Math. Ann. 192, 279—303 (1971)

Automorphismen von polyedrischen Graphen

P. Mani*

1. Einleitung

Vor einem halben Jahrhundert hat Steinitz als erster den Fundamentalsatz für konvexe Typen bewiesen, welcher sagt, daß sich jede Zerlegung der zweidimensionalen Sphäre durch den Randkomplex eines konvexen Polyeders realisieren läßt. Dieser Fundamentalsatz, dessen wörtliche Übertragung übrigens für die höheren Dimensionen nicht stimmt, ist erst vor einigen Jahren wiederentdeckt und in seiner zentralen Bedeutung für die dreidimensionale kombinatorische Geometrie erkannt worden. Das Buch [2] von Grünbaum enthält ihn als eine Aussage über planare Graphen: Jeder dreifach zusammenhängende planare Graph ist isomorph zum Ecken-Kanten Gerüst eines im gewöhnlichen Raum passend gewählten konvexen Polyeders. Ich will solche Graphen kurz als polyedrisch bezeichnen.

Steinitz hat in [1] drei Beweise des Fundamentalsatzes gegeben. Der erste stützt sich auf den lokalen Umkehrsatz für implizite Funktionen, die beiden andern sind rein kombinatorisch. Wir verdanken Grünbaum eine elegante und durchsichtige Neufassung des dritten Beweises. Von ihm [3] stammt auch die folgende Vermutung.

Satz. *Zu jedem polyedrischen Graphen $\mathfrak{Q}$ existiert ein dreidimensionales konvexes Polyeder P mit den Eigenschaften:*

(a) $\mathfrak{Q}$ ist isomorph zum Ecken-Kanten Gerüst $\mathfrak{P}^1$ von P.

(b) Jeder Automorphismus von $\mathfrak{P}^1$ wird durch eine Deckbewegung des Polyeders P induziert.

Für den Fall, daß die Automorphismengruppe von $\mathfrak{Q}$ (und von $\mathfrak{P}^1$) zur zyklischen Gruppe Z_2 isomorph ist, hat Barnette [4] einen Beweis gefunden. Das Ziel dieser Note ist eine vollständige Begründung der genannten Vermutung von Grünbaum. Dabei ist mir Steinitz's erster „analytischer" Beweis ein Vorbild gewesen. Er besteht aus einem kombinatorischen und einem analytischen Teil. Im kombinatorischen Teil wird gezeigt: Wenn $\mathfrak{Q}$ ein polyedrischer Graph mit mehr als vier Ecken ist, so gibt es einen polyedrischen Graphen $\mathfrak{Q}'$, der durch das Weglassen einer Kante aus $\mathfrak{Q}$ hervorgeht. Im zweiten Teil wird hierauf dargelegt: Wenn sich $\mathfrak{Q}'$ durch ein Polyeder realisieren läßt, so auch $\mathfrak{Q}$. Während sich der zweite, analytische Teil dieses Beweisgangs leicht auf den Fall übertragen läßt, wo die Automorphismengruppe von $\mathfrak{Q}'$ mitberücksichtigt wird, treten beim kombinatorsichen Satz Schwierig-

* Diese Arbeit ist durch ein Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds unterstützt worden.

keiten auf. G sei beispielsweise die Deckgruppe eines Einheitswürfels und $\mathfrak{Q}$ der Ecken-Kanten Graph eines Kuboktaeders. Obwohl die Kantenzahl von $\mathfrak{Q}$ in der Klasse aller polyedrischen Graphen mit Automorphismengruppe G nicht minimal ist, läßt sich $\mathfrak{Q}$ durch das Löschen einer G-Äquivalenzklasse von Kanten nicht weiter reduzieren; denn G wirkt transitiv auf den Kanten von $\mathfrak{Q}$. Ich habe daher einige zusätzliche Reduktionen eingeführt, die den von Steinitz in seinem dritten Beweis verwendeten Operationen entsprechen. Sie sind im Paragraphen 3 beschrieben. Paragraph 4 erläutert die Hindernisse, die sich dem Weglassen einer Klasse von Kanten entgegenstellen können, und Paragraph 5, der Hauptteil dieser Arbeit, bringt einen Reduktionssatz. In den anschließenden Paragraphen sind die analytischen Überlegungen untergebracht. Verschiedene Verfeinerungen des Fundamentalsatzes habe ich nicht auf den „äquivarianten" Fall übertragen können. Insbesondere ist die folgende Frage offen. G sei eine Untergruppe der isometrischen Gruppe O_3. Ein konvexes Polyeder mit Deckgruppe G bezeichnen wir als ein G-Polyeder. Das G-Polyeder P heißt minimal, wenn es zu jedem nicht mit P kombinatorisch äquivalenten G-Polyeder P' eine Umgebung U (im Sinne der Hausdorff-Metrik) gibt, in welcher kein zu P kombinatorisch äquivalentes G-Polyeder liegt. Für $G=\{1\}$ hat Steinitz gezeigt, daß die Tetraeder die einzigen minimalen $\{1\}$-Polyeder sind. Die Frage ist: Welche G-Polyeder sind bei beliebiger Wahl von $G \subset O_3$ minimal? Für die Deckgruppe eines Würfels gibt es mindestens vier Klassen von minimalen Polyedern, nämlich Würfel, Kuboktaeder und die zu diesen dualen Körper. Ich weiß nicht, ob damit die Liste schon vollständig ist.

Schließlich möchte ich auf eine Freiheit hinweisen, die ich mir erlaubt habe. Unter einem Punkt verstehe ich meist ein Element x eines topologischen Raumes, aber gelegentlich auch die Menge $\{x\}$.

2. Γ-Komplexe

S sei eine zweidimensionale topologische Sphäre. Ein Flächenstück F auf S soll eine zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphe Teilmenge sein. Wir bezeichnen den Rand von F mit $\dot{F}$. Die Menge $F-\dot{F}$ ist das Innere von F. Wenn $k \subset S$ ein Jordanbogen ist, verstehen wir unter dem Rand $\dot{k}$ von k die aus seinen zwei Endpunkten bestehende Menge, unter seinem Inneren die Menge $k-\dot{k}$. $\mathfrak{E}$ sei eine endliche Menge von Punkten in S, $\mathfrak{K}$ eine endliche Menge von Jordanbögen und $\mathfrak{F}$ eine endliche Menge von Flächenstücken auf der Sphäre S. Für jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{P} := \mathfrak{E} \cup \mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}$ schreiben wir $|\mathfrak{M}| := \cup \mathfrak{M}$. $\mathfrak{P}$ ist ein Komplex, wenn die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind.

(1) Zu jedem $X \in \mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}$ gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}$ mit $\dot{X} = |\mathfrak{U}|$.

Wir bezeichnen die Vereinigung all dieser Teilmengen $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}$ mit ∂X. Für $X \in \mathfrak{E}$ setzen wir zudem $\partial X := \emptyset$. Mit Hilfe des Operators ∂ läßt sich die zweite Bedingung für den Komplex $\mathfrak{P}$ leicht formulieren.

(2) Für alle $X, Y \in \mathfrak{P}$ ist $X \cap Y$ entweder leer oder ein Element von $(\{X\} \cup \partial X) \cap (\{Y\} \cup \partial Y)$.

Wir wollen $\partial\mathfrak{M}$ auch für beliebige Mengen $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{P}$ definieren, deren Träger $|\mathfrak{M}|$ ein Flächenstück ist. $\partial\mathfrak{M}$ soll alsdann aus allen in $|\dot{\mathfrak{M}}|$ liegenden Elementen von $\mathfrak{P}$ bestehen. Offenbar ist $\partial\mathfrak{M}$ ein Graph, und zwar ein einfacher Zyklus. Wenn $\mathfrak{P}=\mathfrak{E}\cup\mathfrak{K}\cup\mathfrak{F}$ ein Komplex ist, schreiben wir $\Delta^0\mathfrak{P}:=\mathfrak{E}$, $\Delta^1\mathfrak{P}:=\mathfrak{K}$, $\Delta^2\mathfrak{P}:=\mathfrak{F}$, und bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{E}$ als Ecken, die von $\mathfrak{K}$ als Kanten, die von $\mathfrak{F}$ als Flächen in $\mathfrak{P}$. Die Menge $\mathfrak{P}^1:=\mathfrak{E}\cup\mathfrak{K}$ ist ein (planarer) Graph. Wir werden die Grundbegriffe und einige elementare Sätze der Graphentheorie ohne weitere Erklärungen brauchen. Zwei Elemente $X\neq Y$ von $\mathfrak{P}$ heißen inzident, wenn $X\subset Y$ oder $Y\subset X$ gilt. Für $X\in\Delta^2\mathfrak{P}$ besteht beispielsweise ∂X aus allen mit X inzidenten Ecken und Kanten von $\mathfrak{P}$. Zu jedem $X\in\mathfrak{P}$ gehört sein Stern und seine Schlinge *(link)* in $\mathfrak{P}$. Wir setzen $st(X,\mathfrak{P}):=\cup\{\{Y\}\cup\partial Y:X\in\{Y\}\cup\partial Y\}$ und $link(X,\mathfrak{P}):=\{Z\in st(X,\mathfrak{P}):Z$ ist nicht mit X inzident$\}$. Für $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{P}$ legen wir $st(X,\mathfrak{M}):=st(X,\mathfrak{P})\cap\mathfrak{M}$ und $link(X,\mathfrak{M}):=link(X,\mathfrak{P})\cap\mathfrak{M}$ fest. Wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht, schreiben wir bloß $st X$ und $link X$. Eine bijektive Abbildung $\xi:\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}'$ zwischen zwei Komplexen (die nicht beide auf der gleichen Sphäre liegen müssen) ist ein Isomorphismus, falls sie die Dimensionen und Inzidenzen erhält, falls, mit anderen Worten $\xi(\Delta^i\mathfrak{P})=\Delta^i\mathfrak{P}'$ und $\xi\partial X=\partial\xi X$ für alle i, $0\leqq i\leqq 2$ und alle $X\in\mathfrak{P}$ gilt. Unter einem Automorphismus von $\mathfrak{P}$ verstehen wir einen Isomorphismus $\xi:\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$. Ein Γ-Komplex ist ein Tripel $(G,\alpha,\mathfrak{P})$, wo G eine endliche Gruppe, $\mathfrak{P}$ einen Komplex und $\alpha:G X\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$ eine effektive Wirkung bedeutet, also eine Abbildung mit den Eigenschaften

(3) $\alpha(g_1,\alpha(g_2,X))=\alpha(g_1g_2,X)$ $\quad(g_i\in G, X\in\mathfrak{P}$ beliebig).

(4) Für alle $g\in G$ ist die durch $\gamma X:=\alpha(g,X)$ festgelegte Abbildung γ ein Automorphismus von $\mathfrak{P}$, und zwar für $g\neq 1$ stets von der identischen Abbildung verschieden.

Wo wir keine Verwechslung zu befürchten brauchen, verwenden wir für α die multiplikative Schreibweise, setzen also $gX:=\alpha(g,X)$. $\mathfrak{S}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$. Wir legen die „Deckgruppe" von $\mathfrak{S}$ durch $G_{\mathfrak{S}}:=\{g\in G:gX\in\mathfrak{S}$ für alle $X\in\mathfrak{S}\}$ fest. Im Falle $\mathfrak{S}=\{X\}$ schreiben wir G_X statt $G_{\{X\}}$. Die Klasse der mit X äquivalenten Elemente von $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit $\bar{X}$. Es ist also $\bar{X}:=\{gX:g\in G\}$. Ein Ansatzpunkt für die folgenden Konstruktionen ist durch die Existenz von zulässigen Paaren gegeben.

Definition. Ein Paar $(K,D)\in\Delta^1\mathfrak{P}X\Delta^2\mathfrak{P}$ heißt zulässig, wenn $\partial D\cap\bar{K}=\{K\}$ gilt und wenn außerdem kein dreiwertiger Eckpunkt $X\in\Delta^0\mathfrak{P}$ mit zwei Kanten der Klasse $\bar{K}$ inzident ist.

Analog nennen wir $(K,D)\in\Delta^1\mathfrak{P}X\Delta^0\mathfrak{P}$ im Γ-Komplex $(G,\alpha,\mathfrak{P})$ zulässig, wenn $\{K'\in\bar{K}:D\in\partial K'\}=\{K\}$ ist und für jede Fläche $X\in\Delta^2\mathfrak{P}$ mit $\operatorname{card}\Delta^0\partial X=3$ die Beziehung $\operatorname{card}\{K'\in\bar{K}:K'\in\partial X\}\leqq 1$ gilt. Zwei Γ-Komplexe $(G,\alpha,\mathfrak{P})$ und $(G,\alpha',\mathfrak{P}')$ sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\xi:\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}'$ und einen Gruppenisomorphismus $\gamma:G\to G'$ so gibt, daß $\xi\cdot\alpha=\alpha'(\gamma X\xi)$ gilt. Ein sphärischer Γ-Komplex ist ein Γ-Komplex $(G,\alpha,\mathfrak{P})$, dessen Träger $|\mathfrak{P}|$ eine Sphäre ist. Beispiele für solche Komplexe werden durch die Ränder von dreidimensionalen Polytopen geliefert. O_3 sei die orthogonale Gruppe des euklidischen Raumes

E^3. Jedes $o \in O_3$ ist also eine isometrische Abbildung $o: E^3 \to E^3$, welche den Ursprung fest läßt. Für $M \subset E^3$ schreiben wir wie gewohnt $oM := \{ox : x \in M\}$. $P \subset E^3$ sei ein konvexes Polyeder des E^3 und $\mathfrak{P}$ der aus all seinen Ecken, Kanten und Seitenflächen bestehende sphärische Komplex. Wenn die Gruppe $G \subset O_3$ in der Deckgruppe von P enthalten ist, wird durch $\beta(g, X) := gX$, $g \in G, X \in \mathfrak{P}$, eine natürliche Wirkung β von G auf $\mathfrak{P}$ definiert. Jedes solche Tripel $(G, \beta, \mathfrak{P})$ und jeden zu einem solchen Tripel isomorphen Γ-Komplex nennen wir solid. Unser Ziel ist ein Beweis der folgenden Tatsache.

Satz 1. *Jeder sphärische Γ-Komplex ist solid.*

Wenn wir nur die Komplexe $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ mit trivialer Gruppe G betrachten, geht Satz 1 in den Fundamentalsatz für konvexe Typen von Steinitz über. Bevor wir an einen Beweis von Satz 1 herangehen, wollen wir andeuten, wie sich die Äquivalenz von Satz 1 mit dem in der Einleitung beschriebenen Satz zeigen läßt. Der Graph $\mathfrak{P}^1$ eines sphärischen Komplexes $\mathfrak{P}$ ist, wie man leicht einsieht, dreifach zusammenhängend. Umgekehrt sei ein dreifach zusammenhängender Graph $\mathfrak{Q} = \Delta^0 \mathfrak{Q} \cup \Delta^1 \mathfrak{Q}$ auf einer Sphäre S gegeben. Jeder einfache Zyklus $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{Q}$ bestimmt genau zwei Flächenstücke F_1 und F_2 auf S mit $\dot{F}_i = |\mathfrak{C}|$ $(i = 1, 2)$. Wir sagen, F_i sei ein in bezug auf $\mathfrak{Q}$ minimales Flächenstück auf S, wenn kein innerer Punkt von F_i zu $|\mathfrak{Q}|$ gehört. Die Menge dieser minimalen Flächenstücke heiße $M(\mathfrak{Q})$. Durch $\Delta^i(\mathfrak{P}) := \Delta^i(\mathfrak{Q})$, $i = 0, 1$, und $\Delta^2(\mathfrak{P}) := M(\mathfrak{Q})$ ist ein sphärischer Komplex $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}^1 = \mathfrak{Q}$ definiert. Wenn $\alpha: \mathfrak{Q} \to \mathfrak{Q}$ ein Automorphismus des Graphen $\mathfrak{Q}$ ist, gibt es genau eine Fortsetzung von α auf $\mathfrak{P}$, und umgekehrt induziert jeder Automorphismus von $\mathfrak{P}$ einen solchen auf dem Graphen $\mathfrak{P}^1$. Daraus geht die Äquivalenz der beiden in Frage stehenden Sätze unmittelbar hervor.

3. Primitive Komplexe, Reduktionen

Im Raum E^3 wählen wir eine durch den Ursprung o laufende Ebene E und einen auf E senkrecht stehenden Vektor e. $P \subset E$ sei ein reguläres n-eck mit dem Ursprung als Mittelpunkt und $Q \subset E$ dasjenige n-eck, das aus P durch eine Drehung um o mit dem Drehwinkel π/n hervorgeht. Die konvexe Hülle T_n von $P \cup (Q + e)$ (und jedes zu T_n kombinatorisch isomorphe Polytop) bezeichnen wir als eine Trommel der Ordnung n. Die folgenden Polytope nennen wir primitiv: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, n-seitige Pyramiden, n-seitige Prismen, Trommeln T_n $(n \geqq 3)$, sowie alle zu den schon genannten dualen Polytope. Ein sphärischer Komplex heißt primitiv, wenn er zum Randkomplex eines primitiven Polyeders isomorph ist. Wir erlauben uns inskünftig, den Namen eines Polyeders auch für jeden zu seinem Rand isomorphen Komplex zu verwenden. Ein Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ soll primitiv heißen, falls $\mathfrak{P}$ es ist. Offenbar ist jeder primitive Γ-Komplex (bei beliebiger Wahl von G und α) solid. Für die übrigen Komplexe studieren wir drei Klassen von Modifikationen, mit deren Hilfe wir sie auf primitive zurückzuführen gedenken.

A. Die Dualität. $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ sei ein sphärischer Γ-Komplex. Im Innern jedes Elements $x \in \Delta^1\mathfrak{P} \cup \Delta^2\mathfrak{P}$ wählen wir einen Punkt sx. Danach bestimmen wir zu jedem inzidenten Paar (F, k), $F \in \Delta^2\mathfrak{P}$, $k \in \Delta^1\mathfrak{P}$ einen Jordanbogen $\beta(F, k)$, der sF mit sk verbindet und außer sk keinen Punkt von $\dot{F}$ enthält. Zudem soll für alle $k_1, k_2 \in \partial F$, $k_1 \neq k_2$, der Durchschnitt $\beta(F, k_1) \cap \beta(F, k_2)$ aus sF allein bestehen. Jede Fläche $F \in \Delta^2\mathfrak{P}$ wird durch die in ihr verlaufenden Bögen in Flächenstücke zerlegt, von denen jedes genau einen Eckpunkt x von ∂F enthält; dasselbe bezeichnen wir mit F_x. Für $x \in \Delta^0\mathfrak{P}$ setzen wir $\hat{x} := \cup\{F_x : x \in \partial F\}$, für $x \in \Delta^1\mathfrak{P}$ sei $\hat{x} := \cup\{\beta(F, x) : x \in \partial F\}$ und für eine Fläche $x \in \Delta^2\mathfrak{P}$ legen wir $\hat{x}$ durch $\hat{x} := sx$ fest. Durch $\hat{\alpha}(g, \hat{x}) := \widehat{\alpha(g, x)}$ ist eine Wirkung $\hat{\alpha}$ von G auf den sphärischen Komplex $\hat{\mathfrak{P}} := \{\hat{x} : x \in \mathfrak{P}\}$ bestimmt. $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ ist der zu $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ duale Komplex, wobei sich die Verwendung des bestimmten Artikels dadurch rechtfertigt, daß $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ bis auf Isomorphie bestimmt ist. In diesem Sinn können wir auch sagen, es gelte $(G, \hat{\hat{\alpha}}, \hat{\hat{\mathfrak{P}}}) = (G, \alpha, \mathfrak{P})$.

B. Das Weglassen einer Kante. Es liege ein sphärischer Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ vor, und $(k, D) \in \Delta^1\mathfrak{P} \times \Delta^2\mathfrak{P}$ sei ein zulässiges Paar. Wenn E die andere mit k inzidente Fläche ist, setzen wir $E_0 := E \cup \bigcup\{gD : g \in G_E\}$ sowie, für beliebiges $g' \in G$, $g'E_0 := g'E \cup \bigcup\{g'gD : g \in G_E\}$ und $\bar{E}_0 := \{gE_0 : g \in G\}$. Sodann definieren wir eine Menge $\mathfrak{P}_0 := \Delta^0\mathfrak{P}_0 \cup \Delta^1\mathfrak{P}_0 \cup \Delta^2\mathfrak{P}_0$ durch $\Delta^2\mathfrak{P}_0 := \bar{E}_0 \cup \Delta^2\mathfrak{P} - (\bar{D} \cup \bar{E})$,

$$\Delta^1\mathfrak{P}_0 := \{x_1 \cap x_2 : x_i \in \Delta^2\mathfrak{P}_0, x_1 \neq x_2, \operatorname{card}(x_1 \cap x_2) \geqq 2\},$$
$$\Delta^0\mathfrak{P}_0 := \{x_1 \cap x_2 : x_i \in \Delta^1\mathfrak{P}_0, x_1 \neq x_2, x_1 \cap x_2 \neq \emptyset\}.$$

Wegen der Zulässigkeit von (k, D) ist jedes $x \in \Delta^1\mathfrak{P}_0$ eine Vereinigung von Punkten und Jordanbögen. Jetzt nehmen wir an, $\mathfrak{P}_0$ sei ein (sphärischer) Komplex mit den Elementen von $\Delta^2\mathfrak{P}_0$, $\Delta^1\mathfrak{P}_0$ und $\Delta^0\mathfrak{P}_0$ als Flächen, Kanten und Ecken. Durch $\alpha_0(g, x) := \alpha(g, x)$ für $g \in G$, $x \in \Delta^2\mathfrak{P}_0 - \bar{E}_0$ und $\alpha_0(g, g'E_0) := (gg')E_0$ für $g'E_0 \in \bar{E}_0$ ist eine Wirkung α_0 von G auf $\Delta^2\mathfrak{P}_0$ festgelegt. Für $x \in \mathfrak{P}_0^1$ gibt es eine Teilmenge N von $\Delta^2\mathfrak{P}_0$ mit $x = \bigcap N$; wir setzen $\alpha_0(g, x) := \bigcap\{\alpha_0(g, n) : n \in N\}$. Die Wirkung α_0 läßt sich noch in anderer Weise beschreiben. Zu jedem $x \in \Delta^i\mathfrak{P}_0$ gibt es einen Teilkomplex $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}$ mit $x = |\mathfrak{X}|$. Dann ist $\alpha_0(g, x) = \bigcup\{\alpha(g, y) : y \in \mathfrak{X}\}$. Wir sagen, der Γ-Komplex $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ entstehe aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ durch das Weglassen der Kante k, und $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ gehe aus $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ durch das Einführen von k hervor. Von der Kante k sagen wir auch, sie könne aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ weggelassen werden. Wir wollen das Verhältnis zwischen $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ und $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ etwas genauer beschreiben. Wenn $\mathfrak{Q}$ ein Komplex und x ein Punkt von $|\mathfrak{Q}|$ ist, legen wir den Träger von x in $\mathfrak{Q}$ durch $\operatorname{tr}(x, \mathfrak{Q}) := \bigcap\{y \in \mathfrak{Q} : x \in y\}$ fest. Jede Kante (Fläche) von $\mathfrak{P}_0$ ist eine Vereinigung von Kanten (Flächen) aus $\mathfrak{P}$. a_1 und a_2 seien die Endpunkte der Kante k in $\mathfrak{P}$. a_i braucht in $\mathfrak{P}_0$ nicht ein Eckpunkt zu sein, doch gehören a_1 und a_2 nicht derselben Kante von $\mathfrak{P}_0$ an, weil sonst kein Eckpunkt von $\Delta^0\partial D - \partial k$ zu $\Delta^0\mathfrak{P}_0$ gehörte. Da nur solche Punkte von $\Delta^0\mathfrak{P}$ nicht auch in $\Delta^0\mathfrak{P}_0$ liegen, die mit höchstens zwei nicht in $\bar{k}$ liegenden Kanten von $\mathfrak{P}$ inzident sind, folgt daraus, daß D ein Dreieck oder ein Viereck ist, und wegen der Äquivalenz aller Elemente der Klasse $\bar{D}$ müßte $\mathfrak{P}$ ein Simplex, ein

Zylinder oder eine Trommel sein. $\mathfrak{P}_0$ wäre in diesem Fall kein Komplex. Wir haben gefunden:

(a) Es gibt eine Fläche $F \in \Delta^2 \mathfrak{P}_0$ mit $\{a_1, a_2\} \subset \dot{F}$, aber keine Kante $l \in \Delta^1 \mathfrak{P}_0$ mit $\{a_1, a_2\} \subset l$.

$\mathfrak{S}(l)$ sei für $l \in \Delta^1 \mathfrak{P}_0$ die Menge der in l liegenden Ecken und Kanten von P. $\mathfrak{S} := \bigcup \{\mathfrak{S}(l) : l \in \Delta^1 \mathfrak{P}_0\}$ ist ein Graph, und vermöge α ist eine Wirkung von G auf $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}^1$ festgelegt, die wir wieder mit α bezeichnen. Zwischen α und α_0 besteht die Beziehung

(b) $\alpha(g, \operatorname{tr}(x, \mathfrak{S})) \subset \alpha_0(g, \operatorname{tr}(x, \mathfrak{P}_0))$, für alle $x \in |\mathfrak{S}|$ $(= |\mathfrak{P}_0^1|)$.

Schließlich haben wir

(c) Es gibt kein Paar $g_1, g_2 \in G$ so, daß die Mengen $\{g_1 a_1, g_1 a_2\}$ und $\{g_2 a_1, g_2 a_2\}$ $(g_i a_j := \alpha(g_i, a_j))$ einander auf dem Rand einer Fläche von $\mathfrak{P}_0$ trennen. Andernfalls müßten nämlich die Kanten $g_1 k$ und $g_2 k$ von $\mathfrak{P}$ innere Punkte gemeinsam haben.

Umgekehrt liege ein Γ-Komplex $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ vor. Es seien zwei Punkte a_1 und a_2 mit $\operatorname{tr}(a_i, \mathfrak{P}_0) \in \mathfrak{P}_0^1$ gegeben sowie für jedes $g \in G$ zwei weitere Punkte $g a_1$ und $g a_2$. Zu jeder Kante $l \in \Delta^1 \mathfrak{P}_0$ wird durch die auf ihr liegenden Punkte von $\{g a_1 : g \in G\} \cup \{g a_2 : g \in G\}$ ein einfacher Weg $\mathfrak{S}(l)$ definiert. Wenn l keines der $g a_i$ im Innern enthält, ist dabei $\mathfrak{S}(l)$ der aus l und seinen Endpunkten bestehende Weg. Es gebe eine Wirkung α von G als Gruppe von Automorphismen auf den Graphen $\mathfrak{S} := \bigcup \{\mathfrak{S}(l) : l \in \Delta^1 P_0\}$. Für jedes $g \in G$ soll $\alpha(g, a_i)$ der oben definierte Punkt $g a_i$ sein. Wenn zudem für a_1, a_2, $\mathfrak{S}$ und $\alpha : G \times \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ die Bedingungen (a), (b) und (c) sinngemäß erfüllt sind, so gibt es einen, bis auf Isomorphie bestimmten, Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$, der aus $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ durch das Einführen einer Kante k mit $\dot{k} = \{a_1, a_2\}$ hervorgeht.

Dual zum Weglassen einer Kante ist das Zusammenziehen einer solchen. $k \in \Delta^1 \mathfrak{P}$ gehöre zum Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$, und wir nehmen an, die Kante $\hat{k} \in \Delta^1 \hat{\mathfrak{P}}$ lasse sich aus $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ weglassen. Die Operationen, die sich aus dem Übergang von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zu $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$, danach dem Weglassen von k und schließlich dem nochmaligen Übergang zum dualen Komplex ergibt, bezeichnen wir als das „Zusammenziehen von k". Daß sie dem entspricht, was wir uns darunter etwa vorstellen mögen, geht aus passenden Beispielen hervor.

C. Die ω- und η-Operationen von Steinitz. Wir nehmen an, der sphärische Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ sei nicht primitiv. Wenn x eine dreivalente Ecke von $\mathfrak{P}$ ist, bezeichnen wir ihre Nachbarecken jeweils mit a_1, a_2, a_3. Die Ordnung $o(x)$ von x sei die Anzahl der Dreiecke (Flächen $F \in \mathfrak{P}$ mit $\operatorname{card} \Delta^0 \partial F = 3$) in $st(x, \mathfrak{P})$. $H \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ sei eine Fläche und p, q zwei Eckpunkte von ∂H. Das Paar $\{p, q\}$ heißt frei, wenn es kein $g \in G_H$ so gibt, daß $\{p, q\}$ und $\{gp, gq\}$ einander auf ∂H trennen.

C 1. In $\mathfrak{P}$ gibt es eine (dreiwertige) Ecke x der Ordnung 3. Weil $\mathfrak{P}$ nicht primitiv ist, besteht $|st x| \cap |st(gx)|$ für alle $g \in G - G_x$ aus höchstens einem Element von $\mathfrak{P}^1$. Daher ist die Menge $\mathfrak{P}'$, die aus $\mathfrak{P}$ entsteht, wenn wir alle Ecken von $\bar{x}$ samt den mit ihnen inzidenten Kanten aus $\mathfrak{P}^1$ weglassen und die Flächen in $st(gx)$ jeweils zu einer einzigen vereinigen, wiederum ein Komplex.

$\alpha': G \times \mathfrak{P}' \to \mathfrak{P}'$ definieren wir in der naheliegenden Weise mit Hilfe von α. Wir sagen, der Γ-Komplex $(G, \alpha', \mathfrak{P}')$ gehe durch die Operation $\omega_3(x)$ aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ hervor.

C 2. Weder für $\mathfrak{P}$ noch für $\hat{\mathfrak{P}}$ trifft C 1 zu, aber in $\mathfrak{P}$ gibt es eine Ecke x der Ordnung 2. a_1 und a_2 seien die beiden nicht durch eine Kante von $\mathfrak{P}^1$ verbundenen Nachbarn von x. Wenn $\{a_1, a_2\}$ frei ist, gibt es einen, bis auf Isomorphie bestimmten, Γ-Komplex $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$, der aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ durch das Einführen einer Kante k mit $\dot{k} = \{a_1, a_2\}$ entsteht. Den Γ-Komplex, den wir durch Anwendung von $\omega_3(x)$ auf $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ erhalten, bezeichnen wir als das $\omega_2(x)$-Bild von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Wenn $\{a_1, a_2\}$ nicht frei ist, gibt es ein Element $g \in G$ so, daß entweder $g a_1 = x$ oder $g a_2 = x$ gilt; wir nehmen den ersten Fall an. Da g auf ∂H für jedes $H \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ mit $gH = H$ einen Isomorphismus induziert, ist $gx \in \{a_1, a_2\}$. Im Fall $gx = a_2$ gibt es, wenn $F \in st\, x$ die Fläche mit $\operatorname{card} \Delta^0 F > 3$ ist, zu jeder Kante $k \in \partial F$ eine natürliche Zahl i mit $g^i\{a_1, x\} = \partial k$. Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{P}$ eine Pyramide, also, im Widerspruch zu unserer Annahme, primitiv ist. Daher haben wir $g a_1 = x$ und $gx = a_1$; g ist eine „Spiegelung". Wir setzen $a_2' := g a_2$. a_2' ist die von x verschiedene Nachbarecke des Punktes a_1 auf ∂F. Wegen $\operatorname{card} \Delta^0 \partial F \geqq 4$ gilt $a_2' \neq a_2$, und wenn $\{a_2, a_2'\}$ nicht frei ist, muß $\mathfrak{P}$ wiederum eine Pyramide sein. Andernfalls läßt sich die Kante $[a_1, x]$ zusammenziehen; den dabei entstehenden Komplex bezeichnen wir als das $\bar{\omega}_2(x, a_1)$-Bild von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$.

C 3. Weder für $\mathfrak{P}$ noch für $\hat{\mathfrak{P}}$ trifft eine der in C 1 und in C 2 beschriebenen Situationen zu, aber in $\mathfrak{P}$ gibt es eine dreivalente Ecke x der Ordnung 1. a_1 und a_2 seien die durch eine Kante von $\mathfrak{P}$ verbundenen Nachbarecken von x. Wenn in G ein Element g mit $gx = a_3$ und $g a_3 = x$ existiert, so läßt sich die Kante $[x, a_3]$ $(\partial[x, a_3] = \{x, a_3\})$ in $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zusammenziehen, und den dabei entstehenden Komplex nennen wir das $\bar{\omega}_1(x)$-Bild von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Andernfalls gibt es offensichtlich einen (bis auf Isomorpie bestimmten) Γ-Komplex $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$, der dadurch aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ hervorgeht, daß wir zuerst eine Kante k mit $\dot{k} = \{a_1, a_3\}$ und, falls a_2 und a_3 im neuen Komplex nicht durch eine Kante verbunden sind, noch eine Kante l mit $\dot{l} = \{a_2, a_3\}$ einführen. Den Komplex, den wir durch Anwendung von $\omega_3(x)$ aus $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ gewinnen, bezeichnen wir als das $\omega_1(x)$-Bild von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$.

C 4. Wenn jede dreivalente Ecke von P die Ordnung 0 hat, wenden wir die Operation des „Eckenabschneidens" nur in einem Ausnahmefall an. x und y seien zwei verschiedene dreivalente Ecken mit den Nachbarn a_i und b_i $(1 \leqq i \leqq 3)$. Dazu gelte etwa $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$. Es kann nicht auch $a_3 = b_3$ sein, da x und y sonst nicht die Ordnung 0 hätten. Nun setzen wir zusätzlich voraus, keiner der Punkte a_i, b_i liege in der Klasse $\bar{x}$ oder in der Klasse $\bar{y}$, und führen solange neue Kanten k mit $\dot{k} = \{a_i, a_j\}$ oder mit $\dot{k} = \{b_i, b_j\}$, $1 \leqq i, j \leqq 3$ ein, bis jedes der Paare $\{a_i, a_j\}$ und $\{b_i, b_j\}$ durch eine Kante verbunden ist. Dies ist wegen der Voraussetzung $\{a_i, b_i\} \cap (\bar{x} \cup \bar{y}) = \emptyset$, für alle i mit $1 \leqq i \leqq 3$, möglich. Das Besondere dieser Operation liegt darin, daß wegen $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ höchstens fünfmal eine neue Klasse von Kanten eingeführt werden muß.

Schließlich wenden wir $\omega_3(x)$ und, wenn $\bar{y} \neq \bar{x}$ ist, auch $\omega_3(y)$ an. So erhalten wir einen sphärischen Γ-Komplex, den wir als das $\bar{\omega}_0(x,y)$-Bild von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ bezeichnen.

C 5. Dual zum „Eckenabschneiden" sind die Operationen, bei denen eine Fläche auf einen Punkt zusammengezogen wird. $x \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ sei ein Dreieck mit den Eigenschaften:

(a) Kein Eckpunkt von x ist dreiwertig.

(b) Für alle Paare x_1, x_2 in der Klasse $\bar{x}$ gilt $x_1 \cap x_2 = \emptyset$. Im Innern jeder Fläche $x' \in \bar{x}$ wählen wir einen Punkt $s(x')$, sowie drei Jordanbögen, die $s(x')$ mit den Ecken von x' verbinden und paarweise nur $s(x')$ als Durchschnitt haben. In dem so durch Unterteilung aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entstehenden Komplex, in dem die Wirkung von G auf die naheliegende Weise festgelegt sei, löschen wir alle Kanten, die zum Rand der ursprünglichen Fläche x gehören. Das Resultat bezeichnen wir als das $\eta_0(x)$-Bild von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$.

Den Übergang zum dualen Komplex, das Weglassen einer Kante, die Operationen $\eta_0, \bar{\omega}_0, \omega_1, \bar{\omega}_1, \omega_2, \bar{\omega}_2, \omega_3$ bezeichnen wir als Reduktionen. $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ heißt reduzibel, wenn es einen Γ-Komplex $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ so gibt, daß $\mathfrak{P}_0$ weniger Kanten als $\mathfrak{P}$ hat und $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ durch endlich viele aufeinanderfolgende Reduktionen aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entsteht. Den Überlegungen in den Abschnitten C 1 bis C 4 entnehmen wir:

Lemma 1. *Für den sphärischen Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ treffe eine der folgenden Bedingungen zu:*

(a) Es gibt in $\mathfrak{P}$ eine dreivalente Ecke, deren Ordnung nicht Null ist.

(b) Es gibt in $\mathfrak{P}$ zwei dreivalente Ecken x und y der Ordnung Null mit den Nachbarn a_i und b_i, $1 \leqq i \leqq 3$, so, daß $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ und $x \neq y$ zutrifft, und keiner der Punkte a_i, b_i zu $\bar{x}$ oder zu $\bar{y}$ gehört.

Dann ist $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entweder primitiv oder reduzibel.

4. Kränze

Der folgende Tatbestand läßt sich ohne Mühe aus dem Jordanschen Kurvensatz gewinnen.

(5) $\mathfrak{P}$ sei ein sphärischer Komplex und $F \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ beliebig gewählt. Die Elemente von $\Delta^2 \mathfrak{P}$ lassen sich so zu einer mit F beginnenden Folge $F = F_1, F_2, \ldots, F_r$ anordnen, daß für jeden Index i zwischen 2 und $r-1$ der Durchschnitt $F_i \cap \bigcup \{F_j : j \leqq i-1\}$ ein Jordanbogen ist.

Daraus gewinnen wir die folgende Aussage.

Lemma 2. *$(G, \alpha, \mathfrak{P})$ sei ein sphärischer Γ-Komplex und $\{F, k, x\}$ $F \in \Delta^2 \mathfrak{P}$, $k \in \Delta^1 \mathfrak{P} \cap \partial F$, $x \in \Delta^0 \mathfrak{P} \cap \partial k$ ein inzidentes Tripel. Wenn für zwei Automorphismen $g_1, g_2 \in G$ die Beziehung $g_1 p = g_2 p$ für alle Elemente p von $\{F, k, x\}$ zutrifft, so stimmen g_1 und g_2 auf ganz $\mathfrak{P}$ überein.*

Beweis. Die Automorphismen eines Zyklus (im Sinne der Graphentheorie) lassen sich leicht aufzählen. Wenn daher $\{H, l, y\}$ irgendein inzidentes Tripel mit $g_1 q = g_2 q$ für alle q in $\{H, l, y\}$ ist, erkennen wir mühelos, daß g_1 und g_2

auf ∂H dieselbe Abbildung induzieren. Nun sei $\{F, k, x\}$ das im Lemma erwähnte Tripel. Wir wählen eine Folge F_α mit $F_1 = F$ gemäß (5) und beweisen durch Induktion nach i mit Hilfe der obigen Bemerkung, daß g_1 und g_2 auf $\{F_j : j \leqq i\} \cup \bigcup \{\partial F_j : j \leqq i\}$ dieselbe Abbildung erzeugen, woraus für $i = r$ unsere Behauptung folgt.

Nach dem gleichen Schema beweisen wir:

Lemma 3. $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ *sei ein sphärischer Γ-Komplex und $g \in G$ ein Element der Ordnung $\geqq 3$. Wenn es ein Fixelement $x \in \mathfrak{P}$, mit $gx = x$, gibt, so existieren deren genau zwei.*

Beweis. Es sei etwa $F \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ ein Fixelement von g. Eine leichte Abwandlung von (5) erlaubt uns, die Klassen $\bar{\bar{H}} := \{g^i H : 1 \leqq i < \infty\}$ $(H \in \Delta^2 \mathfrak{P})$ so zu einer Folge $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{H}}_1, \bar{\bar{H}}_2, \ldots, \bar{\bar{H}}_n$, anzuordnen, daß für $2 \leqq i \leqq n$ stets gilt: entweder ist $|\bigcup \{\bar{\bar{H}}_j : 1 \leqq j \leqq i\}|$ ein Flächenstück D_i oder es gibt ein Element y_i von $\mathfrak{P}$, dessen Stern $st(y_i, \mathfrak{P})$ alle Flächen H aus den Klassen $\bar{\bar{H}}_j, i \geqq j \geqq n$ enthält. i_0 sei der letzte Index, für den die erstgenannte Möglichkeit eintritt; sicher ist $i_0 < n$. Für $i \leqq i_0$ bedeute $\mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{P}^1$ den Zyklus mit $|\mathfrak{S}_i| = \dot{D}_i$. g induziert auf jedem $\mathfrak{S}_i$ einen Automorphismus g_i der Ordnung $\geqq 3$, und da jeder Automorphismus eines Zyklus, der ein Fixelement zuläßt, eine Ordnung $\leqq 2$ hat, ist jedes g_i ohne Fixelemente. Daraus folgt, daß g auf dem durch $\bigcup \{\bar{\bar{H}}_j : 1 \leqq j \leqq i_0\}$ in $\mathfrak{P}$ erzeugten Komplex einen Automorphismus induziert, dessen einziges Fixelement F ist. F und y_{i_0+1} sind die beiden Fixelemente von g in $\mathfrak{P}$.

Aus (5) ergibt sich ferner, daß die Eulersche Charakteristik jedes sphärischen Komplexes den Wert 2 hat. Daraus folgt in bekannter Weise:

(6) $e_3 + p_3 = 8 + \sum_{k \geqq 5} (k-4)(e_k + p_k) \geqq 8$, wo e_j die Zahl der j-wertigen Ecken in $\mathfrak{P}^1$ und p_j die Zahl der j-ecke (Flächen F mit $\operatorname{card} \Delta^0 \partial F = j$) von $\mathfrak{P}$ bedeutet.

Bevor wir uns dem Hauptthema dieses Paragraphen zuwenden, wollen wir eine zur Durchschnittsbildung duale Operation beschreiben. $\mathfrak{P}$ sei ein Komplex und $A \subset \mathfrak{P}$ eine beliebige Teilmenge. Wenn es kein Element $x \in \mathfrak{P}$ mit $\bigcup A \subset x$ gibt, setzen wir $\bigvee A := |\mathfrak{P}|$, andernfalls definieren wir $\bigvee A$ durch $\bigvee A := \bigcap \{x \in \mathfrak{P} : \bigcup A \subset x\}$.

Definition. $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ sei ein sphärischer Γ-Komplex, (k, D) mit $k \in \Delta^1 \mathfrak{P}$ und $D \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ ein zulässiges Paar. Es gelte $k = D \cap E$, mit $E \in \Delta^2 \mathfrak{P}$. Eine Teilmenge $L \subset \Delta^2 \mathfrak{P}$ ist ein (k, D)-Kranz, wenn eine der nachfolgenden Bedingungen $A\,1$, $A\,2$ erfüllt ist.

A 1. $L = \{E', D'_1, D'_2\}$ mit $E' \in \bar{E}$, $D'_i \in \bar{D}$, $D'_i \cap E' \in \bar{k}$ für alle $i \in \{1, 2\}$; $D'_1 \cap D'_2 \neq \emptyset$, $D'_1 \cap D'_2 \cap E' = \emptyset$.

A 2. Keine Teilmenge von L erfüllt *A 1.* Es gibt zwei disjunkte Teilmengen S_1, S_2, deren Vereinigung L ist. Dabei gilt für alle i entweder $S_i = \{x\}$ mit $x \in \Delta^2 \mathfrak{P}$, oder $S_i = \{E', D'\}$ mit $E' \in \bar{E}$, $D' \in \bar{D}$, $D' \cap E' \in \bar{k}$ oder $S_i = \{D'_1, E', D'_2\}$ mit $E' \in \bar{E}$, $D'_1 \in \bar{D}$, $D'_1 \neq D'_2 \in \bar{D}$, $D'_j \cap E' \in \bar{k}$ für alle $j \in \{1, 2\}$. Für genau zwei Elemente X_l, $l \in \{1, 2\}$, von $\mathfrak{P}$ gibt es Elemente $Y_{1l} \in S_1$ und $Y_{2l} \in S_2$ mit

$Y_{1l} \cap Y_{2l} = X_l$. Ferner ist $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, und schließlich genügt keine echte Teilmenge von L den bisher unter $A\,2$ genannten Bedingungen.

Wenn wir in der obigen Definition überall Δ^i durch Δ^{2-i}, $\cap$ durch $\bigvee$, $\emptyset$ durch $|\mathfrak{P}|$, $\subset$ durch $\supset$ und das Wort „Kranz" durch „Gegenkranz" ersetzen, erhalten wir den Begriff des (k, D)-Gegenkranzes. L heißt ein Kranz erster Art, wenn die Beschreibung A 1 auf ihn zutrifft, andernfalls ein Kranz zweiter Art. Wenn $L = \{D'_1, E', D'_2\}$ ein Kranz erster Art ist, bezeichnen wir das Element $D'_1 \cap D'_2$ als den äußeren Kontakt von L. Falls L von zweiter Art ist, heißen die unter A 2 beschriebenen Elemente X_1, X_2 die äußeren Kontakte von L. Da wir of mehrere Kränze gleichzeitig betrachten werden, bezeichnen wir die genannten Kontakte von L mit $X_1 L$ und $X_2 L$; ebenso schreiben wir $S_i L := S_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Wenn L ein Kranz erster Art ist, setzen wir $X_1 L = X_2 L := X$, und $S_1 L = S_2 L := L$. Die Länge dL eines Kranzes ist die Zahl seiner Elemente Aus dem Jordanschen Kurvensatz folgt: Die Flächen von $\mathfrak{P} - L$ zerfallen in zwei Klassen M_1, M_2 so, daß $|M_1|$ und $|M_2|$ Flächenstücke sind und jeder Jordanbogen, der einen Punkt von $|M_1|$ mit einem Punkt von $|M_2|$ verbindet, die Menge $|L|$ trifft. Mit $\mathfrak{C}_i L$ oder $\mathfrak{C}_i$ bezeichnen wir den von M_i in $\mathfrak{P}$ erzeugten Komplex. Wir sagen, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ seien die Komponenten von $\mathfrak{P} - L$. L ist ein freier Kranz, wenn es einen Index i so gibt, daß kein gx mit $g \in G$ und $x \in L$ zum Innern $\mathfrak{C}_i L - \partial \mathfrak{C}_i L$ gehört; die Komponente $\mathfrak{C}_i L$ nennen wir alsdann selbst frei.

Das nächste Lemma zeigt, daß wir einen (k, D)-Kranz (-Gegenkranz) als ein Hindernis auffassen können, welches sich dem Entfernen (Zusammenziehen) der Kante k entgegenstellt.

Lemma 4. *$(G, \alpha, \mathfrak{P})$ sei ein sphärischer Γ-Komplex und (k, D) in $\Delta^1 \mathfrak{P} \times \Delta^2 \mathfrak{P}$ ein zulässiges Paar. Wenn $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ weder primitiv noch reduzibel ist, gibt es in $\Delta^2 \mathfrak{P}$ einen (k, D)-Kranz.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen unseres Lemmas kann insbesondere k nicht aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ weggelassen werden. E sei die mit k inzidente von D verschiedene Fläche. Wir ordnen die Elemente von $\partial E \cap \bar{k}$ im Sinne einer der beiden Orientierungen von ∂E zu einer Folge $k_1, \ldots, k_n$ und bezeichnen mit D_i $(1 \leq i \leq n)$ das von E verschiedene mit k_i inzidente Element der Äquivalenzklasse $\bar{D}$. Wir nehmen an, es gebe einen Index i_0 so, daß $T_{i_0} := D_{i_0} \cap (E \cup \bigcup \{D_j : j < i_0\})$ kein Jordanbogen ist. Wir wählen i_0 mit dieser Eigenschaft so klein als möglich. Im Falle $T_{i_0} = \dot{D}_{i_0}$ gilt offenbar $i_0 = n$, $\Delta^2 \mathfrak{P} = \{E, D_1, \ldots, D_n\}$, und $\mathfrak{P}$ ist eine n-seitige Pyramide. Wenn T_{i_0} eine echte Teilmenge von D_{i_0} ist, hängt es nicht zusammen. Es gibt dann eine Fläche D_i $(i < i_0)$ so, daß $D_i \cap D_{i_0} \neq \emptyset$, aber $D_i \cap D_{i_0} \cap k_{i_0} = \emptyset$ ist. $\{D_i, D_{i_0}, E\}$ ist ein (k, D)-Kranz erster Art. Also können wir annehmen, jedes T_i $(1 \leq i \leq n)$ sei ein Jordanbogen, woraus folgt, daß $E' := E \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$ ein Flächenstück ist. Wir setzen $gE' := gE \cup gD_1 \cup \cdots gD_n$ $(g \in G)$. Weil (k, D) zulässig ist, gilt für g_1, g_2 mit $g_1 E' \neq g_2 E'$ stets $g_1 E' \cap g_2 E' \subset g_1 \dot{E}' \cap g_2 \dot{E}'$. Es sei $\Delta^2 \mathfrak{P}' := \{gE' : g \in G\} \cup \Delta^2 \mathfrak{P} - (\bar{D} \cup \bar{E})$, $\Delta^1 \mathfrak{P}' := \{x \cap y : x \neq y,\ x, y \in \Delta^2 \mathfrak{P}',\ \operatorname{card}(x \cap y) \geq 2\}$, $\Delta^0 \mathfrak{P}' := \{x \cap y : x \neq y, x, y \in \Delta^1 \mathfrak{P}', x \cap y \neq \emptyset\}$. Eine Wirkung α' von G auf $\mathfrak{P}'$

definieren wir in naheliegender Weise (vergleiche Abschnitt B in Paragraph 3). Wenn $\mathfrak{P}' := \Delta^0\mathfrak{P}' \cup \Delta^1\mathfrak{P}' \cup \Delta^2\mathfrak{P}'$ ein (sphärischer) Komplex ist, so entsteht $(G, \alpha', \mathfrak{P}')$ durch das Weglassen von k aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen unseres Lemmas. Wenn nicht alle Elemente von $\Delta^1\mathfrak{P}'$ Jordanbögen sind, so verfahren wir wie beim Studium des Durchschnitts T_{i_0}. Entweder ist $\mathfrak{P}$ primitiv, oder in $\mathfrak{P}$ gibt es einen (k, D)-Kranz. Als letzte Möglichkeit bleibt übrig, daß zwar alle Elemente von $\Delta^1\mathfrak{P}'$ Jordanbögen, aber nicht alle Elemente von $\Delta^0\mathfrak{P}'$ Punkte sind. Das ist nur für $\operatorname{card}\Delta^2\mathfrak{P}' = 3$, und daher $\operatorname{card}\Delta^2\mathfrak{P} \leqq 9$ möglich. Eine einfache Hilfsbetrachtung zeigt auch hier, daß $\mathfrak{P}$ primitiv oder reduzibel ist.

5. Der kombinatorische Hilfssatz

Satz 2. *Jeder sphärische Γ-Komplex ist entweder primitiv oder reduzibel.*

Beweis. Wir gehen indirekt vor und betrachten ein Gegenbeispiel $(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Es gilt also

(7) $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ ist weder primitiv noch reduzibel.

Als eine Dreierinzidenz bezeichnen wir ein Paar (x, y) in $\Delta^0\mathfrak{P} X \Delta^2\mathfrak{P}$, wo x eine dreivalente Ecke, y ein Dreieck ist und $x \in \partial y$ gilt. Im Hinblick auf Lemma 1 sehen wir

(8) In $\mathfrak{P}$ gibt es keine Dreierinzidenz.

Nach Formel (6) kommen in $\Delta^2\mathfrak{P}$ oder in $\Delta^2\hat{\mathfrak{P}}$ Dreiecke vor. Unser Beweis gliedert sich nach zunehmender Beweglichkeit solcher Dreiecke.

A. Es gibt in $\Delta^2\mathfrak{P}$ (oder in $\Delta^2\hat{\mathfrak{P}}$) ein Dreieck D und eine Kante $k \in \partial D$ so, daß (k, D) ein zulässiges Paar ist. Wir wählen (k, D) im $\mathfrak{P}$ oder in $\hat{\mathfrak{P}}$ minimal: die andere mit k inzidente Fläche E in $\Delta^2\mathfrak{P}$ (in $\Delta^2\hat{\mathfrak{P}}$) soll möglichst wenige Ecken haben und, bei minimaler Eckenzahl, möglichst wenige Kanten der Klasse $\bar{k}$ auf ihrem Rand enthalten. Dabei können wir $D \in \Delta^2\mathfrak{P}$ annehmen. Weil sich k gemäß (7) nicht entfernen läßt, ist nach Lemma 4 die Menge λ der (k, D)-Kränze nicht leer. Wir verwenden die Begriffe und Bezeichnungen des vorangehenden Paragraphen. Nun wählen wir einen minimalen (k, D)-Kranz L_0 in λ, der also die Eigenschaft hat, daß in $L_0 \cup \mathfrak{C}_1 L_0$ (oder in $L_0 \cup \mathfrak{C}_2 L_0$) kein weiteres Element von λ als Teilmenge enthalten ist. Wenn die Komponente $\mathfrak{C}_1 L_0$ nicht frei ist, gibt es $g \in G$ und $x \in L_0$ so, daß gx dem Innern von $\mathfrak{C}_1 L_0$ angehört. Es sind verschiedene Fälle zu unterscheiden, wovon wir einen als Beispiel näher betrachten. Dabei wollen wir fortan das Argument L_0 wennmöglich fortlassen, also $\mathfrak{C}_i L_0 =: \mathfrak{C}_i$, $X_i L_0 =: X_i$ und $S_i L_0 =: S_i$ schreiben. Wir untersuchen etwa den Fall, wo $S_1 = \{D_1, E, D_2\}$, $S_2 = \{D'_1, E', D'_2\}$ mit $D_i, D'_i \in \bar{D}$, $E, E' \in \bar{E}$ und $X_i = D_i \cap D'_i$ gilt. Ferner liege gD_1 für passendes $g \in G$ in $\mathfrak{C}_1$. $gL_0 \subset \mathfrak{C}_1$ widerspricht der Minimalität von L_0. Wir nehmen etwa $gD'_1 \notin \mathfrak{C}_1$ an. Aus $gD'_1 \in \mathfrak{C}_2$ folgt mit $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 = \{X_1, X_2\}$ die Bedingung $gX_1 \in \{X_1, X_2\}$. Aber auch im Falle $gD'_1 \in L_0$ muß gX_1 in $\{X_1, X_2\}$ liegen, dies wegen der Zulässigkeit des Paares (k, D). Wir nehmen $gX_1 = X_1$ an und studieren das g-Bild der Kante $k_1 := D_1 \cap E$. Wenn gk_1 eine Randkante von $\mathfrak{C}_1$

ist, liegt sie auf ∂E (oder auf $\partial E'$), und entweder ist $\{E, D_1, gD_1\}$ ein der Minimalität von L_0 widersprechender Kranz, oder D_1 und der Punkt $E \cap D_1 \cap gD_1$ bilden, entgegen (8), eine Dreierinzidenz in $\mathfrak{P}$. Ist gk_1 eine innere Kante von $\mathfrak{C}_1$, so haben wir $gS_1 := \{gx : x \in S_1\} \subset \mathfrak{C}_1$ und $gX_2 = X_2$ (oder $gX_2 \in \Delta^0 \mathfrak{C}_1 - \Delta^0 \partial \mathfrak{C}_1$). Aus gS_1 und geeigneten Teilmengen von L_0 lassen sich wieder Kränze bilden, welche der Minimalität von L_0 widersprechen, außer in dem einen Fall, wo $gS_1 = \Delta^2 \mathfrak{C}_1$ ist. Ähnlich verfahren wir bei allen anderen Konfigurationen von g, S_1 und S_2. Als weiteres Beispiel sei nur noch die Möglichkeit erwähnt, daß $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 = \{gD'\}$, für Elemente $g \in G$ und $D' \in L_0 \cap \bar{D}$ eintritt. Weil in $\mathfrak{P}$ keine Dreierinzidenzen vorkommen, gilt $\Delta^0 \partial(gD') = \{y_1, y_2, u\}$, wo u außer mit D' noch nicht genau drei Flächen D'_1, D'_2 und E' inzident ist, wobei $D'_i \in \bar{D}$ $(i = 1, 2)$, $E' \in \bar{E}$ und (bei passender Wahl der Bezeichnung) $S_1 = \{D'_1, E', D'_2\}$ gilt. gD' hat mit zwei Elementen von $\bar{D}$ (nämlich mit D'_1 und D'_2) eine Kante zum Durchschnitt, und weil dasselbe für jede andere Fläche in der Klasse $\bar{D}$ zutrifft, ist $\mathfrak{P}$, im Widerspruch zu (7), eine Trommel. Zusammenfassend finden wir entweder

(9) Der (k, D)-Kranz L_0 ist frei, oder

(10) Es gibt $g \in G$ mit $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 = gS_1$.

Zuerst nehmen wir an, (9) treffe zu. $\mathfrak{C}_1$ sei wie oben die freie Komponente von $\mathfrak{P} - L_0$ (wenn beide Komponenten frei sind, wählen wir $\mathfrak{C}_1$ unter ihnen beliebig). Den mit dem äußeren Kontakt X_i von L_0 inzidenten oder identischen Punkt des Randes $\partial \mathfrak{C}_1$ bezeichnen wir mit $x_i \cdot x_1 = x_2$ ist nur für $dL_0 = 3$ möglich. Wenn L_0 ein Kranz zweiter Art, also $x_1 \neq x_2$, ist, gibt es wegen Lemma 2 zu jedem $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ höchstens einen Automorphismus $g_j \in G_{\mathfrak{C}_1}$, welcher die entsprechende Forderung der nachstehenden Liste erfüllt.

$$g_0 x_1 = x_1, g_0 S_1 = S_1 \,.\, g_1 x_1 = x_1, g_1 S_1 = S_2 \,.\, g_2 x_1 = x_2,$$
$$g_2 S_1 = S_1 \,.\, g_3 x_1 = x_2, g_3 S_1 = S_2 \,.$$

$G_{\mathfrak{C}_1}$ enthält höchstens diese vier Abbildungen, und da $\mathfrak{C}_1$ frei ist, gilt für alle $g \in G - G_{\mathfrak{C}_1}$ mit $g\mathfrak{C}_1 := \{gx : x \in \mathfrak{C}_1\}$ die Beziehung $g\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_1 \subset \{x_1, x_2\}$. Wenn wir daher den Komplex $\mathfrak{P}$ modifizieren wollen, müssen wir den Mengen $st x_i$ besondere Aufmerksamkeit schenken, weil dort eine Veränderung in $\mathfrak{C}_1$ und eine solche in $g\mathfrak{C}_1$ einander stören könnten. Falls L_0 ein (k, D)-Kranz erster Art ist, also $x_1 = x_2$ gilt, gibt es in $G_{\mathfrak{C}_1}$ höchstens ein von der Identität verschiedenes Element, das wir gegebenenfalls mit g_2 bezeichnen werden. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ seien die durch x_1 und x_2 auf $\partial \mathfrak{C}_1$ bestimmten einfachen Wege (im Falle $x_1 = x_2$ setzen wir $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 := \partial \mathfrak{C}_1$). Wir nehmen an, $\mathfrak{T}_1$ enthalte eine Kante m, die weder mit x_1 noch mit x_2 inzident ist, und bezeichnen die m enthaltenden Flächen von $\mathfrak{P}$ mit $F \in L_0$ und $H \in \mathfrak{C}_1$. Die Wahl von m zieht $F \notin \bar{D}$ nach sich. Es ist $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 \neq \{H\}$, weil sonst jeder Endpunkt von m an einer Dreierinzidenz beteiligt wäre, im Widerspruch zu (8). Weiter haben wir

(11) $\partial H \cap \partial \mathfrak{C}_1 = \{m\} \cup \partial m$.

x sei andernfalls ein nicht mit m inzidenter Eckpunkt von $\partial H \cap \partial \mathfrak{C}_1$. Die Endpunkte von m bezeichnen wir mit p_1 und p_2. Wenn p_i mit einer Kante

$gm \neq m, g \in G$, inzident ist, folgt mit (9) $g \in G_{\mathfrak{C}_1}$, also $g = g_j$ für passendes j. Infolgedessen ist eines der Paare (m, p_i) $(i = 1, 2)$ zulässig, und m läßt sich in $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zusammenziehen. Zur Illustration betrachten wir den Fall, wo sowohl (m, p_1) als (m, p_2) zulässig ist und $G_{\mathfrak{C}_1} = \{1\}$ gilt. Nach dem Dualen zu Lemma 4 gibt es, wenn m sich nicht zusammenziehen läßt, einen Punkt $p \in \Delta^0 \mathfrak{C}_1$ mit $\bigvee \{p, p_1\} \in \mathfrak{P}, \bigvee \{p, p_2\} \in \mathfrak{P}$, aber $\bigvee \{p, p_1, p_2\} = |\mathfrak{P}|$.

Aus den ersten beiden Bedingungen folgt jedoch $p = x$, und die dritte Forderung steht sodann mit $\{x\} \cup \partial m \subset \partial H$ im Widerspruch. Der Rest dieses Abschnittes A wird hauptsächlich dem Versuch gewidmet sein, eine geeignete Kante auf dem Rand $\partial \mathfrak{C}_1$ wegzulassen. Dabei dient uns der Begriff des schlichten Kranzes. $(m, H) \in \Delta^1 \mathfrak{C}_1 \mathsf{X} \Delta^2 \mathfrak{C}_1$ sei ein zulässiges Paar und $L' \subset \mathfrak{C}_1 \cup L_0$ ein (m, H)-Kranz mit der Eigenschaft, daß eine Komponente von $\mathfrak{P} - L'$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{C}_1$ ist. Diese Komponente bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_1 L'$. Der Kranz L' heißt schlicht, wenn zusätzlich gilt:

(a) $\mathfrak{C}_1 L'$ ist frei

(b) $d L' \leqq 4$, $\operatorname{card} G_{\mathfrak{C}_1 L'} \leqq 2$.

(c) Die Menge der äußeren Kontakte von L' ist von $\{x_1, x_2\}$, verschieden.

Den Annahmen (7) und (9) fügen wir zunächst noch die Voraussetzung bei:

(12) Es existiert kein schlichter Kranz $L' \subset \mathfrak{C}_1 \cup L_0$. Hierauf gestützt zeigen wir

(13) Für alle $g \in G$ mit $H \cap gH \notin \{\emptyset, H\}$ besteht $H \cap gH$ aus einem einzigen Punkt von ∂m.

Wenn (13) falsch ist, wird es durch g_1, g_2 oder g_3 verletzt. Zunächst sei $H \cap g_j H = \emptyset$ für $j \neq 2$, und g_2 verletze (13). Im Falle $g_2 m \cap m = \emptyset$ ist $\{F, H, g_2 H\}$ ein schlichter Kranz. Im Falle $g_2 m \cap m \neq \emptyset$ ist $H \cap g_2 H$ eine Kante l mit $g_2 l = l$ und $g l \cap l = \emptyset$ für alle $g \notin \{1, g_2\}$. l läßt sich wegen (12) weglassen. Nun sei $H \cap g_j H \neq \emptyset$ für $j \in \{1, 3\}$ (L_0 ist also sicher von der zweiten Art). Wenn $H \cap g_j H$ eine Kante ist, läßt sie sich in $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zusammenziehen; also gelte jetzt $H \cap g_j H \in \Delta^0 \mathfrak{P}$. Mit $\partial m = \{p_1, p_2\}$ können wir annehmen, (m, p_1) sei zulässig. Im Falle $H \cap g_1 H \neq \emptyset$ setzen wir $q_1 := g_1 p_1$, andernfalls kommt g_1 in $G_{\mathfrak{C}_1}$ nicht vor, und wir legen q_1 durch $q_1 := g_3 p_2$ fest. Nach dem Dualen zu Lemma 4 gibt es, da sich m gemäß Gegenannahme nicht zusammenziehen läßt, eine Fläche $F_1 \in \mathfrak{C}_1$ mit $\{p_1, q_1\} \subset \partial F_1$. Wenn es eine Kante $o \in \partial F_1$ gibt, die weder zu ∂C_1 noch zu $\bigcup \{\partial H' : H' \in \bar{H}\}$ gehört, bezeichnen wir die von F_1 verschiedene o enthaltende Fläche mit K. Wenn (o, K) nicht zulässig ist, gehört g_1 zu $G_{\mathfrak{C}_1}$, und $K \cap g_1 K$ ist eine Kante, die im Hinblick auf (12) aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entfernt werden kann. So sei jetzt (o, K) zulässig. Da o sich nicht entfernen läßt, ist entweder $\{F_1, K, g_1 K\}$ ein schlichter Kranz oder es gibt, im Falle $K \cap g_1 = \emptyset$, in $\mathfrak{C}_1$ einen schlichten (o, K)-Kranz zweiter Art. Also muß $\partial F_1 \subset \partial C_1 \cup \bigcup \{\partial H' : H' \in \bar{H}\}$ sein; F_1 enthält genau einen der Punkte $\{x_1, x_2\}$, etwa x_1. Entsprechend finden wir eine Fläche $F_2 \in \mathfrak{C}_1$ mit $\partial F_2 \subset \partial C_1 \cup \bigcup \{\partial H' : H' \in \bar{H}\}$ und $x_2 \in \partial F_2$. Im Falle, wo $G_{\mathfrak{C}_1}$ nicht alle Automorphismen g_i enthält oder wo $g_2 m = m$ gilt, haben wir $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 = \{F_1, F_2, H, g_j H\}$, und können auf $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ die Operation $\bar{\omega}_0(\hat{H}, g_j \hat{H})$ anwenden. Andernfalls sei $l \in \partial F_1$ eine von x_1

ausgehende Kante; l ist mit einem Dreieck $D' \in L_0$ inzident, und D' enthält außer l eine Kante von $\bar{k}$ sowie eine weitere Kante $\tilde{m}$. Wenn $\tilde{m} \notin \bar{l}$ gilt, ist $(\tilde{m}, D')$ ein zulässiges Paar, und $\tilde{m}$ läßt sich aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entfernen, also gehöre jetzt $\tilde{m}$ zu $\bar{l}$. $x_1 \in \partial C_1$ ist viervalent, und in $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ können wir die Operation $\bar{\omega}_0(\hat{D}', g_1 \hat{D}')$ durchführen. Damit ist (13) gezeigt, und wegen (11) und (13) läßt sich m nur dann nicht aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entfernen, wenn in $\mathfrak{C}_1 \cup L_0$ ein schlichter (m, H)-Kranz liegt, im Widerspruch zu (12). Zusammenfassend finden wir

(14) Jede Kante von $\partial\mathfrak{C}_1$ ist entweder mit x_1 oder mit x_2 inzident. Das bedeutet insbesondere, daß L_0 von zweiter Art ist. Zusätzlich nehmen wir vorerst an

(15) L_0 ist ein Kranz zweiter Art mit $\operatorname{card} \Delta^2\mathfrak{C}_1 \geqq 2$.

Ferner setzen wir hier die Existenz einer Fläche $H \in \mathfrak{C}_1$ und einer Kante $m \in \partial H$ mit folgenden Eigenschaften voraus:

(d) $H \cap |\partial\mathfrak{C}_1| = m$.

(e) Es gibt keine Fläche $K \in \mathfrak{C}_1$ mit $K \cap H \neq \emptyset$, $K \cap m = \emptyset$, und $\emptyset \neq (\{x_1, x_2\} - \partial m) \subset \partial K$.

Wenn (m, H) nicht zulässig ist, muß $H \cap g_2 H$ eine Kante $l \in \mathfrak{C}_1$ sein, deren Durchschnitt mit $|\partial\mathfrak{C}_1|$ ein dreivalenter Eckpunkt p von $\mathfrak{P}$ ist. p gehört zum Rand einer Fläche $X \in L_0$, und ein Bestandteil des Kranzes L_0, etwa $S_1 L_0$, besteht aus X allein. Die Kante l läßt sich in $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zusammenziehen. Also ist (m, H) zulässig, und wenn m sich nicht entfernen läßt, tritt in $\mathfrak{C}_1 \cup L_0$ ein schlichter Kranz auf, im Widerspruch zu (12). In $\mathfrak{C}_1$ gibt es daher kein Paar (m, H), welches den Bedingungen (d) und (e) genügt. Wenn x_1 mit x_2 durch eine Kante von $\partial\mathfrak{C}_1$ verbunden ist, erhalten wir aus unseren jetzigen Voraussetzungen einen Widerspruch zu $\operatorname{card} \Delta^2\mathfrak{C}_1 \geqq 2$. u_1 und u_2 seien die Punkte von $\Delta^0 \partial\mathfrak{C}_1 - \{x_1, x_2\}$; die Paare $\{x_1, x_2\}$ und $\{u_1, u_2\}$ trennen einander auf $\partial\mathfrak{C}_1$. (m, H) mit $m \in \Delta^1 \partial\mathfrak{C}_1$ und $H \in \Delta^2\mathfrak{C}_1, m \in \partial H$, sei ein Paar, welches (d) verletzt; es gelte etwa $\partial H \cap \Delta^0 \partial\mathfrak{C}_1 = \{x_1, x_2, u_1\}$ $o \in \partial H$ sei eine innere Kante von $\mathfrak{C}_1$, welche x_1 unter ihren Endpunkten enthält. Wir bezeichnen die von H verschiedene mit o inzidente Fläche von $\mathfrak{P}$ mit K. Wenn (m, K) nicht zulässig ist, muß $K \cap g_2 K$ eine Kante sein, die sich in $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zusammenziehen läßt. Ist (m, K) zulässig, so können wir m im Hinblick auf (12) entfernen. Nun nehmen wir für das Paar (m, H) an, es erfülle $\partial H \cap \Delta^0 \partial\mathfrak{C}_1 = \{x_1, u_1, u_2\}$. o sei eine Kante von $\partial\mathfrak{C}_1$ mit $x_2 \in \partial o$ und K die mit o inzidente Fläche in $\mathfrak{C}_1$. (o, K) erfüllt (d) und (e) außer in dem einen Fall, wo $\Delta^2\mathfrak{C}_1 = \{H, K\}$ gilt. Weil $\mathfrak{C}_1$ frei ist, sind die Paare $(H \cap K, H)$ und $(H \cap K, K)$ zulässig, und da sonst ein Widerspruch zur Minimalität von (k, D) entstünde, ist die eingangs erwähnte Fläche E ein Dreieck mit $E \cap \bar{k} = \{k\}$. Wegen (8) sind u_1 und u_2 beide viervalent, und die Kante $K \cap H$ läßt sich nur dann nicht zusammenziehen, wenn $\mathfrak{P}$ ein Oktaeder, also primitiv ist. So finden wir, daß jedes Paar (m, H) mit $m \in \partial\mathfrak{C}_1$ und $H \in \Delta^2\mathfrak{C}_1, m \in \partial H$ die Bedingung (d) erfüllt. (m_1, H_1) mit $x_1 \in \partial m_1$ und (m_2, H_2) mit $x_2 \in \partial m_2$ und $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ seien zwei solche Paare, und wir können annehmen, beide verletzten (e). K_1 und K_2 bedeuten zwei der unter (e) beschriebenen Flächen, so daß etwa $m_1 \cap K_1 = \emptyset, H_1 \cap K_1 \neq \emptyset, x_2 \in \partial K_1$ gilt.

$H_1 \cap K_2$ (und $H_2 \cap K_1$) ist eine Kante, die sich aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entfernen läßt. (15) kann also nicht zutreffen.

Wenn endlich $\mathfrak{C}_1 L_0$ eine einzige Fläche F von $\mathfrak{P}$ enthält, wählen wir $u \in \Delta^0 \partial \mathfrak{C}_1 - \{x_1, x_2\}$ beliebig. Da es in $\mathfrak{P}$ keine Dreierinzidenzen gibt, ist u außer mit F noch mit genau drei Flächen $E' \in \bar{E}, D_1' \in \bar{D}$ und $D_2' \in \bar{D}$ inzident, und weil $\mathfrak{C}_1$ frei ist und wir das ursprüngliche Paar (k, D) minimal gewählt haben, läßt sich in $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ die Operation $\bar{\omega}_0(\hat{D}_1, \hat{D}_2)$ durchführen.

Die Bedingungen (7), (9) und (12) sind demnach unverträglich. Wir heben (12) auf und definieren auf der (nichtleeren) Menge μ der schlichten Kränze durch $L \leqq L' :\Leftrightarrow \mathfrak{C}_1 L \subset \mathfrak{C}_1 L'$ eine Teilordnung. L_1 sei ein bezüglich $\leqq$ minimales Element. Wenn es in $\mathfrak{C}_1 L_1 - \partial \mathfrak{C}_1 L_1$ eine Kante m so gibt, daß keine dreivalente Ecke von $\mathfrak{P}$ mit zwei Elementen der Klasse $\bar{m}$ inzident ist, bezeichnen wir mit H_1 und H_2 die beiden Flächen in $\mathfrak{C}_1 L_1$, deren Durchschnitt m ist. Wegen der Bedingung (b) für schlichte Kränze ist, bei geeigneter Wahl der Indexe, (m, H_1) zulässig, und wenn m nicht entfernt werden kann, gibt es einen (m, H_1)-Kranz L. Wenn L von der ersten Art ist, gilt $L \subset \mathfrak{C}_1 L_1$, und L widerspricht der Minimalität von L_1. Daher können wir jetzt, wenn $g \in G_{\mathfrak{C}_1 L_1} - \{1\}$ mit $gH_2 = H_2, gm \neq m$, existiert, annehmen, es gelte $gH_1 \cap H_1 = \emptyset$. Der Kranz L ist also von der zweiten Art, und wenn er in $\mathfrak{C}_1 L_1 \cup L_1$ liegt, erhalten wir einen Widerspruch zur Minimalität von L_1 in der Menge μ. Als einzige Möglichkeit bleibt, bei passender Bezeichnung, $S_1 L \subset \mathfrak{C}_1 L_1$, $S_2 L \subset \mathfrak{C}_2 L_1$ mit $|S_1 L| \cap |S_2 L| = \{u_1, u_2\}$, wo die Punkte u_1 und u_2 die äußeren Kontakte von L_1 sind. Wenn es $X \in L_1$ mit $\{u_1, u_2\} \subset \partial X$ gibt, widerspricht $S_1 L \cup \{X\}$ der Minimalität von L_1, außer im Falle $m \cap X \neq \emptyset$. Wenn dazu noch $\operatorname{card}(\partial H_2 \cap \bar{m}) = 2$ gilt, läßt sich, mit Rücksicht auf die Minimalität von L_1, die Kante $H_1 \cap X$ entfernen. Nun sei $\partial H_2 \cap \bar{m} = \{m\}$. Wenn $S_2 L \subset \mathfrak{C}_2 L_1$ aus einer einzigen Fläche Y besteht, ist $Y \cap X$ eine Kante mit den Endpunkten u_1, u_2, und das Paar $(m \cap X, X)$ ist eine Dreierinzidenz; andernfalls gilt, für passendes $g \in G_{\mathfrak{C}_1}, S_2 L = g S_1 L$. Im Falle $gX \neq X$ ist $(m \cap X, X)$ wieder eine Dreierinzidenz, im Falle $gX = X$ läßt sich die Operation $\bar{\omega}_0(m \cap X, g(m \cap X))$ durchführen. Wenn u_1 mit u_2 nicht durch eine Fläche von L_1 verbunden ist, kann kein Kranz L der beschriebenen Art existieren. Andernfalls zeigt eine einfache Betrachtung des durch $|\partial \mathfrak{C}_2 L_1|$ und $|S_2' L|$ berandeten Teilkomplexes von $\mathfrak{C}_1 L_0$, daß es einen sphärischen Komplex $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{C}_1 L_0$ geben müßte, was nicht sein kann. Es bleibt der Fall, daß $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 L_1 = \{F\}$ gilt, wobei F wegen (b) ein Dreieck oder ein Viereck ist. Wenn es eine Kante $o \in \partial F$ mit $o = \bigvee \{u_1, u_2\}$ gibt, läßt sich o entfernen, außer in dem einen Fall, wo $o \in \partial H$ für eine Fläche $H \in L_0$, und zudem $F \cap |\mathfrak{C}_1 L_0| \neq o$ gilt. Falls dabei ein Endpunkt von o zur Menge der äußeren Kontakte von L_0 gehört, gibt es in $L_0 \cup \{F\}$ einen der Minimalität von L_0 in λ widersprechenden (k, D)-Kranz, andernfalls steht H im Gegensatz zu (11). Schließlich sei $F = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$, wobei die Paare $\{u_1, u_2\}$ und $\{v_1, v_2\}$ einander auf ∂F trennen. L_1 sei ein (m, H)-Kranz, für ein Paar $(m, H) \in \Delta^1 \mathfrak{P} \mathrm{X} \Delta^2 \mathfrak{P}$. Wegen der Bedingung (b) für schlichte Kränze ist v_i eine dreiwertige, mit genau einem Element von $\bar{m}$ inzidente Ecke von $\mathfrak{C}_1$. Weil $G_{\mathfrak{C}_1}$ höchstens die

Elemente g_j $(0 \leqq j \leqq 3)$ enthält, ist es leicht zu sehen, daß sich auf $(G, \alpha, \hat{\mathfrak{P}})$ die Operation $\bar{\omega}_0(v_1, v_2)$ anwenden läßt.

Die Forderungen (7) und (9) sind also selbst schon unverträglich. Wir ersetzen (9) durch (10) und haben $\Delta^2\mathfrak{C}_1 = g(S_1 L_0)$ $(: = \{gx : x \in S_1 L_0\}$, für passendes $g \in G$. Wenn dabei $S_1 L_0 = \{X\}$, für $X \in \Delta^2\mathfrak{P}$, gilt, so muß, wegen (8), $S_2 L = \{D_1', E, D_2'\}$ mit $D_1' \neq D_2'$ und $D_1' \cap D_2' \cap E \cap gX \neq \emptyset$ gelten. Nun folgt leicht, daß X ein Dreieck und $(X \cap gX, X)$ ein zulässiges Paar ist, welches der Minimalität von (k, D) widerspricht. Wenn $S_1 L_0$ aus mehr als einem Element besteht, folgt zunächst mit (8) $g\{x_1, x_2\} = \{x_1, x_2\}$. Eine Kante $m \in \partial\mathfrak{C}_1$, die weder mit x_1 noch mit x_2 inzident ist, läßt sich zusammenziehen. Wenn keine solche Kante vorkommt, besteht $\Delta^2\mathfrak{C}_1$ aus zwei Dreiecken. Wegen (8) ist alsdann $\mathfrak{P}$ eine Doppelpyramide, also primitiv, und der Fall A der Gegenannahme ist widerlegt

B. Weder in $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ noch in $(G, \hat{\alpha}, \hat{\mathfrak{P}})$ gibt es ein zulässiges Paar (m, H) mit $\operatorname{card} \Delta^0 \partial H = 3$. Aus (6) lesen wir ab, daß es in $\Delta^2 P$ (oder in $\Delta^2\hat{\mathfrak{P}}$) ein Dreieck D gibt. $k \in \partial D$ sei eine Kante seines Randes. Weil andernfalls (k, D) oder (l, D), mit $l: = \Delta^1 \partial D - \bar{k}$, zulässig, oder (8) verletzt wäre, gilt sicher $\operatorname{card}(\partial D \cap \bar{k}) = 3$. Zu je zwei Kanten k_1, k_2 in ∂D existiert also immer ein $g \in G$ mit $gk_1 = k_2$. Wenn dabei $gD \neq D$ ist, folgt zunächst $\Delta^2\mathfrak{P} = \bar{D}$, und wegen $\operatorname{card}(\partial D \cap \bar{k}) = 3$ sind alle Ecken von $\mathfrak{P}$ zueinander äquivalent. $\mathfrak{P}$ ist alsdann ein reguläres Dreieckspolyeder. Daher bewirkt die Gegenannahme (7):

(16) G_x ist für alle dreivalenten Elemente $x \in \mathfrak{P}$ auf der Menge der (drei) mit x inzidenten Kanten transitiv.

Insbesondere gilt im Hinblick auf Lemma 2

(17) Für alle dreivalenten Elemente $x \in \mathfrak{P}$ enthält G_x einen Automorphismus der Ordnung 3.

Wenn es in $\mathfrak{P}$ (oder in $\hat{\mathfrak{P}}$) zwei Dreiecke gibt, deren Durchschnitt eine Kante ist, so ist $\mathfrak{P}$ wiederum regulär. Falls der Durchschnitt zweier Dreiecke $D_1 \neq D_2$ von $\mathfrak{P}$ nicht leer ist, gilt daher $D_1 \cap D_2 = : x \in \Delta^0\mathfrak{P}$. $D_1, D_2, \ldots, D_n$ $(n \geqq 2)$ seien die mit x inzidenten Dreiecke, und $\mathfrak{Q}^1$ der Graph $\mathfrak{Q}^1 : = \bigcup\{\partial D' : D' \in \bigcup\{\bar{D}_i : 1 \leqq i \leqq n\}\}$. Die Ecken von $\mathfrak{Q}^1$ sind alle unter der Wirkung α zueinander äquivalent. Wegen $D_i \cap D_j = \{x\}$ für $i \neq j$ wäre im Falle $n \geqq 3$ jeder Eckpunkt von $\mathfrak{Q}^1$ mindestens 6-valent, was sich mit der Tatsache, daß $|\mathfrak{Q}^1|$ auf einer Sphäre liegt, nicht verträgt. Für $n = 2$ sei F eines der durch den viervalenten Graphen $\mathfrak{Q}^1$ auf der Sphäre $S : = |\mathfrak{P}|$ bestimmten minimalen Flächenstücke. Das heißt, daß es einen Zyklus $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{Q}^1$ mit $|\mathfrak{C}| = \dot{F}$ gibt, und daß kein innerer Punkt von F zu $|\mathfrak{Q}^1|$ gehört. Wegen (16) wird S durch die Dreiecke $D' \in \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ und durch die Flächenstücke gF, $g \in G$, überdeckt. gF ist dabei dasjenige durch den Zyklus $\{gx : x \in \mathfrak{P},\ x \subset \dot{F}\}$ berandete Flächenstück auf S, welches keinen Punkt von $|\mathfrak{Q}^1|$ im Innern enthält. Ohne Mühe bestätigen wir, daß $\mathfrak{Q}^1$ dreifach zusammenhängt, also einen sphärischen Komplex $\mathfrak{Q}$ mit $\Delta^2\mathfrak{Q} = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup \{gF : g \in G\}$ bestimmt, und zwar ist $\mathfrak{Q}$ ein abgestumpftes reguläres Dreikantspolyeder, was sich beispielsweise leicht aus (6), angewendet auf $\mathfrak{Q}$, ergibt. Die Wirkung α von G auf $\mathfrak{Q}^1$ setzt sich eindeutig zu einer Wirkung

$\beta: G \times \mathfrak{Q} \to \mathfrak{Q}$ fort. $\mathfrak{C}_F \subset \mathfrak{P}$ sei der Komplex mit $|\mathfrak{C}_F| = F$. Wenn der Graph $\mathfrak{C}_F^1 := \Delta^1 \mathfrak{C}_F \cup \Delta^0 \mathfrak{C}_F$ dreifach zusammenhängend ist, definieren wir einen sphärischen Γ-Komplex $(G_{\mathfrak{C}_F}, \gamma, \mathfrak{D})$. Dabei gelte

$$\mathfrak{D}^1 := \mathfrak{C}_F^1, \Delta^2(\mathfrak{D}) := \Delta^2 \mathfrak{C}_F \cup \{\bigcup (\Delta^2 \mathfrak{P} - \Delta^2 \mathfrak{C}_F)\},$$

ferner setzen wir für $x \in \mathfrak{C}_F$ und $g \in G_{\mathfrak{C}_F}$ $\gamma(g, x) := \alpha(g, x)$. $F_0 \in \mathfrak{D}$ sei die Fläche $\bigcup (\Delta^2 \mathfrak{P} - \Delta^2 \mathfrak{C}_F)$. Wir setzen $\gamma(g, F_0) := F_0$, für alle $g \in G_{\mathfrak{C}_F}$. Wegen (6) gibt es in $\mathfrak{D}$ wenigstens 8 dreivalente Elemente. Wenn F_0 nicht ein Dreieck ist, bedeute x ein dreivalentes Element in $\mathfrak{C}_F - \partial \mathfrak{C}_F \subset \mathfrak{P}$. In $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ haben wir die Beziehung $G_x \subset G_{\mathfrak{C}_F}$, welche zu (17) im Widerspruch steht, da $G_{\mathfrak{C}_F}$ kein Element der Ordnung 3 enthält. Wenn F_0 ein Dreieck ist, wählen wir drei verschiedene dreivalente Elemente x_1, x_2, x_3 in $\mathfrak{C}_F - \partial \mathfrak{C}_F$, deren Existenz wieder durch (6) garantiert ist. Wegen Lemma 2 enthält $G_{\mathfrak{C}_F}$ höchstens zwei Automorphismen der Ordnung 3. Wir bezeichnen mit g_i eine der nach (17) in G_{x_i} existierenden Abbildungen der Ordnung 3. Wegen der vorangehenden Bemerkung muß etwa $g_1 = g_2$ gelten. F_0 ist ein Fixelement von $g_1 (= g_2)$. g_1 hat nach Lemma 3 höchstens noch ein weiteres Fixelement, und aus $g_1 x_1 = x_1$ und $g_1 x_2 = g_2 x_2 = x_2$ folgt daher $x_1 = x_2$, im Widerspruch zur Wahl der x_i. Wenn der Graph $\mathfrak{C}_F^1$ nicht dreifach zusammenhängend ist, gilt entweder, im Widerspruch zu (7), $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$, oder F ist in $\mathfrak{Q}$ ein Viereck. In diesem letzten Fall gibt es wiederum in $\mathfrak{C}_F - \partial \mathfrak{C}_F$ ein dreivalentes Element, und wir fahren wie oben weiter, oder $\Delta^2 \mathfrak{C}_F$ besteht aus zwei Dreiecken, die eine Kante gemeinsam haben. Als Ergebnis finden wir somit

(18) Zwei verschiedene Dreiecke in $\mathfrak{P}$ sind stets disjunkt.

Wir wählen ein Dreieck $D \in \Delta^2 \mathfrak{P}$, eine Kante $k \in \partial D$, und bezeichnen die andere mit k inzidente Fläche mit E. Wenn (k, E) nicht zulässig ist, gilt wegen (8) $\operatorname{card}(\partial E \cap \bar{k}) \geqq 2$. Wir wenden auf $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ zuerst $\eta_0(D)$ an, was wegen (18) und (8) erlaubt ist, und gehen sodann zum dualen Komplex über. Der entstandene Γ-Komplex widerspricht (18). Nach Lemma 4 finden wir also, wenn k sich nicht entfernen läßt, einen (k, E)-Kranz L_0. Wir wählen L_0 so, daß in $L_0 \cup \mathfrak{C}_1 L_0$ kein weiterer (k, E)-Kranz enthalten ist. Mit x_1 und x_2 bezeichnen wir die mit den äußeren Kontakten von L_0 inzidenten oder identischen Punkte des Randes $\partial \mathfrak{C}_1 L_0$. u_1 und (wenn vorhanden) u_2 seien die Punkte von $\Delta^0 \partial \mathfrak{C}_1 L_0$, welche in Dreiecken der Menge $\bar{D} \cap L_0$ liegen. Wenn $\mathfrak{C}_1 L_0$ einen inneren Eckpunkt $p \notin \partial \mathfrak{C}_1 L_0$ enthält, finden wir wie beim Nachweis von (18) ein dreivalentes Element $z \in \Delta^0 \mathfrak{C}_1 L_0 \cup \Delta^2 \mathfrak{C}_1 L_0$, das von den Punkten x_i und u_i verschieden ist. Weil $\mathfrak{C}_1 L_0$ frei ist, gilt $G_z \subset G_{\mathfrak{C}_1 L_0}$. Jedes Element von $G_{\mathfrak{C}_1 L_0}$ bildet die Menge $\{x_1, x_2\}$ in sich ab und hat daher eine Ordnung $\leqq 2$. Zusammen mit $G_z \subset G_{\mathfrak{C}_1 L_0}$ widerspricht dies der Feststellung (17). Wenn zwar $\Delta^0 \mathfrak{C}_1 L_0 - \partial \mathfrak{C}_1 L_0 = \emptyset$ ist, aber $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 L_0$ ein Dreieck enthält, geraten wir mit (18) in Konflikt. Schließlich bestehe $\Delta^2 \mathfrak{C}_1 L_0$ aus einem einzigen Viereck F; die Eckpunkte $u_i \in \partial F$ sind viervalent. Indem wir auf $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ die Operation $\eta_0(D)$ anwenden, gehen D' und u_1 (wenn die Bezeichnungen so sind, daß $D' \in \bar{D}_1 L_0$ und $u_1 \in \partial D'$ gilt) in zwei durch eine Kante verbundene dreivalente Ecken über, was, wenn der entstehende Komplex wieder unter die in Abschnitt B beschriebene Kategorie fällt, zu (18) einen Widerspruch bildet.

Damit ist die Gegenannahme (7) in allen Fällen widerlegt, und der Satz 2 bewiesen.

6. Einbettungen

E^3 sei der dreidimensionale euklidische Raum und o sein Ursprung. Wir setzen $E^3_+ := E^3 - \{o\}$ und bezeichnen mit M_+ die Menge aller den Ursprung meidenden Ebenen in E^3. e sei ein auf dem zu $H \in M_+$ parallelen Unterraum von E^3 senkrechter Vektor von E^3_+, $\langle e, H\rangle$ der gemeinsame Wert der Skalarprodukte $\langle e, x\rangle, x \in H$. Wir setzen $rH := (1/\langle e, H\rangle)e$, wobei die rechte Seite offenbar nicht von der Wahl des Vektors e abhängt. Für $p \in E^3_+$ bedeute rp den Punkt p selbst. Wenn ein sphärischer Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ vorliegt, führen wir die Abkürzungen $X(G, \alpha, \mathfrak{P}) := \Delta^0\mathfrak{P} \cup \Delta^2\mathfrak{P}$ und $W(G, \alpha, \mathfrak{P}) := \{(x, y) : x \in \partial y$ und $(x, y) \in \Delta^0\mathfrak{P} X \Delta^2\mathfrak{P}\}$ ein. Zu jedem $w = (x, y)$ mit $x \in \Delta^0\mathfrak{P}$ und $y \in \Delta^2\mathfrak{P}$ gehört die Klasse $\overline{w} := \{(gx, gy) : g \in G\}$ (w braucht nicht in der Menge $W(G, \alpha, \mathfrak{P})$ der Inzidenzen zu liegen). Wir setzen $\overline{X}(G, \alpha, \mathfrak{P}) := \{\overline{x} : x \in X(G, \alpha, \mathfrak{P})\}$ und $\overline{W}(G, \alpha, \mathfrak{P}) = \overline{W} := \{\overline{w} : w \in W(G, \alpha, \mathfrak{P})\}$. Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, lassen wir das Argument $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ bei X, $\overline{X}$, W und $\overline{W}$ fortan weg. Offensichtlich existieren Auswahlfunktionen $\beta : \overline{X} \to X$ so, daß für alle $\overline{x} \in \overline{X}$ das Element $\beta\overline{x}$ in $\overline{x}$ liegt sowie bei gegebenem β, Abbildungen

$$\gamma : \{\overline{(x, y)} : x \in \Delta^0\mathfrak{P}, y \in \Delta^2\mathfrak{P}\} \to G \quad \text{mit} \quad ((\gamma\overline{v})(\beta\overline{x}), \beta\overline{y}) \in \overline{v},$$

für alle $\overline{v} = \overline{(x, y)}$.

Insbesondere sei G eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe O_3. Die gewohnte Wirkung $\alpha' : G X E^3 \to E^3$ schreiben wir meist vermöge $gx := \alpha'(g, x)$ multiplikativ. Unter einer Einbettung $\varphi : X \to E^3_+ \cup M_+$ verstehen wir eine Abbildung φ, welche den folgenden Bedingungen genügt.

(19) $\varphi\Delta^0\mathfrak{P} \subset E^3_+$, $\varphi\Delta^2\mathfrak{P} \subset M_+$.

(20) $\varphi g x = g\varphi x$, für alle $x \in X$ und $g \in G$.

Wir bezeichnen mit Eg die Menge der Fixelemente $x \in E^3$ bei der Isometrie $g \in G$, also $Eg := \{x \in E^3 : gx = x\}$, während für $x \in X$ die zugehörige Fixpunktmenge durch $Ex := \bigcap\{Eg : g \in G_x\}$ festgelegt ist. Der Punkt $fx := r\varphi x$ liegt wegen (20) für alle $x \in X$ in Ex. Zu jeder Anordnung der Elemente von $\overline{X}$ in einer Folge $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ gehört der Produktraum $E := E(\beta\overline{x}_1) X \ldots X E(\beta\overline{x}_n)$. Mit $\mathfrak{f}(G, \alpha, \mathfrak{P}; \beta, \gamma, \varphi)$, oder kurz mit $\mathfrak{f}$, bezeichnen wir den Punkt $\mathfrak{f} := (f(\beta\overline{x}_1), \ldots, f(\beta\overline{x}_n))$ in E. $\pi_i : E \to E(\beta\overline{x}_i)$ und $\iota_i : E(\beta\overline{x}_i) \to E$ bedeuten für $1 \leqq i \leqq n$ die kanonische Projektion und die kanonische Injektion. Wenn $\overline{w} = \overline{(x, y)}$ mit $x \in \overline{x}_i \cap \Delta^0\mathfrak{P}$ und $y \in \overline{x}_j \cap \Delta^2\mathfrak{P}$ gegeben ist ($\overline{w}$ braucht nicht in $\overline{W}$ zu liegen), definieren wir eine reelle Funktion $h_{\overline{w}} : E \to R$ durch

(21) $h_{\overline{w}}(x) := \langle(\gamma\overline{w})\pi_i(x), \pi_j(x)\rangle - 1.$

Wir sagen, φ genüge der Legendreschen Bedingung, wenn die Menge der Ableitungen $\{h'_{\overline{w}}(\mathfrak{f}) : \overline{w} \in \overline{W}\}$ linear unabhängig ist. $\mathfrak{f}$ ist dabei der vorhin definierte Punkt $\mathfrak{f}(G, \alpha, \mathfrak{P}; \beta, \gamma, \varphi)$. φ bezeichnen wir als eine Realisierung von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ wenn außer (19) und (20) zusätzlich gilt:

(22) $(x, y) \in W \Leftrightarrow \varphi x \in \varphi y$.

(23) Alle Punkte $\varphi x, x \in \Delta^0 \mathfrak{P}$ liegen im gleichen durch $\varphi y, y \in \Delta^2 \mathfrak{P}$, begrenzten abgeschlossenen Halbraum H_y von E^3. Die von Steinitz in [1, p. 243f.] erläuterten Argumente zeigen, daß alsdann $\bigcap\{H_y : y \in \Delta^2 \mathfrak{P}\}$ ein konvexes Polyeder P' ist, dessen Randkomplex wir mit $\mathfrak{P}'$ bezeichnen. Wir sagen, P' entspreche der Realisierung φ, oder auch, es sei durch φ bestimmt. Wegen (20) sind die sphärischen Γ-Komplexe $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ und $(G, \alpha', \mathfrak{P}')$ isomorph. α' bezeichnet dabei wieder die gewohnte Wirkung von G als Gruppe von Kongruenzen des Raumes. So finden wir:

Lemma 5. *Wenn es zum sphärischen Γ-Komplex $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ eine Realisierung $\varphi : X(G, \alpha, \mathfrak{P}) \to E^3_+ \cup M_+$ gibt, so ist $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ solid.*

In Anlehnung an das entsprechende Resultat von Steinitz für den Fall wo die Gruppe trivial ist, zeigen wir, daß die Legendresche Bedingung für jede Realisierung eines sphärischen Γ-Komplexes erfüllt ist.

Lemma 6. *$(G, \alpha, \mathfrak{P})$ sei ein sphärischer Γ-Komplex und $\varphi : X \to E^3_+ \cup M_+$ eine Realisierung. φ genügt der Legendreschen Bedingung.*

Beweis. Die Legendresche Bedingung für eine Realisierung φ läßt sich erst formulieren, nachdem die Abbildungen β und γ, sowie eine Anordnung von $\bar{X}$, gewählt worden sind. Dabei hängt aber die Antwort auf die Frage, ob φ der Legendreschen Bedingung genüge, nicht von der speziellen Anordnung der Menge $\bar{X}$ ab. Nun sei $\bar{Y}$ eine beliebige Teilmenge von $\bar{X} := \bar{X}(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Wir setzen $Y := \bigcup \bar{Y}$. Nach [1, p. 255, Zeile 21ff.] gibt es ein Element $y_0 \in Y \subset X$, das mit höchstens drei weiteren Elementen von Y inzident ist. Wir wollen zeigen: Die Anzahl der Klassen $\overline{(y_0, x)} \in \bar{W} := \bar{W}(G, \alpha, \mathfrak{P})$ (oder $\overline{(x, y_0)} \in \bar{W}$) mit $x \in Y$ ist für $y_0 \in \Delta^0 \mathfrak{P}$ (oder $y_0 \in \Delta^2 \mathfrak{P}$) nicht größer als die Dimension des Raumes $E(y_0) \subset E^3$. Sicher ist das für $\dim E(y_0) = 3$ richtig. Nun sei etwa y_0 eine Fläche von $\mathfrak{P}$, und $\dim E(y_0) = 2$. Es gibt also $g \in G$ mit $g y_0 = y_0$ so, daß g auf ∂y_0 einen Automorphismus mit genau zwei Fixelementen induziert, und es ist $G_{y_0} = \{1, g\}$. Nun gebe es entgegen unserer Behauptung drei Ecken x_1, x_2, x_3 auf ∂y_0 so, daß die Klassen $\overline{(x_i, y_0)}$, $1 \leqq i \leqq 3$, paarweise verschieden sind. Für $i \neq j$ ist also $x_i \notin \{x_j, g x_j\}$. Weil zudem mindestens einer der Punkte $x_i \in \partial y_0$ kein g-Fixelement ist, enthält ∂y_0, im Widerspruch zur Wahl von y_0, wenigstens vier zu Y gehörende Punkte. Analog verfahren wir in den übrigen Fällen und finden:

(24) Die Klassen von $\bar{X}$ lassen sich so zu einer Folge $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ anordnen, daß kein i, $1 \leqq i \leqq n$, die Anzahl der Inzidenzklassen $\bar{w} = \overline{(x, \beta \bar{x}_i)}$ (beziehungsweise $\bar{w} = \overline{(\beta \bar{x}_i, x)}$ mit $x \in \bigcup\{\bar{x}_j : j < i\}$ und $\bar{w} \in \bar{W}$ die Dimension des Raumes $E(\beta \bar{x}_i)$ übersteigt.

Dabei ist $\beta : \bar{X}(G, \alpha, \mathfrak{P}) \to X(G, \alpha, \mathfrak{P})$ eine beliebige Auswahlfunktion. Wir wählen eine Abbildung $\gamma : \{\overline{(x, y)} : x \in \Delta^0 \mathfrak{P}, y \in \Delta^2 \mathfrak{P}\} \to G$ gemäß Paragraph 6, und definieren im Raum $E := E(\beta \bar{x}_1) \times \cdots \times E(\beta \bar{x}_n)$ mit Hilfe von β, γ, und φ

in der gewohnten Weise den Punkt $\mathfrak{f} := \mathfrak{f}(G, \alpha, P; \beta, \gamma, \varphi)$, sowie die Abbildungen $h_{\bar{w}}: E \to R$. Nun gelte für geeignete Koeffizienten, die nicht alle verschwinden,

(25) $\sum_{\bar{w} \in \bar{W}} \xi_{\bar{w}} h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f}) = o \in E^*$ (E^* ist der Dualraum von E).

Für $\bar{w} = \overline{(x, y)}$ mit $\bar{w} \in \bar{W}$ und $x \in \bar{x}_i, y \in \bar{x}_j$ setzen wir $r\bar{w} := \max\{i, j\}$. $\bar{W}_l \subset \bar{W}$ bedeute die Menge der Inzidenzklasse $\bar{w} \in \bar{W}$ mit $r\bar{w} = l$. k sei der größte der Indexe $i \leqq n$, für welche es eine Klasse $\bar{w}$ mit $r\bar{w} = i$ und $\xi_{\bar{w}} \neq 0$ gibt. $\bar{x}_k$ bestehe etwa aus Eckpunkten von $\mathfrak{P}$. $\tilde{x}$ sei ein Punkt im Unterraum $E(\beta \bar{x}_k)$ von E^3, und x das Bild von $\tilde{x}$ bei der kanonischen Injektion von $E(\beta \bar{x}_k)$ in E. Für $\bar{w} \notin \bar{W}_k$ verschwindet das Produkt $\xi_{\bar{w}} h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f})(x)$, während wir für eine Klasse $\bar{w} = \overline{(\beta \bar{x}_k, y)}$ aus $\bar{W}_k$ die Beziehung $h'_w(\mathfrak{f})(x) = \langle (\gamma \bar{w})(\tilde{x}), \mathfrak{f}(\beta \bar{y}) \rangle = \langle \tilde{x}, (\gamma \bar{w})^{-1}(\mathfrak{f} \beta \bar{y}) \rangle$ finden. So ergibt sich für jeden Punkt $\tilde{x} \in E(\beta \bar{x}_k)$ aus (25)

(26) $\langle \tilde{x}, \Sigma' \xi_{\bar{w}} (\gamma \bar{w})^{-1} (\mathfrak{f} \beta \bar{y}) \rangle = 0$,

wobei Σ' über alle $\bar{w} = \overline{(\beta \bar{x}_k, y)}$ in $\bar{W}_k$ zu erstrecken ist und nicht alle Koeffizienten $\xi_{\bar{w}}$ verschwinden. $P' \subset E^3$ sei das durch die Realisierung φ bestimmte Polytop. Wir können annehmen, der Ursprung o liege im Inneren $\operatorname{int} P'$ von P'. Zu jedem $\bar{w} = \overline{(\beta \bar{x}_k, y)}$ aus $\bar{W}_k$ bezeichnen wir mit $L_{\bar{w}}$ die durch $r(L_{\bar{w}}) = (\gamma \bar{w})^{-1}(f \beta \bar{y})$ festgelegte Ebene. $L_{\bar{w}}$ ist die Trägerebene einer Seitenfläche von P' und enthält den Eckpunkt $\varphi \beta \bar{x}_k$ des Polyeders P'. Zusammen mit (24) folgt daraus die lineare Unabhängigkeit der Punkte $(\gamma \bar{w})^{-1}(f \beta \bar{y})$, $\bar{w} = (\beta \bar{x}_k, y) \in \bar{W}_k$. Wegen $o \in \operatorname{int} P'$ steht die Linearkombination $\Sigma' \xi_{\bar{w}} (\gamma \bar{w})^{-1} (f \beta \bar{y}) \in E^3_+$ nicht senkrecht zu $E(\beta \bar{x}_k)$, und da $\tilde{x}$ in $E(\beta \bar{x}_k)$ beliebig gewählt werden darf, erhalten wir einen Widerspruch zu (26). Für $\bar{x}_k \subset \Delta^2 \mathfrak{P}$ schließen wir in völlig analoger Weise und bestätigen so die Richtigkeit unseres Lemmas.

7. Der analytische Hilfssatz

Satz 3. *Der sphärische Γ-Komplex $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ entstehe aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ durch das Weglassen einer Kante. Wenn es eine Realisierung φ_0 von $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ gibt, so existiert auch eine Realisierung von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$.*

Beweis. Von dem durch die Realisierung φ_0 von $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ bestimmten Polytop $P' \subset E^3$ können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, es enthalte den Ursprung im Inneren, also $o \in \operatorname{int} P'$. $x_0 \in \Delta^2 \mathfrak{P}_0$ sei eine in $\mathfrak{P}$ nicht vorkommende Fläche. Wir wählen x_0 so, daß $x_0 = \beta_0 \bar{x}_0$ gilt. Die gemäß dem vorangehenden Paragraphen für $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ definierten Begriffe unterscheiden wir von den entsprechenden Begriffen für $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ durch das Anfügen des Indexes 0. So bedeutet etwa $\bar{X}_0$ die Restklassenmenge $\bar{X}(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$, $\bar{X}$ die Menge $\bar{X}(G, \alpha, \mathfrak{P})$.

A. Es sei $\Delta^0 \mathfrak{P}_0 = \Delta^0 \mathfrak{P}$. Mit u und $v_1, \ldots, v_n$ $(n \geqq 1)$ bezeichnen wir die Flächen von $\mathfrak{P}$, deren Vereinigung x_0 ist. Dabei haben wir angenommen $(u \cap v_1, v_1) \in \Delta^1 \mathfrak{P} X \Delta^2 \mathfrak{P}$ sei das für das Weglassen von $k := u \cap v_1$ aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ erforderliche zulässige Paar. Für jedes $y \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ bedeutet ty die Fläche von $\mathfrak{P}_0$, in welcher y liegt. Für $y \in \Delta^0 \mathfrak{P}$ setzen wir $ty := y \in \Delta^0 \mathfrak{P}_0$. Durch $\varphi y := \varphi_0(ty)$ definieren wir eine Einbettung $\varphi: X \to E^3_+ \cup M_+$. Als nächstes legen wir eine

Auswahlfunktion $\beta:\bar{X}\to X$ und eine Abbildung $\gamma:\{\overline{(x,y)}:x\in\Delta^0\mathfrak{P}, y\in\Delta^2\mathfrak{P}\}\to G$ fest, wobei wir annehmen, β_0 und γ_0 seien für $(G,\alpha_0,\mathfrak{P}_0)$ schon gemäß Paragraph 6 definiert. Jede Klasse $\bar{x}\in\bar{X}, \bar{x}\notin\{\bar{u},\bar{v}_1\}$, gehört bereits zu $\bar{X}_0$, und wir setzen $\beta\bar{x}:=\beta_0(\overline{tx})=\beta_0\bar{x}$. Analog gelte für $\overline{(x,y)}$ mit $x\in\Delta^0\mathfrak{P}$ und $y\in\Delta^2\mathfrak{P}-(\bar{u}\cup\bar{v}_1)$, die Beziehung $\gamma\overline{(x,y)}:=\gamma_0\overline{(x,y)}$. Ferner sei $\beta\bar{u}:=u$ und, falls v_1 nicht zur Klasse $\bar{u}$ gehört $\beta\bar{v}_1:=v_1$. Es gilt die Vertauschungsregel $t(\beta\bar{x})=\beta_0(\overline{tx})$, für alle $\bar{x}\in\bar{X}$. Wenn $\bar{w}=\overline{(x,y)}$ eine (nicht notwendigerweise in $\bar{W}$ liegende) Klasse mit $x\in\Delta^0\mathfrak{P}$ und $y\in\{u,v_1\}$ ist, bedeute $t\bar{w}$ die Klasse $\overline{(x,x_0)}$. Es gibt ein Element $g\in G_{x_0}$ so, daß $g\gamma_0(t\bar{w})(\beta\bar{x})=x$ zutrifft. $\gamma\bar{w}$ legen wir nun durch $\gamma\bar{w}:=g\gamma_0(t\bar{w})$ fest. Gemäß dem vorangehenden Paragraphen gehört vermöge φ zu jedem $x\in X$ der Fixpunktraum Ex. Wir nehmen an, die Elemente von $\bar{X}_o$ seien zu einer Folge $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1}$ angeordnet, wobei etwa $\bar{x}_0=\bar{y}_{n-1}$ gelte. Die Elemente von $\bar{X}$ ordnen wir so zu einer Folge $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ (für $\bar{u}\neq\bar{v}_1$) oder zu einer Folge $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-1}$ (für $\bar{u}=\bar{v}_1$) an, daß $t\bar{x}_i=\bar{y}_i (1\leqq i\leqq n-2)$, $t\bar{u}=t\bar{x}_{n-1}=\bar{x}_0$ und, im Falle $\bar{u}\neq\bar{v}_1, t\bar{v}_1=t\bar{x}_n=\bar{x}_o$ gilt. Gemäß Paragraph 6 sind die Räume E und E_0 sowie die Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_0$ festgelegt. Für $\bar{u}\neq\bar{v}_1$ haben wir etwa $\mathfrak{f}=(f(\beta\bar{x}_1),\ldots,f(\beta\bar{x}_n))\in E$, wo f wieder die Abbildung $r\varphi$ bedeutet. $c\in\Delta^0\mathfrak{P}$ sei ein Punkt, der mit v_1, aber nicht mit u inzident ist, und $\bar{m}$ bezeichne die Klasse $\overline{(c,u)}=\{(gc,gu):g\in G\}$. Wir setzen $\bar{W}_1:=\bar{W}\cup\{\bar{m}\}$. Gemäß (21) ist die Funktion $h_{\bar{w}}:E\to R$ für jedes $\bar{w}\in\bar{W}_1$ definiert, und es gilt jeweils $h_{\bar{w}}(\mathfrak{f})=0$. φ unterscheidet sich dadurch von einer Realisierung, daß auch für gewisse nichtinzidente Paare $(x,y)\in\Delta^0\mathfrak{P}\mathrm{X}\Delta^2\mathfrak{P}$, beispielsweise für (c,u), das φ-Bild des Punktes x in der Ebene φy liegt. Die Hauptarbeit zur Verbesserung dieses Übelstandes besteht für uns im Nachweis der linearen Unabhängigkeit von $\{h'_w(\mathfrak{f}):\bar{w}\in\bar{W}_1\}$ im Dualraum E^* von E. Andernfalls gibt es Zahlen $\xi_{\bar{w}}$, welche nicht alle verschwinden, und für die

(27) $\sum_{\bar{w}\in\bar{W}1}\xi_{\bar{w}}h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f})=o\in E^*$

zutrifft. Indem wir jedem Punkt $a=(a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1})$ von

$E_0=E(\beta_0\bar{y}_1)\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}E(\beta_0\bar{y}_{n-1})$ das Element $\iota a:=(a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1},a_{n-1})$ von E zuordnen, erhalten wir eine Einbettung von E_0 in E (im Falle $\bar{u}=\bar{v}_1$ verdoppeln wir a_{n-1} nicht). Bei dieser Einbettung geht $\mathfrak{f}_0$ in $\mathfrak{f}$ über, und aus der Beziehung (27) erhalten wir

(28) $\sum_{\bar{w}\in\bar{W}_1}\xi_{\bar{w}}h'_{t\bar{w}}(\mathfrak{f}_0)=o\in E_0^*$,

wo für $\bar{w}=\overline{(x,y)}$ wieder $t\bar{w}:=\overline{(tx,ty)}$ gesetzt ist. Nach Lemma 6, angewendet auf φ_0, folgt für jede Klasse $\bar{w}_0$ in $\bar{W}_0$ die Gleichung

(29) $\Sigma^0\,\xi_{\bar{w}}=o$

wobei Σ^0 sich über alle $\bar{w}\in\bar{W}_1$ mit $t\bar{w}=\bar{w}_0$ erstrecken soll. k sei die „aus Δ^1P verschwundene“ Kante mit den Eckpunkten $a_1,a_2\in u\cap v_1$. Dem Element $\bar{m}=\overline{(c,u)}$ von $\bar{W}_1$ stellen wir $\bar{m}_1:=\overline{(c,v_1)}\in\bar{W}$ gegenüber. Mit $\bar{N}\subset\bar{W}$ bezeichnen wir die Menge der Klassen $\overline{(x,y)}\in\bar{W}$ mit $x\in\{a_1,a_2\}$ und $y\in\{u,v_1\}$. Sicher ist $\bar{N}\cap\{\bar{m},\bar{m}_1\}=\emptyset$. Nun seien $\bar{w}$ und $\bar{w}'\neq\bar{w}$ zwei Klassen von $\bar{W}_1$, deren Träger $t\bar{w}$ und $t\bar{w}'$ übereinstimmen. Das ist nur für $\{\bar{w},\bar{w}'\}=\{\bar{m},\bar{m}_1\}$ oder $\{\bar{w},\bar{w}'\}\subset\bar{N}$

möglich. Aus (27) und (29) gewinnen wir die Gleichungen

(30) $\xi_{\bar{w}}=0$, für alle $\bar{w}\notin \bar{N}\cup\{\bar{m},\bar{m}_1\}$ und

(31) $\Sigma^1\,\xi_{\bar{w}}h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f})=o\in E^*$,

wobei Σ^1 inskünftig immer bedeuten soll, daß über alle $\bar{w}\in\bar{N}\cup\{\bar{m},\bar{m}_1\}$ zu summieren sei. $\bar{w}=\overline{(x,y)}$ mit $\bar{x}=\bar{x}_i$ und $\bar{y}=\bar{x}_j$ $(1\leqq i,j\leqq n)$ sei eine Klasse in $\bar{N}\cup\{\bar{m},\bar{m}_1\}$. Mit $\pi_i\colon E\to E(\beta\bar{x}_i)$ und π_j bezeichnen wir die entsprechenden Projektionen. Durch $p^1(\bar{w})\colon=\pi_i p$ und $p^2(\bar{w})\colon=\pi_j p$ ordnen wir jedem $p\in E$ zwei Punkte des Raumes E^3 zu; insbesondere gilt $\mathfrak{f}^1(\bar{w})=\mathfrak{f}(\beta\bar{x})$ und $\mathfrak{f}^2(\bar{w})=\mathfrak{f}(\beta\bar{y})$. Mit diesen Bezeichnungen ermitteln wir die Ableitung der Funktion $h_{\bar{w}}$, für $\bar{w}=\overline{(x,y)}\colon h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f})(p)=\langle(\gamma\bar{w})(\mathfrak{f}\beta\bar{x}),p^2(w)\rangle+\langle(\gamma\bar{w})(p^1\bar{w}),\mathfrak{f}(\beta\bar{y})\rangle$. Für $\overline{(x,y)}\in N\cup\{\bar{m},\bar{m}_1\}$ haben wir stets $t\bar{y}=\bar{x}_0$ und daher $f(\beta\bar{y})=f_0x_0$. (31) erhält die Gestalt

(32) $\Sigma^1\,\xi_{\bar{w}}\langle(\gamma\bar{w})(f\beta\bar{x}),p^2\bar{w}\rangle+\Sigma^1\,\xi_{\bar{w}}\langle(\gamma\bar{w})(p^1\bar{w}),f_0x_0\rangle=0$,

für alle $p\in E$. Weil für $\bar{w},\bar{w}'\in\bar{N}\cup\{\bar{m},\bar{m}_1\}$ mit $t\bar{w}=t\bar{w}'$ die Punkte $(\gamma\bar{w})p^1(\bar{w})$ und $(\gamma\bar{w}')p^1(\bar{w}')$ stets durch eine Deckbewegung $g\in G_{x_0}\subset O_3$ auseinander hervorgehen, haben sie mit f_0x_0 dasselbe Skalarprodukt, und daraus folgt mit (29) daß der zweite Anteil in (32) für alle $p\in E$ verschwindet. Es sei $\bar{u}=\bar{x}_i$ und $\bar{v}_1\neq\bar{u}$, $\bar{v}_1=\bar{x}_j$. Wir wählen $p\in E$ so, daß $\pi_i p=o\in E(\beta\bar{u})$ ist, während wir über $\tilde{p}\colon=\pi_j p\in E(\beta\bar{v}_1)$ später verfügen wollen. Für solche Punkte p verschwinden in (32) alle Skalarprodukte $\langle(\gamma\bar{w})(f\beta\bar{x}),p^2\bar{w}\rangle$, bei denen $\bar{w}$ die Form $\overline{(x,u)}$ hat. Wir setzen $\xi_{\bar{m}_1}\colon=\xi_0$, $\xi_{\overline{(a_1,v_1)}}\colon=\xi_1$ und, falls $\overline{(a_2,v_1)}\neq\overline{(a_1,v_1)}$ ist, $\xi_{\overline{(a_2,v_1)}}\colon=\xi_2$. Im Falle $\overline{(a_2,v_1)}=\overline{(a_1,v_1)}$ sei $\xi_2\colon=0$. Nun ist $((\gamma\bar{m}_1)(\beta\bar{c}),\beta\bar{v}_1)\in\bar{m}_1$. Wegen $\beta\bar{v}_1=v_1$ gibt es $g\in G_{v_1}$ so, daß $(\gamma\bar{m}_1)(\beta\bar{c})=gc$ gilt. Aus $\tilde{p}\in E\beta\bar{v}_1=Ev_1$ folgt daher $\langle f(\gamma\bar{m}_1)(\beta\bar{c}),\tilde{p}\rangle=\langle fc,\tilde{p}\rangle$, und das Entsprechende gilt für $\overline{(a_1,v_1)}$ und $\overline{(a_2,v_1)}$. Die Bedingung (32) nimmt für die jetzt betrachteten Punkte $\tilde{p}$ die Form

(33) $\langle\xi_0 fc+\xi_1 fa_1+\xi_2 fa_2,\tilde{p}\rangle=0$

an. Wenn $(a_2,v_1)\notin\overline{(a_1,v_1)}$ gilt, haben wir $E(\beta\bar{v}_1)=Ev_1=E^3$, und da (33) für alle $\tilde{p}\in Ev_1$ gelten muß, folgt $\xi_0 fc+\xi_1 fa_1+\xi_2 fa_2=o\in Ev_1$. c, a_1 und a_2 sind Eckpunkte des konvexen Polytops P', das der Realisierung φ_0 entspricht und den Ursprung $o\in E^3$ im Inneren enthält. Da sie zudem alle in der Ebene $\varphi_0x_0\in M_+$ liegen, gilt $\xi_0=\xi_1=\xi_2=0$. Zusammen mit (29) ergibt sich daraus die lineare Unabhängigkeit von $\{h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f})\colon\bar{w}\in\bar{W}_1\}$. Im Falle $\overline{(a_2,v_1)}=\overline{(a_1,v_1)}$ ist $\xi_2=0$. $G_{v_1}\subset G_k$ enthält als einziges nichttriviales Element eine Spiegelung, deren Fixpunktmenge Ev_1 die zur Geraden $\operatorname{aff}\{fa_1,fa_2\}\subset E^3_+$ senkrechte Ebene durch den Ursprung ist. Weil $\tilde{p}\in Ev_1$ beliebig gewählt werden darf, folgt mit $\xi_2=0$ aus (33) wieder $\xi_0 fc+\xi_1 fa_1=o$, und daraus ergibt sich die lineare Unabhängigkeit von $\{h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f})\colon\bar{w}\in\bar{W}_1\}$ wie oben. Ähnlich verfahren wir schließlich, wenn $\bar{u}=\bar{v}_1$ gilt.

B. Es gelte $\Delta^0\mathfrak{P}_0=\Delta^0\mathfrak{P}-(\bar{a}_1\cup\bar{a}_2)$, wo $a_i\in u\cap v_1$ die Endpunkte der weggelassenen Kante k sind. $X_0,\bar{X}_0,W_0,\bar{W}_0,\beta_0,\gamma_0,\varphi_0,E_0$ und $\mathfrak{f}_0$ sollen für den Γ-Komplex $(G,\alpha_0,\mathfrak{P}_0)$ die gleiche Bedeutung wie unter Abschnitt A haben. a_i liege im Innern der Kante l_i von $\Delta^1\mathfrak{P}_0$. Wegen der in Abschnitt B von Paragraph 3 genannten Bedingungen ist eine Wirkung von G auf die Klassen

$\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ definiert. Insbesondere ist $ga_i, g \in G$, erklärt, und wir können $G_{a_i} := \{g \in G : ga_i = a_i\}$ setzen. Ferner definieren wir $Ea_i \subset E^3$ durch $E(a_i) := \{x \in E^3 : gx = x$, für alle $g \in G_{a_i}\}$. Wegen der Bedingung (b) von Abschnitt B in Paragraph 3 und wegen (20) für φ_0 ist $E(a_i) \cap (l_i' - \dot{l}_i') \neq \emptyset$, wo x_0 und x_i die beiden mit l_i inzidenten Flächen von $\mathfrak{P}_0$ sind und l_i' die in der Geraden $\varphi_0 x_0 \cap \varphi_0 x_i$ liegende Kante des durch φ_0 bestimmten Polytops P' bedeutet. Wir wählen einen Punkt $a_i' = : f a_i (= : \varphi_{00} a_i)$ in diesem Durchschnitt. Für $g \in G$ setzen wir $f(ga_i) := \alpha'(g, f a_i) = g f(a_i)$, wobei wir darauf achten, daß der Graph, der dadurch aus dem Ecken-Kanten-Gerüst von P' entsteht, daß wir die Punkte $f(ga_i)$ als neue Ecken einführen, zum Graphen $\Delta^0 \mathfrak{P} \cup (\Delta^1 \mathfrak{P} - \bar{k})$ isomorph ist. Daß diese Forderung sich erfüllen läßt, entnehmen wir aus (20) und den Bedingungen (a) bis (c) für das Weglassen von Kanten (vergleiche Abschnitt B von Paragraph 3). Wir setzen $\bar{H}_0 := \{\overline{(a_1, x_0)}, \overline{(a_2, x_0)}, \overline{(a_1, x_1)}, \overline{(a_2, x_2)}\}$. In Wahrheit liegt die Mächtigkeit von $\bar{H}_0$ zwischen 1 und 4, da einige Klassen zusammenfallen können. Für $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$ setzen wir $X_{00} := X_0 \cup \bar{a}_1 \cup \bar{a}_2$, für $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ $X_{00} := X_0 \cup \bar{a}_1$. Ferner sei $W_{00} := W_0 \cup \bigcup \bar{H}_0$ und $\bar{W}_{00} := \bar{W}_0 \cup \bar{H}_0$. β_0 erweitern wir durch die Setzung $\beta_{00}(\bar{a}_i) := a_i$ zu einer Auswahlfunktion $\beta_{00} : \bar{X}_{00} \to X_{00}$. γ_0 setzen wir in beliebiger Weise fort, wobei wir nur darauf achten, daß die definierende Eigenschaft von γ_0 auch für ganz γ_{00} noch zutrifft. $E_{00} := E_0 \mathsf{X} E a_1 \mathsf{X} E a_2$ und $\mathfrak{f}_{00} := (f(\beta_0 x_1), \ldots, f(\beta_0 x_n), a_1', a_2')$ seien der erweiterte Koordinatenraum und der in ihm liegende ausgezeichnete Punkt. Im Falle $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ lassen wir jeweils das letzte Glied fort. Vermöge (21) ist für alle $\bar{v} = \overline{(x, y)}$, $x \in \Delta^0 \mathfrak{P}_0 \cup \bar{a}_1 \cup \bar{a}_2$, $y \in \Delta^2 \mathfrak{P}_0$, eine Funktion $h_{\bar{v}}$ erklärt. Wieder gilt $h_{\bar{w}}(\mathfrak{f}_{00}) = 0$ für alle $\bar{w} \in \bar{W}_{00}$, aber auch die lineare Unabhängigkeit von $\{h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f}_{00}) : \bar{w} \in \bar{W}_{00}\}$ bleibt erhalten. Andernfalls gäbe es Zahlen $\xi_{\bar{w}}$, die nicht alle verschwinden, für die aber

$$(34) \quad \sum_{\bar{w} \in \bar{W}_{00}} \xi_{\bar{w}} h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f}_{00}) = o \in E_{00}^*$$

gälte. Zuerst betrachten wir nur Punkte $p \in E_{00}$ mit $\pi_0 p = o$ und $\pi_2 p = o$, wo $\pi_0 : E \to E_0$ und $\pi_i : E \to E(a_i)$ die üblichen Projektionen sind. (Die Bedingung mit π_2 stellen wir nur im Falle $\bar{a}_2 \neq \bar{a}_1$). Für alle diese Punkte p muß mit $\bar{w}_1 := \overline{(a_1, x_0)}$ und, falls $\overline{(a_1, x_1)} \neq \overline{(a_1, x_0)}$ gilt, $\bar{w}_2 := \overline{(a_1, x_1)}$ die Beziehung $\xi_{\bar{w}_1} h'_{\bar{w}_1}(\mathfrak{f}_{00})(p) + \xi_{\bar{w}_2} h'_{\bar{w}_2}(\mathfrak{f}_{00})(p) = 0$ zutreffen. Weil die Ebenen $\varphi_0 x_0$ und $\varphi_0 x_1$ von M_+ nicht parallel sind, folgt daraus, wenn wir wieder h'_w in expliziter Form schreiben, ohne weiteres $\xi_{\bar{w}_1} = \xi_{\bar{w}_2} = 0$. Analog verfahren wir (im Falle $\bar{a}_2 \neq \bar{a}_1$) mit a_2 anstelle von a_1. In (34) verschwinden also alle Koeffizienten $\xi_{\bar{w}}, \bar{w} \in \bar{H}_0$. Die Menge $\{h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f}_0) : \bar{w} \in \bar{W}_0\}$ ist nach Lemma 6 linear unabhängig, und damit ergibt sich ein Widerspruch zu (34). Wir wählen jetzt einen Punkt $c \in \Delta^0 v_1 - \Delta^0 u$, wo u und $v_1, \ldots, v_n$ wieder die in x_0 enthaltenen Flächen von $\mathfrak{P}$ sind. Wir setzen $\bar{m} := \overline{(c, u)}$ und fahren wie in Abschnitt A fort, nur mit X_{00} anstelle von X_0.

C. Die Voraussetzungen seien wie bei Abschnitt B, doch gehöre nur eine der Klassen $\bar{a}_i$ zu $\Delta^0 \mathfrak{P} - \Delta^0 \mathfrak{P}_0$. Wir gehen wie unter Abschnitt B vor, wobei jedoch der Fall $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ nicht eintritt. In allen Fällen ist das Hauptergebnis die lineare Unabhängigkeit der Ableitungen $\{h'_{\bar{w}}(\mathfrak{f}): \bar{w} \in \bar{W}_1\}$. Weil der Ursprung o im Inneren des durch die Realisierung φ_0 bestimmten Polytops P' liegt, gilt für alle $\bar{n} := \overline{(x, y)}$ mit $x \in \Delta^0 \mathfrak{P}$, $y \in \Delta^2 \mathfrak{P}$, $\overline{(x, ty)} \notin \bar{W}_0$ (bzw. $\overline{(x, ty)} \notin \bar{W}_{00}$) (wo ty wieder die Fläche von $\mathfrak{P}_0$ bezeichnet, in der y liegt), $h_{\bar{n}}(\mathfrak{f}) < 0$. $U \subset E$ sei eine Umgebung des Punktes $\mathfrak{f}$, in der alle diese Funktionen $h_{\bar{n}}$ überall negativ sind. Wegen $\pi_i \mathfrak{f} \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ können wir zudem U so klein wählen, daß für beliebige $\mathfrak{e} \in U$, Indexe $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und Elemente $g_1, g_2 \in G$ die Beziehungen $\pi_i(\mathfrak{e}) \neq 0$ und $\langle \pi_i \mathfrak{f}, g_1 \pi_j \mathfrak{f} \wedge g_2 \pi_k \mathfrak{f} \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \pi_i \mathfrak{e}, g_1 \pi_j \mathfrak{e} \wedge g_2 \pi_k \mathfrak{e} \rangle \neq 0$ richtig sind ($\wedge$ bedeutet das Vektorprodukt, in bezug auf eine fest gewählte Orientierung von E^3). Nach dem lokalen Umkehrsatz für implizite Funktionen existiert ein Punkt $\mathfrak{d} \in U$ mit $h_{\bar{w}}(\mathfrak{d}) = 0$ für alle $\bar{w} \in \bar{W}$ und $h_{\bar{m}}(\mathfrak{d}) < 0$, wo $\bar{m} = \overline{(c, u)}$ die Ausnahmeklasse von $\bar{W}_1$ ist. Zu jedem $x \in \Delta^2 \mathfrak{P}$ wählen wir $g \in G$ mit $x = g(\beta \bar{x})$. $\mathfrak{d}_x$ sei das Bild von $\mathfrak{d}$ bei der Projektion von E auf $E(\beta \bar{x})$. Es gibt genau eine Ebene $H \subset E^3_+$ so, daß $\mathfrak{d}_x = rH$ gilt. Wir setzen $\psi(x) := gH$. Analog definieren wir $\psi(x)$ für $x \in \Delta^0 \mathfrak{P}$. Die Abbildung $\psi: X \to E^3_+ \cup M_+$ ist eine Realisierung von $(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Wegen $h_{\bar{m}}(\mathfrak{d}) < 0$ liegt insbesondere kein $\psi(x)$ mit $x \in \Delta^0 \partial v_1 - \Delta^0 \partial u$ in der Ebene ψu. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

8. Der Hauptsatz

Satz 1. *Jeder sphärische Γ-Komplex ist solid.*

Beweis. Wir leisten den Beweis für alle Gruppen G durch Induktion nach der Kantenzahl der Komplexe $(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Da unsere Behauptung für primitive Komplexe trivial richtig ist, brauchen wir im Hinblick auf den Reduktionssatz 2, den Realisierungssatz 3 und Lemma 5 nur noch zu zeigen:

$(G, \alpha, \mathfrak{P})$ und $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ seien zwei Γ-Komplexe, und $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ gehe durch eine der folgenden Operationen aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ hervor. Die Dualität, das Zusammenziehen einer Kante, oder eine der Modifikationen $\eta_0, \bar{\omega}_0, \omega_1, \bar{\omega}_1, \omega_2, \bar{\omega}_2, \omega_3$. Wenn zudem $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ solid ist, so auch $(G, \alpha, \mathfrak{P})$. Beim Nachweis dieser Behauptung können wir annehmen, $\mathfrak{P}_0$ sei der Randkomplex eines konvexen Polyeders $P_0 \subset E^3$, $\gamma: O_3 X E^3 \to E^3$ sei die übliche Wirkung von O_3 als Gruppe von Isometrien des Raumes, und α_0 sei die durch γ auf $\mathfrak{P}_0$ induzierte Abbildung. Wir werden in allen Fällen ein Polyeder Q mit dem Randkomplex $\mathfrak{Q}$ konstruieren, in dessen Deckgruppe G enthalten ist. γ induziert eine Wirkung β von G auf $\mathfrak{Q}$, und $(G, \beta, \mathfrak{Q})$ ist jeweils der gesuchte zu $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ isomorphe Komplex, welcher zeigt, daß $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ solid ist. Wir betrachten die verschiedenen Fälle der Reihe nach.

A. Die Dualität. Es sei $Q := \{y \in E^3 : \langle x, y \rangle \leqq 1$ für alle Punkte x in $P_0\}$.

B. Das Zusammenziehen einer Kante. Da diese Operation mit Hilfe der Dualität und des Weglassens einer Kante definiert ist, brauchen wir sie nicht mehr eigens zu studieren. Insbesondere sind damit auch die Operationen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ auf bekannte zurückgeführt.

C. Die Operationen $\bar{\omega}_0$ und ω_i $(1 \leqq i \leqq 3)$ lassen sich leichter mit Hilfe der Dualität überblicken. $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ sei durch $\bar{\omega}_0(x, y)$ aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ entstanden. Die Nachbarn der Punkte x und y bezeichnen wir so, wie wir es bei der

Definition von $\bar{\omega}_0$ in Abschnitt C von Paragraph 3 getan haben. In $\mathfrak{P}_0$ gibt es also eine Kante k mit $\partial k = \{a_1, a_2\}$ $(= \{b_1, b_2\})$, welche daselbst mit den Dreiecken D_1 und D_2 $(\Delta^0 \partial D_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\Delta^0 \partial D_2 = \{b_1, b_2, b_3\})$ inzident ist. $\hat{\mathfrak{P}}_0$ sei das gemäß A konstruierte zu $\hat{P}_0$ duale Polytop und P_0 wie üblich dessen Randkomplex. Wir setzen $d_1 := \hat{D}_1$ und $d_2 := \hat{D}_2$. Nun sei $d \in \Delta^0(\hat{\mathfrak{P}}_0)$ ein Punkt der Menge $\bar{d}_1 \cup \bar{d}_2$ und $l \in \Delta^1(\hat{\mathfrak{P}}_0)$ eine mit d inzidente Kante von $\hat{\mathfrak{P}}_0$. Wenn der von d verschiedene Endpunkt von l auch zu $\bar{d}_1 \cup \bar{d}_2$ gehört, wählen wir einen Punkt $x(l)$ im Inneren der Kante l, wobei wir dafür sorgen, daß $x(l)$ dem Unterraum $E(l) := \bigcap \{Eg : g \in G$ mit $gl = l\}$ von E^3 angehört. Wenn der von d verschiedene Endpunkt der Kante l nicht zur Menge $\bar{d}_1 \cup \bar{d}_2$ gehört, bedeute $x(l)$ denselben. $H(d)$ bezeichne die durch die drei Punkte $\{xl : l \in \Delta^1 \hat{\mathfrak{P}}_0,$ $d \in \partial l\}$ gehende Ebene und $H^+(d)$ denjenigen durch $H(d)$ begrenzten Halbraum in E^3, welcher den Eckpunkt $d \in \hat{\mathfrak{P}}_0$ nicht enthält. Wir setzen

$$\hat{Q} := \hat{P}_0 \cap \bigcap \{H^+(d) : d \in \bar{d}_1 \cup \bar{d}_2\}.$$

Das zu $\hat{Q}$ duale Polytop Q hat die gewünschten Eigenschaften. Nach dem gleichen Schema verfahren wir, wenn $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ durch eine der Operationen ω_i $(1 \leqq i \leqq 3)$ aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ hervorgegangen ist.

D. Wenn $(G, \alpha_0, \mathfrak{P}_0)$ aus $(G, \alpha, \mathfrak{P})$ durch $\eta_0(x)$ entstanden ist, läßt sich das Polytop Q aus P_0 durch das Abschneiden aller Ecken der Klasse $\bar{x}$, ohne Zuhilfenahme der Dualität, auf einfache Weise gewinnen.

Damit ergibt sich schließlich die Richtigkeit unseres Hauptsatzes.

Literatur

1. Steinitz, E., Rademacher, H.: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin: Springer 1934.
2. Grünbaum, B.: Convex polytopes. New York: Wiley 1967.
3[1]. — Shephard, G. C.: Convex polytopes. Bull. London Math. Soc. 1, 257—300 (1969).
4. Barnette, D.: The graphs of polytopes with involutory automorphisms (to appear).

Dr. Peter Mani
Mathematisches Institut der Universität
CH-3000 Bern, Sidlerstr. 5
Schweiz

(Eingegangen am 14. September 1970)

[1] Die Abhandlung [3] enthält eine ausführliche Übersicht neuerer Ergebnisse im Zusammenhang mit Steinitz's Fundamentalsatz.