

und erhält aus der Differentialgleichung (1) für die R die folgenden Lösungen

$$\left. \begin{aligned} n = 0, & R_0 = A_0 + B_0 \varrho^2 + C_0 \ln \varrho + D_0 \varrho^2 \ln \varrho, \\ n = 1, & R_1 = A_1 \varrho + B_1 \varrho^3 + C_1 \varrho^{-1} + D_1 \varrho \ln \varrho, \\ & R_1^* = A_1^* \varrho + B_1^* \varrho^3 + C_1^* \varrho^{-1} + D_1^* \varrho \ln \varrho, \\ n > 1, & R_n = A_n \varrho^n + B_n \varrho^{n+2} + C_n \varrho^{-n} + D_n \varrho^{-(n-2)}, \\ & R_n^* = A_n^* \varrho^n + B_n^* \varrho^{n+2} + C_n^* \varrho^{-n} + D_n^* \varrho^{-(n-2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

wo die A, B, C, D bzw. A^*, B^*, C^*, D^* Konstanten sind, die aus den Randbedingungen ermittelt werden müssen.

Wir merken weiter die allgemeinen Ausdrücke für die in Abb. 2 dargestellten Momente und Querkräfte vor, die später benötigt werden¹.

In diesen tritt als Faktor die sogenannte Biegesteifigkeit der Platte auf, nämlich

$$N = \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1c)$$

wo E den Elastizitätsmodul der (isotropen) Platte,

ν das Querkontraktionsverhältnis (die Poissonsche Zahl),

δ die Wandstärke bedeutet.

Es ist dann das Biegemoment, bezogen auf die Längeneinheit der Mittelfläche der Platte und wirkend auf Kreisschnitte

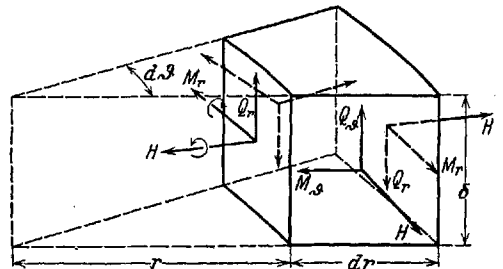


Abb. 2.

¹ Die Ausdrücke der Gleichungen (3) bis (7) entstehen in der elementaren Plattentheorie aus der Näherungsvoraussetzung der eben und senkrecht zur Mittelfläche bleibenden Querschnitte und der senkrecht auf der ursprünglichen Mittelebene stehenden Verschiebungen w und werden in der strengeren Plattentheorie als zulässige erste Näherungen nachgewiesen. Ihre Einführung in die zwischen ihnen und den Belastungskräften p geltenden Gleichgewichtsbedingungen ergibt die oben eingeführte Differentialgleichung (1) des Problems. In Abb. 2 sind die Biege- und Torsionsmomente durch ihre Momentenstrecken dargestellt, so zwar, daß der Drehsinn durch eine Rechtsschraubung aus dem Pfeilsinn hervorgeht.

$$\begin{aligned} M_r &= -N \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ &= -\frac{N\delta}{r_a^2} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Lassen wir die mit $\sin n\vartheta$ behafteten Glieder, die später nicht gebraucht werden, aus dem Ansatz (2) fort, so können wir schreiben

$$M_r = -\frac{N\delta}{r_a^2} \sum_0^\infty \cos n\vartheta [R_n'' + \nu (\rho^{-1} R_n' - n^2 \rho^{-2} R_n)], \quad (3a)$$

wo die oberen Striche Differentiation nach ρ bedeuten. Es wird ferner das entsprechende Biegemoment, wirkend auf eine radiale Schnittfläche

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= -N \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ &= -\frac{N\delta}{r_a^2} \left[\nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

dessen weitere Ausrechnung zunächst nicht nötig ist.

Sodann folgt das Torsionsmoment an radialen und kreisförmigen Schnitten

$$H = -N (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = -\frac{N\delta}{r_a^2} (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \quad (5)$$

und schließlich die sogenannten „wirksamen“¹ Querkräfte senkrecht zur Plattenmittelebene, nämlich erstens die Querkraft an Kreisschnitten

$$\begin{aligned} Q_r' &= Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} = -N \left[\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) + \frac{1 - \nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ &= -\frac{N\delta}{r_a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1 - \nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ &= -\frac{N\delta}{r_a^2} \left[\zeta''' + \rho^{-1} \zeta'' - \rho^{-2} \zeta' + \rho^{-2} (2 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial \theta^2} - (3 - \nu) \rho^{-3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

deren Ausdruck mit Hilfe des Lösungsansatzes (2) ohne die Sinusglieder weiter unten gebraucht wird und deshalb hier vorgemerkt werde

$$Q_r' = -\frac{N\delta}{r_a^2} \sum_0^\infty \cos n\vartheta [R_n''' + \rho^{-1} R_n'' - \rho^{-2} (1 + n^2 (2 - \nu)) R_n' + \rho^{-3} n^2 (3 - \nu) R_n], \quad (6a)$$

zweitens die Querkraft an Radialschnitten

$$\begin{aligned} Q_\vartheta &= Q_\vartheta + \frac{\partial H}{\partial r} = -N \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta w}{r} \right) + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= -\frac{N\delta}{r_a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Gegenseitige Verdrehung der eben bleibenden Randkreise einer Ringplatte durch ein Drehmoment L um einen Winkel φ (Abb. 1a, b). Für die Berechnung einer solchen, bei federnden Universalgelenken in Betracht kommenden Anordnung genügt das der Ordnungszahl $n = 1$ entsprechende Glied der Reihe (2), und zwar bei passender Winkelstellung des Radius $\vartheta = 0$, z. B. das Cosinusglied allein.

Wir setzen also

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= R_1(\rho) \cos \vartheta \\ w &= \delta \zeta, \quad R_1 = A_1 \rho + B_1 \rho^3 + C_1 \rho^{-1} + D_1 \rho \ln \rho. \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

¹ Siehe über diese von Kirchhoff zuerst eingeführten Spannungsergebnisse z. B. A. E. H. Love, Elastizität, S. 526ff., Leipzig 1907.

Die Randbedingungen lauten hier

$$\text{Für } r = r_i (\varrho = \varrho_i) \text{ sollen } w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial \varrho} = 0 \text{ sein.}$$

$$\text{Für } r = r_a (\varrho = 1) \text{ sollen } w = r_a \varphi \cos \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial \varrho} = r_a \varphi \cos \vartheta \text{ sein.}$$

Führt man noch die abgeleiteten Konstantenwerte

$$\gamma_1 = \frac{A_1 \delta}{r_a \varphi}, \quad \gamma_2 = \frac{B_1 \delta}{r_a \varphi}, \quad \gamma_3 = \frac{C_1 \delta}{r_a \varphi}, \quad \gamma_4 = \frac{D_1 \delta}{r_a \varphi} \quad (8)$$

ein, so erhält man die folgenden Bestimmungsgleichungen für diese abgeleiteten Werte:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 &= 1, \\ \gamma_1 \varrho_i + \gamma_2 \varrho_i^3 + \gamma_3 \varrho_i^{-1} + \gamma_4 \varrho_i \ln \varrho_i &= 0, \\ \gamma_1 \varrho_i + 3\gamma_2 \varrho_i^3 - \gamma_3 \varrho_i^{-1} + \gamma_4 \varrho_i (\ln \varrho_i + 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

mit dem Auflösungsergebnis

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \frac{1 - \varrho_i^2 + 2(1 + \varrho_i^2) \ln \varrho_i}{1 - \varrho_i^2 + (1 + \varrho_i^2) \ln \varrho_i}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \varrho_i^2 + (1 + \varrho_i^2) \ln \varrho_i}, \\ \gamma_3 &= 1 - \gamma_1 - \gamma_2, \\ \gamma_4 &= 2(1 - \gamma_1 - 2\gamma_2). \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Mit Hilfe der Konstanten γ lassen sich die Biegemomente und die Biegungswinkel wie folgt ermitteln, wobei zunächst als abkürzende Bezeichnung eingeführt werde

$$\zeta_1 = \gamma_1 \varrho + \gamma_2 \varrho^3 + \gamma_3 \varrho^{-1} + \gamma_4 \varrho \ln \varrho. \quad (2c)$$

Das Biegemoment an einem Ringflächenelement hat dann den Wert

$$M_r = - \frac{N \cos \vartheta \varphi}{r_a} [\zeta_1'' + \nu (\varrho^{-1} \zeta_1' - \varrho^{-2} \zeta_1)]. \quad (3b)$$

Das Biegemoment an einem radialen Flächenelement schreibt sich

$$M_\vartheta = - \frac{N \cos \vartheta \varphi}{r_a} [\nu \zeta_1'' + \varrho^{-1} \zeta_1' - \varrho^{-2} \zeta_1]. \quad (4b)$$

Das Torsionsmoment lautet

$$H = + \frac{N \sin \vartheta \varphi}{r_a} (1 - \nu) \frac{d}{d\varrho} (\zeta_1 \varrho^{-1}). \quad (5b)$$

Die Einsetzung des Wertes von ζ_1 aus (2c) und des Wertes von N aus (1c) ergibt, wenn man noch die Poissonsche Zahl $\nu = 0,3$ setzt, die Biegunsspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M_r}{\delta^2/6} = - \frac{6 N \cos \vartheta \varphi}{\delta^2 r_a} [2(3 + \nu) \gamma_2 \varrho + 2(1 - \nu) \gamma_3 \varrho^{-3} + (1 + \nu) \gamma_4 \varrho^{-1}] \\ &= - \frac{E \delta \varphi}{r_a} \cos \vartheta [3,63 \gamma_2 \varrho + 0,77 \gamma_3 \varrho^{-3} + 0,714 \gamma_4 \varrho^{-1}], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{M_\vartheta}{\delta^2/6} = - \frac{E \delta \varphi}{r_a} \cos \vartheta [2,085 \gamma_2 \varrho + 0,77 \gamma_3 \varrho^{-3} + 0,714 \gamma_4 \varrho^{-1}] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und ferner die Torsionsspannung

$$\tau = \frac{H}{\delta^2/6} = + \frac{E \delta \varphi}{r_a} \sin \vartheta [0,768 \gamma_2 \varrho - 0,768 \gamma_3 \varrho^{-3} + 0,384 \gamma_4 \varrho^{-1}].$$

Das Verdrehungsmoment L des ganzen Systems in Abhängigkeit vom Verdrehungswinkel φ ergibt sich wie folgt

$$L = \int_0^{2\pi} d\vartheta [M_r r \cos \vartheta + H r \sin \vartheta - Q_r r^2 \cos \vartheta]. \tag{10}$$

Die Einsetzung der oben gewonnenen Werte der Gleichungen (3), (5) und (6) liefert

$$L = \pi N \varphi [\varrho^2 \zeta_1''' - 3 \zeta_1' + 3 \varrho^{-1} \zeta_1],$$

woraus man schließlich erhält

$$L = -4\pi N \varphi \gamma_4 = -E \delta^3 \varphi \gamma_4 \cdot 1,150. \tag{10a}$$

Dieses Gesamtverdrehungsmoment ist, wie es sein muß, unabhängig vom Außenradius r_a , also auf jedem Ringumfang dasselbe.

Die Zahlenrechnung liefert nun die folgende Tabelle 1

Tabelle 1.

ϱ_i	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	$s_{r,a}$	$s_{r,i}$	μ
0,5	4,225	— 4,30	1,075	10,750	7,10	14,17	12,40
0,6	6,824	— 9,10	3,276	24,752	12,85	19,54	28,48
0,7	12,577	— 22,70	11,123	67,646	25,65	36,25	77,90
0,8	31,024	— 83,40	53,376	273,552	66,50	82,26	314,0

wo noch abkürzungsweise die Spannungsbeiwerte für den Innenrand bzw. für den Außenrand

$$s_{r,i} = \sigma_{r,i} \frac{r_a}{\delta} \frac{1}{E \varphi}, \quad s_{r,a} = \sigma_{r,a} \frac{r_a}{\delta} \frac{1}{E \varphi}$$

und der Verdrehungsbeiwert

$$\mu = \frac{L}{E \delta^3 \varphi}$$

eingeführt wurden.

In derselben Weise können auch die Spannungsbeiwerte für die Biegungsspannungen an radialen Flächenelementen und für die Schubspannungen senkrecht zur Mittelebene (infolge der Querkräfte Q_r und Q_ϑ , sodann parallel zur Mittelebene infolge der Torsionsmomente H aus den ersten Gliedern der Gleichungen (6) und (7) bzw. aus der Gleichung (9) auf Grund der Zahlenwerte der γ berechnet werden.

4. Biegung einer Kreisringplatte durch eine Einzelkraft am äußeren Rande (Abb. 1a, c). Die Randbedingungen für eine am Innenrande eingespannte, am Außenrande ungestützte, durch eine Einzelkraft belastete Ringplatte sind die folgenden:

Für $r = r_i$ ($\varrho = \varrho_i$) sollen w und $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ sein.

Für $r = r_a$ ($\varrho = 1$) soll $M_r = 0$ sein

und die wirksame Querkraft $Q'_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \vartheta}$ soll bis auf den Belastungspunkt

$\vartheta = 0$ verschwinden und in diesem Belastungspunkt soll $\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\beta Q'_r r d\vartheta = P$ sein.

Da die Lösung (2) in eine trigonometrische Reihe entwickelt ist, brauchen wir eine ebensolche Reihenentwicklung, welche diese Einzelkraft P darstellt. In der Tat leistet dies die folgende Reihe:

$$(Q'_r)_{r=r_a} = \frac{P}{\pi r_a} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos n \vartheta \right], \tag{11}$$

welche zwar nicht konvergent, aber, was hier genügt, nach der Fejerschen Methode der arithmetischen Mittel summierbar ist¹.

¹ Diese Reihe benutzt auch Nadai bei der Behandlung punktförmig gestützter Platten (Nadai, Elastische Platten, S. 114ff.). Man kann übrigens allen mathematischen Bedenken wegen dieser

Durch die obigen Randbedingungen entstehen nun die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten A_n , B_n , C_n und D_n des Lösungsansatzes (2) und (2a), wobei wiederum die Fälle $n = 0$, $n = 1$ und $n > 1$ unterschieden werden müssen.

$$n = 0,$$

$w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial \varrho} = 0$ bei $\varrho = \varrho_i$ ergeben:

$$A_0 + B_0 \varrho_i^2 + C_0 \ln \varrho_i + D_0 \varrho_i^2 \ln \varrho_i = 0,$$

$$2 B_0 \varrho_i + C_0 \varrho_i^{-1} + D_0 \varrho_i (1 + 2 \ln \varrho_i) = 0;$$

$M_r = 0$ bei $\varrho = 1$ ergibt auf Grund von Gleichung (3a)

$$R_0'' + \nu R_0' = 0,$$

also:

$$2 B_0 (1 + \nu) - C_0 (1 - \nu) + D_0 (3 + \nu) = 0;$$

$Q_r' = \frac{P}{2\pi r_a}$ [nach Gleichung (11)] liefert nach Gleichung (6a)

$$R_0''' + \varrho_i^{-1} R_0'' - \varrho_i^{-2} R_0' = -\frac{P r_a^2}{2\pi N \delta}$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{P r_a^2}{2\pi N \delta} = K$$

setzt,

$$D_0 = -\frac{K}{4}.$$

Die Auflösung ergibt, wenn man noch zur bequemeren Schreibweise

$$A_0 = a_0 K, \quad B_0 = b_0 K, \quad C_0 = c_0 K, \quad D_0 = d_0 K \quad (12a)$$

einführt,

$$a_0 = \varrho_i^2 b_0 - \ln \varrho_i c_0 - \varrho_i^2 \ln \varrho_i d_0,$$

$$b_0 = \frac{c_0}{2} \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \frac{3 + \nu}{8(1 + \nu)},$$

$$c_0 = \frac{\varrho_i (1 + 2 \ln \varrho_i) (1 + \nu) - 3 + \nu}{4 \varrho_i^{-1} (1 + \nu) + \varrho_i (1 - \nu)},$$

$$d_0 = -\frac{1}{4}.$$

(13)

In analoger Weise ergeben sich für

$$n = 1$$

die Gleichungen

$$a_1 \varrho_i + b_1 \varrho_i^3 + c_1 \varrho_i^{-1} + d_1 \varrho_i \ln \varrho_i = 0,$$

$$a_1 \varrho_i + 3 b_1 \varrho_i^3 - c_1 \varrho_i^{-1} + d_1 \varrho_i (1 + \ln \varrho_i) = 0,$$

$$2 b_1 (3 + \nu) + 2 c_1 (1 - \nu) + d_1 (1 + \nu) = 0$$

und die vierte Gleichung nach Gleichung (6a) aus

$$R_1''' + R_1'' - R_1' (3 - \nu) + R_1 (3 - \nu) = -2K,$$

$$2 b_1 (3 + \nu) + 2 c_1 (1 - \nu) - d_1 (3 - \nu) = -2.$$

(14)

Singularität am Rande aus dem Wege gehen, wenn man die Kraft P nach irgend einem Gesetz, entweder über einen genügend kleinen Winkel β oder von $\vartheta = 0$ aus $e^{-k\vartheta}$ artig verteilt. Im ersteren Falle wären die Koeffizienten dann nicht $\frac{1}{2}$ bzw. 1 , sondern $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{\sin n\beta}{n\beta}$ und man kann für jeden gewünschten Grad der Rechengenauigkeit den Winkel β so klein wählen, daß die weiter unten folgende Rechnung für $\beta = 0$ sich innerhalb der Rechengenauigkeit von der Rechnung für $\beta \neq 0$ nicht unterscheidet. Für $\beta \neq 0$ hat aber die der Gleichung (11) entsprechende Reihe keine Besonderheiten, die für die Zulässigkeit des Überganges vom Innern nach dem Rande einen besonderen mathematischen Nachweis erfordern.

Diese vier Gleichungen liefern

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= + \frac{1}{2}, & b_1 &= - \frac{1}{4} \frac{1 + \nu + \varrho_i^2 (1 - \nu)}{(3 + \nu) + \varrho_i^2 (1 - \nu)}, \\ c_1 &= - b_1 \frac{3 + \nu}{1 - \nu} - \frac{1}{4} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, & a_1 &= - b_1 \varrho_i^2 - c_1 \varrho_i^{-2} - d_1 \ln \varrho_i. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Schließlich erhält man für

$$n > 1$$

die vier Bestimmungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} a_n \varrho_i^n + b_n \varrho_i^{n+2} + c_n \varrho_i^{-n} + d_n \varrho_i^{-n+2} &= 0, \\ a_n \varrho_i^n + \frac{n+2}{n} b_n \varrho_i^{n+2} - c_n \varrho_i^{-n} - \frac{n-2}{n} d_n \varrho_i^{-n+2} &= 0; \\ M_r = 0 \text{ bei } \varrho = 1 \text{ liefert nach (3a) die Gleichung} \\ R_n'' + R_n' \nu - R_n \nu n^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und daraus

$$\begin{aligned} a_n n(n-1)(1-\nu) + b_n(n+1)(n+2-\nu(n-2)) \\ + c_n n(n+1)(1-\nu) + d_n(n-1)(n-2-\nu(n+2)) = 0; \end{aligned}$$

schließlich aus (6a) und (11)

$$R_n''' + R_n'' - R_n'(1 + n^2(2 - \nu)) + R_n n^2(3 - \nu) = -2K$$

und daraus

$$\begin{aligned} a_n n^2(n-1)(1-\nu) + b_n n(n+1)(n(1-\nu) - 4) - c_n n^2(n+1)(1-\nu) \\ - d_n n(n-1)(n(1-\nu) + 4) = 2. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichung (16) ergibt nun

$$\left. \begin{aligned} d_n &= - \frac{1}{n(n-1)(1-\nu)} \frac{(1-\varrho_i^2)(n-1) + \varrho_i^{2n+2} + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{(1-\varrho_i^2)^2(n^2-1) + \left(\varrho_i^{-2n+2} + \frac{3+\nu}{1-\nu}\right)\left(\varrho_i^{2n+2} + \frac{3+\nu}{1-\nu}\right)}, \\ b_n &= + \frac{1}{n(n+1)(1-\nu)} \frac{(1-\varrho_i^2)(n+1) - \varrho_i^{-2n+2} - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{(1-\varrho_i^2)^2(n^2-1) + \left(\varrho_i^{-2n+2} + \frac{3+\nu}{1-\nu}\right)\left(\varrho_i^{2n+2} + \frac{3+\nu}{1-\nu}\right)}, \\ a_n &= - \varrho_i^2 \left(b_n \frac{n+1}{n} + d_n \frac{\varrho_i^{-2n}}{n} \right), & c_n &= + \varrho_i^2 \left(b_n \frac{\varrho_i^{2n}}{n^2} - d_n \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Damit sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung (2) formelmäßig vollständig bestimmt. Ihre Ermittlung erlaubt den Verlauf der Durchbiegung w und ihrer Abgeleiteten, d. h. der Spannungsergebnanten M_r , M_ϑ , Q_r , Q_ϑ und H darzustellen. Als besonders wichtig mögen die folgenden Größen explizite angeschrieben werden:

Die Durchbiegung nach den Gleichungen (2), (15) und (13):

$$\left. \begin{aligned} w = \delta K [a_0 + b_0 \varrho^2 + c_0 \ln \varrho + d_0 \varrho^2 \ln \varrho + \cos \vartheta (a_1 \varrho + b_1 \varrho^3 + c_1 \varrho^{-1} + d_1 \varrho \ln \varrho) \\ + \sum_2^\infty \cos n \vartheta (a_n \varrho^n + b_n \varrho^{n+2} + c_n \varrho^{-n} + d_n \varrho^{-n+2})]. \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

Das Biegemoment an Ringschnitten:

$$\left. \begin{aligned} M_r = \frac{P}{2\pi} [-2b_0(1+\nu) + c_0 \varrho^{-2}(1-\nu) - d_0(3+\nu+2(1+\nu)\ln \varrho) \\ + \cos \vartheta (-2b_1(3+\nu)\varrho - 2c_1(1-\nu)\varrho^{-3} - d_1(1+\nu)\varrho^{-1}) \\ + \sum_2^\infty \cos n \vartheta (-a_n n(n-1)(1-\nu)\varrho^{n-2} - b_n(n+1)(n+2-\nu(n-2))\varrho^n \\ - c_n n(n+1)(1-\nu)\varrho^{-n-2} - d_n(n-1)(n-2-\nu(n+2))\varrho^{-n}]. \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Zur Beurteilung der Konvergenz und für die Durchführung von Zahlenrechnungen ist es zweckmäßig, die asymptotischen Werte der Koeffizienten der zu berechnenden Reihen festzustellen.

Man hat zunächst für große n (etwa $n > 20$ bei 10^{-3} Genauigkeit) nach den Gleichungen (17)

$$\left. \begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{n(n+1)(3+\nu)}, \\ d_n &= -\varrho_i^{2n-2} \frac{(1-\varrho_i^2)(n-1) + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{n(n-1)(3+\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Diese Werte und die daraus folgenden von a_n und c_n sind nun zunächst in die Gleichung (2b) einzusetzen, die geschrieben werden kann

$$\left. \begin{aligned} w &= \delta K \sum_0^\infty z_n \cos n \vartheta, \\ z_n &= a_n \varrho^n + b_n \varrho^{n+2} + c_n \varrho^{-n} + d_n \varrho^{-n+2} \quad (n > 1). \end{aligned} \right\} \quad (2c)$$

Die Einsetzung der asymptotischen Werte von a_n , b_n , c_n und d_n ergibt, wenn man sich auf die Betrachtung des Außenrandes ($\varrho = 1$), der für die Durchbiegung am wichtigsten ist und die wenigst gute Konvergenz bedingt, beschränkt und beachtet, daß die Glieder mit ϱ_i^{2n} gegen die übrigen verschwindend klein sind,

$$z_n \rightarrow \frac{n+1 + \varrho_i^2 n}{n^2(n+1)(3+\nu)} + \frac{1}{n^2(n^2-1)(1-\nu)} \quad (2d)$$

und, wenn man zu noch größeren n übergeht,

$$z_n \rightarrow \frac{1 - \varrho_i^2}{n^2(3+\nu)},$$

so daß also die Reihe für die Durchbiegung w am Außenrande schließlich wie $\frac{1}{n^2}$ konvergiert und der Rest der Reihe hinter einem Gliede genügend hoher Ordnung in geschlossener Form abgeschätzt werden kann.

Als weitere wichtige Funktion sei das radiale Moment M_r am Innenrande ($\varrho = \varrho_i$) betrachtet. Es werde nach Gleichung (3a) in der Form geschrieben

$$M_r = -\frac{P}{2\pi} \sum_0^\infty e_n \cos(n\vartheta), \quad (3c)$$

wo für $n > 1$

$$\left. \begin{aligned} e_n &= a_n n(n-1)(1-\nu)\varrho^{n-2} + b_n(n+1)[n(1-\nu) + 2(1+\nu)] \\ &+ c_n n(n+1)(1-\nu)\varrho^{-n-2} + d_n(n-1)[n(1-\nu) - 2(1+\nu)]. \end{aligned} \right\}$$

Drückt man wiederum a_n und c_n nach den Gleichungen (17) durch b_n und d_n aus und setzt deren obige asymptotische Werte (17a) ein, so erhält man

$$e_n \rightarrow \varrho_i^n \left[\frac{1-\varrho_i^2}{\varrho_i^2} \frac{4}{3+\nu} + \frac{1}{n} \left(\frac{4}{\varrho_i^2(1-\nu)} - \frac{4(1-\varrho_i^2)}{\varrho_i^2} - 1 \right) \right]. \quad (3d)$$

Dieser asymptotische Ausdruck wird weiter unten dazu benutzt werden, um oberhalb eines Gliedes genügend hoher Ordnung den Rest der Reihe mit der entsprechenden Genauigkeit abzuschätzen.

5. Numerisches Beispiel. Zur zahlenmäßigen Ausrechnung der Reihenoeffizienten ist es notwendig, eine bestimmte Annahme über die Poissonsche Zahl ν und eine weitere Annahme über das Verhältnis ϱ_i von Innenradius zu Außenradius zu machen.

Wir setzen entsprechend dem experimentellen Wert für Eisen

$$\nu = 0,3$$

und wir wählen

$$\varrho_i = \frac{r_i}{r_a} = \frac{2}{3}.$$

Die Koeffizienten a, b, c, d des Lösungsansatzes (2) bzw. der Definition (12a) werden dann nach den Gleichungen (13), (15) und (17)

$$\begin{aligned} a_0 &= -0,2463, & b_0 &= +0,26060, & c_0 &= -0,2106, & d_0 &= -0,25, \\ a_1 &= +0,05686, & b_1 &= -0,1172, & c_1 &= 0,08797, & d_1 &= 0,5, \\ d_n &= -\frac{1}{n(n-1)} \frac{\frac{5}{8}(n-1) + \frac{1}{8}(\frac{5}{8})^{2n} + 4,71}{0,2163(n^2-1) + 1,463((\frac{5}{8})^{2n} + (\frac{3}{8})^{2n}) + 15,67}, \\ b_n &= +\frac{1}{n(n+1)} \frac{\frac{5}{8}(n+1) - \frac{1}{8}(\frac{5}{8})^{2n} - 4,71}{0,2163(n^2-1) + 1,463((\frac{5}{8})^{2n} + (\frac{3}{8})^{2n}) + 15,67}, \\ a_n &= -\frac{1}{8} \left(b_n \frac{n+1}{n} + \frac{d_n}{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \right), \\ c_n &= +\frac{1}{8} \left(b_n \frac{(\frac{5}{8})^{2n}}{n} - d_n \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Bei der Ausrechnung dieser Größen war es nötig, im Beginn der Rechnung mit etwa 10^{-5} Genauigkeit zu arbeiten, um am Schluß auf 10^{-3} Genauigkeit zu kommen.

In der Tabelle 2 wurden die Werte dieser Konstanten von $n = 0$ bis $n = 19$ zusammengestellt.

Mit diesen Werten soll zunächst nur das radiale Biegemoment berechnet werden.

Die Gleichung (3b) liefert nach Einsetzung von 0,3 für ν und $\frac{2}{3}$ für ϱ_i die folgende Formel

$$M_r = -\frac{P}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \cos n\vartheta,$$

wo

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= 2,6 b_0 - 0,7 \varrho^{-2} c_0 + (3,3 + 2,6 \ln \varrho) d_0, \\ e_1 &= 6,6 \varrho b_1 + 1,4 \varrho^{-3} c_1 + 1,3 \varrho^{-1} d_1, \\ e_n &= n(n-1) 0,7 \varrho^{n-2} a_n + (n+1) (0,7n + 2,6) \varrho^n b_n \\ &\quad + n(n+1) 0,7 \varrho^{n-2} c_n + (n-1) (0,7n - 2,6) \varrho^{-n} d_n. \end{aligned} \right\} (3e)$$

Tabelle 2¹.

n	a_n	b_n	c_n	d_n
0	-0,2463	0,26060	-0,2106	-0,25
1	0,05686	-0,11715	0,8797	-0,5
2	0,1521	-0,03670	0,2360	-0,1135
3	0,05978	-0,01838	0,8345	-0,12877
4	0,03337	-0,01177	0,3090	-0,29423
5	0,02152	-0,008649	0,1156	-0,3292
6	0,01462	-0,006518	0,4294	-0,2169
7	0,010417	-0,005112	0,1596	-0,34219
8	0,0076881	-0,004080	0,5984	-0,31548
9	0,0058160	-0,003234	0,2273	-0,45781
10	0,0045815	-0,002731	0,8749	-0,42196
11	0,0036704	-0,002286	0,3412	-0,8476
12	0,0030003	-0,001938	0,1350	-0,53315
13	0,0024916	-0,001663	0,5368	-0,51312
14	0,0021057	-0,001442	0,2159	-0,5245
15	0,0017999	-0,001262	0,8756	-0,2117
16	0,0015555	-0,001114	0,3572	-0,78591
17	0,0013574	-0,0009902	0,1485	-0,73512
18	0,0011946	-0,0008860	0,6053	-0,71444
19	0,0010604	-0,0007974	0,2510	-0,85969

Diese Faktoren wurden nun an zwei Stellen, und zwar:

1. am inneren Rande, wo das Biegemoment M_r ein Maximum ist, d. h. bei

$$\varrho = \varrho_i = \frac{2}{3};$$

2. für einen inneren Radius, nämlich bei

$$\varrho = \frac{5}{8},$$

um den Anstieg des Biegemomentes von außen nach dem Innenrande hin zu beurteilen, ausgewertet.

Es ergab sich für $\varrho = \frac{2}{3}$:

$$e_0 = 2,6 b_0 - 1,575 c_0 + 2,2468,$$

$$e_1 = 4,4 b_1 + 4,725 c_1 + 1,95 d_1,$$

¹ Die als untere Indizes hinter Null angebrachten Zahlen bedeuten die Zahl der Nullen hinter dem Komma.

dann für $\varrho = \frac{5}{8}$

$$e_0 = 2,6 b_0 - 1,008 c_0 + 2,826 d_0,$$

$$e_1 = 5,5 b_1 + 2,420 c_1 + 1,56 d_1.$$

In Tabelle 3 wurden die für $\varrho = \frac{3}{8}$ und $\varrho = \frac{5}{8}$ berechneten Werte von e_n zusammengestellt.

Tabelle 3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e_n \left(\frac{3}{8}\right)$	0,4459	0,8753	0,8255	0,6954	0,5260	0,3731	0,2505	0,1634	0,1053	0,0678
$e_n \left(\frac{5}{8}\right)$	0,1835	0,3485	0,5428	0,4496	0,3411	0,2519	0,1843	0,1362	0,1029	0,0798

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$e_n \left(\frac{3}{8}\right)$	0,0435	0,0281	0,0183	0,0118	0,0077	0,0050	0,0033	0,0022	0,0014	0,0009
$e_n \left(\frac{5}{8}\right)$	0,0623	0,0496	0,0399	0,0324	0,0264	0,0216	0,0178	0,0146	0,0120	0,0099

Aus dieser Tabelle ergaben sich sodann durch Summierung gemäß Gl. (3e) die Zahlenwerte von $M_r \frac{2\pi}{P}$ für $\varrho = \frac{3}{8}$, d. h. am inneren Umfang und für $\varrho = \frac{5}{8}$, und zwar für das Intervall $\vartheta = \frac{\pi}{8}$. Dieselben sind in der folgenden Tabelle 4 zu finden.

Tabelle 4.

$\varrho \vartheta$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\frac{3}{8}$	4,450	1,445	0,013	-0,073	-0,030	-0,004	0,007	0,007	0,004
$\frac{5}{8}$	2,907	0,564	-0,213	-0,249	-0,142	-0,028	0,059	0,106	0,119

Bei der Summation wurden entsprechend Tabelle 3 Glieder von höherer als der 19. Ordnung zunächst nicht berücksichtigt. Daß dies bei dem Grade der rechnerischen Genauigkeit auf zwei Stellen hinter dem Komma berechtigt ist, zeigt die folgende Abschätzung der Restgliedersumme oberhalb $n = 19$.

Für das n -te Reihenglied e_n an der Stelle $\varrho = 1$ ($r = r_a$) war in Gl. (3d) ein allgemeiner asymptotischer Ausdruck entwickelt worden, der, wenn man die besonderen Werte $\varrho_i = \frac{3}{8}$, $\nu = 0,3$ einsetzt, die folgende Form annimmt

$$e_n \rightarrow \varrho_i^n \left(1,515 + \frac{6,857}{n} \right),$$

ein Ausdruck, der für $n = 18$ den Wert 0,0013 und für $n = 19$ den Wert 0,0009 annimmt, also schon dort bei dem gewählten Grade der Genauigkeit mit den Werten der Tabelle 3 übereinstimmt, demnach geeignet ist, den Rest der Reihe über $n = 19$ abzuschätzen.

Der größte Wert dieses Restes ist bei $\vartheta = 0$ zu erwarten, da dort alle $\cos(n\vartheta) = +1$ und die e_n alle positiv sind.

Es ist also die folgende Summe zu berechnen

$$S = \sum_{n=20}^{n=\infty} \left(\varrho_i^n \cdot 1,515 + \frac{\varrho_i^n}{n} 6,857 \right).$$

Der erste Teil wird als Summe einer geometrischen Reihe:

$$1,515 \frac{\varrho_i^{20}}{1 - \varrho_i} = 1,515 \cdot 3 \left(\frac{3}{8}\right)^{20} = 0,001366.$$

Der zweite Teil läßt sich summieren wie folgt:

$$6,857 \left[-\ln(1 - \varrho_i) - \sum_{n=1}^{n=19} \frac{\varrho_i^n}{n} \right] = 6,857 (1,09861 - 1,09857) = 0,000274.$$

Es wird demnach

$$S = 0,001366 + 0,000274 = 0,001640 .$$

Die bis $n = 19$ berechnete Summe der e_n im Betrage von 4,450 ist also durch diese Restberechnung auf 4,452 zu verbessern bzw. man kann schließen, daß die Zahlen der Tabelle 4 für die Biegemomente M_r auf mindestens 10^{-3} ihres Wertes genau berechnet sind.

Die Zahlwerte der Tabelle 4 sind schließlich in dem Kurvenbild Abb. 3 veranschaulicht.

Die Kurven zeigen, daß die Biegemomente in sehr stark gedämpften Wellen vom Belastungsradius aus nach beiden Seiten abnehmen, und zwar für den Einspannungsradius stärker gedämpft als für mittlere Radien.

Ganz summarisch kann man die Ergebnisse dazu benutzen, um die Frage nach einer gewissen tragenden Breite des Ringflansches zu beantworten, indem man das Maximalmoment am inneren (Einspannungs-)Rande mit dem Maximalmoment eines Kragträgers derselben Auskrägung $r_a - r_i$ und einer gleichwertigen Breite b vergleicht.

Auf einen solchen Träger würde für die Längeneinheit der Profilbreite b das Maximalmoment

$$M_{\max} = \frac{P (r_a - r_i)}{b}$$

entfallen.

Die Gleichsetzung mit

$$M_r = \frac{P}{2\pi} 4,450$$

liefert die gleichwertige Trägerbreite

$$b = (r_a - r_i) \frac{2\pi}{4,450} = 1,41 (r_a - r_i) .$$

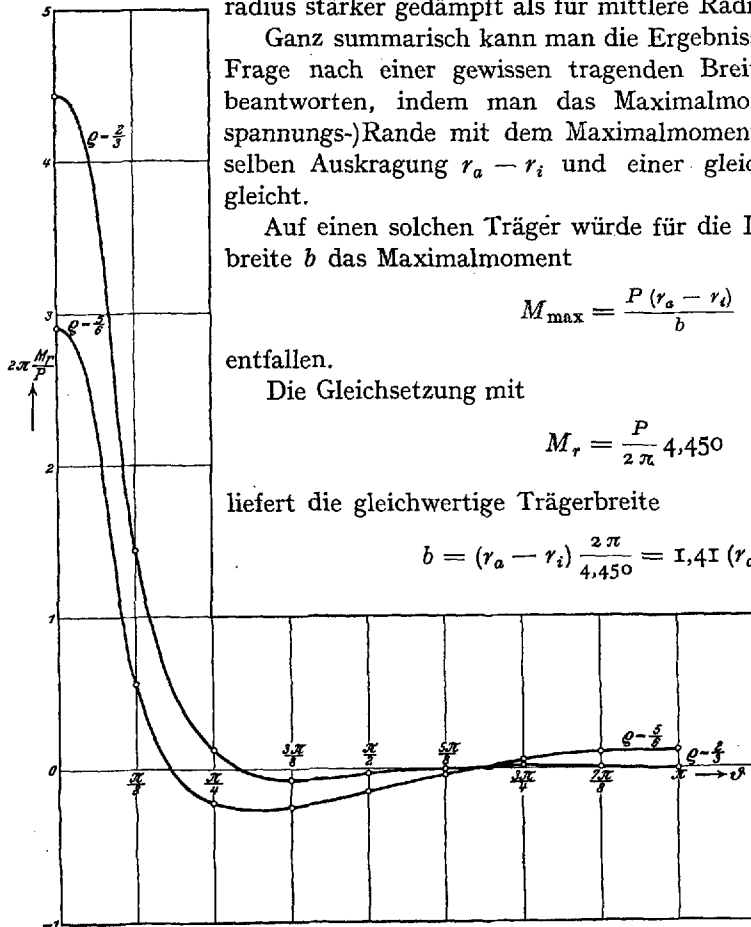


Abb. 3.

Man kann sich also vorstellen, daß die Belastung P sich etwa unter einem Winkel von 35° bis zum Innenrande ausbreitet

Betrachtet man ferner das Verhältnis der Biegemomente auf dem Belastungsradius beim Radienverhältnis $\frac{5}{4}$ und $\frac{3}{2}$, so verhalten

sich diese Momente nach dem Kurvenbild bzw. nach Tabelle 4 wie $\frac{2,91}{4,45} = 0,672$, während bei einem einfachen Kragträger sie sich wie die Abstände vom Belastungspunkt verhalten müßten, d. h. wie 0,5.

Das Biegemoment wächst also bei der Flanschplatte nicht linear mit dem Abstände von der Belastungsstelle, sondern erst schneller und dann langsamer. Die entsprechende tragende Breite an der Stelle $\rho = \frac{5}{4}$ wird

$$b_1 = (r_a - r) \frac{2\pi}{2,91} = (r_a - r) 2,16 .$$

Abb. 1 zeigt diese etwa parabolische Verteilung der tragenden Breite an dem schraffierten, dem hier betrachteten Radienverhältnis q_i entsprechenden inneren Kreise.

Mit der numerischen Ermittlung des Verlaufes des radialen Biegemomentes M_r ist allerdings nur ein Teil des vorgelegten Problems erledigt.

Es liegen zwar in Tabelle 2 die Reihenkoeffizienten a_n, b_n, c_n, d_n bereit, aus welchen man analog wie für M_r auch das tangentielle Biegemoment M_θ , das Torsionsmoment H , die Querkräfte Q_r und Q_θ und die Durchbiegung w ihrem zahlenmäßigen Verlauf nach bestimmen und, aus welchen man dann die Hauptspannungen und Hauptdehnungen, die maximalen Schubspannungen und die mittleren Normalspannungen und damit die Festigkeitsspannungen ableiten kann, aber es müßten die Koeffizienten a, b, c, d auch für andere Flanschradienverhältnisse $q_i = \frac{r_i}{r_a}$ nach den Gl. (13), (15) und (17) tabellarisch ermittelt werden und es müßte ferner auch der Einfluß der Verschiebung des Belastungspunktes nach innen untersucht werden.

Immerhin geben die obigen Mitteilungen für das Verhalten dünner, nicht zu stark sich durchbiegender Flanschplatten schon einigen Aufschluß und sie geben auch die Unterlage für eine Fortsetzung der Arbeit im oben angedeuteten Sinne.

Daß sich daran dann, wie bei allen Rechnungen der elementaren Plattentheorie, auch Betrachtungen über den Einfluß größerer Plattendicke und größerer Durchbiegung anschließen müssen, sei der Vollständigkeit halber noch vermerkt.

Von der Methode der Auflösung der Einzelkraft P und der von ihr erzeugten Spannungsergebnisse in Wellenzüge der Gl. (11) möge noch zum Schluß das etwas anschaulichere folgende Bild gegeben werden:

Die der Einzelkraft P am äußeren Rande entsprechende Querkraft Q'_r des Flanschringes ist durch die Fouriersche Reihe der Gl. (11) in eine unendliche Zahl von Wellenzügen aufgelöst worden. Betrachtet man die jedem Wellenzuge entsprechende Belastung für sich, so sieht man, daß sie aus abwechselnd nach oben und unten wirkenden Belastungsstrecken besteht. Für kleine Werte von n wird sich der Einfluß der zugehörigen Randbelastung merklich bis zum Einspannungskreise fortpflanzen. Je mehr jedoch die Zahl $2n$ der Belastungshalbwellen des äußeren Umfanges wächst, desto dichter werden die abwechselnd entgegengesetzt gerichteten Belastungsstrecken längs dieses äußeren Umfanges aneinander rücken und sich, sofern die die Spannungsergebnisse und die Durchbiegung darstellenden Reihen, wie es tatsächlich der Fall ist, konvergieren, in einer immer schmäler werdenden äußeren Randzone ins Gleichgewicht setzen, ohne weiter innen sich bemerkbar zu machen. Das St. Venantsche Prinzip der Äquivalenz statisch gleichwertiger Lasten in genügend großer Entfernung von der Belastungsstelle hängt also hier mit der Konvergenz der darstellenden Reihen zusammen.

Die sämtlichen formelmäßigen und rechnerischen Ergebnisse wurden von den Herren **Fr. Strauch** und **St. Bergmann** unabhängig nachgeprüft. Die Rechnungen, soweit sie sich auf flugtechnische Anwendungen bezogen, waren ermöglicht durch eine Zuwendung des Reichsverkehrsministeriums, für die ich hier nochmals meinen Dank ausspreche.

(Eingegangen am 16. September 1929.)