

# Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nicht-achsensymmetrischer Belastung<sup>1</sup>.

Von Kurt Miesel in Eberswalde.

## A. Einleitung.

In vielen Fällen praktischer Anwendung der Zylinderschale wird man sich mit der Betrachtung achsensymmetrischer Belastung begnügen können. So tritt bei Druckrohren kleineren Durchmessers und bei Dampfkesseln der Einfluß des Eigengewichts und des Flüssigkeitsgewichts zurück<sup>2</sup>. Bei großen Niederdruckrohren, freitragenden Rohrbrücken aus Eisen und Eisenbeton und in manchen anderen Fällen hingegen tut man gut daran, sich Rechenschaft über die genauen Beanspruchungen aus nicht-achsensymmetrischer Belastung abzulegen. Für U-Boote, bei denen es auf höchste Ausnutzung des Materials ankommt, erlangt ein einwandfreier Spannungsnachweis erhöhte Bedeutung. Bei Zylinderschalen von außergewöhnlichen Durchmessern vollends, wie z. B. bei U-Bootprüfungs-docks und Hebeschiffen<sup>3</sup>, werden genaue Untersuchungen unbedingt notwendig, wenn man zuverlässig und wirtschaftlich konstruieren will.

Die vorliegende Abhandlung gibt zunächst eine genaue Lösung für die Kreiszyklinderschale mit nicht-achsensymmetrischer Belastung unter der Voraussetzung, daß die Komponenten  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  der kontinuierlichen Belastung genügend genau dargestellt sind durch Ausdrücke von der Form

$$X = \sum_1^N \bar{X}_n \cos n \varphi, \quad Y = \sum_1^N \bar{Y}_n \sin n \varphi, \quad Z = \sum_1^N \bar{Z}_n \cos n \varphi, \quad (1)$$

( $n = 1, 2, 3 \dots N$ ), also durch abgebrochene Fouriersche Reihen (vgl. Abb. 1), wobei die  $\bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}_n$  Funktionen nur von  $x$  bedeuten. Eine nähere Begründung des Ansatzes wird später gegeben, wo auch gezeigt wird, daß ein Ansatz mit Vertauschung von  $\sin$  mit  $\cos$  in entsprechender Weise behandelt werden kann. Damit werden fast alle in der Praxis vorkommenden Fälle erfaßt. Sodann wird eine leicht handliche Näherungslösung gegeben, deren Anwendung an zwei Beispielen erläutert

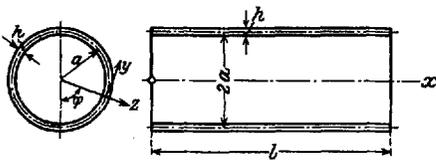


Abb. 1. Quer- und Längsschnitt des Zylinders.

wird. Schließlich ist ein besonderer Abschnitt dem Einfluß der Nachgiebigkeit der Spante (Versteifungsringe) gewidmet.

Einen sehr guten Überblick über die bisherige Entwicklung der allgemeinen Schalentheorie gibt J. Geckeler in dem Quellenverzeichnis seiner Abhandlung: „Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen.“ Berlin 1926. Auf eine Wiederholung kann hier verzichtet werden. Es wird deshalb im folgenden nur die Literatur angeführt, auf welche unmittelbar Bezug genommen ist.

Die Lösung für die „biegungsfreie“ Kreiszyklinderschale (Schale mit verschwindender Biegesteifigkeit) bei symmetrischer Belastung ist trivial. Die Biegesteifigkeit

<sup>1</sup> Karlsruher Dissertation. Referent: Prof. K. v. Sanden, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Th. Pöschl.

<sup>2</sup> Daß auch hier gelegentlich genauere Untersuchungen am Platze sind, beweist der Bericht über den „Kocherzerknall in einer Zellstoffabrik“ von Ministerialrat Prof. Krantz im Reichsarbeitsblatt 1927, Nr. 14, in dem der Verfasser auf den bisherigen Mangel einer einwandfreien Berechnungsmethode hinweist.

<sup>3</sup> D.R.P. Kl. 55 b<sup>1</sup> Gr. 5. H 100940 u. 100941, R. Hitzemann u. P. H. van Wienen, Hamburg.

find erstmals Berücksichtigung bei der Berechnung des an einem Ende eingespannten Behälters, und zwar in zahlreichen Abhandlungen<sup>1</sup>. Für den durch Spante unterteilten Zylinder entwickelte **K. v. Sanden** fertige Formeln<sup>2</sup>, wie sie bei der deutschen Kriegsmarine zur Bemessung von U-Booten angewandt wurden. Es geht hier erstmals die Nachgiebigkeit der Spante in die Rechnung mit ein. **H. Reißner**<sup>3</sup> gibt die Berechnung des Spannungszustandes der biegungsfreien Kugelschale unter einer Belastung, die nach trigonometrischen, mit ganzen Vielfachen fortschreitenden Reihen entwickelbar ist. Die Methode ist auf die Zylinderschale ohne weiteres übertragbar. **B. Thoma**<sup>4</sup> behandelt danach das freitragende gefüllte Rohr ohne Biegungswiderstand [Fall  $n = 1$  in Gleichung (1)]. **E. Schwerin**<sup>5</sup> untersucht denselben Belastungsfall sowie den Einfluß des Eigengewichts für die Schale mit Biegungswiderstand. Aus den vorliegenden Ermittlungen leiten sich diese Ergebnisse als Sonderfall her, der wegen seiner praktischen Wichtigkeit in einem eigenen Abschnitt ausführlicher behandelt wird, unter Beigabe einer Zahlentafel, welche die Anwendung erleichtert. Eine Näherungslösung für die achsensymmetrisch belasteten Rotationsschalen im allgemeinen, die für den Sonderfall der Zylinderschale in ihren Beiwerten genau ist, begründet **J. Geckeler** in der oben angeführten Schrift. Auf diesen Ergebnissen ist die nachstehende Näherung für die nicht-achsensymmetrisch belastete Kreiszyinderschale aufgebaut. Gelingt es, die entsprechenden Beiwerte auch für die nicht-achsensymmetrisch belasteten Schalen von beliebiger Meridianform, etwa mit Hilfe des Ritzschen Näherungsverfahrens, zu finden, dann kann die Theorie der elastischen Schalen ebenso zum Rüstzeug des praktisch tätigen Ingenieurs werden, wie dies mit der Theorie der ebenen Platten jetzt geschehen ist<sup>6</sup>.

Für diese Abhandlung gelten die üblichen Voraussetzungen der Theorie der dünnen elastischen Schalen. Die Wandstärke ist klein im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen. Die Veränderlichkeit der Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche wird im Zusammenhang damit vernachlässigt. Punkte einer Mittelflächennormalen liegen nach der Formänderung auf einer Normalen zur deformierten Fläche. Die Spannungen am Schalenelement lassen sich mit sehr großer Annäherung zu Spannungsergebnissen und Spannungsmomenten, bezogen auf die Mittelfläche, zusammenfassen. Weitere Ausführungen darüber erübrigen sich; es sei hier auf die entsprechenden Lehrbücher verwiesen<sup>7</sup>.

## B. Genaue Lösung für die Kreiszyinderschale mit nicht-achsensymmetrischer Belastung.

### I. Schale ohne Biegungswiderstand.

#### 1. Allgemeine Lösung.

Die Biegemomente, Verdrehungsmomente und Scherkräfte in Schnitten normal zur Mittelfläche bzw. die diesen entsprechenden Biegungs- und Schubspannungen werden

<sup>1</sup> Siehe u. a.: Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, Abt. 2, 2. Aufl., Leipzig 1925. A. Föppl, Vorlesungen über techn. Mechanik, Bd. V, Leipzig und Berlin 1919. C. Runge, Über die Formänderungen eines zyl. Wasserbehälters, ZS f. Math. u. Physik (1904). Pöschl u. Terzaghi, Berechnung von Behältern nach neueren anal. u. graph. Methoden, Berlin 1926. Meißner, Beanspruchung und Formänderung zyl. Gefäße mit linear veränderl. Wandstärke, Vierteljahresschr. der Naturforsch.-Ges. Zürich Jg. 62 (1917).

<sup>2</sup> K. v. Sanden, Werft und Reederei 1 (1920) S. 216.

<sup>3</sup> H. Reißner, Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig 1912.

<sup>4</sup> B. Thoma, ZS f. ges. Turbinenwesen 17 (1920) S. 49.

<sup>5</sup> E. Schwerin, ZS f. ang. Math. u. Mech. 2 (1922) S. 340.

<sup>6</sup> Vgl. z. B. H. Leitz, Bautechnik 1 (1923) S. 155; Bauing. 4 (1925) S. 920 ff. H. Marcus, Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, Berlin 1925.

<sup>7</sup> Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, Kap. XXIV, Leipzig 1907. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, Abschn. 5, München 1920. J. Prescott, Applied Elasticity, London 1924.

vernachlässigt. Dann ergibt sich das in Abb. 2 dargestellte Schnittresultantenbild am Schalenelement. Die Lage des Achsenkreuzes ist aus Abb. 1 ersichtlich; es wandert mit dem Argument  $\varphi$  auf der Mittelfläche. Die Resultanten sind, wie in der Schalentheorie üblich, auf die Längeneinheit der Kurven  $x = \text{konst.}$  bzw.  $\varphi = \text{konst.}$  bezogen<sup>1</sup>. Die neue

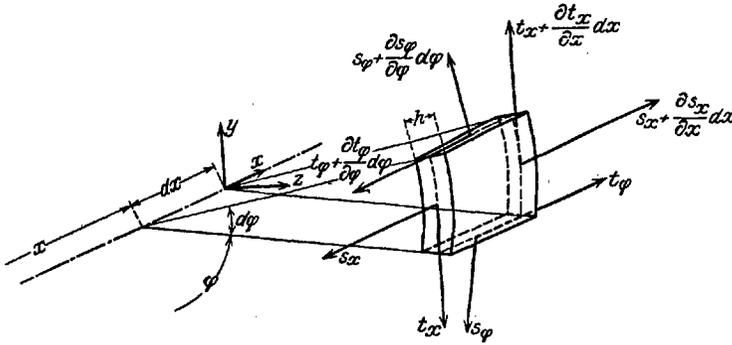


Abb. 2. Schnittresultanten am biegungefreien Schalenelement.

Gestalt der Schale ist durch die Verschiebungen  $u, v, w$  der Mittelfläche bestimmt, deren Verzerrungszustand durch die Dehnung  $\epsilon_x$  in Richtung der Erzeugenden, die Dehnung  $\epsilon_\varphi$  in Richtung der Parallelkreistangente und die Schiebung  $\gamma$  gekennzeichnet ist. An Stelle von  $x$  wird weiterhin die

dimensionslose Veränderliche  $\xi = \frac{x}{a}$  eingeführt und abkürzungsweise geschrieben

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = a \frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f. \tag{2}$$

Werden, wie in Gleichung (1), die Komponenten der kontinuierlichen Belastung der Schale nach den drei Achsrichtungen bzw. mit  $X, Y, Z$  bezeichnet, dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} a \frac{\partial s_x}{\partial x} - \frac{\partial t_\varphi}{\partial \varphi} + a X &= 0, \\ \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial t_x}{\partial x} + a Y &= 0, \\ -s_\varphi + a Z &= 0, \end{aligned}$$

oder, da die Momentengleichung bezogen auf die z-Achse  $t_x = -t_\varphi = t$  liefert,

$$s'_x + t' + a X = 0, \tag{3_1}$$

$$s'_\varphi + t' + a Y = 0, \tag{3_2}$$

$$-s_\varphi + a Z = 0. \tag{3_3}$$

Sie stellen also ein System von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und einer gewöhnlichen Gleichung für die drei unbekanntenen Funktionen  $s_x, s_\varphi$  und  $t$  dar. Nach Einsetzen eines beliebigen Gliedertripels des Ansatzes (1) folgt aus Gleichung (3<sub>3</sub>)

$$s_\varphi = a \bar{Z}_n \cos n\varphi, \quad s'_\varphi = -a n \bar{Z}_n \sin n\varphi,$$

und damit aus Gleichung (3<sub>2</sub>)

$$t' = -a \bar{Y}_n \sin n\varphi + a n \bar{Z}_n \sin n\varphi = -a \sin n\varphi (\bar{Y}_n - n \bar{Z}_n),$$

d.h.

$$t = a \sin n\varphi \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi + C_1(\varphi),$$

worin  $C_1$  nur mehr eine Funktion von  $\varphi$  ist. Endlich wird

$$t' = a n \cos n\varphi \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi + C_1,$$

<sup>1</sup> Normalresultanten werden im Anschluß an F. Schleicher (Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Berlin 1926) mit  $s$ , Schubresultanten mit  $t$  bezeichnet, entsprechend den in Deutschland allgemein üblichen Benennungen  $\sigma$  u.  $\tau$  für die Spannungen.

Dies eingesetzt in Gleichung (3<sub>1</sub>) gibt

$$s'_\varphi = -a \bar{X}_n \cos n\varphi - a n \cos n\varphi \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi - C_1,$$

$$s_x = -a \cos n\varphi \int [\bar{X}_n + n \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi] d\xi - C_1 \xi + C_2(\varphi).$$

Die Spannungsergebnisse der biegungsfreien Zylinderschale lassen sich also — statisch bestimmte Randbedingungen vorausgesetzt — ohne Eingehen auf die Formänderungen und ohne Rücksicht auf die Wandstärke angeben. Wenn die von  $\xi$  abhängigen Teile der Belastungskomponenten  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  und  $\bar{Z}$  als integrierbare Funktionen von  $\xi$  gegeben sind, so bestimmen sie sich durch die Gleichungen

$$s_\varphi = a \bar{Z}_n \cos n\varphi, \tag{4_1}$$

$$s_x = -a \cos n\varphi \int [\bar{X}_n + n \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi] d\xi - C_1 \xi + C_2(\varphi), \tag{4_2}$$

$$t = a \sin n\varphi \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi + C_1(\varphi). \tag{4_3}$$

Die Spannungsergebnisse sind mit Ermittlung der beiden Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  bekannt. Statisch unbestimmte Lagerung erfordert jedoch zu ihrer Bestimmung das Eingehen auf die Verschiebungsgrößen  $\frac{u}{a}$ ,  $\frac{v}{a}$  und  $\frac{w}{a}$ , wobei weitere zwei Integrationskonstanten ( $C_3$  und  $C_4$ ) auftreten. Nach Love sind die Verschiebungen mit den Verzerrungen durch folgende Gleichungen verbunden

$$a \varepsilon_x = u', \quad a \varepsilon_\varphi = v' + w, \quad a \gamma = v' + u', \tag{5}$$

während die Dehnungen  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_\varphi$  sowie die Schiebung  $\gamma$  durch die Beziehungen

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (s_x - \nu s_\varphi), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (s_\varphi - \nu s_x), \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{Eh} t \tag{6}$$

gegeben sind, worin  $\nu = \frac{1}{m}$  den reziproken Wert der Querdehnungszahl bedeutet. Setzt man (4) in (6) und weiterhin (6) in (5) ein, bezeichnet man ferner

$$\begin{aligned} \Xi'' &= \int \bar{X}_n d\xi, & \Xi' &= \int \Xi'' d\xi \quad \text{usw.}, \\ \Phi''' &= \int (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi, & \Phi'' &= \int \Phi''' d\xi \quad \text{usw.}, \\ \Psi' &= \int \bar{Y}_n d\xi, & \Psi &= \int \Psi' d\xi, \end{aligned}$$

dann erhält man die Verschiebungen in den drei Achsrichtungen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bzw. zu<sup>1</sup>

$$Eh \frac{u}{a} = Eh \int \varepsilon_x d\xi = -a \cos n\varphi [\Xi' + n \Phi' + \nu \int \bar{Z}_n d\xi] - C_1 \frac{\xi^2}{2} + C_2 \xi + C_3, \tag{7_1}$$

$$\begin{aligned} Eh \frac{v}{a} &= Eh \int \left( \gamma - \frac{u'}{a} \right) d\xi = -a \sin n\varphi [n \Xi + n^2 \Phi - (2 + \nu) \Phi'' + \nu \Psi] \\ &+ 2(1 + \nu) C_1 \xi + C_1 \frac{\xi^3}{6} - C_2 \frac{\xi^2}{2} - C_3 \xi + C_4(\varphi), \end{aligned} \tag{7_2}$$

$$\begin{aligned} Eh \frac{w}{a} &= Eh \left( \varepsilon_\varphi - \frac{v'}{a} \right) = a \cos n\varphi [n^2 \Xi + \nu \Xi'' + n(n^2 \Phi - 2 \Phi'') + \nu n \Psi + \bar{Z}_n] \\ &- (2 + \nu) C_1 \xi - C_1 \frac{\xi^3}{6} - \nu C_2 + C_2 \frac{\xi^2}{2} + C_3 \xi - C_4. \end{aligned} \tag{7_3}$$

<sup>1</sup> Im folgenden sind stets an Stelle der Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die dimensionslosen Größen  $\frac{u}{a}$ ,  $\frac{v}{a}$  und  $\frac{w}{a}$  gebraucht.

Die Verschiebungsgrößen verlaufen, wie die Spannungsgrößen, für Kreise  $\xi = \text{konst.}$  nach Funktionen von bzw.  $\sin n \varphi$  und  $\cos n \varphi$ . Es empfiehlt sich, zur leichteren Berechnung der Konstanten aus den Gleichungen (4) und (7), diese vorher ebenfalls nach solchen Funktionen anzusetzen. Es muß sein

$$C_1 = c_1 \sin n \varphi, \quad C_1' = n c_1 \cos n \varphi, \quad C_1'' = -n^3 c_1 \sin n \varphi, \quad C_1''' = -n^3 c_1 \cos n \varphi,$$

$$C_2 = c_2 \cos n \varphi, \quad C_2' = -n c_2 \sin n \varphi, \quad \text{usw.},$$

$$C_3 = c_3 \cos n \varphi, \quad C_3' = -n c_3 \sin n \varphi, \quad \text{usw.}, \quad C_4 = c_4 \sin n \varphi, \quad C_4' = n c_4 \cos n \varphi, \quad \text{usw.}$$

Die Formänderungen sind von der Wandstärke abhängig. Ist diese mit  $\xi$  veränderlich, dann sind die Verschiebungen aus den Gleichungen (5) und (6) zu ermitteln, wobei  $h$  jeweils unter dem Integralzeichen stehen bleibt.

Durch den Ansatz der Komponenten der Belastungsglieder  $X, Y$  und  $Z$  nach Gleichung (1) wurden die partiellen Differentialgleichungen (3<sub>1</sub>) und (3<sub>2</sub>) in totale übergeführt und dadurch eine Lösung auf dem gleichen Wege ermöglicht, wie er später bei der Schale mit Biegungswiderstand (Kap. II, S. 31ff.) zum Ziele führen wird. Im vorliegenden Falle der nichtbiegungssteifen Schale ist allerdings die Entwicklung der  $X, Y$  und  $Z$  in einer Fourierschen Reihe zur Lösung nicht notwendig, da man dieses statisch bestimmte Problem unmittelbar durch Quadraturen lösen kann. Es läßt sich zeigen, daß der Ansatz (1) keine Beschränkung auf spezielle Funktionen  $X, Y, Z$  bedeutet, außer der Voraussetzung ihrer Entwickelbarkeit in eine konvergente Fouriersche Reihe, welche Voraussetzung praktisch nicht schwerwiegend ist. Sind nämlich  $X$  und  $Z$  nach der Ko-

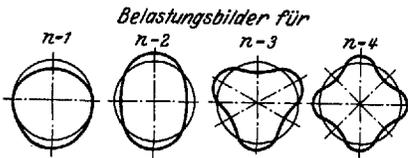


Abb. 3.

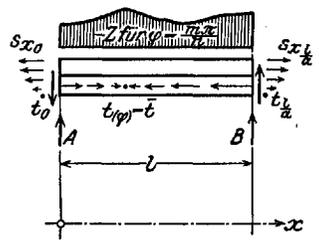
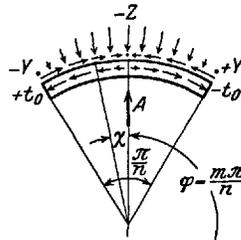


Abb. 4. Gleichgewicht am Schalenstreifen.

sinus-,  $Y$  aber nach der Sinusfunktion von  $n \varphi$  angesetzt, dann herrscht Symmetrie der Belastung bezüglich aller Strahlen  $\varphi = \frac{m \pi}{n}$ , worin  $m$  alle ganzen Zahlen von 0 bis  $2n$  durchläuft (vgl. Abb. 3). Schneidet man einen Schalenstreifen von der Länge  $l$  und der Breite  $\frac{\pi}{n}$  aus, der symmetrisch zu einem solchen Strahl liegt, dann erhält man das in Abb. 4 skizzierte Belastungsbild. Die Komponenten  $X$  sind dort der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Längs des Randes  $\varphi = \frac{m \pi}{n} \pm \frac{\pi}{2n}$  treten nur Schubspannungen  $t_0 = \bar{t}$  auf, wobei  $\bar{t}$  nur den von  $\xi$  abhängigen Teil der Spannungsergebnanten bedeutet. An den Rändern  $\xi = 0$  und  $\xi = \frac{l}{a}$  wirken die Schubspannungsergebnanten  $t = \bar{t}(\xi = 0 \text{ bzw. } \frac{l}{a}) \cdot \sin n \varphi$  und die Normalspannungsergebnanten  $s_x = \bar{s}_x(\xi = 0 \text{ bzw. } \frac{l}{a}) \cdot \cos n \varphi$ .

Diese Größen variieren mit  $\varphi$  vom negativen Extremwert über den Wert 0 am Symmetriestrahle bzw. am Streifenrand zum positiven Extremwert. Ein Blick auf die Gleichungen (3) lehrt, daß ein Ansatz der Belastungskomponenten, in dem  $\sin n \varphi$  und  $\cos n \varphi$  jeweils vertauscht sind, zu einer analogen Lösung der Gleichungen führt. Symmetriestrahle gehören nunmehr zu den Argumenten  $\varphi = \frac{m \pi}{2n}$ . Am einfachsten erhält man die Spannungsergebnanten durch Einführen einer neuen Veränderlichen  $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2n}$ , womit gilt

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_1^N \bar{X}_n \sin n \varphi = \sum_1^N \bar{X}_n \sin \left( n \psi + \frac{\pi}{2} \right) = \sum_1^N \bar{X}_n \cos n \psi, \\
 Y &= \sum_1^N \bar{Y}_n \cos n \varphi = \sum_1^N \bar{Y}_n \cos \left( n \psi + \frac{\pi}{2} \right) = \sum_1^N (-\bar{Y}_n) \sin n \psi, \quad (1a) \\
 Z &= \sum_1^N \bar{Z}_n \sin n \varphi = \sum_1^N \bar{Z}_n \sin \left( n \psi + \frac{\pi}{2} \right) = \sum_1^N \bar{Z}_n \cos n \psi, \\
 \frac{\partial f}{\partial \psi} &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f'.
 \end{aligned}$$

Es gelten also für die neue Veränderliche die Ergebnisse der Gleichungen (4) und (7), wenn darin  $\varphi$  durch  $\psi$  und  $\bar{Y}_n$  durch  $(-\bar{Y}_n)$  ersetzt wird. Sind z. B. die Komponenten einer beliebigen Belastung genügend genau durch eine abgebrochene Fouriersche Reihe wiedergegeben, dann lassen sich, da das Superpositionsgesetz gilt, auf dem hier eingeschlagenen Weg die Spannungsergebnisse aus den Gleichungen (4) und (7) mit Hilfe der Ansätze (1) und (1a) Glied für Glied berechnen. Dem konstanten Anfangsglied der Reihe entspricht achsensymmetrische Belastung der Schale. Bei Symmetrie der Gesamtbelastung zum Strahl  $\varphi = 0$  treten bei der Reihenentwicklung neben dem Anfangsglied nur Glieder des Ansatzes (1), bei Symmetrie zum Strahl  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  nur solche des Ansatzes (1a) auf.

Den vier Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  bzw.  $c_1, c_2, c_3, c_4$  entsprechend kann die Kreiszyklinderschale mit verschwindender Biegesteifigkeit auch nur vier Randbedingungen angepaßt werden, z. B. zwei an jedem End- oder Übergangskreis. Wir stellen uns deshalb die beiden Ränder der Schale beispielsweise durch einen Reifen (Spant) gehalten vor, der wohl imstande ist, die Randschubkräfte aufzunehmen, jedoch Verbiegungen um die  $x$ - und  $z$ -Achse und Verwindungen um die  $y$ -Achse keinerlei Widerstand entgegengesetzt. Da  $c_4$  nur in  $\frac{v}{a}$  und  $\frac{w}{a}$  auftritt, so muß zur vollständigen Lösung eine dieser Verschiebungen — unmittelbar oder mittelbar — durch die Randbedingungen an jedem der beiden Endringe gegeben sein: erstes Paar der Bestimmungsgleichungen. Die andere ist dann, soweit der Einfluß von  $c_4$  in Frage kommt, schon mitbestimmt. Das zweite Paar kann dann durch die Art der Festlegung der beiden Ränder gegeben sein. So lautet z. B. die Bedingungsgleichung für einen in der Axialrichtung freien Randring (freie Lagerung)  $s_x = 0$  (statische Randbedingung), für in der  $x$ -Richtung unverschieblichen Rand  $\frac{u}{a} = 0$  (kinematische Randbedingung). Für einen „durchlaufenden Rohrstrang“ mit axial frei verschieblichen Zwischenringen erhält man für jedes Trennungsspannt zwischen den Öffnungen  $r$  und  $(r + 1)$  die vier Gleichungen

$$s_{x_r} = s_{x_{r+1}}, \quad \frac{u}{a_r} = \frac{u}{a_{r+1}}, \quad \frac{v}{a_r} = 0, \quad \frac{v}{a_{r+1}} = 0, \quad (8)$$

und außerdem noch für die Rohrenden je zwei Gleichungen, so daß zur Bestimmung der  $4r$  Konstanten auch  $4(r - 1) + 2 \cdot 2 = 4r$  Gleichungen zur Verfügung stehen. Die Verschiebungen  $\frac{w}{a}$  benachbarter Felder decken sich nicht ohne weiteres. Sie können jedoch durch Krümmungsänderungen zum Übereinstimmen gebracht werden, was für den Spannungszustand der Schale ohne Biegungswiderstand voraussetzungsgemäß ohne Einfluß ist.

Es wurde schon früher darauf hingewiesen, daß die Berechnung der Spannungsergebnisse bei äußerlich-statischer Bestimmtheit (statisch bestimmter Lagerung) ohne Eingehen auf die Gestaltänderung der Schale möglich ist. Auch bei statisch-unbestimmter Lagerung wird man oft an Stelle der kinematischen Bedingungen besser von den Gleich-

gewichtsbedingungen des Schalenstreifens mit dem Zentriwinkel  $\frac{\pi}{n}$  (vgl. Abb. 4) Gebrauch machen. Die am Rande  $\xi = 0$  bzw.  $\xi = \frac{l}{a}$  wirkenden Schubresultanten  $t_0$  bzw.  $t_l$  werden zu diesem Zweck zu in Richtung des Symmetriestrahls wirkenden Reaktionen  $A_t$  bzw.  $B_t$  zusammengefaßt. Für  $A_t$  erhält man

$$A_t = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} t_0 \sin \chi \cdot a d\chi = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} a \bar{t}_0 \sin n\varphi \sin \chi d\chi,$$

und da  $\varphi = \frac{m\pi}{n} + \chi$ , und deshalb  $\sin n\varphi = \sin(m\pi + n\chi) = \pm \sin n\chi$  ist, so ist, je nachdem  $m$  eine gerade oder ungerade Zahl ist,

$$A_t = \pm a \bar{t}_0 \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} \sin n\chi \sin \chi d\chi = \pm 2 a \bar{t}_0 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{n^2 - 1}.$$

In gleicher Weise werden Belastungsergebnisse gebildet. Die in Richtung des Symmetriestrahls wirkende Lastresultante lautet z. B.

$$A_p = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} \int_0^{\frac{l}{a}} (\bar{Z}_n \cos n\varphi \cos \chi - \bar{Y}_n \sin n\varphi \sin \chi) a^2 d\chi d\xi$$

$$= \pm 2 a^2 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{n^2 - 1} \int_0^{\frac{l}{a}} (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) d\xi,$$

je nachdem  $m$  gerade oder ungerade ist. Für  $n = 1$  nimmt der Faktor  $\frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{n^2 - 1}$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an und geht für  $n \rightarrow 1$  gegen den Grenzwert  $\frac{\pi}{4}$ . Wie man sich durch Betrachtung von Abb. 3 überzeugt, stellt  $n = 1$  insofern einen Ausnahmefall dar, als nur bei ihm eine äußere Auflagerreaktion für die Gesamtschale auftritt, während für alle  $n > 1$  die Belastungen unter sich im Gleichgewicht sind.

### 2. Sonderfälle.

In vielen Fällen der Praxis hat man es mit einer hinsichtlich  $x$  konstanten Belastung zu tun. Für diesen Fall lauten die Gleichungen (4)

$$s_\varphi = a Z_n \cos n\varphi, \tag{4a_1}$$

$$s_x = -a \cos n\varphi \left[ \bar{X}_n \xi + (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \frac{n \xi^2}{2} \right] - C_1 \xi + C_2, \tag{4a_2}$$

$$t = a \sin n\varphi (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \xi + C_1. \tag{4a_3}$$

Für freie Lagerung ermitteln sich die Integrationskonstanten wie folgt:

Nach Gleichung (4a<sub>2</sub>)

$$\text{für } \xi = 0: \quad s_x = 0 = C_2,$$

$$\text{für } \xi = \frac{l}{a}: \quad s_x = 0 = -a \cos n\varphi \left[ \bar{X}_n \frac{l}{a} + \frac{n}{2} \left( \frac{l}{a} \right)^2 (n \bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \right] - C_1 \frac{l}{a} + C_2,$$

hieraus

$$C_1' = -\frac{nl}{2} \cos n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) - \bar{X}_n a \cos n\varphi = n c_1 \cos n\varphi,$$

$$C_1 = -\frac{l}{2} \sin n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) - \bar{X}_n \frac{a}{n} \sin n\varphi = c_1 \sin n\varphi,$$

und folglich nach (4a<sub>3</sub>)

$$t = a \sin n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \left( \xi - \frac{l}{2a} \right) - \frac{\bar{X}_n}{n} a \sin n\varphi.$$

Die Gleichungen für die drei Spannungsergebnisse lauten also

$$s_\varphi = a Z_n \cos n\varphi,$$

$$s_\alpha = -a \cos n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \frac{n\xi}{2} \left( \xi - \frac{l}{a} \right),$$

$$t = a \sin n\varphi \left[ (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \left( \xi - \frac{l}{2a} \right) - \frac{\bar{X}_n}{n} \right].$$

Für das Mittelfeld einer über unendlich viele Stützen gleichen Abstandes durchlaufende Zylinderschale (axiale Einspannung) erhält man mit Hilfe von Gleichung (7<sub>1</sub>) auf S. 25

$$\text{für } \xi = 0: E h \frac{u}{a} = 0 = C_3,$$

$$\begin{aligned} \text{für } \xi = \frac{l}{a}: E h \frac{u}{a} = 0 = & -l \cos n\varphi \left[ \bar{X}_n \frac{l}{2a} + \frac{n}{6} \left( \frac{l}{a} \right)^2 (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) + \nu \bar{Z}_n \right] \\ & - \frac{C_1'}{2} \left( \frac{l}{a} \right)^2 + C_2 \frac{l}{a} + C_3, \end{aligned}$$

sonach

$$\frac{l}{2a} C_1' - C_2 = -a \cos n\varphi \left[ \bar{X}_n \frac{l}{2a} - \frac{n}{6} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \bar{Y}_n + \bar{Z}_n \left( \frac{n^2 l^2}{6 a^2} + \nu \right) \right].$$

Eine weitere Bedingung zur Bestimmung der Konstanten erhält man aus der Betrachtung des Gleichgewichts eines Schalenstreifens nach Abb. 4 um die Endkreisangente an den Punkt:  $\xi = \frac{l}{a}$ ,  $\varphi = \frac{n\pi}{n}$ . Die Gleichung lautet, wenn die schon früher berechneten Werte  $A_t$  und  $A_p$  benützt werden,

$$2 \int_0^{\frac{l}{a}} \bar{t} a d\xi \cdot a \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2n} \right) + 2 a \bar{t}_0 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{n^2 - 1} l + 2 a^2 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{n^2 - 1} (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \frac{l}{a} \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

und nach Einsetzen der  $t$ -Werte aus Gleichung (4a<sub>3</sub>) findet man

$$\left[ \frac{a l^2}{2} (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) + a l c_1 \right] \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2n} \right) + \frac{a l c_1}{n^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2n} + \frac{a l^2 \cos \frac{\pi}{2n}}{2(n^2 - 1)} (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) = 0.$$

Hieraus ergibt sich  $c_1$  und damit auch

$$C_1 = -\frac{l}{2} \sin n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n),$$

$$C_1' = -\frac{nl}{2} \cos n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n),$$

und hiermit

$$C_2 = a \cos n\varphi \left[ \bar{X}_n \frac{l}{2a} + \frac{n}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \bar{Y}_n - \bar{Z}_n \left( \frac{n^2 l^2}{12 a^2} + \nu \right) \right].$$

Die Spannungsergebnisse finden sich nach Einsetzen der Konstanten zu

$$s_\varphi = a \bar{Z}_n \cos n\varphi,$$

$$s_\alpha = -a \cos n\varphi \left\{ \bar{X}_n \left( \xi - \frac{l}{2a} \right) + n (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \left( \xi - \frac{l}{a} \right) \right] - \nu \bar{Z}_n \right\},$$

$$t = a \sin n\varphi (n\bar{Z}_n - \bar{Y}_n) \left( \xi - \frac{l}{2a} \right).$$

Einen wichtigen Sonderfall stellt das unter Druck beliebig geneigte Rohr dar. Aus Abb. 5 liest man sofort ab

$$Z = \gamma H = \gamma(H_0 + x \sin \alpha + a \cos \alpha \cos \varphi).$$

Für das Eigengewicht eines solchen Rohres lauten die Kraftkomponenten<sup>1</sup>

$$X = \gamma_m h \sin \alpha, \quad Y = -\gamma_m h \cos \alpha \sin \varphi, \quad Z = \gamma_m h \cos \alpha \cos \varphi,$$

worin  $\gamma_m$  das spezifische Gewicht des Baustoffes bedeutet. Nach Einsetzen in die entwickelten Gleichungen mit  $n = 0$  bzw.  $n = 1$  erhält man die Spannungen. So ergibt sich z. B. für das eingespannte wagrechte Rohr ( $\alpha = 0$ ) folgendes Spannungsbild aus Wasserfüllung (spez. Gew.  $\gamma = 1/1000 \text{ kg/cm}^3$ )

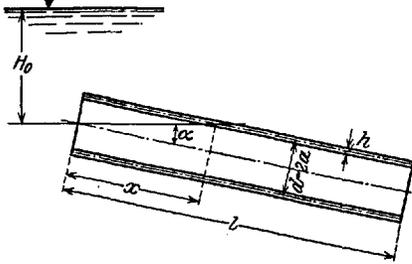


Abb. 5. Geneigtes Rohr unter Druck.

$$s_\varphi = \gamma a^2 \cos \varphi,$$

$$s_x = -\gamma a^2 \cos \varphi \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \left( \xi - \frac{l}{a} \right) - \nu \right],$$

$$t = \gamma a^2 \sin \varphi \left( \xi - \frac{l}{2a} \right).$$

Man erkennt, daß die Längsspannungen mit denen des als gewöhnlicher Balken betrachteten Rohres identisch sind, wenn man von dem Einfluß der Querdehnung absieht. Für den mit  $\gamma a^2 \pi \text{ kg/cm}$  belasteten eingespannten Balken gilt nämlich

$$M = -\gamma a^2 \pi \frac{l^2}{2} \left[ \frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] = -\gamma a^2 \pi \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \left( \xi - \frac{l}{a} \right) \right],$$

$$W = \frac{h a^3 \pi}{a \cos \varphi} = \frac{h a^2 \pi}{\cos \varphi},$$

$$\sigma_x = -\frac{\gamma a^2}{h} \cos \varphi \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \left( \xi - \frac{l}{a} \right) \right] = \frac{s_x}{h}.$$

Entsprechende Betrachtungen lassen sich für Eigengewicht anstellen. Der statisch günstigste Lagerabstand für ein Rohr ohne Überdruck ergibt sich im Hinblick auf die Wirkung der Querdehnung aus der Bedingung, daß die absoluten Werte der Gesamtmomente (Spannungsergebnisse  $s_x$ ) im Feldmitte und um Auflager gleich werden,

$$l = a \sqrt{48 \nu} = d \sqrt{12 \nu}. \tag{9a}$$

Für Eisenrohre mit  $\nu = 0,3$  erhält man  $l \approx 2d$ . Dieser Wert gilt nach dem Vorhergehenden für die Schale ohne Biegungswiderstand und für die bei ihr zugelassenen Spannungen. Betrachtet man, wenn für den Augenblick den Entwicklungen der nächsten Kapitel vorgegriffen werden darf, den genauen Spannungszustand der biegungsfreien Schale, wie man es bei höheren Beanspruchungen tun muß, so ergibt sich, daß die maßgebende Spannung im wesentlichen den aus den Gleichungen für biegungsfreie Wand folgenden Dehnungen  $\epsilon_{\varphi 0}^*$  am Rande proportional ist. Für achsensymmetrischen Druck wird

$$\epsilon_{\varphi 0}^* = \frac{\gamma a H_0}{E h},$$

für nicht achsensymmetrische Wasserlast mit  $\varphi = 0$  bzw.  $\pi$  nach Gleichung (6)

$$\epsilon_{\varphi 0}^* = \frac{\gamma a^2}{E h} + \frac{\gamma a^2}{E h} \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 - \nu \right].$$

Da sich der Proportionalitätsfaktor zwischen Randspannungen und den vorstehenden Dehnungen, der mit  $\omega$  bezeichnet werden möge, nur wenig für beide Biegungsspannungen

<sup>1</sup> Siehe Schwerin, a. a. O. S. 346.

unterscheidet, kann man für die Größtspannung schreiben

$$\sigma_{\max} \approx \omega \cdot \frac{\gamma a^2}{E h} \left[ \frac{H_0 + a}{a} - \nu^2 + \frac{\nu}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \right],$$

oder

$$\sigma_{\max} \approx \omega \cdot \frac{\gamma a^2}{E h} \left[ \frac{H_0 + a}{a} + \frac{\nu}{12} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \right].$$

Bezeichnet man mit  $\eta = \frac{H_0 + a}{d}$  das Verhältnis von Druckhöhe zu Rohrdurchmesser, dann muß sich bei günstigster Ausnützung des Querschnitts das erste Glied von  $\sigma_{\max}$  zum zweiten verhalten wie  $\frac{1}{\eta}$ . Es erhält so der zweite Teil für sehr große Druckhöhe  $H_0$  nur einen geringen Anteil an den Gesamtspannungen  $\sigma_{\max}$ , während für reine Wasserlast ( $H_0 = a, \eta = 1$ ) beide Glieder gleich groß werden. Man findet den wirtschaftlichsten Wert für  $l$  zu

$$l = d \sqrt{\frac{6}{\nu}}. \tag{9b}$$

Für eiserne Druckrohre folgt  $l = 4,5 d$ . Bundschu<sup>1</sup> empfiehlt auf Grund praktischer Erwägungen  $l = 4 d$ . Nach unseren Ermittlungen wird man am besten in Hinsicht auf Gleichung (9a) für Niederdruckrohre den Wert  $l = 4,5 d$  unterschreiten, während für Hochdruckrohre sogar eine geringe Überschreitung ratsam ist.

## II. Schale mit Biegezugwiderstand.

### 1. Aufstellen der Differentialgleichungen.

Bei der biegezugfesten Schale treten zu den Spannungsresultanten der Abb. 2 noch die Biegemomente  $b_x$  und  $b_\varphi$  und die Torsionsmomente  $d_x$  und  $d_\varphi$  mit den zugehörigen Krümmungsänderungen  $\kappa_x$  und  $\kappa_\varphi$  und dem Verdrehungswinkel  $\tau$ , ferner die Scherresultanten  $n_x$  und  $n_\varphi$ . Das Kräftespiel am Schalenelement ist in Abb. 6 dargestellt, wobei die

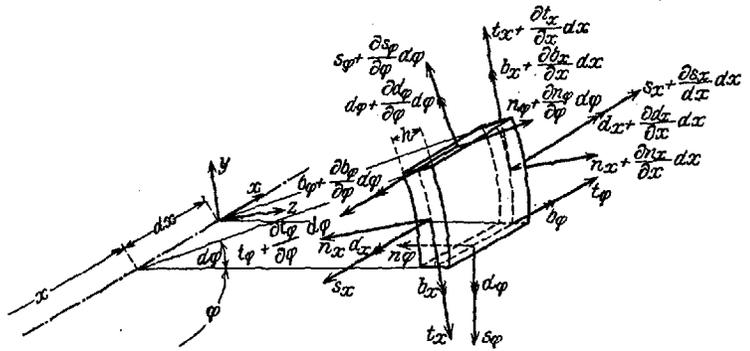


Abb. 6. Schnittresultanten am biegezugfesten Schalenelement.

Spannungsmomente durch Vektoren mit Doppelpfeil hervorgehoben sind<sup>2</sup>. Die auf die Flächeneinheit bezogenen Spannungen hängen mit den Resultanten wie folgt zusammen

$$\sigma_{sx} = \frac{s_x}{h}, \quad \sigma_{bx} = \frac{6 b_x}{h^2}, \quad \tau_{x \text{ mittel}} = \frac{n_x}{h}, \tag{10}$$

für  $\sigma_{s\varphi}$ ,  $\sigma_{b\varphi}$  und  $\tau_{\varphi \text{ mittel}}$  lauten die Beziehungen entsprechend. Nach Love gelten folgende Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen<sup>3</sup>

$$a \varepsilon_x = u', \quad a^2 \kappa_x = w'', \tag{II 1 u. 4}$$

$$a \varepsilon_\varphi = v' + w, \quad a^2 \kappa_\varphi = w'' - v', \tag{II 2 u. 5}$$

$$a \gamma = v' + u', \quad a^2 \tau = w' - v'. \tag{II 3 u. 6}$$

<sup>1</sup> F. Bundschu, Druckrohrleitungen, Berlin 1926.

<sup>2</sup> In Abb. 2 und 6 sind die Faktoren  $d x$  bzw.  $a d \varphi$  weggelassen.

<sup>3</sup> Vgl. auch Schwerin, a. a. O.

Spannungsergebnisse und Spannungsmomente sind mit den Formänderungen verbunden durch die Gleichungen

$$s_x = \frac{12 D}{h^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\varphi), \quad b_x = -D (\kappa_x + \nu \kappa_\varphi) + s_x \frac{h^2}{12 a}, \quad (12_{1 \text{ u. } 4})$$

$$s_\varphi = \frac{12 D}{h^2} (\epsilon_\varphi + \nu \epsilon_x), \quad b_\varphi = -D (\kappa_\varphi + \nu \kappa_x), \quad (12_{2 \text{ u. } 5})$$

$$t_x = \frac{12 D}{h^2} \frac{1 - \nu}{2} \gamma, \quad d_x = D (1 - \nu) \tau - t_x \frac{h^2}{12 a}, \quad (12_{3 \text{ u. } 6})$$

$$d_\varphi = -D (1 - \nu) \tau. \quad (12_7)$$

D ist die Plattensteifigkeitszahl

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{b h^3}{12 \cdot b} = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}.$$

Die  $s_x$  und  $t_x$  enthaltenden Zusatzglieder für  $b_x$  und  $d_x$  sind in die Gleichungen aufgenommen, da die Biegungsverzerrungen  $z \kappa_x$ ,  $z \kappa_\varphi$  und  $z \tau$  klein gegen die Reckungen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_\varphi$  und  $\gamma$  sind<sup>1</sup>. Aus Abb. 6 liest man die Gleichgewichtsbedingungen am Zylinderelement ab

$$s'_x - t'_\varphi + aX = 0, \quad (13_1)$$

$$s_\varphi + t'_x + n_\varphi + aY = 0, \quad (13_2)$$

$$n'_x + n_\varphi - s_\varphi + aZ = 0, \quad (13_3)$$

$$d'_x + a n_\varphi - b'_\varphi = 0, \quad (13_4)$$

$$d'_\varphi - a n_x + b'_x = 0, \quad (13_5)$$

$$-d_\varphi + a t_x + a t_\varphi = 0. \quad (13_6)$$

Diese fünf partiellen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und die gewöhnliche Gleichung (13<sub>6</sub>) geben zusammen mit den sieben Gleichungen (12) und den sechs Gleichungen (11) die notwendige Anzahl Gleichungen zur Berechnung der 19 Unbekannten

$$\frac{u}{a}, \frac{v}{a}, \frac{w}{a}; \quad \epsilon_x, \epsilon_\varphi, \gamma; \quad \kappa_x, \kappa_\varphi, \tau; \quad s_x, s_\varphi; \quad t_x, t_\varphi; \quad b_x, b_\varphi; \quad d_x, d_\varphi; \quad n_x, n_\varphi.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (12<sub>6</sub>) und (12<sub>7</sub>) kann  $d_\varphi$  und mit Hilfe von (13<sub>6</sub>)  $t_\varphi$  durch  $t_x$  und  $d_x$  ausgedrückt werden

$$d_\varphi = -d_x - t_x \frac{h^2}{12 a}, \quad t_\varphi = \frac{d_\varphi}{a} - t_x = -\frac{d_x}{a} - t_x (1 + \epsilon), \quad (14_{1 \text{ u. } 2})$$

worin

$$\epsilon = \frac{h^2}{12 a^2}. \quad (15)$$

Damit lauten die Gleichungen (13)

$$s'_x + \frac{d'_x}{a} + t'_x (1 + \epsilon) + aX = 0, \quad (13_{a_1})$$

$$s_\varphi + t'_x + n_\varphi + aY = 0, \quad (13_{a_2})$$

$$n'_x + n_\varphi - s_\varphi + aZ = 0, \quad (13_{a_3})$$

$$d'_x + a n_\varphi - b'_\varphi = 0, \quad (13_{a_4})$$

$$d'_x + a \epsilon t'_x - b'_x + a n_x = 0. \quad (13_{a_5})$$

Wird für die Belastungsglieder X, Y, Z wiederum der Ansatz (1) verwandt und werden die Spannungs- und Formänderungsgrößen analog zu den Ergebnissen bei der nicht-biegungssteifen Schale in Funktionen von bzw. sin n φ und cos n φ angesetzt, dann ver-

<sup>1</sup> Love-Timpe, a. a. O., § 329. Dies trifft in genügendem Abstand von den Rändern zu. Da im allgemeinen jedoch hauptsächlich die Biegemomente am Rande interessieren, kommt den Zusatzgliedern keine wesentliche Bedeutung zu.

wandeln sich die partiellen Differentialgleichungen (13a) in totale. Setzt man also

$$\left. \begin{aligned} X &= \bar{X}_n \cos n\varphi, & Y &= \bar{Y}_n \sin n\varphi, & Z &= \bar{Z}_n \cos n\varphi, \\ s_x &= \bar{s}_x \cos n\varphi, & b_x &= \bar{b}_x \cos n\varphi, & n_x &= \bar{n}_x \cos n\varphi, \\ s_\varphi &= \bar{s}_\varphi \cos n\varphi, & b_\varphi &= \bar{b}_\varphi \cos n\varphi, & n_\varphi &= \bar{n}_\varphi \sin n\varphi, \\ t_x &= \bar{t}_x \sin n\varphi, & d_x &= \bar{d}_x \sin n\varphi, \\ e_x &= \bar{s}_x \cos n\varphi, & \kappa_x &= \bar{\kappa}_x \cos n\varphi, & u &= \bar{u} \cos n\varphi, \\ e_\varphi &= \bar{e}_\varphi \cos n\varphi, & \kappa_\varphi &= \bar{\kappa}_\varphi \cos n\varphi, & v &= \bar{v} \sin n\varphi, \\ \gamma &= \bar{\gamma} \sin n\varphi, & \tau &= \bar{\tau} \sin n\varphi, & w &= \bar{w} \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

dann wird aus den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen (11)

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\bar{u}'}{a}, \quad a\bar{\kappa}_w = \frac{\bar{w}''}{a}, \quad (17_1 \text{ u. } 4)$$

$$\bar{\varepsilon}_\varphi = n \frac{\bar{v}}{a} + \frac{\bar{w}}{a}, \quad \bar{\kappa}_\varphi = -n \left( n \frac{\bar{w}}{a} + \frac{\bar{v}}{a} \right), \quad (17_2 \text{ u. } 5)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{v}'}{a} - n \frac{\bar{u}}{a}, \quad a\bar{\tau} = - \left( n \frac{\bar{w}'}{a} + \frac{\bar{v}'}{a} \right), \quad (17_3 \text{ u. } 6)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen (13a) lauten

$$\bar{s}'_x + n \frac{\bar{d}'_x}{a} + n\bar{t}_x(1 + \varepsilon) + a\bar{X}_n = 0, \quad (18_1)$$

$$- n\bar{s}_\varphi + \bar{t}'_x + \bar{n}_\varphi + a\bar{Y}_n = 0, \quad (18_2)$$

$$\bar{n}'_x + n\bar{n}_\varphi - \bar{s}_\varphi + a\bar{Z}_n = 0, \quad (18_3)$$

$$\bar{d}'_x + a\bar{n}_\varphi + n\bar{b}_\varphi = 0, \quad (18_4)$$

$$n\bar{d}_x + na\varepsilon\bar{t}_x - \bar{b}'_x + a\bar{n}_x = 0. \quad (18_5)$$

Zur weiteren Berechnung wird auf die Formänderungsgrößen übergegangen, und zwar soll gezeigt werden, daß sämtliche Spannungsresultanten und -momente durch die vier Größen  $\frac{\bar{u}}{a}$ ,  $\bar{\varepsilon}_\varphi$ ,  $\frac{\bar{w}}{a}$  und  $\bar{\vartheta}$  ausdrückbar sind, wenn  $\bar{\vartheta}$  die größte Meridiansteigung bedeutet, d. h. den Winkel, um den die deformierte Mittelfläche jeweils an den Stellen zur Erzeugenden geneigt ist, in denen  $\cos n\varphi = 1$  ist, also

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{w}}{dx} = \frac{\bar{w}'}{a}. \quad (19)$$

Dieser hier erstmals eingeschlagene Weg bietet den Vorteil, daß gleich die Werte gefunden werden, die für die Randbedingungen hauptsächlich in Frage kommen. Die Spannungen, die meist nur am Rande interessieren, findet man dort vereinfacht, da die Randbedingungen gleich beim Einsatz der Verschiebungsgrößen berücksichtigt werden können. Vor allem aber sind  $\bar{\varepsilon}_\varphi$  und  $\bar{\vartheta}$  die maßgebenden Größen für die Näherungslösung. Im weiteren Verlauf der Ableitungen werden zur Vereinfachung die Striche über den Buchstaben wieder fortgelassen.

Aus den Gleichungen (17) erhält man

$$\frac{v}{a} = \frac{1}{n} \left( \varepsilon_\varphi - \frac{w}{a} \right), \quad \frac{v'}{a} = \frac{1}{n} (\varepsilon'_\varphi - \vartheta)$$

und damit

$$\varepsilon_x = \frac{u'}{a}, \quad a\kappa_x = \vartheta', \quad (20_1 \text{ u. } 3)$$

$$\gamma = \frac{1}{n} (\varepsilon'_\varphi - \vartheta) - n \frac{u}{a}, \quad a\kappa_\varphi = - (n^2 - 1) \frac{w}{a} - \varepsilon_\varphi, \quad (20_2 \text{ u. } 4)$$

$$a\tau = - \frac{1}{n} [(n^2 - 1) \vartheta + \varepsilon'_\varphi]. \quad (20_5)$$

Diese Werte in die Gleichungen (12) eingesetzt ergeben

$$s_x = \frac{D}{\varepsilon a^2} \left( \frac{u'}{a} + \nu \varepsilon_\varphi \right), \quad b_x = -\frac{D}{a} \left[ \vartheta' - \frac{u'}{a} - 2\nu \varepsilon_\varphi - \nu (n^2 - 1) \frac{w}{a} \right], \quad (2I_1 \text{ u. } 3)$$

$$s_\varphi = \frac{D}{\varepsilon a^2} \left( \varepsilon_\varphi + \nu \frac{u'}{a} \right), \quad b_\varphi = \frac{D}{a} \left[ (n^2 - 1) \frac{w}{a} + \varepsilon_\varphi - \nu \vartheta' \right], \quad (2I_2 \text{ u. } 4)$$

$$t_x = \frac{(1 - \nu) D}{2 \varepsilon a^2} \left( \frac{\varepsilon'_\varphi - \vartheta}{n} - n \frac{u}{a} \right), \quad d_x = -\frac{(1 - \nu) D}{2 a} \left[ \frac{2n^2 - 3}{n} \vartheta + \frac{3}{n} \varepsilon'_\varphi - n \frac{u}{a} \right]. \quad (2I_3 \text{ u. } 6)$$

Die Größen  $t_\varphi$  und  $d_\varphi$  sind durch die Gleichungen (14) sowie (2I<sub>3</sub>) und (2I<sub>6</sub>) auf die vier Formänderungsgrößen zurückgeführt. Da  $\frac{w}{a}$  und  $\vartheta$  durch die einfache Beziehung (19) miteinander verbunden sind, bleiben als endgültige Unbekannten nur  $\frac{u}{a}$ ,  $\varepsilon_\varphi$  und  $\vartheta$ . Die notwendigen drei Bestimmungsgleichungen liefern die fünf Gleichgewichtsbedingungen (18), wenn daraus noch  $n_x$  und  $n_\varphi$  eliminiert werden. Aus Gleichung (18<sub>4</sub>) und (18<sub>5</sub>) erhält man

$$a n_\varphi = -d'_x - n b_\varphi, \quad a n_x = -n d'_x - n a \varepsilon t_x + b'_x. \quad (22 \text{ u. } 2)$$

Durch Einsetzen in die übrigen Gleichungen (18) ergibt sich

$$a s'_x + n d'_x + n a (1 + \varepsilon) t_x = -a^2 X_n, \quad (23_1)$$

$$-n a s_\varphi + a t'_x - d'_x - n b_\varphi = -a^2 Y_n, \quad (23_2)$$

$$-n d'_x - n a \varepsilon t'_x + b'_x - n d'_x - n^2 b_\varphi - a s_\varphi = -a^2 Z_n. \quad (23_3)$$

Zum Übergang auf die Formänderungsgrößen werden diese Gleichungen noch umgeformt. Die zweite Gleichung wird einmal nach  $\xi$  differenziert, um  $\frac{w}{a}$  zu entfernen. Zieht man ferner von der differenzierten ersten Gleichung die Differenz zwischen der 3. und der mit  $n$  multiplizierten 2. ab, dann erhält man

$$a s''_x + b''_x + a (n^2 - 1) s_\varphi = -a^2 (X'_n - n Y_n + Z_n), \quad (24_1)$$

$$-n a s'_\varphi - d''_x + a t''_x - n b'_\varphi = -a^2 Y'_n, \quad (24_2)$$

$$a s'_x + n d'_x + n a (1 + \varepsilon) t_x = -a^2 X_n. \quad (24_3)$$

Nach Einsetzen der Werte aus den Gleichungen (21) und nach Zusammenfassen der Ausdrücke ist das Problem auf die Lösung der folgenden drei linearen simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt

$$\frac{u'''}{a} (1 + \varepsilon) + \frac{u'}{a} \nu (n^2 - 1) - \varepsilon \vartheta''' + \vartheta' \nu \varepsilon (n^2 - 1) + \varepsilon''_\varphi \nu (1 + 2\varepsilon) + \varepsilon_\varphi (n^2 - 1) = -\frac{1 - \nu^2}{Eh} a (X'_n - n Y_n + Z_n), \quad (25_1)$$

$$\frac{u''}{a} n^2 [\nu (1 - \varepsilon) + (1 + \varepsilon)] + \vartheta'' [(1 - \nu) (1 + 3\varepsilon) - 2n^2 \varepsilon] + \vartheta 2n^2 \varepsilon (n^2 - 1) - \varepsilon''_\varphi (1 - \nu) (1 + 3\varepsilon) + \varepsilon'_\varphi 2n^2 (1 + \varepsilon) = \frac{1 - \nu^2}{Eh} 2na Y'_n, \quad (25_2)$$

$$2 \frac{u''}{a} - \frac{u}{a} n^2 (1 - \nu) - \vartheta (1 - \nu) [1 + 2\varepsilon (n^2 - 1)] + \varepsilon'_\varphi [(1 - 2\varepsilon) + \nu (1 + 2\varepsilon)] = -\frac{1 - \nu^2}{Eh} 2a X_n. \quad (25_3)$$

### 2. Lösung der homogenen Differentialgleichungen.

Das Tripel allgemeiner Integrale des inhomogenen Systems (25) findet man bekanntlich, indem man zunächst die allgemeinen Lösungen des homogenen Systems ( $X_n = Y_n = Z_n = 0$ ) bestimmt und dann je eine beliebige Partikularlösung addiert.

Zur Bestimmung der allgemeinen Integrale des homogenen Systems setzt man

$$\frac{u}{a} = A e^{\lambda \xi}, \quad \vartheta = B e^{\lambda \xi}, \quad \varepsilon_{\varphi} = C e^{\lambda \xi}. \quad (26)$$

Führt man nämlich diese Werte in die Gleichungen (25) ein, dann erhält man für die willkürlichen Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$  ein System homogener linearer Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C &= 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C &= 0, \\ a_3 A + b_3 B + c_3 C &= 0, \end{aligned}$$

welches dann und nur dann Lösungen besitzt, wenn seine Nennerdeterminante verschwindet. Die  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sind damit bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt. Die  $\lambda$  sind Wurzeln der sich aus der Bedingung des Verschwindens der Determinante ergebenden „charakteristischen“ oder „Determinanten“-Gleichung. Die Determinante läßt sich in unserem Falle ohne weiteres aus (25) ablesen.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda[\lambda^2(1+\varepsilon) + (n^2-1)\nu] & \varepsilon\lambda[-\lambda^2 + \nu(n^2-1)] & \lambda^2\nu(1+2\varepsilon) + (n^2-1) \\ \lambda^2 n^2 [\nu(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)] & \lambda^2[(1-\nu)(1+3\varepsilon) - 2\varepsilon n^2] + 2\varepsilon n^2(n^2-1) - \lambda[(1-\nu)(1+3\varepsilon)\lambda^2 - 2n^2(1+\varepsilon)] & \lambda[(1-2\varepsilon)\lambda + \nu(1+2\varepsilon)] \\ 2\lambda^2 - n^2(1-\nu) & -(1-\nu)[1+2\varepsilon(n^2-1)] & \lambda[(1-2\varepsilon)\lambda + \nu(1+2\varepsilon)] \end{vmatrix}$$

Beim Auswerten der Determinante können alle Potenzen von  $\varepsilon$  als kleine Größen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, da nach den Voraussetzungen der Schalentheorie schon  $\frac{h}{a}$  einen kleinen Wert darstellt. Nach längerer Rechnung erscheint die charakteristische Gleichung, wenn nach fallenden Potenzen von  $\lambda$  geordnet wird, in der Form

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \\ &= a \lambda^8 + b \lambda^6 + c \lambda^4 + d \lambda^2 + e = 0, \end{aligned}$$

worin bedeutet

$$\begin{aligned} a &= 2\varepsilon(1-\nu), \quad b = -8n^2\varepsilon(1-\nu), \quad c = 2(1-\nu)[6\varepsilon n^2(n^2-1) + (1-\nu^2)(1+3\varepsilon)] \\ d &= -8n^2\varepsilon(n^2-1)^2(1-\nu), \quad e = 2n^4\varepsilon(n^2-1)^2(1+\nu). \end{aligned}$$

Nach Teilung durch  $a = 2\varepsilon(1-\nu)$  lautet die Bestimmungsgleichung der Exponenten schließlich

$$\lambda^8 - 4n^2\lambda^6 + \left[\frac{1-\nu^2}{\varepsilon}(1+3\varepsilon) + 6n^2(n^2-1)\right]\lambda^4 - 4n^2(n^2-1)^2\lambda^2 + n^4(n^2-1)^2 = 0. \quad (27)$$

Mit Einführen von

$$\mu = \lambda^2, \quad \phi = n^2, \quad k = \frac{1-\nu^2}{\varepsilon}(1+3\varepsilon) \approx \frac{1-\nu^2}{\varepsilon}, \quad (28)$$

ergibt sich

$$\mu^4 - 4\phi\mu^3 + [k + 6\phi(\phi-1)]\mu^2 - 4\phi(\phi-1)^2\mu + \phi^2(\phi-1)^2 = 0. \quad (29)$$

Diese Gleichung vierter Ordnung wird nach Wegschaffen des zweiten Gliedes durch Bilden der Resolvente gelöst<sup>1</sup>. Mit  $y = \mu - \phi$  findet sich

$$y^4 + (k - 6\phi)y^2 + 2\phi[k - 2(\phi+1)]y + \phi^2(k - 3) = 0. \quad (30)$$

\* Es können nur quadratische Glieder in  $n$  auftreten, da der Ansatz (1) für positives und negatives  $n$  gleichbedeutend ist.

<sup>1</sup> Hütte I (1925) S. 51.

Die zugehörige Resolvente lautet

$$x^3 + \frac{k-6p}{2}x^2 + \frac{x}{16}(k^2 - 12kp - 4k^2p^2 + 48p^2) - \frac{p^2}{16}[k - 2(p+1)]^2 = 0.$$

Mit  $x = z - \frac{k-6p}{6}$  erhält man die vereinfachte Gleichung dritter Ordnung

$$z^3 - \frac{kz}{48}[k + 12p(p-1)] - \left\{ \frac{k^2}{864}[k + 18p(p-1)] + \frac{p^2}{4}(p-1)^2 \right\} = z^3 + mz + q = 0. \tag{31}$$

Die hier nicht weiter ausgeführte Diskriminante ist kleiner als Null, so daß also drei reelle Wurzeln vorhanden sind, welche in der trigonometrischen Form

$$z = 2\sqrt{\frac{m}{3}} \cos \frac{\varphi + 2r\pi}{3}, \quad r = 0, 1, 2, \tag{32}$$

berechnet werden können, wobei

$$\cos \varphi = \sqrt{\left(\frac{q}{z}\right)^2 : \left(\frac{m}{3}\right)^3} = \sqrt{M} \tag{33}$$

ist.  $M$  ergibt sich mit den Werten der Gleichung (31) zu

$$M = 1 - \frac{108p^2(p-1)^2}{k^2} + \frac{2160}{k^3}p^3(p-1)^3 + \dots$$

Im Rahmen der Vernachlässigung von  $\varepsilon^2$  sind unter der Wurzel alle Glieder  $\left(\frac{1}{k}\right)^r$ , die höher als von der zweiten Potenz sind, klein von der zweiten Ordnung. Da jedoch die Zähler der Glieder von  $M$  mit Potenzen von  $p(p-1)$  wachsen, ist eine Vernachlässigung nur für kleine  $n$  statthaft. Es ist deshalb angebracht, die Wurzeln mit Einsetzen der Zahlenwerte für  $m$  und  $q$  zu ermitteln. Mit  $x = z - \frac{k-6p}{6}$  und den bestehenden Abhängigkeiten finden sich die vier Wurzeln der Gleichung (29) zu<sup>1</sup>

$$\mu'_1 = +\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + p, \tag{34i}$$

$$\mu'_2 = +\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} + p, \tag{34a}$$

$$\mu'_3 = -\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + p, \tag{34b}$$

$$\mu'_4 = -\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} + p. \tag{34c}$$

Der Übergang auf Zahlenwerte zeigt, daß die Wurzeln  $\mu'_3$  und  $\mu'_4$  klein sind gegen  $\mu'_1$  und  $\mu'_2$ . Daher lassen sich nach dem Graeffschen Verfahren<sup>2</sup> andere, für die Anwendung bequeme Näherungswerte ableiten, deren Genauigkeit, wie sich zeigen wird, in fast allen Fällen der Praxis genügt. Für  $\mu'_1$  und  $\mu'_2$  gilt

$$\mu^2 - 4p\mu + [k + 6p(p-1)] = 0, \tag{29a}$$

$$\mu_{1,2} = 2p \pm \sqrt{4p^2 - k - 6p^2 + 6p} = 2p \pm i\sqrt{k + 2p(p-3)}, \tag{34a}$$

für  $\mu'_3$  und  $\mu'_4$

$$\mu^2 - \frac{4p(p-1)^2}{k + 6p(p-1)}\mu + \frac{p^2(p-1)^2}{k + 6p(p-1)} = 0, \tag{29b}$$

$$\mu'_{3,4} = \frac{2p(p-1)^2}{k + 6p(p-1)} \pm \sqrt{\frac{4p^2(p-1)^4}{[k + 6p(p-1)]^2} - \frac{p^2(p-1)^2}{k + 6p(p-1)}}$$

oder

$$\mu'_{3,4} = \frac{p(p-1)}{k + 6p(p-1)} [2(p-1) \pm i\sqrt{k + 2(p-1)(p+2)}]. \tag{34b}$$

<sup>1</sup> Die Wurzeln sind zum Unterschied von den endgültigen „Abklingungszahlen“ (siehe S. 37 und 38) mit Strichen versehen.

<sup>2</sup> C. Runge u. H. König, Numerisches Rechnen, Berlin 1924.

Die Exponenten  $\lambda$  finden sich nach Gleichung (28<sub>1</sub>)

$$\lambda = \pm \sqrt{\mu'} = \pm \sqrt{a \pm ib} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} + a} \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} - a}.$$

Bezeichnet man nunmehr den reellen bzw. imaginären Teil von  $\lambda$  mit  $\mu_2$  und  $\mu_4$  bzw.  $i\mu_1$  und  $i\mu_3$ , dann ist

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k + 6p(p-1)} - p}, \tag{35_1}$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k + 6p(p-1)} + p}, \tag{35_2}$$

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{p(p-1)}{k + 6p(p-1)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k + 6p(p-1)} - (p-1)}, \tag{35_3}$$

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{p(p-1)}{k + 6p(p-1)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k + 6p(p-1)} + (p-1)}. \tag{35_4}$$

Die acht Wurzeln der Gleichung (27) lauten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu_2 - i\mu_1, & \lambda_5 &= -\mu_4 - i\mu_3, \\ \lambda_2 &= +\mu_2 + i\mu_1, & \lambda_6 &= +\mu_4 + i\mu_3, \\ \lambda_3 &= -\mu_2 + i\mu_1, & \lambda_7 &= -\mu_4 + i\mu_3, \\ \lambda_4 &= +\mu_2 - i\mu_1, & \lambda_8 &= +\mu_4 - i\mu_3. \end{aligned} \tag{36}$$

In Tabelle 1 sind die mit Hilfe der genauen Koeffizienten  $m$  und  $q$  der Gleichung (31) gefundenen  $\mu$ -Werte den nach dem Graeffschen Näherungsverfahren ermittelten gegenübergestellt<sup>1</sup>. Die Tabelle ist für die Werte  $k = 1000$  und  $k = 10000$ , entsprechend  $\frac{h}{a} \approx \frac{1}{9.5}$  und  $\frac{h}{a} \approx \frac{1}{30}$  ( $\nu = 0,3$ ), und für  $n = 1$  bis  $5$  und  $n = 10$  aufgestellt. Man erkennt, daß die Abweichungen gering sind. Der Fehler wächst mit  $n$  und nimmt mit größer werdendem  $k$  ab. Bis zur Grenze  $k < 6p(p-1)$  sind die Näherungswerte um weniger als 5% ungenau.

Tabelle 1.

		n = 0		n = 1		n = 2		n = 3		n = 4		n = 5		n = 10	
		gen.	Näh.	gen.	Näh.	gen.	Näh.	gen.	Näh.	gen.	Näh.	gen.	Näh.	gen.	Näh.
$k = 1000$	$\mu_1$	3,98	3,98	3,82	3,82	3,51	3,51	3,15	3,15	2,87	2,93	2,66	2,98	2,19	4,80
	$\mu_2$	3,98	3,98	4,10	4,10	4,50	4,50	5,22	5,28	6,09	6,37	7,05	7,66	12,10	14,90
	$\mu_3$	0	0	0	0	0,354	0,386	0,751	0,741	1,04	0,975	1,24	1,14	1,72	1,98
	$\mu_4$	0	0	0	0	0,419	0,465	1,162	1,162	2,05	1,97	3,00	2,75	7,89	6,03
$k = 10000$	$\mu_1$	7,07	7,07	7,00	7,00	6,80	6,80	6,49	6,42	6,15	6,12	5,72	5,77	4,61	5,64
	$\mu_2$	7,07	7,07	7,14	7,14	7,34	7,35	7,74	7,70	8,32	8,34	8,99	9,12	14,10	15,21
	$\mu_3$	0	0	0	0	0,234	0,238	0,545	0,549	0,865	0,898	1,265	1,230	2,75	2,16
	$\mu_4$	0	0	0	0	0,266	0,252	0,642	0,645	1,185	1,196	1,911	1,90	5,48	5,74

Bemerkung: Die Grenze  $k < 6p(p-1)$  wird für  $k = 1000$  mit  $n = 4$ , für  $k = 10000$  mit  $n = 6$  erreicht.

Bis dahin und auch noch in beschränktem Maße darüber hinaus reichen die Werte aus den Gleichungen (35) aus. Wenn z. B. die Beiwerte  $\bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}_n$  einer beliebigen in Fouriersche Reihe entwickelbaren Belastung mit wachsendem  $n$  schnell fallen, dann bleibt trotz des wachsenden Fehlers der Exponenten für die zu ermittelnden Spannungsergebnisse und -momente Konvergenz bestehen. Für  $n = 0$  (symmetrische Belastung) und  $n = 1$  decken

<sup>1</sup> Die genauen Werte sind mit Rechenmaschine und Logarithmentafel berechnet und dann auf Rechenschiebegerauigkeit abgerundet. Die Näherungswerte sind mit dem Rechenschieber ermittelt.

sich genauer Wert und Näherung. Im ersten Fall erhält man die Geckelersche Abklingungszahl<sup>1</sup>

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{k}, \quad \mu_3 = \mu_4 = 0.$$

Im zweiten Fall ergibt sich das von E. Schwerin auf anderem Wege abgeleitete Wertepaar<sup>2</sup>

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k} - 1}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k} + 1}, \quad \mu_3 = \mu_4 = 0.$$

Die Lösung des Differentialgleichungssystems (25) hat mit den Wurzeln der Bestimmungsgleichung (36) für  $\vartheta$  folgende Form.

$$\begin{aligned} \vartheta = & B_1 e^{-\mu_2 \xi} e^{-i \mu_1 \xi} + B_2 e^{\mu_2 \xi} e^{i \mu_1 \xi} + B_3 e^{-\mu_2 \xi} e^{i \mu_1 \xi} + B_4 e^{\mu_2 \xi} e^{-i \mu_1 \xi} \\ & + B_5 e^{-\mu_4 \xi} e^{-i \mu_3 \xi} + B_6 e^{\mu_4 \xi} e^{i \mu_3 \xi} + B_7 e^{-\mu_4 \xi} e^{i \mu_3 \xi} + B_8 e^{\mu_4 \xi} e^{-i \mu_3 \xi}, \end{aligned}$$

oder nach Umformung

$$\begin{aligned} \vartheta = & e^{-\mu_2 \xi} [(B_1 + B_3) \cos \mu_1 \xi - i (B_1 - B_3) \sin \mu_1 \xi] \\ & + e^{\mu_2 \xi} [(B_2 + B_4) \cos \mu_1 \xi + i (B_2 - B_4) \sin \mu_1 \xi] \\ & + e^{-\mu_4 \xi} [(B_5 + B_7) \cos \mu_3 \xi - i (B_5 - B_7) \sin \mu_3 \xi] \\ & + e^{\mu_4 \xi} [(B_6 + B_8) \cos \mu_3 \xi + i (B_6 - B_8) \sin \mu_3 \xi]. \end{aligned} \tag{37}$$

Für  $\frac{u}{a}$  und  $\varepsilon \rho$  haben die Gleichungen dieselbe Form, nur daß an Stelle der Konstanten  $B$  bzw. die Buchstaben  $A$  und  $C$  treten. Die Verhältnisse  $\frac{A}{B}$  und  $\frac{C}{B}$  werden aus der ersten und dritten Reihe der Determinante abgelesen

$$\frac{A}{B} = -\frac{b_1 c_3 - b_3 c_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1} = -\frac{\alpha}{\beta}, \tag{38_1}$$

$$\frac{C}{B} = -\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1} = -\frac{\gamma}{\beta}, \tag{38_2}$$

und nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} \alpha = & - (1 + \nu) \varepsilon \lambda^4 + \lambda^2 \{ \nu (1 - \nu) + \varepsilon \nu [(3 n^2 - 1) - \nu (n^2 + 1)] \} \\ & + (n^2 - 1) (1 - \nu) [1 + 2 \varepsilon (n^2 - 1)] \\ = & - g_1 \lambda^4 + g_2 \lambda^2 + g_3, \end{aligned} \tag{39_1}$$

$$\begin{aligned} \beta = & \lambda^4 [(1 - \nu) - \varepsilon (1 + \nu)] - (1 - \nu) \lambda^2 [2 (n^2 - 1) - \nu (1 + 2 \varepsilon)] \\ & + n^2 (n^2 - 1) (1 - \nu) \\ = & l_1 \lambda^4 - l_2 \lambda^2 + l_3, \end{aligned} \tag{39_2}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \lambda \{ 2 \varepsilon \lambda^4 - \lambda^2 [(1 - \nu) - \varepsilon (1 + \nu) + \varepsilon n^2 (3 - \nu)] \\ & - \nu (1 - \nu) (n^2 - 1) [1 + \varepsilon (n^2 - 2)] \} \\ = & \lambda \{ h_1 \lambda^4 - h_2 \lambda^2 - h_3 \}. \end{aligned} \tag{39_3}$$

Setzt man für die Konstantensumme der Gleichung (37) neue Werte ein

$$\begin{aligned} B_1 + B_3 = C_1^*, & \quad i (B_1 - B_3) = C_2^*, \\ B_2 + B_4 = C_3^*, & \quad i (B_2 - B_4) = C_4^*, \\ B_5 + B_7 = C_5^*, & \quad i (B_5 - B_7) = C_6^*, \\ B_6 + B_8 = C_7^*, & \quad i (B_6 - B_8) = C_8^*, \end{aligned} \tag{40}$$

<sup>1</sup> Siehe a. a. O.

<sup>2</sup> Siehe a. a. O.; die Abweichung gegen dort ist klein von der zweiten Ordnung und rührt von der verschiedenen Vernachlässigung der  $\varepsilon^2$  her.

dann findet man

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_3 &= -\frac{\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1}{2 \beta_1 \beta_3} C_1^* + i \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1}{2 \beta_1 \beta_3} C_2^*, \\
 i(A_1 - A_3) &= -\frac{\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1}{2 \beta_1 \beta_3} C_2^* - i \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1}{2 \beta_1 \beta_3} C_1^*, \\
 A_2 + A_4 &= -\frac{\alpha_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_2}{2 \beta_2 \beta_4} C_3^* + i \frac{\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2}{2 \beta_2 \beta_4} C_4^*, \\
 i(A_2 - A_4) &= -\frac{\alpha_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_2}{2 \beta_2 \beta_4} C_4^* - i \frac{\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2}{2 \beta_2 \beta_4} C_3^*,
 \end{aligned}
 \tag{4I}$$

usw. mit Vertauschung der Indizes. Für die Konstanten  $C$  tritt an Stelle von  $\alpha$  die Größe  $\gamma$ . Aus den Gleichungen (36) erhält man die Beziehungen

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \mu_2^2 + 2i \mu_1 \mu_2 - \mu_1^2, \tag{42_1}$$

$$\lambda_3^2 = \lambda_4^2 = \mu_2^2 - 2i \mu_1 \mu_2 - \mu_1^2, \tag{42_2}$$

$$\lambda_5^2 = \lambda_6^2 = \mu_4^2 + 2i \mu_3 \mu_4 - \mu_3^2, \tag{42_3}$$

$$\lambda_7^2 = \lambda_8^2 = \mu_4^2 - 2i \mu_3 \mu_4 - \mu_3^2, \tag{42_4}$$

$$\lambda_1^4 = \lambda_2^4 = \mu_2^4 + \mu_1^4 - 6\mu_1^2 \mu_2^2 + 4i \mu_1 \mu_2^3 - 4i \mu_1^3 \mu_2, \tag{42_5}$$

$$\lambda_3^4 = \lambda_4^4 = \mu_2^4 + \mu_1^4 - 6\mu_1^2 \mu_2^2 - 4i \mu_1 \mu_2^3 + 4i \mu_1^3 \mu_2, \tag{42_6}$$

$$\lambda_5^4 = \lambda_6^4 = \mu_4^4 + \mu_3^4 - 6\mu_3^2 \mu_4^2 + 4i \mu_3 \mu_4^3 - 4i \mu_3^3 \mu_4, \tag{42_7}$$

$$\lambda_7^4 = \lambda_8^4 = \mu_4^4 + \mu_3^4 - 6\mu_3^2 \mu_4^2 - 4i \mu_3 \mu_4^3 + 4i \mu_3^3 \mu_4. \tag{42_8}$$

Demnach sind zwei aufeinanderfolgende Wertepaare von  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den Indizes  $(2r + 1)$  und  $(2r + 2)$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$ , für  $\alpha$  und  $\beta$  einander gleich, für  $\gamma$  entgegengesetzt gleich. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes lauten die Gleichungen (4I), wenn für die Ausdrücke mit  $\alpha$  der Beiwert  $\nu$ , bzw.  $-\nu$ , für die mit  $\gamma$   $\varrho$  bzw.  $-\varrho$  gesetzt wird

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_3 &= +\nu_1 C_1^* + \nu_2 C_2^*, & C_1 + C_3 &= -\varrho_1 C_1^* + \varrho_2 C_2^*, \\
 i(A_1 - A_3) &= +\nu_1 C_2^* - \nu_2 C_1^*, & i(C_1 - C_3) &= -\varrho_1 C_2^* - \varrho_2 C_1^*, \\
 A_2 + A_4 &= +\nu_1 C_3^* + \nu_2 C_4^*, & C_2 + C_4 &= -\varrho_1 C_3^* + \varrho_2 C_4^*, \\
 i(A_2 - A_4) &= +\nu_1 C_4^* - \nu_2 C_3^*, & i(C_2 - C_4) &= -\varrho_1 C_4^* - \varrho_2 C_3^*, \\
 A_5 + A_7 &= -\nu_3 C_5^* - \nu_4 C_6^*, & C_5 + C_7 &= +\varrho_3 C_5^* - \varrho_4 C_6^*, \\
 i(A_5 - A_7) &= -\nu_3 C_6^* + \nu_4 C_5^*, & i(C_5 - C_7) &= +\varrho_3 C_6^* + \varrho_4 C_5^*, \\
 A_6 + A_8 &= -\nu_3 C_7^* - \nu_4 C_8^*, & C_6 + C_8 &= +\varrho_3 C_7^* - \varrho_4 C_8^*, \\
 i(A_6 - A_8) &= -\nu_3 C_8^* + \nu_4 C_7^*, & i(C_6 - C_8) &= +\varrho_3 C_8^* + \varrho_4 C_7^*.
 \end{aligned}
 \tag{43_1 bis 43_6}$$

Im folgenden werden die Beiwerte  $\nu$  und  $\varrho$  berechnet, wobei noch folgende Beziehungen zu beachten sind,

$$k' = k + 6\phi(\phi - 1), \tag{44}$$

$$\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = \mu_2^2 + \mu_1^2 = \sqrt{k'},$$

$$\lambda_1^4 = \lambda_2^4 = (\mu_2^2 - \mu_1^2)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2 + 4i \mu_1 \mu_2 (\mu_2^2 - \mu_1^2),$$

$$\lambda_3^4 = \lambda_4^4 = (\mu_2^2 - \mu_1^2)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2 - 4i \mu_1 \mu_2 (\mu_2^2 - \mu_1^2),$$

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = 2\phi, \quad \mu_1^2 \mu_2^2 = \frac{k'}{4} - \phi^2 = \frac{1}{4} [k + 2\phi(\phi - 3)],$$

$$\lambda_5 \lambda_7 = \lambda_6 \lambda_8 = \mu_4^2 + \mu_3^2 = \frac{\phi(\phi - 1)}{\sqrt{k'}},$$

$$\lambda_5^4 \dots \lambda_8^4 \text{ analog } \lambda_1^4 \dots \lambda_4^4, \quad \mu_4^2 - \mu_3^2 = \frac{2\phi(\phi - 1)^2}{k'},$$

$$\mu_3^2 \mu_4^2 = \frac{\phi^2(\phi - 1)^2}{k'^2} \left[ \frac{k'}{4} - (\phi - 1)^2 \right] = \frac{\phi^2(\phi - 1)^2}{4k'^2} [k + 2\phi(\phi + 1) - 4].$$

Mit diesen Werten und mit Hilfe der Gleichungen (39) und (42) ergibt sich

$$\begin{aligned} \nu_1 = & -\frac{\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1}{2 \beta_1 \beta_3} = - \left[ -l_1 g_1 k'^2 + 2 \rho (l_1 g_2 + l_2 g_1) k' - (l_1 g_3 - l_3 g_1) k' - l_2 g_2 k' \right. \\ & + l_3 g_3 - 2 \rho (l_2 g_3 - l_3 g_2) + 8 \rho^2 (l_1 g_3 - l_3 g_1) \left. \right] : \left[ l_1^2 k'^2 - k' (4 \rho l_1 l_2 + 2 l_1 l_3 - l_2^2) \right. \\ & \left. + l_3^2 - 4 \rho l_2 l_3 + 16 \rho^2 l_1 l_3 \right] = + \frac{g_1}{l_1} - \frac{1}{l_1^2 k'} \left[ \left( 2 \rho - \frac{l_2}{l_1} \right) (l_1 g_2 - l_2 g_1) - (l_1 g_3 + l_3 g_1) \right]. \end{aligned}$$

Bei Ausführung der Division wurde wiederum berücksichtigt, daß  $\frac{1}{k'}$  von der Größenordnung  $\varepsilon$  ist. Mit Einsetzen der Werte  $l$  und  $g$  erhält man

$$\nu_1 = \frac{(1 + \nu)^2}{k} - \frac{1}{k'} [\nu (2 + \nu) - (\rho - 1)]. \tag{45_1}$$

Auf dieselbe Weise findet man für  $\nu_2$

$$\nu_2 = i \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1}{2 \beta_1 \beta_3} = - 2 \mu_1 \mu_2 \frac{l_2 g_1 - l_1 g_2}{l_1^2 k'}$$

oder

$$\nu_2 = \frac{2 \nu \mu_1 \mu_2}{k'}. \tag{45_2}$$

Die Werte  $\nu_3$  und  $\nu_4$  ergeben sich aus dem Vorhergehenden, wenn in den entsprechenden Ausdrücken  $\mu_2$  und  $\mu_1$  durch  $\mu_4$  und  $\mu_3$  ersetzt werden. Mit der üblichen Vernachlässigung lauten die Ausdrücke, wenn sie der Größenordnung entsprechend in umgekehrter Reihenfolge als bisher angeschrieben werden,

$$\begin{aligned} \nu_3 = & \frac{\alpha_5 \beta_7 + \alpha_7 \beta_5'}{2 \beta_5 \beta_7} = \left\{ l_3 g_3 - \frac{\rho (\rho - 1)^2}{k'} [2 (l_2 g_3 - l_3 g_2) + \rho (l_2 g_2 + l_1 g_3 - l_3 g_1)] \right\} \\ & : 2 \left\{ l_3^2 - \frac{\rho (\rho - 1)^2}{k'} [4 l_2 l_3 + \rho (2 l_1 l_3 - l_2^2)] \right\} \\ = & \frac{g_3}{l_3} + \frac{\rho (\rho - 1)^2}{l_3^2 k'} \left[ (l_2 g_3 + l_3 g_2) \left( 2 - \rho \frac{l_2}{l_3} \right) + \rho (l_1 g_3 + l_3 g_1) \right] \end{aligned}$$

oder

$$\nu_3 = \frac{1}{\rho k'} [k' + (\rho - 1) (\rho + 2 \nu + \nu^2)]. \tag{45_3}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} \nu_4 = & - i \frac{\alpha_5 \beta_7 - \alpha_7 \beta_5'}{2 \beta_5 \beta_7} = 2 \mu_2 \mu_4 \left\{ \frac{l_2 g_3 + l_3 g_2}{l_3^2} \right. \\ & \left. + \frac{\rho (\rho - 1)^2}{l_3^2 k'} \left[ \left( 4 - \frac{l_2}{l_3} \rho \right) (l_2 g_2 - l_3 g_1 - l_1 g_3 + \frac{l_2}{l_3} l_2 g_3) + \frac{l_2}{l_3} \rho l_1 g_3 + \rho l_1 g_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

oder

$$\nu_4 = \frac{2 \mu_3 \mu_4}{\rho^2 k'} \{ (2 + \nu) [k' + 3 (\rho - 1)^2] - \rho [(\rho - 1) (1 - \nu) - 2 \nu^2] \}. \tag{45_4}$$

Analog ermitteln sich die  $\varrho$ -Werte. Es gilt

$$\varrho_1 = \frac{\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3}{2 \beta_1 \beta_3} = - \mu_2 \varrho_1' + \mu_1 \varrho_2', \tag{46a_1}$$

$$\varrho_2 = i \frac{\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3}{2 \beta_1 \beta_3} = + \mu_1 \varrho_1' + \mu_2 \varrho_2', \tag{46a_2}$$

wenn  $\varrho_1'$  und  $\varrho_2'$  mit  $\nu_1$  und  $\nu_2$  gleichlautende Ausdrücke sind, in denen für  $g$  jeweils  $h$  gesetzt ist, also

$$\varrho_1' = \frac{h_1}{l_1} - \frac{1}{l_1^2 k'} \left[ \left( 2 \rho - \frac{l_2}{l_1} \right) (l_1 h_2 - l_2 h_1) - (l_1 h_3 + l_3 h_1) \right]$$

oder

$$\varrho_1' = \frac{2(1 + \nu)}{k} - \frac{1}{k'} [2 - \nu (\rho - 2)] \tag{47_1}$$

und

$$\varrho'_2 = -2 \mu_1 \mu_2 \frac{l_2 h_1 - l_1 h_2}{l_1^2 k'}$$

oder

$$\varrho'_2 = \frac{2 \mu_1 \mu_2}{k'}. \quad (47_2)$$

Nach Einsetzen in (46a<sub>1</sub>) und (46a<sub>2</sub>) und Zusammenfassen ergibt sich

$$\varrho_1 = \mu_2 \left\{ -\frac{2(1+\nu)}{k} + \frac{1}{k'} [2(\mu_1^2 + 1) - \nu(\rho - 2)] \right\}, \quad (46_1)$$

$$\varrho_2 = \mu_1 \left\{ +\frac{2(1+\nu)}{k} + \frac{1}{k'} [2(\mu_2^2 - 1) + \nu(\rho - 2)] \right\}. \quad (46_2)$$

Die Beiwerte  $\varrho_3$  und  $\varrho_4$  lauten

$$\varrho_3 = -\frac{\beta_7 \gamma_5 + \beta_5 \gamma_7}{2 \beta_5 \beta_7} = -\mu_4 \varrho'_3 + \mu_3 \varrho'_4, \quad (46a_3)$$

$$\varrho_4 = -i \frac{\beta_7 \gamma_5 - \beta_5 \gamma_7}{2 \beta_5 \beta_7} = +\mu_4 \varrho'_4 + \mu_3 \varrho'_3, \quad (46a_4)$$

wenn  $\varrho'_3$  und  $\varrho'_4$  wieder die Ausdrücke darstellen, die sich ergeben, wenn in  $\nu_3$  und  $\nu_4$   $h$  an die Stelle von  $g$  gesetzt wird. Nach längerer Umformung erhält man dann

$$\varrho'_3 = \frac{\nu}{\rho k'} [k' + \rho^2 + 2\nu(\rho - 1) - \nu^2], \quad (47_3)$$

$$\begin{aligned} \varrho'_4 = \frac{2\mu_3 \mu_4}{\rho^2 k'} \left\{ (1 + 2\nu) [k' + 4\rho(\rho - 1)] - (\rho - 1)\nu(2 + \nu)^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho - 1} [(k' + \rho)(1 - \nu^2) - \nu^2] \right\}. \end{aligned} \quad (47_4)$$

Von einer Zusammenfassung der endgültigen Ausdrücke für  $\varrho_3$  und  $\varrho_4$  wird abgesehen, da diese zu unübersichtlich werden. Mit den Beiwerten  $\mu$ ,  $\nu$  und  $\varrho$  der Gleichungen (35), (45), (46) und (47) lautet nunmehr die Lösung der homogenen Differentialgleichungen (25)<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \vartheta = +e^{-\mu_2 \xi} [C_1^* \cos \mu_1 \xi - C_2^* \sin \mu_1 \xi] + e^{\mu_2 \xi} [C_3^* \cos \mu_1 \xi + C_4^* \sin \mu_1 \xi] \\ + e^{-\mu_4 \xi} [C_5^* \cos \mu_3 \xi - C_6^* \sin \mu_3 \xi] + e^{\mu_4 \xi} [C_7^* \cos \mu_3 \xi + C_8^* \sin \mu_3 \xi], \end{aligned} \quad (48_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{a} = +e^{-\mu_2 \xi} [(v_1 C_1^* + v_2 C_2^*) \cos \mu_1 \xi - (v_1 C_2^* - v_2 C_1^*) \sin \mu_1 \xi] \\ + e^{\mu_2 \xi} [(v_1 C_3^* + v_2 C_4^*) \cos \mu_1 \xi + (v_1 C_4^* - v_2 C_3^*) \sin \mu_1 \xi] \\ - e^{-\mu_4 \xi} [(v_3 C_5^* + v_4 C_6^*) \cos \mu_3 \xi - (v_3 C_6^* - v_4 C_5^*) \sin \mu_3 \xi] \\ - e^{\mu_4 \xi} [(v_3 C_7^* + v_4 C_8^*) \cos \mu_3 \xi + (v_3 C_8^* - v_4 C_7^*) \sin \mu_3 \xi], \end{aligned} \quad (48_2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi = -e^{-\mu_2 \xi} [(\varrho_1 C_1^* - \varrho_2 C_2^*) \cos \mu_1 \xi - (\varrho_1 C_2^* + \varrho_2 C_1^*) \sin \mu_1 \xi] \\ - e^{\mu_2 \xi} [(\varrho_1 C_3^* - \varrho_2 C_4^*) \cos \mu_1 \xi + (\varrho_1 C_4^* + \varrho_2 C_3^*) \sin \mu_1 \xi] \\ + e^{-\mu_4 \xi} [(\varrho_3 C_5^* - \varrho_4 C_6^*) \cos \mu_3 \xi - (\varrho_3 C_6^* + \varrho_4 C_5^*) \sin \mu_3 \xi] \\ + e^{\mu_4 \xi} [(\varrho_3 C_7^* - \varrho_4 C_8^*) \cos \mu_3 \xi + (\varrho_3 C_8^* + \varrho_4 C_7^*) \sin \mu_3 \xi]. \end{aligned} \quad (48_3)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{w}{a} = +\frac{e^{-\mu_2 \xi}}{\mu_1^2 + \mu_2^2} [(\mu_1 C_1^* + \mu_2 C_2^*) \sin \mu_1 \xi - (\mu_2 C_1^* - \mu_1 C_2^*) \cos \mu_1 \xi] \\ + \frac{e^{\mu_2 \xi}}{\mu_1^2 + \mu_2^2} [(\mu_1 C_3^* + \mu_2 C_4^*) \sin \mu_1 \xi + (\mu_2 C_3^* - \mu_1 C_4^*) \cos \mu_1 \xi] \\ + \frac{e^{-\mu_4 \xi}}{\mu_3^2 + \mu_4^2} [(\mu_3 C_5^* + \mu_4 C_6^*) \sin \mu_3 \xi - (\mu_4 C_5^* - \mu_3 C_6^*) \cos \mu_3 \xi] \\ + \frac{e^{\mu_4 \xi}}{\mu_3^2 + \mu_4^2} [(\mu_3 C_7^* + \mu_4 C_8^*) \sin \mu_3 \xi + (\mu_4 C_7^* - \mu_3 C_8^*) \cos \mu_3 \xi]. \end{aligned} \quad (48_4)$$

<sup>1</sup> Für  $n = 1$  sind die Werte  $\mu$ ,  $\nu$  und  $\varrho$  auf anderem unabhängigen Weg abgeleitet worden. Da sich diese mit den vorliegenden für  $n = 1$  decken, so ist damit eine gewisse Gewähr für die Fehlerlosigkeit der Ausdrücke gegeben.

Zu  $\frac{w}{a}$  tritt keine weitere Integrationskonstante. Integriert man nämlich die zweite der Ausgangsgleichungen (25), dann erhält man auf der rechten Seite beim Belastungsglied  $Y_n$  eine Konstante, die gemäß dem Ansatz gleich Null sein muß, weswegen also auch bei  $\int \vartheta d\xi + c$  die Konstante verschwindet.

3. Vollständige Lösung und Randbedingungen.

Die zur vollständigen Lösung der Differentialgleichungen (25) notwendigen partikulären Integrale lassen sich auf bekanntem Wege finden. Von ihrer Ermittlung für eine allgemeine von  $\xi$  abhängige Belastungsfunktion kann abgesehen werden, zumal man sich für die praktische Rechnung, wie aus Abschnitt C hervorgeht, in den allermeisten Fällen mit der Näherungslösung begnügen wird. Wo dies nicht mehr zugänglich ist, wird die Rechnung am schnellsten mit Zahlenwerten durchgeführt. Für konstantes  $X_n, Y_n, Z_n$  lassen sich die Partikularlösungen ohne weiteres angeben

$$\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{2 a (1 + \nu)}{E h n^2} X_n, \tag{49_1}$$

$$(\varepsilon_\varphi) = \frac{(1 - \nu^2) a}{E h (n^2 - 1)} (n Y_n - Z_n), \tag{49_2}$$

$$(\vartheta) = 0, \tag{49_3}$$

$$\left(\frac{w}{a}\right) = - \frac{(1 - \nu^2) a (Y_n - n Z_n)}{E h \varepsilon n (n^2 - 1)^2} - \frac{(1 - \nu^2) a (n Y_n - Z_n)}{E h (n^2 - 1)^2}. \tag{49_4}$$

Der Ausdruck für  $\left(\frac{w}{a}\right)$  wird durch einmaliges Integrieren von Gleichung (25<sub>2</sub>) erhalten. Man erkennt den Zusammenhang mit der Lösung für die Schale ohne Biegungswiderstand. Für  $n = 0$  und damit auch nach Ansatz (1)  $Y_n = 0$  ergeben sich die Formänderungsgrößen  $\varepsilon_\varphi$  und  $\frac{w}{a}$  des Zylinders unter Innendruck

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w}{a} = \frac{(1 - \nu^2) a Z_n}{E h}.$$

Für  $n = 1$ , den einzigen Fall, in dem die Belastungsglieder nicht unter sich im Gleichgewicht stehen (vgl. Abb. 3), versagt die Lösung und erscheint zufolge  $\mu_3 = \mu_4 = 0$  im zweiten Teil als ganze rationale Funktion. Diese Lösung, die für ganze Wasserfüllung und für Eigengewicht von Bedeutung ist, wird im nächsten Abschnitt gesondert behandelt.

Die acht willkürlichen Konstanten der Gleichungen (48) ermitteln sich aus den Randbedingungen, je vier für jede Unstetigkeitsstelle. Als hauptsächliche Fälle kommen in Frage:

a) Vollkommene Einspannung der Schale am nicht verdrehbaren und starren Endspant

$$\frac{u}{a} = 0, \quad \frac{v}{a} = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad \vartheta = 0. \tag{50a}$$

An Stelle von  $\frac{w}{a}$  kann zweckmäßig nach Gleichung (17<sub>2</sub>)  $\varepsilon_\varphi = 0$  treten.

b) Vollkommene Einspannung der Schale am starren Endspant, das als Ganzes frei drehbar ist.

Hier muß der Fall  $n = 1$  von denen  $n > 1$  unterschieden werden. Die Verschiebungen  $\frac{u}{a_0}$  am Rohrende erscheinen in der allgemeinen Form  $\frac{u}{a_0} = \frac{\bar{u}}{a_0} \cos n \varphi$ . Für  $n = 1$  entsprechen diese Verschiebungen einer formänderungsfreien Drehung des Endspantes um die Achse  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Die Neigung gegen die Vertikale beträgt  $\frac{\bar{u}}{a_0}$ . Da ferner das auf das Endspant bezogene Gesamtmoment gleich Null sein muß, so lauten die Randbedingungen,

wenn die Striche wieder weggelassen werden<sup>1</sup>

$$a s_x + b_x = 0, \quad \frac{v}{a} = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad \vartheta = \frac{u}{a}. \quad (50b)$$

Mit Übergang auf die Werte der Lösung (48) erhält man

$$\varepsilon \vartheta' - \frac{u'}{a} (1 + \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon_\varphi = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad \vartheta = \frac{u}{a}. \quad (50b')$$

Da  $\varepsilon$  eine kleine Größe ist, unterscheidet sich dieser Fall nur wenig von dem praktisch weniger wichtigen, daß die Schale gelenkig an das Endspant angeschlossen ist. Dafür lauten nämlich die Bedingungen

$$s_x = 0, \quad \frac{v}{a} = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad b_x = 0, \quad (50\bar{b})$$

oder

$$\frac{u'}{a} = 0, \quad \varepsilon_\varphi = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad \vartheta' = 0. \quad (50\bar{b}')$$

Für  $n > 1$  können sich am vollkommen starren Endspant keine Verschiebungen  $\frac{u}{a_0}$  ausbilden und, da die Belastungen unter sich im Gleichgewicht sind, tritt auch kein Drehen des Spantes ein, so daß die Randbedingungen identisch sind mit denen für vollkommene Einspannung der Gesamtschale (Gleichungen 50a)<sup>2</sup>. Die auftretenden Randspannungen  $s_x$  sind ebenfalls unter sich im Gleichgewicht und werden von dem starren Endspant aufgenommen. Ist dieses jedoch in der  $yz$ -Ebene starr, während es Formänderungen in Richtung der  $x$ -Achse keinen Widerstand entgegengesetzt, dann lauten die Bedingungen

$$s_x = 0, \quad \frac{v}{a} = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad \vartheta = 0, \quad (50\underline{b})$$

oder

$$\frac{u'}{a} = 0, \quad \varepsilon_\varphi = 0, \quad \frac{w}{a} = 0, \quad \vartheta = 0. \quad (50\underline{b}')$$

Dabei ist angenommen, daß der Spantquerschnitt nur Verschiebungen  $\frac{u}{a}$  zuläßt, gegen Verdrehen (Torsion) jedoch starr bleibt. Weiter soll hier auf die Spantennachgiebigkeit nicht eingegangen werden, da ihr der besondere Abschnitt D gewidmet ist.

c) Durchlaufender Rohrstrang.

Aus den unter b) aufgeführten Gründen muß auch hier der Fall  $n = 1$  getrennt von  $n > 1$  behandelt werden.

Für  $n = 1$  lauten die Bedingungen am starren Trennungsspant zwischen zwei Spannweiten  $r$  und  $r + 1$

$$\begin{aligned} b_{x_r} &= b_{x_{r+1}}, & \frac{u}{a_r} &= \frac{u}{a_{r+1}}, & \frac{v}{a_r} &= 0, & \frac{w}{a_r} &= 0, \\ s_{x_r} &= s_{x_{r+1}}, & \vartheta_r &= \vartheta_{r+1}, & \frac{v}{a_{r+1}} &= 0, & \frac{w}{a_{r+1}} &= 0. \end{aligned} \quad (50c)$$

Für insgesamt  $r$  Öffnungen erhält man mit Einschluß von je vier Bedingungen an den Enden  $8(r - 1) + 2 \cdot 4 = 8r$  Gleichungen für die ebenso große Anzahl Konstanten.

Für  $n > 1$  treten an Stelle der Gleichung  $\frac{u}{a_r} = \frac{u}{a_{r+1}}$  die beiden Bedingungen  $\frac{u}{a_r} = \frac{u}{a_{r+1}} = 0$ , während die Gleichung  $s_{x_r} = s_{x_{r+1}}$  entfällt und an Stelle von  $\vartheta_r = \vartheta_{r+1}$

<sup>1</sup> E. Schwerin setzt in seiner öfter genannten Abhandlung irrtümlich  $\vartheta = 0$ .

<sup>2</sup> Das auf das Endspant bezogene Gesamtmoment ist

$$\int_0^{2\pi} (\bar{s}_x a \cos n \varphi \cos \varphi + \bar{b}_x \cos n \varphi \cos \varphi) a d\varphi = (a \bar{s}_x + \bar{b}_x) a \int_0^{2\pi} \cos n \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für alle  $n > 1$ .

die beiden Bedingungen  $\vartheta_r = \vartheta_{r+1} = 0$ , während  $b_{\alpha_r} = b_{\alpha_{r+1}}$  entfällt. Die Differenz der Spannungsresultanten  $s_\alpha$  und Spannungsmomente  $b_\alpha$  wird von dem starren Trennungsspannt übernommen. Ist an den Stützen ein Querschott vorhanden, das in der  $y z$ -Ebene vollkommen starr ist, Verschiebungen  $\frac{u}{a}$  und Verdrehungen  $\vartheta$  aber ohne Zwang mitmacht, dann gelten auch für  $n > 1$  die Gleichungen (50c). Der später zu behandelnde Fall der Spantennachgiebigkeit in Richtung der  $x$ -Achse liegt zwischen diesen beiden Grenzwerten.

d) Vollkommen freier Rand.

$$s_\alpha = 0, \quad b_\alpha = 0, \quad t_\alpha = 0, \quad a n_\alpha + n d_\alpha = 0. \tag{50d}$$

Von den fünf, am Rande vorhandenen Spannungsresultanten und -momenten, müssen  $n_\alpha$  und  $d_\alpha$  aus Gleichgewichtsgründen zusammengefaßt werden<sup>1</sup>.

4. Der Sonderfall  $n = 1$ .

Wie schon erwähnt, erfordert der Fall  $n = 1$  eine besondere mathematische Behandlung, da  $\mu_3$  und  $\mu_4$  gleich Null werden. Er ist aber auch praktisch wichtig, da mit ihm sowohl Wasserfüllung, als auch Eigengewichtsbelastung beschrieben sind, ohne daß weitere Glieder des Ansatzes (1) hinzutreten.

Der den Wurzeln  $\mu_3$  und  $\mu_4$  ( $\lambda_5$  bis  $\lambda_8$ ) der charakteristischen Gleichung entsprechende Teil der Lösung erscheint jetzt in der Form:  $a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3$ . Schneller führt die Rechnung zum Ziel, wenn man in den Ausgangsgleichungen (25) die Beziehung  $n^2 - 1 = 0$  berücksichtigt, womit man findet

$$\frac{u'}{a} (1 + \varepsilon) - \varepsilon \vartheta' + \varepsilon_\varphi v (1 + 2\varepsilon) = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} a \left[ \int X_n d\xi - \iint (Y_n - Z_n) d\xi d\xi \right], \tag{51_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{u'}{a} [\nu(1 - \varepsilon) + (1 + \varepsilon)] + \vartheta' [(1 + \varepsilon) - \nu(1 + 3\varepsilon)] - \varepsilon''_\varphi (1 - \nu) (1 + 3\varepsilon) \\ + 2\varepsilon_\varphi (1 + \varepsilon) = \frac{1 - \nu^2}{Eh} 2 n a Y_n, \end{aligned} \tag{51_2}$$

$$2 \frac{u''}{a} - \frac{u}{a} (1 - \nu) - \vartheta (1 - \nu) + \varepsilon'_\varphi [(1 - 2\varepsilon) + \nu(1 + 2\varepsilon)] = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} 2 a X_n. \tag{51_3}$$

Die Determinante, welche die charakteristische Gleichung ergibt, lautet nunmehr

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda(1 + \varepsilon) & \varepsilon \lambda & \nu(1 + 2\varepsilon) \\ \lambda[\nu(1 - \varepsilon) + (1 + \varepsilon)] & \lambda[(1 - \varepsilon) - \nu(1 + 3\varepsilon)] & \lambda^2(1 - \nu)(1 + 3\varepsilon) + 2(1 + \varepsilon) \\ 2\lambda^2 - (1 - \nu) & (1 - \nu) & \lambda[(1 - 2\varepsilon) + \nu(1 + 2\varepsilon)] \end{vmatrix}$$

und führt auf die Wurzeln  $\lambda_1$  bis  $\lambda_4$ , die mit den aus  $\Delta$  gefundenen identisch sind. Die vollständige Lösung erhält man durch Hinzufügen der partikularen Lösung. Die Ergebnisse sind von E. Schwerin<sup>2</sup> auf anderem Wege abgeleitet worden. Es soll deshalb auf eine Wiederholung verzichtet werden. Für die Kraftgröße  $X_1$  läßt sich leicht die Lösung angeben, für  $Y_1$  wird sie, wie Schwerin zeigt, von  $Z_1$  abgeleitet. Die Gleichungen für die Belastung aus Wasserfüllung  $Z_1 = \bar{Z}_1 \cos \varphi = \gamma a \cos \varphi$  werden im folgenden in der von uns gewählten Ausdrucksweise durch Formänderungen gegeben. Mit den neuen Konstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= -(C_2^* + C_4^*), & C_3 &= (C_1^* - C_3^*), \\ C_2 &= (C_2^* - C_4^*), & C_4 &= -(C_1^* + C_3^*), \end{aligned} \tag{52}$$

findet man, wenn auf Hyperbelfunktionen übergangen wird

<sup>1</sup> Siehe Love-Timpe u. a. Lehrbücher.

<sup>2</sup> Siehe a. a. O.

$$\vartheta = -C_1 \sin \mu_1 \xi \cdot \sin \mu_2 \xi - C_2 \sin \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi - C_3 \cos \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - C_4 \cos \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + \frac{\gamma a^2 (1 - \varepsilon)}{6 E h} \xi^3 - c_1 \xi^2 - c_2 \xi - c_3, \quad (53_1)$$

$$\frac{u}{a} = -(\nu_1 C_1 - \nu_2 C_4) \sin \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - (\nu_1 C_2 - \nu_2 C_3) \sin \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi - (\nu_1 C_3 + \nu_2 C_2) \cos \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - (\nu_1 C_4 + \nu_2 C_1) \cos \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi - \frac{\gamma a^2 (1 - \varepsilon)}{6 E h} \xi^3 + c_1 \xi^2 + \left[ c_2 - \frac{\gamma a^2}{E h} (2 + \nu) \right] \xi + c_3 + 2 c_1 (1 + \varepsilon) (2 + \nu), \quad (53_2)$$

$$\varepsilon_\varphi = -(\varrho_1 C_2 + \varrho_2 C_3) \sin \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - (\varrho_1 C_1 + \varrho_2 C_4) \sin \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + (\varrho_2 C_1 - \varrho_1 C_4) \cos \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - (\varrho_2 C_2 - \varrho_1 C_3) \cos \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + \frac{\nu \gamma a^2}{2 E h} \xi^2 - 2 \nu c_1 (1 + \varepsilon) \xi + c_2 \nu (1 + \varepsilon) + \frac{\gamma a^2}{2 E h} \left[ 2(1 + 2\nu) + \frac{\varepsilon(1 - \nu^2)}{\nu} (1 + \nu) \right]. \quad (53_3)$$

Ferner ist

$$\frac{w}{a} = -\frac{\mu_2 C_2 + \mu_1 C_3}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \sin \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - \frac{\mu_2 C_1 + \mu_1 C_4}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \sin \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + \frac{\mu_1 C_1 - \mu_2 C_4}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \cos \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi + \frac{\mu_1 C_2 - \mu_2 C_3}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \cos \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + \frac{\gamma a^2 (1 - \varepsilon)}{24 E h} \xi^4 - \frac{c_1}{3} \xi^3 - \frac{c_2}{2} \xi^2 - c_3 \xi + c_4. \quad (53_4)$$

Sowohl zum Erfüllen der Randbedingungen, über die schon im vorhergehenden Abschnitt das Notwendige gesagt ist, als auch zur Berechnung der Spannungen sind ferner die Ausdrücke für  $\vartheta'$  und  $\frac{u'}{a}$  von Bedeutung. Sie lauten

$$\vartheta' = -(\mu_2 C_2 - \mu_1 C_3) \sin \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - (\mu_2 C_1 - \mu_1 C_4) \sin \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi - (\mu_1 C_1 + \mu_2 C_4) \cos \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi - (\mu_1 C_2 + \mu_2 C_3) \cos \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + \frac{\gamma a^2 (1 - \varepsilon)}{2 E h} - 2 c_1 \xi - c_2, \quad (53_{a_1})$$

$$\frac{u'}{a} = (\psi_1 C_2 + \psi_2 C_3) \sin \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi + (\psi_1 C_1 + \psi_2 C_4) \sin \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi + (\psi_1 C_4 - \psi_2 C_1) \cos \mu_1 \xi \sin \mu_2 \xi + (\psi_1 C_3 - \psi_2 C_2) \cos \mu_1 \xi \mathfrak{Cof} \mu_2 \xi - \frac{\gamma a^2 (1 - \varepsilon)}{2 E h} \xi^2 + 2 c_1 \xi + c_2 - \frac{\gamma a^2}{E h} (2 + \nu), \quad (53_{a_2})$$

worin  $\psi_1 = \nu_2 \mu_1 - \nu_1 \mu_2$ ,  $\psi_2 = \nu_2 \mu_2 + \nu_1 \mu_1$ . Die Zahlenwerte  $\mu$ ,  $\nu$  und  $\varrho$  sind gleich den unter Abschnitt 2 entwickelten, wenn für  $n = 1$  gesetzt wird. Man erhält damit

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k} - 1}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{k} + 1}, \quad (54_{u.2})$$

$$\nu_1 = \frac{1}{k}, \quad \nu_2 = \frac{2 \nu \mu_1 \mu_2}{k} = \frac{\nu \sqrt{k} - 4}{k}, \quad (54_{u.4})$$

$$\varrho_1 = \frac{\mu_2}{k} [\sqrt{k} - (2 + \nu)], \quad \varrho_2 = \frac{\mu_1}{k} [\sqrt{k} + (2 + \nu)]. \quad (54_{u.6})$$

In Tabelle 2 sind die Beiwerte der Lösung abgestuft nach der Größe  $1000 \varepsilon$  aufgeführt. Die Wiedergabe ist auf Stahl ( $\nu = 0,3$ ) beschränkt, da für Beton einwandfreie Ergebnisse für die Querdehnungszahl noch nicht vorliegen. Der Bereich der  $\varepsilon$ -Werte für Stahl erstreckt sich äußersten Falles von  $1000 \varepsilon = 1,00$  bis  $0,001$ , entsprechend  $\frac{h}{a} \approx \frac{1}{10}$  bis  $\frac{h}{a} \approx \frac{1}{300}$ . Die obere Grenze entspricht Hochdruckrohren kleinen Durchmessers<sup>1</sup>, die untere wird von U-Bootprüfungsdocks und Hebeschiffen<sup>2</sup> aus hochwertigem Material er-

<sup>1</sup> F. Bundschu, Druckrohrleitungen, Berlin 1926.

<sup>2</sup> S. a. a. O.

reicht. Das Steifigkeitsverhältnis für U-Boote liegt ungefähr bei  $\frac{h}{a} = \frac{1}{200}$ , entsprechend  $1000 \epsilon = 0,0025^*$ . Die Werte für Betonrohre liegen durchweg über  $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$  und erreichen höchstens den Wert  $\frac{1}{5,6}$ . Auch für sie ist demnach die Vernachlässigung der quadratischen Glieder von  $\epsilon$  immer zulässig, da sie ungünstigsten Falles  $\frac{1}{375}$  von  $\epsilon$  betragen.

Tabelle 2. Beiwerte der Lösung  $n = 1$  für Stahl ( $\nu = 0,3$ ).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{h}{a}$	1000 $\epsilon$	$k$	$\mu_1$	$\mu_2$	1000 $\nu_1$	1000 $\nu_2$	1000 $\psi_1$	1000 $\psi_2$	1000 $\varrho_1$	1000 $\varrho_2$
0,1097	1,000	910	3,75	4,01	1,101	9,89	32,70	43,67	122,5	133,8
0,1040	0,900	1010	3,85	4,10	0,992	9,40	32,14	42,31	119,5	129,8
0,0980	0,800	1138	3,98	4,22	0,882	8,88	31,67	40,96	116,6	126,0
0,0916	0,700	1300	4,12	4,35	0,771	8,28	30,75	39,18	112,9	121,2
0,0849	0,600	1515	4,29	4,51	0,660	7,66	29,87	37,38	109,0	116,8
0,0775	0,500	1820	4,50	4,71	0,550	7,00	28,91	35,47	104,6	111,1
0,0693	0,400	2275	4,77	4,98	0,440	6,26	27,70	33,50	99,4	104,8
0,0648	0,350	2620	4,96	5,15	0,384	5,89	27,22	32,21	96,0	101,1
0,0600	0,300	3030	5,14	5,32	0,330	5,41	26,05	30,48	92,6	98,0
0,0548	0,250	3640	5,39	5,57	0,275	4,94	25,08	29,03	88,8	72,7
0,0490	0,200	4550	5,71	5,88	0,220	4,44	24,10	27,36	84,1	87,5
0,0424	0,150	6060	6,15	6,30	0,1649	3,84	22,57	25,21	78,4	81,1
0,0346	0,100	9100	6,83	6,97	0,1099	3,14	21,64	22,65	72,1	73,4
0,0328	0,090	10110	7,02	7,16	0,0989	2,99	20,29	22,10	70,2	71,4
0,0310	0,080	11380	7,23	7,36	0,0879	2,81	20,02	21,33	66,9	69,2
0,0290	0,070	13000	7,48	7,61	0,0770	2,63	19,08	20,59	65,3	67,0
0,0268	0,060	15150	7,77	7,90	0,0660	2,43	18,39	19,71	62,9	64,4
0,0245	0,050	18200	8,15	8,27	0,0550	2,225	17,70	18,86	60,3	61,5
0,0219	0,040	22750	8,63	8,74	0,0440	1,990	16,81	17,78	57,0	58,1
0,0190	0,030	30300	9,27	9,38	0,0330	1,721	15,67	16,46	53,0	54,0
0,0155	0,020	45500	10,28	10,38	0,0220	1,409	14,22	14,84	48,1	48,7
0,01097	0,010	91000	12,21	12,30	0,0110	0,992	11,96	12,33	40,5	40,9
0,00950	0,0075	121100	13,13	13,21	0,00825	9,861	11,20	11,50	37,7	37,8
0,00775	0,0050	182000	14,55	14,62	0,00550	0,704	10,14	10,37	34,1	34,2
0,00548	0,0025	364000	17,31	17,38	0,00275	0,447	7,69	7,81	28,5	28,6
0,00346	0,0010	910000	21,80	21,82	0,00110	0,314	6,83	6,88	22,8	22,9

5. Beurteilung der Beanspruchung der Schale.

Zur Beurteilung der Beanspruchung der Schale dient die Sicherheit gegen Erreichen der Elastizitätsgrenze des Materials. In deutschen Ingenieurkreisen wird heute noch allgemein die aus den Hauptspannungen zusammengesetzte sog. reduzierte Spannung mit der Spannung an der Elastizitätsgrenze im einachsigen Zustand verglichen. Die im folgenden Abschnitt entwickelten Näherungsformeln sind deshalb auch auf die Ermittlung der Hauptspannungen zugeschnitten.

In neuerer Zeit beginnen sich neben dieser Hauptdehnungshypothese immer mehr die Hypothesen der Energiegrenzen Eingang in die Praxis zu verschaffen. Die neueste von diesen, die Schleichersche Hypothese der Energiegrenze der Elastizität<sup>1</sup>, gibt die Vergleichsspannung mit der Grenzspannung im Zug- bzw. Druckversuch mit

$$\sigma_e = \sqrt{2EA} \tag{55}$$

an, worin  $A$  die in der Raumeinheit aufgespeicherte Formänderungsarbeit bedeutet. Die der Elastizitätsgrenze entsprechende Vergleichsspannung ist dabei noch eine Funktion

\* Die Knickversuche der U-Bootinspektion wurden für diesen Verhältniswert durchgeführt.

<sup>1</sup> F. Schleicher, ZS f. ang. Math. u. Mech. 6 (1926) S. 199ff.; und derselbe in: Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Berlin 1926. Der allgemeine Ausdruck für  $A$  ist dem letztgenannten Buch entnommen.

der mittleren Normalspannung  $p$  bzw. der bezogenen Volumdehnung  $e$

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_\varphi + \sigma_z) = \frac{E}{3(1-2\nu)} e = \frac{E}{3(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z). \quad (56)$$

Im vorliegenden Fall lassen sich die maßgebenden Größen  $A$  und  $p$  leicht durch die unmittelbar gefundenen Formänderungsgrößen  $\frac{u}{a}$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\frac{w}{a}$  ausdrücken, so daß die Vergleichsspannung ohne weiteres Eingehen auf den Spannungszustand gefunden wird. Bedeutet  $G$  den Gleitmodul und  $z$  den Abstand des Volumenelements von der Mittelfläche, dann ist<sup>1</sup>

$$2EA = 2EG \left\{ \frac{1}{1-\nu} [(\varepsilon_x - z\kappa_x)^2 + (\varepsilon_\varphi - z\kappa_\varphi)^2 + 2\nu(\varepsilon_x - z\kappa_x)(\varepsilon_\varphi - z\kappa_\varphi)] + \frac{1}{2} (\gamma - 2\tau z)^2 \right\},$$

oder, wenn nach Gliedern von  $z^0$ ,  $z^1$ ,  $z^2$  geordnet wird,

$$2EA = 2EG \left\{ \frac{1}{1-\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_\varphi) + \frac{1}{2} \gamma^2 - 2z \left[ \frac{1}{1-\nu} (\varepsilon_x\kappa_x + \varepsilon_\varphi\kappa_\varphi + \nu[\varepsilon_x\kappa_\varphi + \varepsilon_\varphi\kappa_x]) + \gamma\tau \right] + z^2 \left[ \frac{1}{1-\nu} (\kappa_x^2 + \kappa_\varphi^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_\varphi) + 2\tau^2 \right] \right\}, \quad (57)$$

$$p = \frac{E}{3(1-\nu)} [\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi - z(\kappa_x + \kappa_\varphi)]. \quad (58)$$

Ersetzt man in diesen Ausdrücken nach den Gleichungen (12) und (20) die Formänderungsgrößen durch die Werte, welche die allgemeine Lösung unseres Problems beschreiben, dann findet man<sup>2</sup>

$$2EA = 2EG \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left( \left( \frac{u'}{a} \right)^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\nu \frac{u'}{a} \varepsilon_\varphi \right) \cos^2 n\varphi + \left[ \frac{(\varepsilon_\varphi' - \vartheta)^2}{2n^2} - \frac{u}{a} (\varepsilon_\varphi' - \vartheta) + \frac{n^2}{2} \left( \frac{u}{a} \right)^2 \right] \sin^2 n\varphi - 2z \left\langle \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{u'\vartheta'}{a^2} - (n^2 - 1) \frac{\varepsilon_\varphi w}{a^2} - \frac{\varepsilon_\varphi^2}{a} + \nu \left( -\frac{u'w(n^2 - 1)}{a^3} - \frac{u'\varepsilon_\varphi}{a^2} + \frac{\varepsilon_\varphi\vartheta'}{a} \right) \right] \cos^2 n\varphi - \left[ \frac{n^2 - 1}{an^2} (\varepsilon_\varphi' - \vartheta)\vartheta + \frac{1}{an^2} (\varepsilon_\varphi' - \vartheta)\varepsilon_\varphi' - (n^2 - 1) \frac{u\vartheta}{a^2} - \frac{u\varepsilon_\varphi'}{a^2} \right] \sin^2 n\varphi \right\rangle + z^2 \left\langle \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{\vartheta'^2}{a^2} + (n^2 - 1) \frac{w^2}{a^4} + 2(n^2 - 1) \frac{w\varepsilon_\varphi}{a^3} + \frac{\varepsilon_\varphi^2}{a^2} - 2\nu(n^2 - 1) \frac{w\vartheta'}{a^3} - 2\nu \frac{\vartheta'\varepsilon_\varphi}{a^2} \right] \cos^2 n\varphi + \frac{2}{a^2 n^2} [(n^2 - 1)^2 \vartheta^2 + 2(n^2 - 1)\vartheta\varepsilon_\varphi' + \varepsilon_\varphi'^2] \sin^2 n\varphi \right\rangle \right\}, \quad (59)$$

$$p = \frac{E}{3(1-\nu)} \left\{ \frac{u'}{a} + \varepsilon_\varphi - \frac{z}{a} \left[ \vartheta' - (n^2 - 1) \frac{w}{a} - \varepsilon_\varphi \right] \right\} \cos n\varphi. \quad (60)$$

Diese umfangreichen Ausdrücke lassen sich wesentlich vereinfachen, wenn erkannt ist, daß der gefährliche Querschnitt am Rande liegt. Setzt man z. B. eine am starren Spant vollkommen eingespannte Zylinderschale voraus (Fall a) auf S. 42), dann erhält man dort folgende vereinfachten Ausdrücke

$$2EA = 2EG \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{u'}{a} \right)^2 \cos^2 n\varphi + \frac{\varepsilon_\varphi'^2}{2n^2} \sin^2 n\varphi - 2z \left[ \frac{u'\vartheta'}{a^2(1-\nu)} \cos^2 n\varphi - \frac{\varepsilon_\varphi'^2}{an^2} \sin^2 n\varphi \right] + z^2 \left[ \frac{\vartheta'^2}{a^2(1-\nu)} \cos^2 n\varphi + \frac{2\varepsilon_\varphi'^2}{a^2 n^2} \sin^2 n\varphi \right] \right\},$$

$$p = \frac{E}{3(1-\nu)} \left[ \frac{u'}{a} + \varepsilon_\varphi - \frac{z}{a} \vartheta' \right] \cos n\varphi.$$

<sup>1</sup> Vgl. auch Love-Timpe, a. a. O., Kap. XXIV.

<sup>2</sup> Die Überstreichungen sind wieder weggelassen.

Die Vergleichsspannung ergibt sich nach Zusammenfassen zu

$$\sigma_e = \frac{E}{\sqrt{1+\nu}} \sqrt{\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{u'}{a} - \frac{z}{a} \vartheta' \right)^2 \cos^2 n \varphi + \frac{\varepsilon_\varphi^2 \left( 1 + 2 \frac{z}{a} \right)^2}{2 n^2} \sin^2 n \varphi}.$$

Man erkennt, daß die Vergleichsspannung bezüglich  $\varphi$  zwei Höchstwerte erreicht. Der größere von beiden ist unzweifelhaft derjenige, welcher für alle  $\cos n \varphi = 1$  den größten Normalspannungen entspricht, während der andere für  $\sin n \varphi = 1$  reiner Verdrehung ( $\varphi = 0$ ) entspricht. Im ersten Fall lautet die Vergleichsspannung

$$\sigma_e = \frac{E}{\sqrt{1-\nu^2}} \left( \frac{u'}{a} - \frac{z}{a} \vartheta' \right)$$

und deckt sich bis auf den von 1 wenig verschiedenen Faktor  $\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$  mit der größten Normalspannung. Im zweiten Fall lautet sie

$$\sigma_e = \frac{E}{n \sqrt{2(1+\nu)}} \varepsilon'_\nu \left( 1 + 2 \frac{z}{a} \right).$$

Ihr entspricht zufolge  $\varphi = 0$  die kleinste Energiegrenze. Die größten Beanspruchungen innerhalb der Schalendicke treten an den Außenflächen  $z = \pm \frac{h}{2}$  auf.

Ein weiteres Eingehen auf die Beurteilung der Beanspruchung auf Grund der Schleicherschen Hypothese erübrigt sich, solange die Funktion  $\sigma_e(\varphi)$  für die einzelnen Materialien noch nicht bestimmt ist. Das Ergebnis von  $\sigma_e$  für die vollkommen eingespannte Schale hat gezeigt, daß man bei den Randkräften der Schale auch mit Hilfe der Hauptspannungen ein gutes Bild von der Sicherheit der Konstruktion erhält. Man kann für sie Beanspruchungen bis nahe an die Elastizitätsgrenze heran zulassen, da sie auf eine schmale Randzone beschränkt bleiben und die statisch unbestimmte Überlagerung über ein statisches Hauptsystem bilden<sup>1</sup>. Die Beanspruchungen im mittleren Stück des Zylinders wird man hingegen in den üblichen Grenzen halten.

### C. Näherungslösung für die Kreiszyinderschale bei nicht-achsensymmetrischer Belastung.

#### 1. Aufstellen der Gleichungen.

Die vorhergehenden genauen Untersuchungen bestätigen, wie auch alle bisherigen Berechnungen achsensymmetrisch belasteter Schalen das „St. Venantsche Prinzip“, wonach an einem zusammenhängenden Rande für sich im Gleichgewicht befindliche Kräfte sich in ihrer Auswirkung auf einen schmalen Bereich beschränken. J. Geckeler<sup>2</sup> hat, auf W. Bauersfeld aufbauend, von diesem raschen Abklingen der Randspannungen bei Aufstellen seiner Näherungslösung für die achsensymmetrischen Schalen Gebrauch gemacht. Während für die Zylinderschale keine weiteren Vernachlässigungen notwendig sind, werden bei Schalen beliebiger Meridianform alle Ableitungen der Unbekannten gegen die höchste in der Gleichung vorkommende gestrichen. Denn da der Exponent in  $\vartheta = e^{-\mu \xi}$  usw. verhältnismäßig groß ist, so ist  $\vartheta'' = +\mu^2 e^{\mu \xi}$  usw. groß gegen  $\vartheta$  usw. Machen wir in unseren Gleichungen (25) ebenfalls von dieser Vereinfachung Gebrauch, dann erhalten wir, nachdem die erste und zweite Gleichung je zweimal integriert sind, folgende Be-

<sup>1</sup> Vgl. auch Grüning, Die Tragfähigkeit stat. unbest. Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung, Berlin 1927.

<sup>2</sup> J. Geckeler, Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen, Berlin 1926.

stimmungsdeterminante

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda(1 + \varepsilon) & -\lambda\varepsilon & \nu(1 + 2\varepsilon) \\ n^2[\nu(1 - \varepsilon) + (1 + \varepsilon)] & [(1 - \nu)(1 + 3\varepsilon) - 2n^2\varepsilon] & -\lambda(1 - \nu)(1 + 3\varepsilon) \\ 2\lambda^2 & -(1 - \nu)[1 + 2\varepsilon(n^2 - 1)] & \lambda[(1 - 2\varepsilon) + \nu(1 + 2\varepsilon)] \end{vmatrix}.$$

Die Lösung enthält vier willkürliche Konstanten, entspricht dem ersten Teil der genauen Gleichungen (48) und beschreibt den Einfluß der Randkräfte. Als partikuläre Lösung tritt der Anteil der Belastung als ganze rationale Funktion hinzu, die den Ergebnissen für die biegungsfreie Schale entspricht. In der genauen Lösung erscheint der Belastungseinfluß von  $n > 1$  an in mit  $n$  zunehmendem Maße in der abklingenden Form, die den Randkräften entspricht. Der innere Grund hierfür liegt darin, daß für alle  $n > 1$  die äußeren Lasten in jedem Schalenring von der Länge  $dx$  unter sich im Gleichgewicht stehen. Sie können sonach für jedes Zylinderelement gleichsam als Kräfte im Sinne des St. Venantschen Prinzips aufgefaßt werden und wirken sich deshalb in Form von Exponentialfunktionen aus. Die Verschmelzung beider Lösungsteile erlangt jedoch erst Bedeutung, wenn  $\mu_4$  gegen  $\mu_2$  ins Gewicht fällt, was erst bei verhältnismäßig großem  $n$  der Fall ist (vgl. Tabelle 1)<sup>1</sup>. Der Fehler wird hingegen dadurch wesentlich herabgedrückt, daß die Konstantenbeiwerte  $\nu$  und  $\varrho$  für den ersten Teil der Lösung von  $n$  nur wenig abhängen, während sie für den zweiten Teil mit dem reziproken Wert von  $n^2$  bzw.  $n^4$  klein werden [s. Gleichungen (45) bis (47)]. Die Vernachlässigung der niederen Ableitungen drückt sich bei Beachtung von  $n$  nach Gleichungen (25) ungefähr durch  $\frac{n^2}{\mu^2}$  aus; der Fehler wächst also trotz der mit  $n$  größer werdenden  $\mu$ . Deshalb wird bei Aufstellung der Näherungsgleichungen nicht von  $\Delta_2$ , sondern von der genauen Lösung (48) ausgegangen. Nach den bisherigen Betrachtungen kann auch für die nicht-achsensymmetrisch belastete Kreiszyinderschale der Einfluß der Belastung und der Randkräfte getrennt ermittelt werden. Der Fehler solcher Berechnungsweise wächst im allgemeinen für die Werte  $n > 1$  langsam mit  $n$ . Die Belastungskomponenten  $X_n, Y_n, Z_n$  für  $n > 1$  treten praktisch nur als Glieder einer Reihenentwicklung auf, welche die Belastung genügend genau wiedergibt. Durch Berücksichtigung einer entsprechend höheren Gliederzahl der Reihe läßt sich daher wohl stets der Fehler der Näherungsrechnung in den Grenzen halten, die man an sich schon durch Entwicklung der Belastung in einer Reihe in Kauf genommen hat.

Setzt man in dem den Randstreifen entsprechenden Teil der Gleichungen (48)

$$\begin{aligned} C_1^* &= -C_1 \sin \psi_1, & C_3^* &= C_2 \sin \psi_2, \\ C_2^* &= +C_1 \cos \psi_1, & C_4 &= C_2 \cos \psi_2, \end{aligned}$$

worin  $C_1, C_2$  und  $\psi_1, \psi_2$  vier neue Konstanten bedeuten, dann lautet der Ausdruck für  $\vartheta$

$$\vartheta = -C_1 e^{-\mu_1 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi_1) + C_2 e^{\mu_2 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi_2).$$

Da erkannt ist, daß die Randwerte stark abklingen, so kommt nur der erste Teil der Gleichung in Betracht. Zu dieser Vernachlässigung wäre man übrigens auch in den meisten Fällen einer genauen Rechnung gezwungen, weil die Zahlenbeiwerte der Konstanten an beiden Enden so starke Größenunterschiede aufweisen, daß die rechnerischen Hilfsmittel nicht mehr ausreichen. Durch Einsetzen von Zahlen in Gleichung (48) kann man sich leicht davon überzeugen. Die Näherungslösung für die Formänderungsgrößen lautet also

$$\vartheta = -C e^{-\mu_1 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi), \tag{6I_1}$$

$$\frac{u}{a} = -C e^{-\mu_1 \xi} [\nu_1 \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \nu_2 \cos(\mu_1 \xi + \psi)], \tag{6I_2}$$

<sup>1</sup> In Tabelle 1 sind ungünstig kleine  $h$ -Werte gewählt. Mit steigendem  $h$ , also kleiner werdendem  $\frac{h}{a}$ , sinken alle Fehlereinflüsse (vgl. auch Tabelle 2 und Abb. 7).

$$\varepsilon_\varphi = + C e^{-\mu_2 \xi} [\varrho_1 \sin(\mu_1 \xi + \psi) + \varrho_2 \cos(\mu_1 \xi + \psi)], \tag{6I_3}$$

$$\frac{w}{a} = \frac{C}{\mu_1^2 + \mu_2^2} e^{-\mu_2 \xi} [\mu_2 \sin(\mu_1 \xi + \psi) + \mu_1 \cos(\mu_1 \xi + \psi)], \tag{6I_4}$$

oder nach Gleichung (44ff.)

$$\frac{w}{a} = \frac{C}{\sqrt{k'}} e^{-\mu_2 \xi} [\mu_2 \sin(\mu_1 \xi + \psi) + \mu_1 \cos(\mu_1 \xi + \psi)].$$

Die Spannungsresultanten und -momente erhält man durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (2I), wobei noch zu berücksichtigen ist

$$\vartheta' = C e^{-\mu_2 \xi} [\mu_2 \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \mu_1 \cos(\mu_1 \xi + \psi)], \tag{6Ia_1}$$

$$\frac{u'}{a} = C e^{-\mu_2 \xi} [(\nu_1 \mu_2 - \nu_2 \mu_1) \sin(\mu_1 \xi + \psi) - (\nu_2 \mu_2 + \nu_1 \mu_1) \cos(\mu_1 \xi + \psi)]. \tag{6Ia_2}$$

Es ist also bei Berücksichtigung von  $\nu_2 - \nu \varrho_2' = 0$  [vgl. (45<sub>2</sub>) und (47<sub>2</sub>)]

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{D}{\varepsilon a^2} \left( \frac{u'}{a} + \nu \varepsilon_\varphi \right) \\ &= \frac{D}{\varepsilon a^2} C e^{-\mu_2 \xi} (\nu_1 - \nu \varrho_1') [\mu_2 \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \mu_1 \cos(\mu_1 \xi + \psi)], \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Werte  $D$ ,  $\nu_1$  und  $\varrho_1'$

$$s_x = E C h e^{-\mu_2 \xi} \left( \frac{1}{k} + \frac{n^2 - 1}{k'} \right) [\mu_2 \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \mu_1 \cos(\mu_1 \xi + \psi)]. \tag{62_1}$$

Ebenso findet sich

$$\begin{aligned} s_\varphi &= \frac{D}{\varepsilon a^2} \left( \varepsilon_\varphi + \nu \frac{u'}{a} \right), \\ &= \frac{2 E C h}{k'} e^{-\mu_2 \xi} \left\{ \mu_2 \left[ \mu_1^2 - \frac{3 n^2 (n^2 - 1) (2 + \nu)}{k} \right] \sin(\mu_1 \xi + \psi) \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \left[ \mu_2^2 + \frac{3 n^2 (n^2 - 1) (2 + \nu)}{k} \right] \cos(\mu_1 \xi + \psi) \right\}. \end{aligned} \tag{62_2}$$

Für die Momente gilt, wenn wieder Glieder von der Größenordnung  $\varepsilon^2$  vernachlässigt werden

$$\begin{aligned} b_x &= - \frac{D}{a} \left[ \vartheta' - \frac{u'}{a} - 2 \nu \varepsilon_\varphi - \nu (n^2 - 1) \frac{w}{a} \right], \\ &= - E C \frac{a h}{k} e^{-\mu_2 \xi} \left[ \mu_2 \left( 1 - \frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}} \right) \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \mu_1 \left( 1 + \frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}} \right) \cos(\mu_1 \xi + \psi) \right], \end{aligned} \tag{62_3}$$

$$b_\varphi = - E C \frac{a h}{k} e^{-\mu_2 \xi} \left[ \mu_2 \left( \nu - \frac{n^2}{\sqrt{k'}} \right) \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \mu_1 \left( \nu + \frac{n^2}{\sqrt{k'}} \right) \cos(\mu_1 \xi + \psi) \right]. \tag{62_4}$$

Außer den Normal- und Biegungsspannungen sind noch die Scherspannungen senkrecht zur Mittelfläche von Bedeutung, die am schnellsten aus den Gleichungen (22) mit Einsetzen der Zahlenwerte gefunden werden, am Rande unter gleichzeitiger Berücksichtigung der dort geltenden Vereinfachungen. Für  $n_x$  sei auch der allgemeine Ausdruck wiedergegeben, der mit Hilfe der üblichen Vernachlässigungen gefunden wird zu

$$n_x = E C \frac{h}{k} e^{-\mu_2 \xi} [n^2 \sin(\mu_1 \xi + \psi) - \sqrt{k' - 4 n^4} \cdot \cos(\mu_1 \xi + \psi)]. \tag{62_5}$$

Durch die vorstehenden Formeln ist im Verein mit der Lösung für die Schale ohne Biegungswiderstand der Spannungszustand der nicht-achsensymmetrisch belasteten Kreiszyklinderschale genügend genau beschrieben. Für  $n = 0$  erhält man die Geckelerschen Formeln für achsensymmetrische Belastung, die auch den v. Sandenschen Ausdrücken entsprechen. Für  $n = 1$  decken sie sich mit den in Kap. B, II, 4 gefundenen vereinfachten Werten. In nebenstehender Tabelle 3 sind die zur Ermittlung der Randkräfte notwendigen

Tabelle 3.

	$n$ beliebig	$n = 1$	$n = 0$
$h'$	$h + 6n^2(n^2 - 1)$	$h = \frac{1 - \nu^2}{\epsilon} (1 + 3\epsilon) \approx \frac{1 - \nu^2}{\epsilon}$	$h$
$\mu_1$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h'} - n^2}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h'} + n^2}}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h} + 1}}$	$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{h}$
$\mu_2$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h'} - n^2}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h'} + n^2}}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h} + 1}}$	$\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{h}$
$\varrho_1$	$\mu_2 \left\{ -\frac{2(1 + \nu)}{h} + \frac{1}{h'} [2(\mu_1^2 + 1) - \nu(n^2 - 2)] \right\}$	$\frac{\mu_2}{h} [\sqrt{h} - (2 + \nu)] \sim \frac{\mu_2}{\sqrt{h}}$	
$\varrho_2$	$\mu_1 \left\{ +\frac{2(1 + \nu)}{h} + \frac{1}{h'} [2(\mu_2^2 - 1) + \nu(n^2 - 2)] \right\}$	$\frac{\mu_1}{h} [\sqrt{h} + (2 + \nu)] \sim \frac{\mu_1}{\sqrt{h}}$	
	$\sin(\mu_1 \xi + \psi)$	$\sin(\mu_1 \xi + \psi)$	$\cos(\mu_1 \xi + \psi)$
$E\phi$	$e^{-\mu_1 \xi}$	$e^{-\mu_1 \xi}$	$e^{-\mu_1 \xi}$
$E s_{\varphi\varphi}$	$-EC$	$-EC$	$-EC e^{-\mu_1 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi)$
$s_x$	$+EC \left( \frac{1}{h} + \frac{n^2 - 1}{h'} \right)$	$+EC$	$+ \frac{EC}{\sqrt{h}} e^{-\mu_1 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi + \frac{\pi}{4})$
$s_{\varphi}$	$+EC \frac{2h}{h}$	$-EC \frac{h}{h}$	$+EC \frac{h}{\sqrt{h}} e^{-\mu_1 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi + \frac{\pi}{4})$
$b_x$	$-EC \frac{a h}{h}$	$-EC \frac{a h}{h}$	$+EC \frac{a h}{h^2} e^{-\mu_1 \xi} \cos(\mu_1 \xi + \psi + \frac{\pi}{4})$
$b_{\varphi}$	$-EC \frac{a h}{h}$	$-EC \frac{a h}{h}$	$+EC \frac{a h}{h^2} e^{-\mu_1 \xi} \cos(\mu_1 \xi + \psi + \frac{\pi}{4})$
$n_x$	$+EC \frac{h}{h}$	$+EC \frac{h}{h}$	$+ \nu b_x$

Die Werte sind durchweg gemäß den Gleichungen (16) mit  $\sin n \varphi$  bzw.  $\cos n \varphi$  zu multiplizieren!

\* Für hinreichend großes  $h$ .

Formeln übersichtlich zusammengestellt. Eine Erläuterung der Anwendung erübrigt sich. Es sei nur darauf hingewiesen, daß bei den Formänderungsgrößen und bei der Konstanten  $C$  zweckmäßig mit den  $E$ -fachen Werten gerechnet wird. Die auf die Flächeneinheit bezogenen Spannungen ergeben sich nach den Gleichungen (10).

### 2. Bestimmung der Konstanten $\psi$ und $C$ ; Spannungsverlauf.

Die Konstanten  $\psi$  und  $C$  sind bei vollkommener Einspannung und starrem Endspant durch die beiden Bedingungen gegeben

$$E \vartheta_0 = - EC \sin \psi = - E \vartheta_0^* \tag{63}$$

und

$$E \varepsilon_{\varphi_0} = EC (\varrho_1 \sin \psi + \varrho_2 \cos \psi) = - E \varepsilon_{\varphi_0}^* \tag{64}$$

Darin bedeuten  $\vartheta_0^*$  und  $\varepsilon_{\varphi_0}^*$  die größte Meridiansteigung und Ringdehnung am Rande der Schale ohne Biegungswiderstand, die durch die äußeren Kräfte belastet ist. Da durch die Lösung für die biegunsfreie Schale die Bedingung  $\frac{v}{a} = 0$  bereits erfüllt ist, wird infolge  $\varepsilon_{\varphi} = n \frac{v}{a} + \frac{w}{a}$  mit Gleichung (64) auch der Gleichung  $\frac{w}{a} = 0$  Genüge geleistet. Grenzwerte für  $\psi$  erhält man mit  $\vartheta_0^* = 0$  zu  $\psi = 0$  und mit  $\varepsilon_{\varphi_0}^* = 0$  zu  $\text{tg } \psi = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ . Der letztere Wert nähert sich mit kleiner werdendem  $n$  der Grenze  $\text{tg } \psi = -1$ , welche für  $n = 0$  erreicht wird und  $\psi = -\frac{\pi}{4}$  ergibt. Bei gelenkig angeschlossenem Schalenrand tritt an Stelle der Gleichung (63) für  $\vartheta_0$  die Bedingung

$$b_{x_0} = - EC \frac{ah}{k} \left[ \mu_2 \left( 1 - \frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}} \right) \sin \psi - \mu_1 \left( 1 + \frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}} \right) \cos \psi \right] = 0 \tag{65}$$

und damit

$$\text{tg } \psi = \frac{\mu_1 \left( 1 + \frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}} \right)}{\mu_2 \left( 1 - \frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}} \right)}$$

Der Größtwert für  $\psi$  wird mit  $n = 0$  erreicht und beträgt  $\psi = +\frac{\pi}{4}$ . Im Belastungsfall  $n = 1$  muß bei frei drehbarem Auflagerspant nach Gleichung (50b) auch  $s_{x_0} = 0$  sein. Daraus folgt  $\text{tg } \psi = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ . Diese Bedingung ist im Rahmen der Näherung mit Gleichung (65) verträglich, da dort  $\frac{\nu}{\sqrt{k}}$  als klein gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dadurch wird gleichzeitig die erste der Randbedingungen (50b) erfüllt, so daß sich bei frei drehbarem Endspant unabhängig vom Einspannungsgrad des Schalenrandes stets der gleiche Spannungszustand im Falle  $n = 1$  ausbildet. Allgemein trägt die Konstante  $\psi$  der Art der Einspannung Rechnung und liegt in den Grenzen  $-\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4}$ , während durch die Konstante  $C$  die Intensität der Randspannungen zum Ausdruck kommt.

An einer beliebigen Unstetigkeitsstelle treten für die durchlaufende Schale an Stelle der Gleichungen (63) und (64) entsprechend den links und rechts vorhandenen Konstanten folgende vier Gleichungen auf

$$\vartheta_{0l} = -\vartheta_{0r}, \quad b_{x_{0l}} = b_{x_{0r}}, \tag{66 u. 67}$$

$$\varepsilon_{\varphi_{0l}} = \varepsilon_{\varphi_{0r}}, \quad n_{x_{0l}} = -n_{x_{0r}}. \tag{68 u. 69}$$

Es ist dabei zu beachten, daß die  $\vartheta_0$  und  $\varepsilon_{\varphi_0}$  sich aus der Partikularlösung und vorlie-

gender Näherung zusammensetzen<sup>1</sup>. Die Abszisse  $\xi$  zählt vom Trennungskreis nach beiden Seiten positiv. Erfolgt der Zusammenschluß gelenkig, dann gelten an Stelle der Gleichungen (66) und (67) die Beziehungen

$$b_{x_{0l}} = 0, \quad b_{x_{0r}} = 0. \quad (70 \text{ u. } 71)$$

Die Übergangsbedingungen gelten analog für den Anschluß einer beliebigen Rotationschale an die Kreiszyinderschale. Nähere Betrachtungen erübrigen sich, solange die Randlösungen für diese Schalen aus nicht-achsensymmetrischer Belastung noch nicht bekannt sind<sup>2</sup>. Auch die Nachgiebigkeit eines Versteifungsringes, an den die Schale einseitig angeschlossen wird, kann durch vorstehende Gleichungen berücksichtigt werden, wenn unter den Kraftgrößen und Verschiebungen der einen Seite die Widerstände und Formänderungen des Spantes verstanden sind. Die allgemeine Behandlung der Spantnachgiebigkeit erfolgt in Abschnitt D.

Sämtliche Spannungen klingen vom Rande weg in der Art stark gedämpfter Schwingungen ab. Der Dämpfungsfaktor ist  $e^{-\mu_2 \xi}$ , die Periode  $T = \frac{2\pi}{\mu}$ . Der aperiodische Fall kann auch für noch so großes  $n$  nicht eintreten. Für die periodisch abklingende Schwingung muß, wenn man bei dem Bilde bleibt, sein

$$\mu_2 < \sqrt{\mu_2^2 + \mu_1^2} = \sqrt[4]{k'}$$

also

$$4n^4 < k + 6n^2(n^2 - 1),$$

was jederzeit erfüllt ist. Die aus sin- und cos-Linien zusammengesetzten Spannungswerte können durch eine Phasenverschiebung  $\delta$  jederzeit in reine Sinuslinien verwandelt werden. Man erkennt aus Tabelle 3, daß für die Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_{bx}$ , die stets am meisten interessieren, sich dieselbe Phasenverschiebung ergibt, wenn bei  $b_x$  das verhältnismäßig kleine Glied  $\frac{n^2 \nu}{\sqrt{k'}}$  gestrichen wird. Es ist

$$\text{tg } \delta = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

und damit

$$\sigma_x = + E C \left( \frac{1}{h} + \frac{n^2 - 1}{k'} \right) \sqrt[4]{k'} e^{-\mu_2 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi + \delta),$$

$$\sigma_{bx} = \pm 6 E C \frac{a}{h} \frac{\sqrt[4]{k'}}{k} e^{-\mu_2 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi + \delta).$$

Da die größte Spannung noch um den Anteilwert der Belastung vermehrt werden muß, der  $\sigma_x$  entgegengesetzt ist, so hat man für die größte Randspannung  $\sigma_{x\max}$  stets den Ausdruck zu verwenden

$$\sigma_{x\max} = \pm E C \left[ \frac{1}{h} \left( 6 \frac{a}{h} - 1 \right) - \frac{n^2 - 1}{k'} \right] \sqrt[4]{k'} \cdot e^{-\mu_2 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \psi + \delta). \quad (72)$$

Die Phasenverschiebung ist gleich dem negativen Wert der Konstanten  $\psi$  für frei drehbaren Rand. Man erhält also für freie Lagerung

$$\sigma_{x\max} = \pm E C \left[ \frac{1}{h} \left( 6 \frac{a}{h} - 1 \right) - \frac{n^2 - 1}{k'} \right] \sqrt[4]{k'} \cdot e^{-\mu_2 \xi} \sin \mu_1 \xi, \quad (72 a)$$

für Einspannung, wenn  $\vartheta^* = 0$  ist

$$\sigma_{x\max} = \pm E C \left[ \frac{1}{h} \left( 6 \frac{a}{h} - 1 \right) - \frac{n^2 - 1}{k'} \right] \sqrt[4]{k'} \cdot e^{-\mu_2 \xi} \sin(\mu_1 \xi + \delta). \quad (72 b)$$

<sup>1</sup> J. Geckeler hat diesen Umstand in seiner öfter angeführten Abhandlung übersehen. In Abb. 8 l. c. bildet sich unter Annahme des gelenkigen Zusammenschlusses nicht der stetige Übergang vom Zylinder zum Boden aus.

<sup>2</sup> Vgl. Anm. 1 auf S. 55.

Man erkennt den überwiegenden Einfluß der Biegungsspannungen. Die jeweiligen Maxima und Minima ergeben sich aus der Bedingung

$$\operatorname{tg}(\mu_1 \xi + \psi + \delta) = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

also bei  $\xi = \frac{\pi}{2\mu_1}$  bzw.  $\xi = 0$ . Die weiteren Werte fallen nicht mehr ins Gewicht, da sie sich

infolge des starken Abklingens verhalten, wie  $e^{\frac{\mu_2}{\mu_1} \pi} : 1$ . Das kleinste Maß gehört zu  $n = 0$  und beträgt 23,14:1. Für die Längs- und Biegungsspannungen senkrecht zur Erzeugenden ergeben sich verschiedene Phasenverschiebungen, so daß für die Lage des Maximums von  $\sigma_{\varphi_{\max}}$  die jeweils größere Spannung den Ausschlag gibt. Kurze Proberechnungen lassen schnell den ungünstigsten Wert finden.

In Abb. 7 sind die charakteristischen Werte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  in ihrer Abhängigkeit von  $k$  und  $n$  dargestellt. Die Größe  $k$  ist gewählt, da sie den gesamten Einfluß der Schalenabmessungen und des Baustoffes enthält. Außerdem läßt sie eine feinere Abstufung der

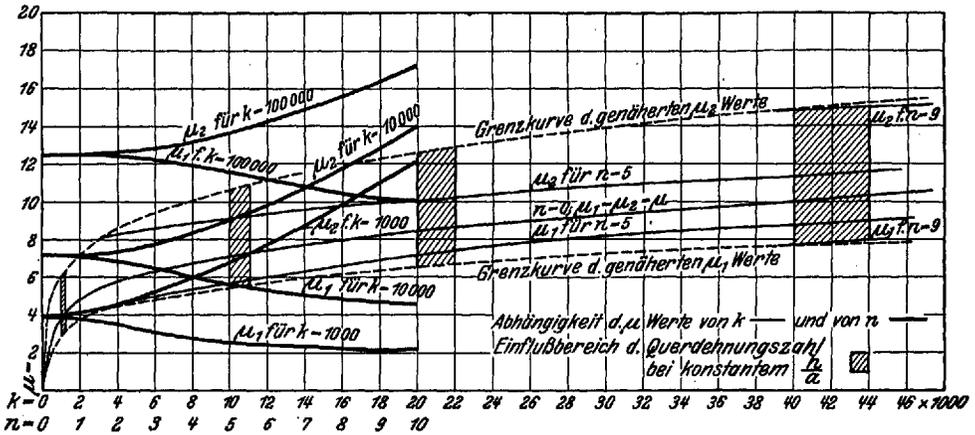


Abb. 7. Abhängigkeit der  $\mu$ -Werte von  $k$  und  $n$ .

Steifigkeit der Schale zu als das Verhältnis  $\frac{h}{a}$  und ist die allein maßgebende Zahl für achsensymmetrische Belastung. Man erkennt, daß der Randspannungszustand nicht von der Länge des Zylinders, sondern nur von seiner Steifigkeit  $\frac{h}{a}$  abhängt<sup>1</sup>. Der Einfluß des Baustoffes äußert sich nur im Auftreten des Quadrats der reziproken Querdehnungszahl. Diese ist für Stahl 0,3, während für Beton einwandfreie Werte noch nicht festliegen. Wählt man, wie in der Plattentheorie vielfach üblich, für Beton  $\nu = 0$ , dann erhält man den 1,1-fachen  $k$ -Wert eines Eisenrohres gleicher Abmessungen. Die beiden Grenzen  $k$  und 1,1  $k$  umschließen jeweils den ganzen Einflußbereich der Querdehnung für ein bestimmtes Verhältnis  $\frac{h}{a}$ . Man erkennt aus den Abbildungen die Geringfügigkeit des Einflusses.

Die Stärke des Abklingens nimmt mit  $n$  und  $k$  zu, während die Periode mit  $k$  fällt, mit  $n$  jedoch wächst. In Abb. 8 ist der Verlauf der Biegemomente als Beispiel dargestellt. Es ist dort für alle  $n$  gleiches  $C$  beibehalten. Die Beanspruchungen nehmen mit wachsendem  $n$  ab; die Beiwerte der ihnen entsprechenden Ansatzreihe konvergieren demnach schneller, als die entsprechenden Kraftgrößen einer konvergenten Belastungsreihe. Dies ist ein weiterer Beweis für die Brauchbarkeit der Näherungslösung. In Abb. 7 sind die Grenzkurven eingetragen, die dem Anwendungsbereich von Gleichung (35) entsprechen. Für

<sup>1</sup> Die Konstanten  $C$  und  $\psi$  können jedoch unter Umständen aus den Randbedingungen einen Einfluß von  $l$  mitbringen.

$n = 1$  sind die Werte überall genau, die  $\mu$ -Kurven dieses Falles laufen so dicht neben der  $\mu_0$ -Linie, daß sie sich zeichnerisch kaum unterscheiden und deshalb nicht dargestellt sind<sup>1</sup>. Nimmt man an, daß im allgemeinen die Entwicklung bis  $n = 5$  der praktischen Rechengenauigkeit genügt, dann kann für alle  $k > 3600$ , d. h. für den Bereich der Stahlrohre<sup>2</sup>, von der genauen Lösung der charakteristischen Gleichung abgesehen werden. Im Bereich der Eisenbetonrohre, in dem die  $\mu$ -Linien steil ansteigen, empfiehlt es sich, auf die Gleichungen (32) bis (34) zurückzugreifen. Hier kann es auch vorkommen, daß die Näherung für gedrungene Rohre (kleines  $\frac{h}{a}$ ) versagt. Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß die längste Abklingungsperiode für das größte vorkommende  $n$  auftritt. Da aber für die Größe der Spannungen die Beiträge der niederen  $n$  ausschlaggebend sind, so genügt die Größe  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{k}$ , um zu beurteilen, bis zu welcher Länge die Näherungslösung zulässig ist. Zwei aufeinanderfolgende Höchstwerte einer Randspannung verhalten sich ungünstigsten-

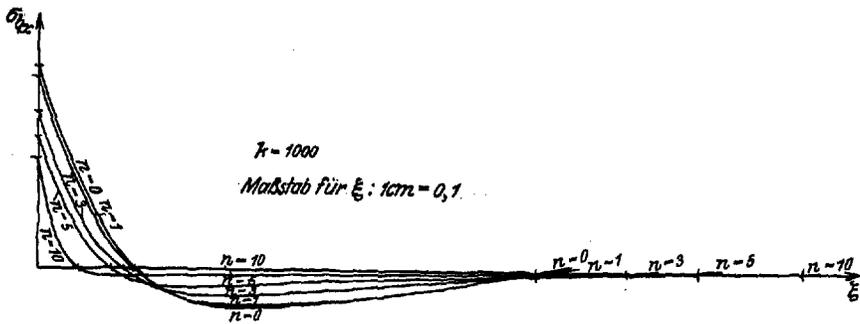


Abb. 8\*. Verlauf der Biegungsspannung in Abhängigkeit von  $n$ .

falls wie 23,14:1. Der Fehler bleibt also jedenfalls kleiner als 4%, wenn die Länge des Zylinders größer als eine Periode ist, sonach

$$\frac{l}{a} > \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \pi}{\sqrt[4]{k}} \approx \frac{9}{\sqrt[4]{k}} \quad \text{oder} \quad l > 4,8 \sqrt{ah}^* \tag{73}$$

Bei eingespanntem Schalenrand kann die Bedingung, wie ein Blick auf Abb. 8 lehrt, noch günstiger gestellt werden, nämlich

$$\frac{l}{a} > \frac{5}{8} T = \frac{5,5}{\sqrt[4]{k}} \quad \text{oder} \quad l > 3 \sqrt{ah} \tag{73a}$$

Für das steifste praktisch in Frage kommende Verhältnis  $\frac{h}{a} = \frac{1}{5,6}$ \*\* betragen diese Werte  $l > d$  bzw.  $> 0,65 d$ . Die Bedingungen werden selten nicht erfüllt sein, da man ja gerade für die steifsten Rohre die größten Spannweitenverhältnisse wählen wird<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Dieser Umstand legt es nahe, für beliebige achsensymmetrische Schalen (Kuppeln, Kesselböden) zunächst auch für  $n = 1$  die Geckelerschen Formeln anzuwenden. Für die Kugelschale ist die Untersuchung von E. Schwerin in seiner Dissertation „Über Spannungen in symmetrisch und unsymmetrisch belasteten Kugelschalen (Kuppeln)“, Berlin 1918, auf der Grundlage der asymptotischen Integration durchgeführt worden und hat für  $n = 1$  dieselben Abklingungszahlen ergeben wie für  $n = 0$ .

<sup>2</sup> S. S. 45.

<sup>3</sup> Infolge der Verkleinerung der Abb. im Druck ist hier 0,6 cm = 0,1.

<sup>4</sup> J. Prescott (Applied Elasticity, S. 542) gibt die Bedingung für Betrachtung als „langes Rohr“

mit  $l > 10 \sqrt{\frac{h}{2} a} \approx 7 \sqrt{ah}$  an.

\*\* Siehe S. 46.

<sup>4</sup> Siehe Abschnitt B, I, 2. Ist die Bedingung nicht mehr erfüllt, dann genügt es meist, sich durch kurze Rechnung ein Bild von den vom anderen Ende her abklingenden Spannungen zu machen, um deren Einfluß auf die Höchstspannungen zu erkennen.

Alle vorhergehenden Ableitungen gelten für die Zylinderschale mit gleichbleibender Wandstärke. Bei Gefäßen aus Stahl tritt oft eine sprungweise Änderung der Dicke auf (Stoß zweier Blechbahnen). Ein solcher Sprung ist als Unstetigkeitsstelle ohne weiteres nach den allgemeinen Formeln zu behandeln. Für verhältnismäßig schmale Zonen ist Gleichung (73) zu beachten. Ist  $h$  eine stetige Funktion von  $\xi$ , dann läßt sich die Schale in genügend kleine Ringe von der Breite  $\Delta \xi$  aufteilen, an deren Enden jeweils  $C$  und  $\psi$  neu angepaßt werden müssen, während  $\mu_1$  und  $\mu_2$  einen mittleren Wert annehmen. Die Entwicklungen **Geckelers** lassen sich analog übertragen. Man braucht also in den Gleichungen der Tabelle 3 nur jeweils die Ausdrücke  $\mu_1 \xi$  und  $\mu_2 \xi$  zu ersetzen durch  $\Sigma \mu_1 \Delta \xi$  und  $\Sigma \mu_2 \Delta \xi^*$ . Die Gesamtlösung setzt sich wieder aus den Werten für die biegunsfreie Schale und denen der Näherung für die Randspannungen zusammen. Die Verschiebungswerte sind, wie schon ausgeführt wurde, auch bei der partikulären Lösung von der Wandstärke abhängig, was vornehmlich bei Bestimmung der Randkonstanten  $\psi_0$  und  $C_0$  zu beachten ist. Für die Übergangskonstanten an den Teilkreisen ist jedoch die Partikularlösung bedeutungslos, da sie aus den Bestimmungsgleichungen herausfällt. Die Schale mit veränderlicher Wandstärke findet hauptsächlich Anwendung bei Eisenbetonbauten, wie Behältern, Silos und Rohrbrücken<sup>1</sup>.

### D. Nachgiebigkeit der Spante (Versteifungsringe) und ihr Einfluß auf die Randspannungen.

#### 1. Die auf das Spant wirkenden Kräfte.

Schon im vorhergehenden Abschnitt ist angedeutet worden, daß sich die Nachgiebigkeit der Versteifungsringe in der  $yz$ -Ebene durch eine Verbesserung der Größe  $\epsilon_{\varphi_0}^*$ , der Dehnung der biegunsfreien Zylinderschale, berücksichtigen läßt. Diese Verbesserung, die im folgenden mit  $\Delta \epsilon_{\varphi}^*$  bezeichnet werden möge, ist dadurch bestimmt, daß sich am Schalenrand die auf Schale und Spant entgegengesetzt wirkenden Kräfte und Momente im Gleichgewicht befinden. In gleicher Weise lassen sich Verwindungen des Spantes

durch Verbesserungen  $\Delta \frac{u^*}{a}$  und  $\Delta \vartheta^*$  bzw.  $\Delta s_x$  und  $\Delta b_x$  in die Rechnung einführen.

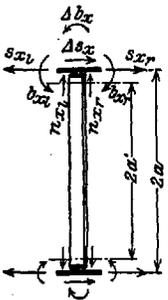


Abb. 9. Spantling.

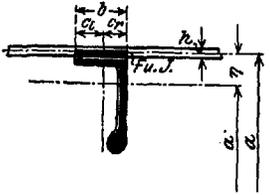
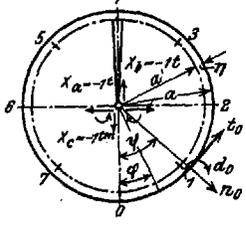


Abb. 10. Spantquerschnitt.

Beim achsensymmetrisch belasteten Zylinder treten nur Normalkräfte  $n_{x0}$  und Biegemomente  $b_{x0}$  auf. Dem Einfluß der ersteren wird durch die Verbesserung  $\Delta \epsilon_{\varphi}^*$  Rechnung getragen, dem der letzteren durch  $\Delta b_x$ ,

den Widerstand, den das Spant der Verdrehung entgegensetzt<sup>2</sup>. Die Gleichungen (66) bis (69) erweitern sich damit und unter Beachtung der Abbildungen 9 und 10 zu

$$b_{x_r} - b_{x_l} - n_{x_r} c_r + n_{x_l} c_l = \Delta b_x, \quad \vartheta_{0_l} + \vartheta_{0_l}^* = -\vartheta_{0_r} - \vartheta_{0_r}^*, \quad (74 \text{ u. } 75)$$

$$\epsilon_{\varphi_{0_r}} = -\epsilon_{\varphi_{0_r}}^* + \Delta \epsilon_{\varphi}^* + \frac{\vartheta_r c_r}{a}, \quad \epsilon_{\varphi_{0_l}} = -\epsilon_{\varphi_{0_l}}^* + \Delta \epsilon_{\varphi}^* + \frac{\vartheta_l c_l}{a}. \quad (76 \text{ u. } 77)$$

\* **P. Pasternak** teilte auf dem 2. internationalen Kongreß für technische Mechanik, Zürich 1926, genauere Beiwerte für achsensymmetrische Belastung und veränderliche Wandstärke mit in seinem Vortrag: „Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchungen in dünnwandigen, kreisrunden Behältern.“

<sup>1</sup> Ein Beispiel bietet die Trebsenbachbrücke, Bautechnik 3 (1925), S. 351 ff.

<sup>2</sup> Es ließe sich für  $\Delta b_x$  ebenso die Verschiebungsgröße  $\Delta \vartheta^*$  bzw. für  $\Delta \epsilon_{\varphi}^*$  die Kraftgröße  $\Delta n_{x0}$  verwenden. Die obige Wahl bietet jedoch rechnerische Vorteile.

In Gleichung (75) ist im Gegensatz zu (66) der partikuläre Anteil mit aufgenommen.  $c_r$  und  $c_l$  bedeuten den Abstand der Anschlußgrößtkreise der Schale von der lotrechten Schwerlinie des Spantes. Unter den Anschlußgrößtkreisen sind diejenigen Linien verstanden, längs welcher der verlangte Einspannungsgrad der Schale gewährleistet ist. Da man jedoch meist auf Schätzung über die Aufnahme der Randkräfte (z. B. durch die Nietverbindungen) angewiesen ist, so wird man um so eher den Einfluß der Verdrehungsmomente aus den Scherkräften vernachlässigen können, als er sehr gering ist. Die Breite  $b = c_r + c_l$  zählt zum Spantquerschnitt und ist in Abb. 10 gleich der Spantbreite angenommen. Die Gleichungen (74) bis (77) genügen zur Berechnung der vier Konstanten  $\psi_l$ ,  $\psi_r$ ,  $C_l$  und  $C_r$ , wenn noch beachtet wird, daß unter Voraussetzung eines linearen Zusammenhangs zwischen Moment und Verdrehungswinkel gilt<sup>1</sup>

$$\Delta b_x = \frac{\vartheta_{0l} + \vartheta_{0l}^*}{\Delta \vartheta_1} = - \frac{\vartheta_{0r} + \vartheta_{0r}^*}{\Delta \vartheta_1} = \frac{C_r \sin \psi_r - \vartheta_{0r}^*}{\Delta \vartheta_1} \quad (78)$$

$\Delta \vartheta_1$  ist der Winkel, um den das Spant infolge  $\Delta b_x = 1 \text{ kgcm/cm}$  verdreht wird. Bei Auflösung der transzendenten Gleichungen für die  $\psi$ -Werte ist zu berücksichtigen, daß die schon früher mitgeteilte Beziehung  $-\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4}$  besteht.

Der Spannungszustand der Schale ist bis auf den aus den partikulären Lösungen mitgebrachten Einfluß nur von ihrer Steifigkeit, d. h. in diesem Falle von der Schalendicke, abhängig. Bleibt also beim Übergang über einen bezüglich der Ringebene symmetrischen Versteifungsring die Dicke  $h$  einer achsensymmetrisch und bezüglich  $x$  gleichförmig belasteten Zylinderschale gleich, dann tritt keine Verdrehung des Spantes ein und die Konstanten  $C_l$  und  $C_r$  werden gleich, während  $\psi = 0$  ist. Die hierbei durch die Nachgiebigkeit des Spantes bewirkte Entlastung der Randkräfte ist schon früher von K. v. Sanden untersucht und in fertige Formeln gebracht worden, wobei der Abstand der Anschlußgrößtkreise gleich der Spantbreite gesetzt wurde<sup>2</sup>. Die Untersuchung läßt sich auch mit den Gleichungen (76) oder (77) und den Formeln aus Tabelle 3 schnell durchführen. Bezeichnet  $F$  den Spantquerschnitt einschließlich des Schalenteils von der Breite  $b$ , dann ist für den inneren Überdruck  $p$

$$\Delta \varepsilon_{\varphi}^* = \frac{p a b}{E F} - C \frac{2 a h}{F \sqrt{h}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\varphi_0}^* = \frac{p a}{E h}.$$

Die Konstante  $C$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{E C}{\sqrt[4]{h}} \sin \frac{\pi}{4} = - \frac{p a}{h} + \frac{p a b}{F} - E C \frac{2 a h}{F \sqrt{h}}$$

<sup>1</sup> Love teilt in dem öfter angeführten Lehrbuch auf S. 484 das je Längeneinheit wirkende Kräftepaar mit, das einen Kreisring vom Radius  $a_0$ , dessen eine Querschnittshauptachse mit dem Trägheitsmoment  $J_1$  im ungespannten Zustand mit der Ringebene den Winkel  $\alpha_0$  einschließt, in einen entsprechenden vom Radius  $a_1$  und Winkel  $\alpha_1$  deformiert:

$$\Delta b_x = \frac{E}{a_0 a_1} (J \sin \alpha_1 \cos \alpha_0 - J_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1) - \frac{1}{a_1^2} (J - J_1) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1.$$

Setzen wir in unserem Fall  $a_0 = a_1 = a'$  und nehmen die betreffende Hauptachse mit der Ringebene zusammenfallend an ( $\alpha_0 = 0$ , z. B. [-Spant), dann ergibt sich, wenn noch für die kleine Verdrehung  $\alpha_1 = \Delta \vartheta$  gesetzt wird:  $\sin \Delta \vartheta = \Delta \vartheta$ ;  $\cos \Delta \vartheta = 1$

$$\Delta b_x = \frac{E J_1}{a'^2} \Delta \vartheta \quad \text{oder} \quad \Delta \vartheta_1 = \frac{a'^2}{E J_1}.$$

<sup>2</sup> Siehe a. a. O.

\* Das negative Vorzeichen bei  $C$  tritt auf, weil positives  $\varepsilon_x$  negatives  $\Delta \varepsilon_{\varphi}^*$  hervorruft und der auf das Spant wirkende Wert dem der Tabelle 3 entgegengesetzt ist.

zu

$$EC = -\frac{pa}{h} \frac{\sqrt[4]{k}}{\sin \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1 - \frac{bh}{F}}{1 + \frac{2\sqrt{2}ah}{F\sqrt[4]{k}}} = -\frac{pa}{h} \sqrt{2k} \frac{F - bh}{F\sqrt[4]{k} + 2\sqrt{2}ah} \quad (79)$$

Für  $F = \infty$  folgt  $EC$  für starres Spant. Der letzte Bruch des ersteren Ausdrucks gibt das Maß der Entlastung der Randkräfte an. Ein anderer Sonderfall ist die Schale, welche einseitig an ein in der  $yz$ -Ebene unnachgiebiges Schott angeschlossen ist. Aus den Gleichungen (74) und (78) erhält man bei  $c_r = 0$

$$b_x = \Delta b_x = \frac{C_r \sin \psi_r - \theta_{0r}^*}{\Delta \theta_1}$$

und nach Tabelle 3

$$EC_r \frac{ah}{k^{3/4}} \cos\left(\psi_r + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{C_r \sin \psi_r - \theta_{0r}^*}{\Delta \theta_1}$$

Für gleichmäßigen Innendruck  $p$  wird mit  $\theta_{0r}^* = 0$  aus dieser Gleichung unmittelbar  $\psi_r$  gefunden. Man findet

$$\frac{\sin \psi_r}{\cos\left(\psi_r + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{ah}{k^{3/4}} E \Delta \theta_1$$

oder

$$\operatorname{tg} \psi_r = \frac{ah E \Delta \theta_1}{ah E \Delta \theta_1 + \sqrt{2} k^{3/4}} = \frac{Z}{N} \quad (80)$$

Die beiden Grenzfälle sind darin enthalten; denn es wird für ein Schott ohne Verdrehungswiderstand  $\Delta \theta_1 = \infty$  und damit  $\psi_r = \frac{\pi}{4}$ , für vollkommen starres Schott  $\Delta \theta_1 = 0$  und  $\psi_r = 0$ . Mit dem Wert aus Gleichung (80) findet sich auch  $C_r$  aus

$$\frac{EC_r}{\sqrt[4]{k}} \sin\left(\psi_r + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{pa}{h},$$

somit

$$EC_r = -\frac{pa}{h} \sqrt{2} \sqrt[4]{k} \frac{\sqrt{N^2 + Z^2}}{N + Z} \quad (81)$$

Der letzte Bruch, der stets kleiner als 1 ist, stellt wieder die Entlastung der Randkräfte dar, die weiter erhöht wird durch die Bedingung  $\psi_r > 0$  aus Gleichung (80).

Beim nicht-achsensymmetrisch belasteten Zylinder treten zu den bisherigen Verbesserungen  $\Delta \varepsilon_{\varphi}^*$  und  $\Delta b_x$  zwei weitere  $\Delta v_x^*$  und  $\Delta s_x$ . Die Gleichungen (74) bis (77) bleiben bestehen, nur daß auf die linke Seite von Gleichung (74) ein Zusatzglied  $+\Delta s_x \cdot \eta$  tritt (vgl. Abb. 9), das jedoch wegen seiner Kleinheit oft wird vernachlässigt werden können. Die Verbesserung  $\Delta \varepsilon_{\varphi}^*$  ist durch die Wirkung der Randkräfte auf das Spant bestimmt. Der Anteil der in ihm hervorgerufenen Normalkräfte  $N$  ergibt sich unmittelbar zu  $\frac{N}{EF}$ . Für die Biegemomente sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn sich Spantschwerlinie und Mittelfläche decken ( $\eta = 0$ ), dann muß  $\Delta \varepsilon_{\varphi M}^*$  für die Schale verschwinden, da ihre Dicke hinreichend klein ist. Die Biegungsformänderungen  $\frac{w}{a}$  und  $\frac{v}{a}$  des Spantes macht die Mittelfläche der Schale also dehnungslos mit. Sie genügen den Bedingungen

$$\frac{u'}{a} = 0, \quad \frac{w}{a} = -n \frac{v}{a}, \quad \frac{v'}{a} = n \frac{u}{a} \quad (82)$$

Die Spannungsmomente dieser dehnungslosen Deformation sind durch die Gleichungen (12<sub>4 bis 7</sub>) gegeben, wenn darin nach Gleichung (20)

$$a \kappa_w = 0, \quad a \kappa_\varphi = - (n^2 - 1) \frac{w}{a}, \quad a \tau = - \frac{n^2 - 1}{n} \frac{w'}{a} * \quad (83)$$

Bezüglich des näheren Spannungsverlaufs wird auf Love verwiesen. Im vorliegenden Falle können wir uns auf die Kenntnis der Biegemomente am Rande beschränken, welche durch die Verschiebungen  $\frac{w}{a}$  des Spantes beschrieben sind, während von einer Betrachtung der Rückwirkung der kleinen Torsionsmomente auf das Spant abgesehen werden kann. Erleiden zwei benachbarte Spante gleiche Verschiebungen, dann wird für das zwischen diesen liegende Schalenstück  $\frac{w'}{a} = 0$  und die Torsionsmomente verschwinden. Liegen Spantschwerlinie und Mittelfläche im Abstand  $\eta$  voneinander (vgl. Abb. 10), dann nimmt der Schalenrand außerdem an den Biegungsdehnungen des Versteifungsringes teil, und zwar ist

$$\Delta \varepsilon_{\varphi M}^* = \frac{M \eta}{E J}, \quad (84)$$

wenn zubiegende Momente positiv sind und  $J$  das Trägheitsmoment des Spantes einschließlich des Schalenstreifens bedeutet.  $\frac{w}{a}$  bleibt dabei gleich Null, so daß nach Gleichung (20)

$\frac{v}{a} = - \frac{\Delta \varepsilon_{\varphi M}^*}{n}$  ist. Dasselbe gilt, da die Betrachtung der dehnungslosen Deformation abgesehen wird, für den Einfluß der Normalkraft, so daß die Verbesserung der Verschiebung  $\frac{v}{a}$  gegeben ist durch

$$\Delta \frac{v}{a} = - \frac{\sigma^*}{n E}, \quad (85)$$

wobei  $\sigma^*$  die Spannung der in der Mittelfläche liegenden Faser des Spantquerschnittes bedeutet. Im Rahmen der getrennten Behandlung von Haupt- und Randkräften wird diese Verbesserung gleichzeitig durch  $\Delta \varepsilon_{\varphi}^*$  in den Gleichungen (76) u. (77) erreicht, so daß für die Ermittlung der Randkonstanten die Gleichungen (8<sub>3</sub>) und (8<sub>4</sub>) der partikulären Lösung erhalten bleiben. Aus (8<sub>1</sub>) und (8<sub>2</sub>) folgt das letzte Gleichungspaar zur Bestimmung der insgesamt 8 Konstanten am Trennungsspant

$$s_{x_r} = s_{x_l} - \Delta s_x, \quad \frac{u}{a_l} = - \frac{u}{a_r}. \quad (86) \text{ u. } (87)$$

Strenggenommen setzen sich  $s_x$  und  $\frac{u}{a}$  aus den zwei Teillösungen zusammen. Für die Näherung genügt jedoch der Ansatz des partikulären Teils allein, um so mehr als es sich um die Betrachtung kleiner Nebeneinflüsse handelt. Für  $n = 1$  tritt außerdem keine Verwindung des Spantes ein, so daß hier die ursprünglichen Gleichungen (8) gelten. Bei  $\frac{u}{a_r}$  steht in Gleichung (87) ein negatives Vorzeichen, da die Abszisse  $\xi$  nach beiden Seiten positiv gerechnet wird. Zur Auflösung der 8 Randbedingungen fehlen noch die Beziehungen zwischen  $\Delta s_x$ ,  $\Delta b_x$  und den Verschiebungen  $\frac{u}{a}$  und  $\vartheta$ . Wenn für die Verwindung Proportionalität zwischen Kräften und Verschiebungen angenommen wird<sup>1</sup>, dann bestehen die Bedingungen

$$\Delta s_x \delta_{11} + \Delta b_x \delta_{21} = \frac{u}{a_r}, \quad (88)$$

$$\Delta s_x \delta_{21} + \Delta b_x \delta_{22} = \vartheta_r. \quad (89)$$

\* Diese Werte gelten auch für  $n = 0$ . (Vgl. Pöschl und Terzaghi, a. a. O. S. III.)

<sup>1</sup> Vgl. Love-Timpe, a. a. O., Kap. XVIII.

Die Größen  $\delta$  stellen, wie üblich, Verschiebungen aus den Kraftwirkungen von bzw.  $\Delta s_x$  und  $\Delta b_x$  gleich der Einheit und in Richtung von bzw.  $\Delta s_x$  und  $\Delta b_x$  dar. Da die Gleichungen den Ansätzen (16) genügen müssen, definieren wir  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{21}$  und  $\delta_{22}$  als die Verschiebungen, welche aus den Kraftwirkungen  $\Delta s_x = r \cdot \cos n \varphi \text{ t/cm}$  und  $\Delta b_x = r \cdot \cos n \varphi \text{ tcm/cm}$  im vorher bezeichneten Sinne überall dort entstehen, wo  $\cos n \varphi = 1$  ist. Diese Annäherung an die wirkliche Verwindungslinie durch eine Kurve von  $\cos n \varphi$ -förmigen Verlauf ist ohne weiteres zulässig, da es sich nur um Betrachtung von Nebenkräften bei einer Belastung des Ansatzes  $n > 1$  handelt. Die Einflußzahlen  $\delta$  werden nach den üblichen Methoden ermittelt<sup>1</sup>. Die Konstanten aus Haupt- und Randlösung sind nach den vorstehenden Gleichungen miteinander verknüpft, so daß bei Spantnachgiebigkeit ihre getrennte Ermittlung nicht mehr möglich ist. Auch  $\Delta \varepsilon_\varphi^*$  bringt aus der Wirkung der Randkräfte  $t_{0l}$  und  $t_{0r}$  die Konstanten  $c_{1l}$  und  $c_{1r}$  in die Randlösung mit, die für  $n = 1$  jedoch nach den Ausführungen des Abschnittes D. 3 nicht in Erscheinung treten. Durch Elimination der Konstanten werden zwei transzendente Gleichungen für  $\psi_l$  und  $\psi_r$  gefunden, deren Lösungen wieder zwischen  $-\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4}$  liegen müssen.

Dieser Weg ist außerordentlich umständlich und würde die Aufgabe eines wesentlichen Vorteils der Näherungslösung bedeuten. Man wird deshalb im allgemeinen auf eine genaue Lösung verzichten und den Einfluß der Spantnachgiebigkeit schrittweise ermitteln. Es wird dabei von dem auf S. 43 unter c) beschriebenen Grenzfall ausgegangen. Das Spant ist gegen Verwinden zunächst starr, so daß  $\frac{u}{a_l} = -\frac{u}{a_r} = 0$  und  $\vartheta_l = -\vartheta_r = 0$  wird ( $n > 1$ ).  $\vartheta_l$  und  $\vartheta_r$  enthalten beide Lösungsteile. Mit Hilfe dieser Bedingungen findet man eine auf das Spant wirkende Differenzkraft  $(\Delta s_x)_1$  und ein Differenzmoment  $(\Delta b_x)_1$ , in denen die Nachgiebigkeit in der Ringebene  $\Delta \varepsilon_\varphi^*$  schon berücksichtigt werden kann. Die Wirkung auf den jetzt elastisch gedachten Ring äußert sich durch Formänderungsgrößen  $(\Delta \frac{u^*}{a})_1$  und  $(\Delta \vartheta^*)_1$ , die aus den Gleichungen (88) und (89) ermittelt werden. Damit berechnet man aus  $\frac{u}{a_l} = -\frac{u}{a_r} = (\Delta \frac{u^*}{a})_1$  und  $\vartheta_l = -\vartheta_r = (\Delta \vartheta^*)_1$  neue Differenzkräfte und -momente, die bis zu genügender Genauigkeit wie vorher weiterbehandelt werden<sup>2</sup>. Die Größe der Spantnachgiebigkeit ist bei nicht-achsensymmetrischer Belastung, wie aus den Entwicklungen hervorgeht, sowohl von der Steifigkeit als auch von der Spannweite  $l$  abhängig.

Läuft eine bezüglich der  $x$ -Achse gleichförmig belastete Zylinderschale gleicher Wandstärke über gleich große Stützweiten durch, dann erleidet ein Trennungsspant keine Verdrehungen, selbst wenn die Nachgiebigkeit der ihm benachbarten Spante in der Ringebene verschieden ist. Denn auch die kleinen Momente aus der dehnungslosen Deformation  $b_{x0} = -D \nu \kappa_\varphi = \frac{\nu D}{a} (n^2 - 1) \left(\frac{w}{a}\right)_0$  werden zu beiden Seiten des Ringes gleich groß.

## 2. Biegemomente und Längskräfte bei beliebig gelagertem, verwindungsfreiem Spant.

Die Untersuchungen des vorhergehenden Abschnittes haben gezeigt, daß der Spantnachgiebigkeit innerhalb der Ringebene besonders im an sich verwindungsfreien Fall  $n = 1$  erhöhte Bedeutung zukommt. Die Ermittlung der charakteristischen Größe  $\Delta \varepsilon_\varphi^*$ , die durch die Normalkräfte und Momente im Spantquerschnitt bestimmt ist, bietet keine neuartigen Schwierigkeiten. Es sei jedoch auf Grund von praktisch durchgeführten Beispielen der gangbarste Weg zur Ermittlung von Längskräften und Biegemomenten gegeben.

<sup>1</sup> Siehe u. a. Müller-Breslau, Neuere Methoden, Leipzig 1913; St. Heßler, Beton und Eisen (1927) H. 23.

<sup>2</sup> Die Verschiebungen eines Trennungsspantes zählen im Sinne der links liegenden Schale positiv.

Das Spant sei nach Abb. 11 beliebig gelagert. An den  $r$  Auflagern können im Höchstfall je drei Komponenten der Lagerkräfte auftreten, entsprechend  $Y_r, \chi$  und  $\epsilon$ . Die Auflagerkräfte sind mit der Resultante der Belastung im Gleichgewicht. Das System ist also äußerlich  $3(r-1)$ -fach statisch unbestimmt. Wie die Zerlegung der Auflagerresultanten in zwei Kraftkomponenten  $Y_{ra}$  und  $Y_{rb}$  und in ein Moment  $Y_{rc}$  erfolgt, richtet sich nach den Erfordernissen der Aufgabe. Bei Symmetrie vermindert sich die Zahl der Unbekannten auf die Hälfte. Im Spantring selbst treten drei innere statisch Unbestimmte  $X_a, X_b$  und  $X_c$  auf, wie sie in Abb. 9 dargestellt sind. Sie werden als Hauptsystem betrachtet, dem die  $Y$  überlagert werden. Die  $X$  sind so gewählt, daß  $\delta_{ab} = \delta_{ac} = 0$  wird. Die drei Komponenten der Auflagerkräfte  $Y$ , die durch das äußere Gleichgewicht bestimmt sind, seien mit  $A, B, C$  bezeichnet.

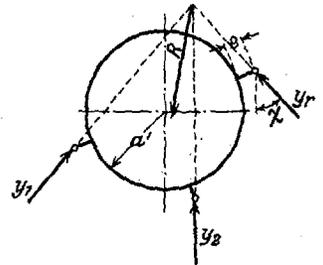


Abb. 11. Beliebige gelagerter Verstärkungsring

Bei verwickelter Lagerung, wie sie in Schiffskörpern<sup>1</sup> und Docks vorkommen kann, führt die Anwendung von Verschiebungsplänen am schnellsten zum Ziel. Es ist dabei jedoch eine hohe Zeichengenauigkeit erforderlich. Die Verschiebungspläne für  $X$  wird man am besten nach rechnerischen Werten auftragen bzw. konstruieren, da der Ersatz auch kurzer Bogenteile des Stabes durch Gerade zu große Fehler in die Berechnung der  $Y$  mitbringt. Es läßt sich zeigen, daß die Normalenzüge<sup>2</sup> durch einfache Kurven dargestellt sind. Wählt man Punkt  $o$  der Abb. 9 zum Bezugspunkt der Verschiebungen und bezeichnet man mit  $\delta_{\varphi a}^{\downarrow}$  und  $\delta_{\varphi a}^{\rightarrow}$  die Verschiebungen eines beliebigen Punktes  $\varphi$  aus der Kraftwirkung  $a$  und nach den angegebenen Richtungen, dann beschreiben die  $\delta$ -Werte den Normalenzug für  $X_a$ . Nach bekannten Sätzen der Statik findet man, wenn  $\psi$  die einem konstanten  $\varphi$  zugeordnete laufende Koordinate ist,

$$EJ \delta_{\varphi a}^{\uparrow} = a'^3 \int_0^{\varphi} \cos \psi (\sin \varphi - \sin \psi) d\psi = a'^3 [\sin^2 \varphi - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi)]$$

$$= \frac{a'^3}{4} (1 - \cos 2\varphi), \tag{90_1}$$

$$EJ \delta_{\varphi a}^{\rightarrow} = a'^3 \int_0^{\varphi} \cos \psi (\cos \varphi - \cos \psi) d\psi = \frac{a'^3}{4} (\sin 2\varphi - 2\varphi). \tag{90_2}$$

Der Normalenzug ist durch eine gemeine Zykloide nach Abb. 12 dargestellt. Der Rollkreis hat den Halbmesser  $\frac{a'^3}{4}$ . Jedoch entspricht dem Winkel  $\varphi$  des Ringes der doppelte

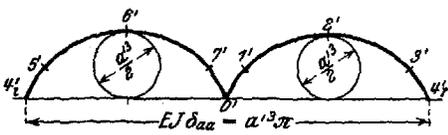


Abb. 12. Normalenzug für  $X_a = -1t$ .

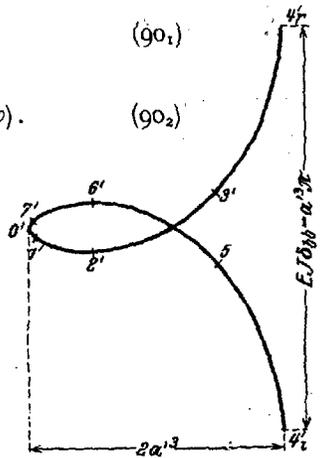


Abb. 13. Normalenzug für  $X_b = -1t$ .

Winkel des Rollkreises, der sich deshalb zweimal abwälzt. Für die Unbekannte  $X_b$  findet sich entsprechend

<sup>1</sup> Siehe Anm. 3 auf S. 22. Die Kenntnis der Normalkräfte und Biegemomente ist natürlich vor allem zur Bemessung der Spante selbst notwendig.

<sup>2</sup> Auf die Theorie der Verschiebungspläne kann hier nicht weiter eingegangen werden. Es wird auf entsprechende Lehrbücher verwiesen, z. B. Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, 2. Aufl., Leipzig 1925.

$$EJ \delta_{\varphi b}^{\downarrow} = -a'^3 \int_0^{\varphi} \sin \psi (\sin \varphi - \sin \psi) d\psi = \frac{a'^3}{2} [\varphi - \sin \varphi (2 - \cos \varphi)], \quad (91_1)$$

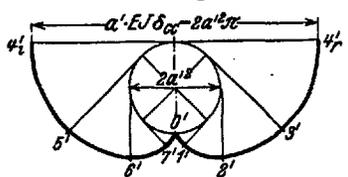
$$EJ \delta_{\varphi b}^{\rightarrow} = a'^3 \int_0^{\varphi} \sin \psi (\cos \varphi - \cos \psi) d\psi = \frac{a'^3}{2} (1 - \cos \varphi)^2. \quad (91_2)$$

Diese Kurve ist in Abb. 13 dargestellt. Sie gleicht einer verschlungenen Zykloide, eine Konstruktion für sie läßt sich jedoch nicht angeben. Die Verschiebungen zum Normalenzug für  $X_c$  lauten

$$EJ \delta_{\varphi c}^{\uparrow} = a'^2 \int_0^{\varphi} (\sin \varphi - \sin \psi) d\psi = a'^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1), \quad (92_1)$$

$$EJ \delta_{\varphi c}^{\rightarrow} = a'^2 \int_0^{\varphi} (\cos \psi - \cos \varphi) d\psi = a'^2 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \quad (92_2)$$

Diese Werte stellen die Evolvente des Kreises vom Halbmesser  $a'^2$  dar. Jede Kreishälfte muß für sich abgewickelt werden, wie dies in Abb. 14 dargestellt ist<sup>1</sup>. Mit Hilfe dieser



Verschiebungspläne findet man die Unbestimmten  $X$  bei Berücksichtigung des Maxwell'schen Satzes, ebenso die Momente infolge der äußeren Unbestimmten  $Y = -1 \tau$ . Durch Zeichnen weiterer Verschiebungspläne für  $Y$  oder auf rechnerischem Weg erhält man weiterhin diese Größen selbst und damit auch die endgültigen Normalkräfte und Momente im Spantring.

Abb. 14. Normalenzug für  $X_c = -1 \tau$ .

Zur Einführung in die Schalengleichungen müssen diese Größen in Fouriersche Reihen entwickelt werden, was nach bekannten Verfahren zu geschehen hat.

### 3. Das im tiefsten Punkt gestützte Spant bei Wasserlast und Eigengewicht ( $n = 1$ ).

Wie früher schon hervorgehoben wurde, kommt dem Belastungszustand der Schale für  $n = 1$  erhöhte Bedeutung zu. Auch für die Nachgiebigkeit der Spante trifft dies zu. Für alle  $n > 1$  ist bekanntlich die Belastung im Gleichgewicht (Abb. 3); nur für den Fall  $n = 1$  tritt eine Reaktion auf, deren Einfluß auf Normalkräfte und Biegemomente im Spantring bei weitem überwiegt. Wir stellen uns im folgenden die Belastung  $n = 1$  als Wasserlast oder Eigengewicht vor. Die Reaktion am Spant sei in dessen tiefstem Punkt vereinigt. Beispiele für solche Lagerung sind das auf Sätteln gelagerte Druckrohr oder das Maschinenspant eines U-Bootes. In Wirklichkeit treten die Lagerkräfte nicht punktförmig, sondern mehr oder weniger verteilt auf. Dadurch, daß für die Anwendung auf die Schale zur Entwicklung in Reihen notwendig ist, kommt man durch die Näherung mehr an den tatsächlichen Kräfteverlauf heran.

Die am Spant angreifenden Schalenrandkräfte (Abb. 9) lauten nunmehr

$$n_{x_0} = \bar{n}_{x_0} \cos \varphi, \quad t_{x_0} = \bar{t}_{x_0} \sin \varphi, \quad d_{x_0} = \bar{d}_{x_0} \sin \varphi.$$

An Stelle der überstrichenen Werte wird weiterhin  $n_0$ ,  $t_0$  und  $d_0$  gesetzt. Bei Ermittlung der statisch Unbestimmten werden nur die Momente berücksichtigt.  $\psi$  ist die laufende Koordinate bei festgehaltenem  $\varphi$ . Die übrigen Bezeichnungen sind die in der Statik unbestimmter Systeme gebräuchlichen. Zubiegende Momente sind wiederum positiv angesetzt.

<sup>1</sup> Die Verschiebungspläne Abb. 12 u. 13 sind für gleiches  $a'$ , Abb. 14 ist in halbem Maßstab gezeichnet.

Die Momente im statisch bestimmten Grundsystem lauten

a) aus  $n_0 \cos \psi$

$$\mathfrak{M}_0 = - \int_{\varphi}^{\pi} n_0 \cos \psi \cdot a' \sin (\psi - \varphi) a d \psi = n_0 \frac{a a'}{2} (\pi - \varphi) \sin \psi,$$

b) aus  $t_0 \sin \psi$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 &= \int_{\varphi}^{\pi} t_0 \sin \psi [a - a' \cos (\psi - \varphi)] a d \psi \\ &= t_0 a^2 [\text{I} + \cos \varphi - \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi] + t_0 \frac{a \eta}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi, \end{aligned}$$

c) aus  $d_0 \sin \psi$

$$\mathfrak{M}_0 = - \int_{\varphi}^{\pi} d_0 \sin \psi a d \psi = - d_0 a (\text{I} + \cos \varphi).$$

Die Verrückungen aus der Belastung finden sich

a) aus  $n_0 \cos \varphi$

$$E J \frac{\delta_{0a}}{2} = \int_0^{\pi} \mathfrak{M}_0 M_a a' d \varphi = - n_0 \frac{a a'^3}{2} \int_0^{\pi} (\pi - \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d \varphi = - n_0 \frac{a a'^3 \pi}{8},$$

$$E J \frac{\delta_{0c}}{2} = \int_0^{\pi} \mathfrak{M}_0 M_c a' d \varphi = - n_0 \frac{a a'^2}{2} \int_0^{\pi} (\pi - \varphi) \sin \varphi d \varphi = - n_0 \frac{a a'^2 \pi}{2},$$

b) aus  $t_0 \sin \varphi$

$$\begin{aligned} E J \frac{\delta_{0a}}{2} &= - t_0 a^2 a'^2 \int_0^{\pi} [\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi \cos \varphi] d \varphi - t_0 \frac{a a'^2 \eta}{2} \int_0^{\pi} (\pi - \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d \varphi \\ &= - t_0 a a'^3 \frac{3\pi}{8} - t_0 a a'^2 \eta \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E J \frac{\delta_{0c}}{2} &= - t_0 a^2 a' \int_0^{\pi} [\text{I} + \cos \varphi - \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi] d \varphi - t_0 \frac{a a' \eta}{2} \int_0^{\pi} (\pi - \varphi) \sin \varphi d \varphi \\ &= - t_0 a a'^2 \frac{\pi}{2} - t_0 a a' \eta \pi, \end{aligned}$$

c) aus  $d_0 \sin \varphi$

$$E J \frac{\delta_{0a}}{2} = + d_0 a a'^2 \int_0^{\pi} (\text{I} + \cos \varphi) \cos \varphi d \varphi = d_0 a a'^2 \frac{\pi}{2},$$

$$E J \frac{\delta_{0c}}{2} = + d_0 a a' \int_0^{\pi} (\text{I} + \cos \varphi) d \varphi = d_0 a a' \pi.$$

Die Verschiebungen  $\delta_{0b}$  und deshalb auch  $X_b$  sind aus Symmetriegründen gleich Null. Die Verschiebungen aus den Kraftwirkungen  $X_a = - \text{I} t$  und  $X_c = - \text{I} t m$  ergeben sich aus den Gleichungen (90) und (92) für  $\varphi = 2 \pi$ . Der Wert  $\delta_{0c}$  muß als Verdrehung noch durch  $a'$  geteilt werden. Es ist, wenn wie oben der Wert für eine Hälfte angeschrieben wird,

$$E J \frac{\delta_{0a}}{2} = \frac{a'^3 \pi}{2}, \quad E J \frac{\delta_{0c}}{2} = a' \pi, \quad \delta_{0c} = \delta_{ca} = 0.$$

Die statisch Unbestimmten lauten

$$X_a = -n_0 \frac{a}{4} - t_0 \left( \frac{3a}{4} + \frac{a\eta}{a'} \right) + d_0 \frac{a}{a'}, \quad (93_1)$$

$$X_c = -n_0 \frac{a a'}{2} - t_0 a \left( \frac{a'}{2} + \eta \right) + d_0 a. \quad (93_2)$$

Die Momente im geschlossenen Ring sind sonach

a) aus  $n_0 \cos \varphi$

$$M = n_0 \frac{a a'}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi - n_0 \frac{a a'}{4} \cos \varphi - n_0 \frac{a a'}{2} = -n_0 \frac{a a'}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right],$$

b) aus  $t_0 \sin \varphi$

$$M = t_0 a^2 \left[ 1 + \cos \varphi - \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right] + t_0 \frac{a \eta}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi - \frac{3}{2} t_0 a a' \cos \varphi - t_0 a \eta \cos \varphi - t_0 \frac{a a'}{2} - t_0 a \eta = t_0 \frac{a a'}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right],$$

c) aus  $d_0 \sin \varphi$

$$M = -d_0 a (1 + \cos \varphi) + d_0 a \cos \varphi + d_0 a = 0.$$

Das Moment im Spant läßt sich zu folgendem einfachen Ausdruck zusammenfassen

$$M = (t_0 - n_0) \frac{a a'}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right]. \quad (94)$$

Bezeichnet man mit  $A$  den nach oben gerichteten positiven Auflagerdruck in Punkt  $o$ , dann besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$- \int_0^{2\pi} t_0 \sin^2 \varphi a d\varphi + \int_0^{2\pi} n_0 \cos^2 \varphi a d\varphi = A$$

oder

$$t_0 - n_0 = - \frac{A}{a\pi}. \quad (95)$$

Die Biegungsbeanspruchungen im Spantring sind demnach von den Randkräften vollkommen unabhängig, auch wenn die Belastungskomponenten beliebige Funktionen von  $\xi$  sind. Diese Erkenntnis ist gleichbedeutend damit, daß für den Spantquerschnitt hier nicht mit der im Schiff- und Dockbau oft in Rechnung gestellten mitwirkenden Plattenbreite gerechnet werden darf. Auch die dehnungslose Deformation bringt für  $n = 1$  zufolge  $M = 0$  aus  $d_0 \sin \varphi$  nur den geringen Einfluß der Normalkraft  $N = -d_0 \frac{a}{a'} \cos \varphi$ , der für gleiche Formänderungen der Nachbarspante  $\left( \frac{w'}{a} = 0 \right)$  wieder fortfällt. Für Wasserlast erhält man bei durchlaufendem Rohr mit gleichem Stützabstand

$$M = -\frac{1}{2} \gamma a^2 a' l \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right], \quad (94a)$$

für Eigengewicht

$$M = -\gamma_m h a a' l \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right]. \quad (94b)$$

Die Normalkräfte im geschlossenen Ring finden sich

a) aus  $n_0 \cos \varphi$

$$N = n_0 \frac{a}{4} \cos \varphi + \int_{\varphi}^{\pi} n_0 \cos \psi \sin (\psi - \varphi) a d\psi = n_0 \frac{a}{4} \cos \varphi - n_0 \frac{a}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi,$$

b) aus  $t_0 \sin \varphi$

$$N = t_0 \left( \frac{3}{4} a + \frac{a \eta}{a'} \right) \cos \varphi + \int_{\varphi}^{\pi} t_0 \sin \psi \cos (\psi - \varphi) a d\psi = t_0 \left( \frac{3}{4} a + \frac{a \eta}{a'} \right) \cos \varphi + t_0 \frac{a}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi,$$

c) aus  $d_0 \sin \varphi$

$$N = -d_0 \frac{a}{a'} \cos \varphi.$$

Der Gesamtausdruck für die Normalkraft lautet mit diesen Werten

$$N = -\frac{a}{a'}(d_0 - a t_0) \cos \varphi - (t_0 - n_0) \frac{a}{2} [\frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi]. \quad (96)$$

Die zur Beurteilung der Spantnachgiebigkeit charakteristische Größe  $\Delta \varepsilon_\varphi^*$  muß zum Einsetzen in die Schalengleichungen in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden. Sowohl bei  $M$  wie  $N$  steht die Funktion

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi.$$

Die Koeffizienten der Reihe findet man zu

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = -1,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos 2\varphi d\varphi = \frac{2}{3}, \quad b_1 = b_2 = b_n = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos 3\varphi d\varphi = \frac{1}{4},$$

$$a_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos 4\varphi d\varphi = \frac{2}{15}, \text{ usw.}$$

Man erkennt das Bildungsgesetz der weiteren Beiwerte

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1}.$$

Setzt man in  $N$  und  $M$  und weiterhin in  $\Delta \varepsilon_\varphi^*$  ein, dann ergibt sich

$$E \Delta \varepsilon_\varphi^* = \frac{N}{F} + \frac{M \eta}{J} = -\frac{A}{2\pi F} - (d_0 - a t_0) \frac{a}{a' F} \cos \varphi - \sum_2^n \frac{A \left( \frac{a' \eta}{i^2} - 1 \right)}{(n^2-1) \pi F} \cos n \varphi, \quad (97)$$

worin  $i$  den Trägheitsradius des Spants bedeutet, dem auch der zwischen den Anschlußgrößtkreisen liegende Teil der Schale hinzuzurechnen ist. Der auf den Versteifungsring unmittelbar entfallende Belastungsanteil ist in  $A$  schon enthalten. Der Einfluß der Spantverbiegung tritt nur im Summenglied auf. Er überwiegt stark gegen den der Normalkräfte, da  $\frac{a' \eta}{i}$  stets groß gegen 1 ist. Die ersten Glieder der Summe sind daher auch noch größer, als die beiden ersten nur von der Normalkraft abhängigen Ausdrücke. Selbst bei stark gedrunenem Querschnitt wird im allgemeinen  $\frac{a' \eta}{i} > 10$ , so daß für  $\varphi = 0$  das erste Glied der Gleichung (97) dann nur von der Größenordnung des Summenglieds für  $n = 5$  ist. Die Spantnachgiebigkeit wirkt bei achsenunsymmetrischer Belastung der Zylinderschale ungünstig auf die Randspannungen, wenn der Versteifungsring innerhalb, günstig, wenn er außerhalb des Rohres liegt ( $\eta$  negativ). Die Randdehnung  $\Delta \varepsilon_\varphi^*$  hängt mit Ausnahme des zweiten Gliedes nur von der äußeren Belastung ab. Dadurch wird der Rechnungsgang wesentlich vereinfacht. Die Randspannungen für die Fälle  $n = 0$  und  $n > 1$  lassen sich ohne weiteres angeben, da sie nur von dem entsprechenden  $(\Delta \varepsilon_\varphi^*)_n$  abhängen, also die

Kenntnis der endgültigen Spannungen nicht voraussetzen.  $d_0$  und  $t_0$  sind vermöge der Gleichungen (21) und der partikuläre Anteil für  $t_0$  aus Gleichung (43) bekannt. Die so gewonnenen Größen sind in ihrer Wirkung auf das Spant negativ anzusetzen. Beim Einsetzen der Formänderungsgrößen in die Gleichungen (21) können die Randbedingungen gleich berücksichtigt werden. Der Zustand  $n = 1$  nimmt also bei Berücksichtigung der Spantnachgiebigkeit, wie auch sonst immer, eine Sonderstellung ein. Die Unbekannte  $C_{n=1}$  tritt hier auch in dem Verbesserungsglied  $(\Delta \varepsilon_{\varphi}^*)_{n=1}$  auf. Mit ihrer Auffindung ist der endgültige Spannungszustand beschrieben.

Wie schon früher erwähnt, beschreiben die Durchbiegungen des Spantes  $\frac{v}{a}$  und  $\frac{w}{a}$  eine dehnungslose Deformation der Schale, deren Spannungsmomente durch die Gleichungen (12<sub>4 bis 7</sub>) und (83) gegeben sind. Das Moment  $b_{\varphi}$  am Rande ist unmittelbar durch  $\frac{w}{a}$  des Spantes bestimmt. Außerdem können die Größen  $\frac{v}{a}$  und  $\frac{w}{a}$  bei Berechnung äußerer statisch Unbestimmter vorteilhaft verwendet werden. Sie seien deshalb nachstehend wiedergegeben.

Die Unbekannten finden sich in üblicher Weise durch Ausführen der Integrationen

$$EJ \frac{v}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\pi} M M_v a' d\psi, \quad EJ \frac{w}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\pi} M M_w a' d\psi,$$

worin  $M_v$  und  $M_w$  die Momente bedeuten, welche von symmetrisch gelegenen und in Richtung von  $+\frac{v}{a}$  und  $+\frac{w}{a}$  wirkenden Kräften gleich 1 t verursacht sind. Nach Ausführung der umfangreichen Rechnung, von deren Wiedergabe abgesehen wird, erhält man

$$EJ \frac{v}{a} = \frac{A a'^3}{2 a \pi} \left[ (\pi - \varphi) (1 - \cos \varphi) - \frac{\varphi}{4} (2\pi - \varphi) \sin \varphi \right], \quad (98)$$

$$EJ \frac{w}{a} = \frac{A a'^3}{2 a \pi} \left[ (1 - \cos \varphi) - \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi + \frac{\varphi}{4} (2\pi - \varphi) \cos \varphi \right]. \quad (99)$$

Die Entwicklung in Fouriersche Reihen führt zu

$$EJ \frac{v}{a} = \frac{A a'^3}{2 a \pi} (-0,270 \sin \varphi + 0,111 \sin 2 \varphi + 0,0104 \sin 3 \varphi + \dots), \quad (100)$$

$$EJ \frac{w}{a} = \frac{A a'^3}{2 a \pi} (0,270 \cos \varphi - 0,222 \cos 2 \varphi - 0,0312 \cos 3 \varphi + \dots), \quad (101)$$

Man erkennt hieraus unmittelbar, daß die Durchbiegungen des Versteifungsringes die Bedingung einer spannungslosen Deformation der Schale, nämlich  $\frac{w}{a} = -n \frac{v}{a}$ , erfüllen. Dies ist zugleich ein Beweis für die Fehlerlosigkeit der ausgeführten Rechnung. Zu beachten ist, daß infolge der früheren Festlegung der positiven Richtung von  $A$  die Verschiebungen im umgekehrten Sinne positiv zählen, wie bei der Schale.

## E. Rechnungsbeispiele.

### 1. Zylinder eines Hebeschiffs.

Als erstes Rechnungsbeispiel wird der Zylinder eines Hebeschiffs nach dem eingangs erwähnten Patent gewählt, da er in seinen Ausmaßen bedeutend über gebräuchliche Größen hinausgeht. Mit den bisherigen Bezeichnungen sind folgende Abmessungen gegeben

$$\frac{h}{a} = \frac{2,6}{750} = 0,003465, \quad k = 910000, \quad l = 240 \text{ cm.}$$

Die Beanspruchungen des Zylinders bei 5 at innerem Überdruck und aus Wasserlast sind nachzuweisen.

Man überzeugt sich nach Gleichung (73), daß trotz des verhältnismäßig sehr kurzen Spantabstandes die Näherung zulässig ist; denn es ist

$$\frac{l}{a} = \frac{240}{750} = 0,320 > \frac{9}{\sqrt[4]{k}} = 0,292.$$

Aus gleichmäßigem Druck ergibt sich in Zylindermitte

$$\sigma_{\varphi} = \frac{5,0 \cdot 750}{2,6} = 1440 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zur Berechnung der Randkräfte notwendige Dehnung ist bei starrem Spant

$$E \varepsilon_{\varphi}^* = 1440 \text{ kg/cm}^2.$$

Während die Konstante  $\psi = 0$  ist (Einspannung), erhält man für  $C$  die Gleichung nach Tabelle 3

$$E \varepsilon_{\varphi} = EC \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt[4]{k}} = -1440 \quad \text{und} \quad EC = -62700.$$

Die größten Spannungen treten am Rande auf und sind

$$b_x = EC \frac{a h}{k^{3/4}} \cos \frac{\pi}{4} = -62700 \frac{750 \cdot 2,6}{29500 \cdot \sqrt{2}} = -2940 \text{ kgcm/cm},$$

$$\sigma_{b_x} = \pm \frac{2940 \cdot 6}{2,6^2} = \pm 2600 \text{ kg/cm}^2,$$

$$s_x = 0, \quad n_x = -\frac{EC h}{\sqrt{k'}} = \frac{62700 \cdot h}{954} = 65,8 \cdot h, \quad \tau_{x_{\text{mittel}}} = 65,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Für Wasserlast erhält man bei Benutzung von Tabelle 2 und 3

$$\mu_1 = 21,80, \quad \mu_2 = 21,82,$$

$$EC \varrho_2 = -E \varepsilon_{\varphi}^* = -(\sigma_{\varphi} - \nu \sigma_x),$$

wenn hierunter die Spannungen der biegungsfreien Schale verstanden sind, also mit Fortlassen von  $\cos \varphi$

$$\sigma_{\varphi} = \gamma \frac{a^2}{h} = \frac{750^2}{1000 \cdot 2,6} = 216 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_x = -\frac{\gamma a^2}{h} \left[ \frac{1}{12} \frac{l^2}{a^2} - \nu \right] = -216 [0,00852 - 0,3] = 63 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Spantabstände sind so klein, daß bei  $\sigma_x$  der Einfluß der Querdehnung über die Hauptbiegungsspannungen überwiegt.

$$EC = -\frac{(216 - 0,3 \cdot 63) \cdot 954}{21,80} = -8610 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit erhält man an der ungünstigsten Stelle ( $\varphi = 0, \xi = 0$ )

$$b_x = + EC \frac{a h}{k} \mu_1 \left( 1 + \frac{\nu}{\sqrt{k}} \right) = -8610 \frac{750 \cdot 2,6 \cdot 21,80}{910000} \left( 1 + \frac{0,3}{954} \right) = -403 \text{ kgcm/cm},$$

$$\sigma_{b_x} = \pm 357 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_x = 63 + \frac{8610 \cdot 21,80}{910000} = 63,2 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau_{x_{\text{mittel}}} = \frac{8610 \cdot \sqrt{910000 - 4}}{910000} = 9 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Zusammensetzung der Spannungen ergibt in Mitte Zylinder

$$\sigma_{\varphi_{\max}} = 1440 + 216 = 1656 \text{ kg/cm}^2,$$

am Rande

$$\sigma_{\alpha_{\max}} = 2600 + 357 + 63,2 = 3020 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist St. 48 verwandt, so daß die Spannungen noch zulässig sind. Schon für

$$x = \frac{\pi}{4\mu} a = 25,8 \text{ cm}$$

vom Rande werden die Spannungen zum ersten Male Null.

Es soll noch gezeigt werden, wie stark der Einfluß der Spantnachgiebigkeit für gleichmäßigen Druck ist. Nachgiebigkeit für Wasserlast kann vernachlässigt werden, da es sich beim Hebeschiff um sehr biegungssteife Spante handelt. Die Biegungsspannung wird im Verhältnis zu  $C$  kleiner und damit nach Gleichung (79) mit dem Ausdruck

$$\frac{1 - \frac{b h}{F}}{1 + \frac{2\sqrt{2} a h}{F\sqrt[4]{h}}} = \frac{1 - \frac{19,5 \cdot 2,6}{330}}{1 + \frac{2\sqrt{2} \cdot 750 \cdot 2,6}{330 \cdot 30,82}} = 0,55,$$

wenn  $b = 19,5$  cm die Breite und  $F = 330 \text{ cm}^2$  der Querschnitt eines durchgerechneten Spantes sind. Es tritt eine Entlastung von 45% ein. Nunmehr ist die Schale auch noch imstande, die von den Deckelböden herrührende Längsspannung  $\frac{\rho a}{b h} = 720 \text{ kg/cm}^2$  aufzunehmen. Die Gesamtspannung ergibt sich zu

$$\sigma_{\alpha_{\max}} = 0,55 \cdot 2600 + 357 + 63 + 720 = 2570 \text{ kg/cm}^2 < 3120 \text{ kg/cm}^2.$$

Auf Nietverschwächung ist hier keine Rücksicht genommen. Ein Nietabzug kommt im allgemeinen jedoch nur für die Längsbeanspruchung in Frage.

## 2. Druckkörper eines U-Bootes.

An diesem Beispiel soll hauptsächlich der Einfluß der Spantnachgiebigkeit gezeigt werden. Der Druckkörper des U-Bootes hat 5 m Durchmesser; der Spantabstand sei 90 cm, die Blechstärke 18 mm, die verlangte Tauchtiefe 80 m. Der Betrachtung wird ein Maschinenspant zugrunde gelegt, bei dem die Last des Motors im Kiel punktförmig angreifend gedacht ist. Das Moment im Gesamtkörper infolge verschiedener Verteilung von Last und Auftrieb sei an der betrachteten Stelle gleich Null.

Zunächst erhält man die Momente im Spant aus Gleichung (94a)

$$\varphi = 0: M = \frac{1}{2} 1 \cdot 2,5^2 \cdot 2,405 \cdot 0,9 \cdot 1,5 = + 10,15 \text{ tm},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: M = 6,77 - 0,57 = - 3,84 \text{ tm},$$

$$\varphi = \pi: M = 6,77 + 0,50 = + 3,38 \text{ tm}.$$

Ein  $\square$ -24 ist ausreichend, wenn die Kielstrecke entsprechend verstärkt wird. Für die Beurteilung der Spantnachgiebigkeit genügen  $F$  und  $J$  des  $\square$ -24 einschließlich zugehörigen Schalenstreifen, der hier gleich der Breite des Flansches angenommen wird.

$$F = 57,6 \text{ cm}^2, \quad J = 7475 \text{ cm}^4, \quad \eta = 9,5 \text{ cm}, \quad a' = 2,405 \text{ m}, \quad i = 11,4 \text{ cm}, \quad b = 8,5 \text{ cm}.$$

Damit erhält man nach Gleichung (97) unter Berücksichtigung, daß  $A$  negativ ist,

$$A = -1 \cdot 2,5^2 \cdot \pi \cdot 0,9 = -15,8 \text{ t,}$$

$$E \Delta \varepsilon_{\varphi}^* = \frac{15800}{2\pi \cdot 57,6} - (d_0 - a t_0) \frac{250}{240,5 \cdot 57,6} \cos \varphi + \sum_2^n \frac{15800 \left( \frac{240,5 \cdot 9,5}{11,4^2} - 1 \right)}{(n^2 - 1) \cdot \pi \cdot 57,6} \cos n \varphi$$

$$= 43,7 - 0,018 (d_0 - a t_0) \cos \varphi + \sum_2^n \frac{1450}{n^2 - 1} \cos n \varphi.$$

Als ungünstigste Stelle für die Randspannungen der Schale erkennt man den tiefsten Punkt, weshalb der Spannungsnachweis hierauf beschränkt sei. Im folgenden werden die Biegungsspannungen nach fortschreitendem  $n$  berechnet, wobei nur von  $n = 1$  aus bekannten Gründen zunächst abgesehen wird.  $\vartheta_0^*$  ist, wie man sich leicht überzeugt, für alle Fälle gleich 0, somit  $\psi = 0$ .

$$n = 0: \quad E \Delta \varepsilon_{\varphi}^* = 43,7, \quad k = 232000, \quad \mu = 15,50,$$

$$E \varepsilon_{\varphi}^* = -\frac{8 \cdot 250}{1,8} + \frac{8 \cdot 250 \cdot 8,5}{57,6} + EC \frac{2 \cdot 250 \cdot 1,8}{481 \cdot 57,6}.$$

[Vgl. Gleichung (79), die zu  $n=0$  selbst gehörige Verbesserung  $\Delta \varepsilon_{\varphi}^*$  ist unmittelbar hinzugegerechnet].

$$E \varepsilon_{\varphi} = \frac{EC}{\sqrt{2} \cdot 21,9} = +1110 - 296 - 0,0325 EC + 43,7, \quad EC = +13250 \text{ kg/cm}^2,$$

$$b_x = 13250 \frac{250 \cdot 1,8}{10520 \cdot \sqrt{2}} = +400 \text{ kgcm/cm}, \quad \sigma_{b_x} = \pm 740 \text{ kg/cm}^2.$$

$$n = 2: \quad E \Delta \varepsilon_{\varphi}^* = \frac{1450}{3} = 484 \text{ kg/cm}^2, \quad k' = 232072, \quad \mu_1 = 15,35, \quad \mu_2 = 15,60,$$

$$E \varepsilon_{\varphi} = EC \varrho_2 = +484, \quad \varrho_2 = 15,35 \left[ \frac{2 \cdot 1,3}{232000} + \frac{2 \cdot 243 + 0,6}{232072} \right] = 0,0322,$$

$$EC = 15000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$b_x = 15000 \frac{250 \cdot 1,8}{232000} \cdot 15,35 \cdot 1,0025 = 446 \text{ kgcm/cm}, \quad \sigma_{b_x} = \pm 826 \text{ kg/cm}^2.$$

$$n = 3: \quad E \Delta \varepsilon_{\varphi}^* = \frac{1450}{8} = 181 \text{ kg/cm}^2,$$

es findet sich ebenso wie vorher

$$\sigma_{b_x} = \pm 308 \text{ kg/cm}^2,$$

und weiter

$$n = 4: \quad \sigma_{b_x} = \pm 157 \text{ kg/cm}^2,$$

$$n = 5: \quad \sigma_{b_x} = \pm 94 \text{ kg/cm}^2,$$

$$n = 6: \quad \sigma_{b_x} = \pm 62 \text{ kg/cm}^2,$$

$$n = 7: \quad \sigma_{b_x} = \pm 43 \text{ kg/cm}^2.$$

Für das Beispiel genügt es hier abzubrechen. Für den Spannungszustand  $n=1$  wird der Ausdruck  $(d_0 - a t_0)$  benötigt, der mit Rücksicht auf die Randbedingungen nach den Gleichungen (2I<sub>3</sub>) und (2I<sub>6</sub>) lautet

$$d_0 - a t_0 = -\frac{(1-\nu)D}{2a\varepsilon n} (3\varepsilon + 1) \varepsilon'_{\varphi 0} \approx -\frac{a h}{2n(1+\nu)} E \varepsilon'_{\varphi 0}.$$

Nach Tabelle 3 ist

$$E \varepsilon'_{\varphi 0} = -EC (\mu_2 \varrho_2 - \mu_1 \varrho_1),$$

also für  $n=1$

$$E \varepsilon'_{\varphi 0} = -EC \frac{2,3 \sqrt{k-4}}{k} = -0,00478 EC.$$

Es fehlt noch der partikuläre Teil nach Gleichung (4 a<sub>3</sub>)

$$[a t_0] = + \gamma a^2 l = + \frac{250^2 \cdot 90}{1000} = + 5620 \text{ kg.}$$

$$E \Delta \varepsilon_{\varphi}^* = + 101,1 - 0,018 \cdot \frac{250 \cdot 1,8}{2,6} \cdot 0,00478 E C = 101,1 - 0,01485 E C,$$

$$- E (\varepsilon_{\varphi}^* - \Delta \varepsilon_{\varphi}^*) = \frac{250^2}{1,8 \cdot 1000} - 0,3 \left[ \frac{250^2}{1,8 \cdot 1000} \left( \frac{1}{12} \left( \frac{90}{250} \right)^2 - 0,3 \right) \right] + 101,1 - 0,01485 E C$$

$$= 34,7 - 0,3 [-10] + 101,1 - 0,01485 E C,$$

$$E \varepsilon_{\varphi_0} = E C Q_2 = 138,7 - 0,01485 E C, \quad E C = \frac{138,7}{0,0321 + 0,01485} = 2950 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{b_x} = \pm \frac{6 \cdot 2950 \cdot 250 \cdot 15,42 \cdot 1,0006}{232000 \cdot 1,8} = \pm 164 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Längsspannung  $\sigma_x$  für  $n = 1$  ist in dem Klammerausdruck bei  $\varepsilon_{\varphi}^*$  schon berechnet:  
 $\sigma_x = -10 \text{ kg/cm}^2$ .

Die Biegungsspannungen aus dehnungsloser Formänderung ergeben sich zu

$$b_{\varphi} = -D \kappa_{\varphi} = + \frac{D}{a} (n^2 - 1) \frac{w}{a}, \quad b_x = \nu b_{\varphi}.$$

Setzt man  $\frac{w}{a}$  aus Gleichung (101) ein und nimmt man gleiche Formänderungen der Nachbarspanne an, dann gilt für die Schale in den betrachteten Feldern<sup>1</sup>

$$\sigma_{b_{\varphi}} = \mp \frac{A a'^3 h}{4 a^2 \pi J (1-\nu)^2} \sum_1^n (n^2 - 1) a_n \cos n \varphi,$$

und für  $\varphi = 0$ :

$$\sigma_{b_{\varphi}} = \pm \frac{15800 \cdot 240,5^3 \cdot 1,8}{4 \cdot 250^2 \cdot \pi \cdot 7475 \cdot 0,91} [3 \cdot 0,222 + 8 \cdot 0,0312 + \dots]$$

$$= \pm 74,2 (0,666 + 0,250 + \dots) \sim \pm 70 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{b_x} = \pm \nu \sigma_{b_{\varphi}} = \pm 21 \text{ kg/cm}^2.$$

Die größten Spannungen in den beiden Hauptrichtungen sind demnach

$$\sigma_{\varphi_{\max}} = - \frac{8,0 \cdot 250}{1,8} - \frac{250^2}{1000 \cdot 1,8} - 70 = -1223 \text{ kg/cm}^2.$$

Zu  $\sigma_{\varphi_{\max}}$  am Rande tritt noch die Längsspannung aus dem Wasserdruck auf die Enden des Druckkörpers

$$\sigma_{x_{\max}} = - (740 + 164 + 826 + 308 + 157 + 95 + 62 + 43 + 21) - 10 - \frac{8,25 \cdot 250}{2 \cdot 1,8}$$

$$= -2416 - 10 - 574 = -3000 \text{ kg/cm}^2.$$

Der erste Ausdruck stellt den Anteil der Biegemomente dar. Die Zusatzrandspannungen  $\sigma_x$  sind wegen ihrer Kleinheit und, da sie entlastend wirken, vernachlässigt worden. Wegen der Höhe der Beanspruchungen gilt das in Abschnitt B, II, 5 Gesagte.

Man erkennt, daß der Einfluß der Spantnachgiebigkeit von ausschlaggebender Bedeutung ist. Bei Druckrohren liegen ähnlich ungünstige Verhältnisse vor, so daß man eine schmale Auflagerung in den Rohrsätteln auf jeden Fall vermeiden wird.

## F. Zusammenfassung.

Mit vorliegender Abhandlung kann das Problem der Kreiszyklinderschale mit beliebiger kontinuierlicher Belastung, abgesehen von Knickbetrachtungen, als vollständig gelöst gelten. Neben der genauen Lösung geben die in Tabelle 3 zusammengestellten Formeln

<sup>1</sup> Der Anteil für symmetrische Deformation ( $n = 0$ ) ist hier als klein vernachlässigt.

im Verein mit den Gleichungen für die Schale ohne Biegungswiderstand ein Mittel an die Hand, schnell und für die Praxis fast stets genau genug den Spannungszustand zu ermitteln. Längere Untersuchungen zeigen, daß die Nachgiebigkeit der Versteifungsringe bei achsensymmetrischer Belastung günstig, bei nicht achsensymmetrischer Belastung jedoch in mehr oder weniger hohem Grade ungünstig wirkt, je nachdem sich die Spant-schwerlinie innerhalb oder außerhalb der Mittelfläche des Zylinders befindet. Es ist rat-sam, Röhre und Kessel auf nicht zu schmaler Basis zu lagern. Bei Zylinderschalen großen Durchmessers wird man, wo es sich konstruktiv vertreten läßt, die Versteifungsringe außer-halb des umschlossenen Raumes anordnen.

Zur vollständigen Beurteilung der durch Spante versteiften Zylinderschale ist noch die Kenntnis ihrer Knicksicherheit erforderlich. Die Lösung hat **v. Mises** gegeben<sup>1</sup>. In einer noch unveröffentlichten Arbeit ist auch der Einfluß des Druckes auf die Zylinderböden untersucht. Ebendort beurteilt derselbe Verfasser die Knicksicherheit bei Berücksichtigung einer nicht-achsensymmetrischen Belastung. Forschungen über den kritischen Druck in einem begrenzten Schalenteil sind m. W. noch nicht veröffentlicht. **J. Geckeler** hat je-doch auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik an-läßlich der Werkstoffschau in Berlin 1927 Mitteilung von theoretischen Untersuchungen über die Knicksicherheit beliebiger Schalen gemacht, die durch Versuche bestätigt sind.

<sup>1</sup> R. v. Mises, ZS V. d. I. 58 (1914) S. 750ff.

(Eingegangen am 1. September 1929.)